CHAPITRE IV.

Générations et Définitions des surfaces en général, et en particulier de celles qui, par la régularité et la simplicité de leurs formes, sont les plus propres à terminer les différentes parties des édifices.

La meilleure manière d'envisager les surfaces est de les concevoir comme étant la trace qu'on peut imaginer laissée dans l'espace par une ligne, connue de nature, et mise en mouvement d'une manière déterminée. C'est aussi sous ce point de vue qu'on les considère le plus ordinairement.

183. La ligne mise en mouvement dans l'espace, pour engendrer une surface, s'appelle la *génératrice* de cette surface.

La génératrice d'une surface peut être droite ou courbe; quand elle est courbe, elle peut être plane ou à double courbure, et peut conserver sa forme dans tout le cours de la génération, ou en changer à chaque pas.

184. Le mouvement de la génératrice d'une surface se détermine de plusieurs manières. Le plus ordinairement on suppose cette ligne glissant, suivant certaine loi, sur d'autres lignes, connues de nature et de position dans l'espace.

185. Les lignes sur lesquelles la génératrice glisse, se nomment les *directrices*. Les directrices peuvent être des lignes quelconques aussi bien que la génératrice.

186. Le nombre des directrices, dans une surface, ne peut surpasser trois. Souvent il n'en faut que deux et même quelquefois qu'une seule. Quand, dans la génération d'une surface, il y a trois ou deux directrices, l'une d'elles peut être un point.

Si l'on suppose un système de directrices connues de forme et de position fixes dans l'espace, on concevra qu'avec la même génératrice on pourra engendrer une infinité de surfaces différentes, en faisant varier la loi du mouvement de la génératrice de toutes les manières possibles; ou bien en conservant la même loi de mouvement, et en faisant varier la forme de la génératrice, soit à chaque instant de la même génération, soit seulement à chaque génération particulière.

De même, avec une génératrice donnée, on pourra aussi engendrer une infinité de surfaces différentes, en faisant varier la forme, la position respective, et le nombre des directrices de toutes les manières possibles.

De là nous conclurons que pour définir une surface, il faut nécessairement établir, 1°. le nombre des directrices, 2°. la forme de chacune d'elles, 3°. leurs positions respectives dans l'espace, 4°. la forme de la génératrice, et 5°. la loi sur laquelle cette dernière ligne glisse sur les directrices.

Dans le chapitre précédent, nous avons fait voir comment on détermine la forme et la position, dans l'espace, d'une ligne quelconque, au moyen de ses projections; dans celui-ci nous donnerons les définitions et les énoncés des propriétés principales des surfaces dont nous aurons à nous occuper continuellement par la suite.

187. Les surfaces sont planes ou courbes.

Les surfaces courbes sont ou à une seule courbure, ou à double courbure.

188. Les surfaces à une seule courbure sont engendrées par une ligne droite, mais toutes les surfaces engendrées par une ligne droite ne sont pas, pour cela, à une seule courbure. Les surfaces à une seule courbure ont cela de particulier, que tous les plans qui leur sont tangens les touchent nécessairement suivant une ligne droite.

189. Les surfaces à double courbure se distinguent en ce qu'un plan tangent peut ne les toucher que par un point.

190. Parmi les surfaces à une seule courbure, et les surfaces à double courbure, on distingue les surfaces dites de révolution. Ces sortes de surfaces sont engendrées par une ligne plane quelconque, qui tourne autour d'une ligne droite, située dans le plan de la génératrice, qu'on appelle *axe de rotation.* Dans cette génération, il faut entendre que la ligne génératrice ne change pas de position par rapport à l'axe de rotation.

Définissons maintenant en particulier les principales surfaces nécessaires à notre objet, qui sont les surfaces cylindriques, coniques, sphériques, sphéroïdes, ellipsoïdes, paraboloïdes, hyperboloïdes, annulaires, gauches, etc.

DES SURFACES CYLINDRIQUES.

191. Si l'on suppose une ligne droite glissant parallèlement à elle-même sur une courbe quelconque, plane ou à double courbure, la surface engendrée par cette ligne droite, sera de l'espèce que l'on appelle *cylindrique.*

Si la directrice a un centre, la droite menée par ce centre parallèlement aux génératrices, sera l'*axe* de la surface cylindrique.

192. Si la directrice était une ligne droite, la surface cylindrique serait un plan.

193. Si la directrice est une circonférence de cercle, la surface cylindrique sera circulaire. Cette surface cylindrique circulaire sera droite ou oblique, suivant que ses génératrices seront perpendiculaires ou obliques au plan du cercle dont la circonférence est la directrice de la surface.

194. Si la directrice est une ellipse, la surface cylindrique sera elliptique: cette surface cylindrique elliptique sera droite ou oblique, suivant que les génératrices seront perpendiculaires ou obliques au plan de l'ellipse directrice. Je dis de plus que l'on pourra toujours trouver la direction d'un plan qui coupe une surface cylindrique elliptique, droite ou oblique, suivant un cercle.

195. De quelque manière que l'on coupe une surface cylindrique, circulaire ou elliptique, par un plan, la section sera toujours un cercle, ou une ellipse, ou deux génératrices.

196. Si l'on coupe une surface cylindrique quelconque par deux plans parallèles, les sections seront deux courbes planes parfaitement égales entre elles, et si la surface a un axe, cet axe passera par le centre de ces mêmes sections.

197. Sur une surface cylindrique quelconque, on pourra toujours tracer une courbe plane ou à double courbure, qui pourra remplacer la directrice primitive.

Puisque l'on peut toujours couper une surface cylindrique elliptique par un plan, de manière que la section soit un cercle, il en résulte que toute surface cylindrique elliptique peut être regardée comme une surface cylindrique circulaire, oblique ou droite, suivant que le plan qui donnera la section circulaire, sera oblique ou perpendiculaire aux génératrices.

198. Si la directrice d'une surface cylindrique était une parabole ou une hyperbole, cette surface serait parabolique ou hyperbolique; elle serait droite ou oblique suivant que ses génératrices seraient perpendiculaires ou obliques au plan de la parabole ou de l'hyperbole directrice.

199. De quelque manière que l'on coupe une surface cylindrique parabolique par un plan, la section sera toujours une parabole, deux génératrices, ou une seule génératrice.

Pour que la section ne soit qu'une seule génératrice, il faut que le plan coupant passe par un diamètre de la directrice.

200. De même, de quelque manière que l'on coupe une surface cylindrique hyperbolique par un plan, la section sera toujours une hyperbole, deux génératrices, ou une seule génératrice.

201. Quelle que soit une surface cylindrique, l'intersection, avec cette surface, d'un plan perpendiculaire à la direction des génératrices, prendra le nom de *section droite*.

DES SURFACES CONIQUES.

202. Si une droite indéfinie tourne autour d'un point fixe dans l'espace, et glisse en même temps sur une courbe quelconque plane ou à double courbure, la surface engendrée par cette même droite sera de l'espèce qu'on appelle *conique*.

203. Le point autour duquel tourne la génératrice d'une surface conique, s'appelle le *centre* ou plus communément le *sommet* de la surface.

204. Si la directrice a un centre, la droite qui passe par ce centre et le sommet de la surface, s'appelle l'*axe* de la surface.

205. Supposons que la directrice d'une surface conique soit plane, et qu'elle ait un centre, je dis que cette surface sera droite, si l'axe est perpendiculaire au plan de la directrice. Dans tout autre cas, cette surface sera oblique.

206. Une surface conique, droite ou oblique, sera circulaire, elliptique, parabolique, hyperbolique, suivant que la directrice de cette surface sera un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

207. Quelle que soit une surface conique, on pourra toujours tracer, sur cette surface une ligne plane ou à double courbure, qui pourra remplacer la directrice primitive.

208. Que la directrice d'une surface conique soit une ellipse, une parabole ou une hyperbole, on pourra toujours trouver la direction d'un plan qui la coupe, de manière que la section soit un cercle dans la surface elliptique, et une portion de cercle dans les surfaces paraboliques et hyperboliques. Or, on peut toujours avoir le centre d'un arc de cercle donné, et par conséquent, achever de décrire ce cercle; d'où il suit, et de l'art. précédent, que les quatre espèces de surfaces coniques dont nous avons parlé, se réduisent, à la rigueur, à une seule espèce, qui est la surface conique circulaire, droite ou oblique, suivant que le plan qui donne la section circulaire, est perpendiculaire ou non à l'axe de la surface.

209. Si l'on réfléchit sur la manière dont une surface conique quelconque est engendrée, en se rappelant que la génératrice est indéfiniment prolongée à droite et à gauche du point autour duquel elle tourne, on verra qu'une surface conique quelconque se compose de deux parties opposées au sommet, qui ont le point directeur commun. Chacune de ces parties s'ap-

pelle *nappe*. Ainsi, en général, nous considérerons une surface conique comme ayant deux nappes; mais assez souvent nous n'aurons égard qu'à une seule.

210. On appelle *plan tangent* à une surface conique ou cylindrique, quelconque, un plan qui ne fait que toucher la surface suivant une génératrice.

211. Supposons maintenant une surface conique circulaire quelconque à deux nappes, je dis que de quelque manière que l'on coupe cette surface, par un plan, la section sera un cercle, une ellipse, une parabole, une hyperbole, deux génératrices ou un point.

Cette section sera un cercle, si le plan coupant est parallèle au plan du cercle dont la circonférence est la directrice de la surface; elle sera une ellipse, si le plan coupant, sans être parallèle au plan de la directrice de la surface, peut rencontrer toutes les génératrices de la même nappe.

Elle sera une parabole, si le plan coupant est parallèle à un plan tangent à la surface.

Elle sera une hyperbole, si le plan coupant est parallèle à un plan passant par deux génératrices.

Elle sera deux génératrices, si le plan coupant passe par le sommet de la surface, et par deux points de la directrice.

Enfin elle sera un point, si le plan ne rencontre que le sommet de la surface.

Il n'y a que deux cas où le plan coupant rencontre les deux nappes en même temps: c'est quand la section est une hyperbole ou deux génératrices.

C'est en vertu de ces propriétés de la surface conique circulaire, droite ou oblique, que l'on a donné le nom de sections coniques au cercle, à l'ellipse, à la parabole et à l'hyperbole.

DE LA SURFACE SPHÉRIQUE.

212. Si l'on suppose une demi-circonférence de cercle tournant autour d'un de ses diamètres, cette demi-circonférence engendrera une surface sphérique.

Le centre de la demi-circonférence de cercle, sera le centre de la surface.

213. Comme tous les points de la circonférence génératrice sont à égales distances du centre, il est clair que tous les points de la surface sphérique seront aussi à égales distances du centre de cette surface.

La distance du centre à un point de la surface s'appelle rayon, et toute droite qui passe par le centre et qui se termine de part et d'autre à la surface, se nomme *diamètre*.

Tous les rayons de la surface sphérique sont égaux, ainsi que les diamètres, qui valent deux rayons.

214. De quelque manière que l'on coupe une surface sphérique par un plan, la section est toujours un cercle.

Si le plan passe par le centre de la surface, la section sera la plus grande qu'il soit possible d'obtenir. On l'appelle *grand cercle* ou *cercle majeur*.

On voit que le demi-cercle générateur est un demi-grand cercle.

Toutes les autres sections, par des plans, sont de *petits cercles* ou des cercles *mineurs*.

Le centre d'une section quelconque, faite par un plan, est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sphérique sur le plan.

DES SURFACES SPHÉROÏDES.

215. Supposons une courbe plane quelconque ayant un axe, et que cet axe soit dans une position verticale; si nous imaginons ensuite que cette courbe tourne autour de son axe, la surface qu'elle engendrera, sera de l'espèce que nous appelerons *sphéroïde*.

Si cette courbe est une ellipse, on pourra prendre indifféremment le grand ou le petit axe pour l'axe de rotation, sans que la surface cesse d'être sphéroïde, pourvu que cet axe de rotation soit dans une situation verticale dans l'espace.

Mais si la courbe génératrice était une hyperbole, il ne faudrait considérer qu'une branche, et il faudrait prendre l'axe intérieur de la courbe pour l'axe de rotation, lequel axe de rotation doit toujours être dans une position verticale dans l'espace.

Si dans l'hyperbole on prenait les deux branches, la surface serait à deux napes, et une telle surface ne se rencontre jamais en architecture.

Nous avons dit que, dans cette courbe, on devait prendre l'axe intérieur, parce que si l'on prenait l'autre axe pour l'axe de rotation, fût-il vertical, ainsi que cela est essentiel pour que la surface soit sphéroïde, la surface ne serait plus sphéroïde mais hyperboloïde concave latéralement.

216. La surface sphéroïde prendra le nom de la courbe génératrice; ainsi, si la génératrice est une ellipse, la surface sera sphéroïde elliptique; si la génératrice est une parabole, la surface sera sphéroïde parabolique, etc.

La surface sphéroïde elliptique sera surhaussée ou surbaissée, suivant que l'axe de rotation sera le grand ou le petit axe de la courbe.

217. Toute section faite par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation dans une surface sphéroïde quelconque est un cercle.

218. Si l'on coupe une surface sphéroïde elliptique par un plan oblique ou parallèle à l'axe de rotation, la section sera une ellipse.

219. Si l'on coupe une surface sphéroïde parabolique ou hyperbolique par un plan oblique à l'axe de rotation, la section sera une ellipse, ou une portion d'ellipse, si la surface n'est pas assez prolongée pour avoir l'ellipse entière.

220. Si l'on coupe une surface sphéroïde parabolique par un plan parallèle à l'axe de rotation, la section sera une parabole.

221. Si l'on coupe une surface sphéroïde hyperbolique par un plan parallèle à l'axe de rotation, la section sera une hyperbole.

222. Si, dans une surface sphéroïde quelconque, on mène un plan par l'axe de rotation, la section sera égale à la génératrice, et sera nommée section *méridienne*, quelque soit d'ailleurs la direction de ce plan.

DES SURFACES ELLIPSOÏDES.

223. Si l'on imagine l'un des axes d'une ellipse dans une situation horizontale dans l'espace, et que cette ellipse tourne autour de cet axe horizontal, la surface que cette courbe engendrera sera une *ellipsoïde*.

224. Si l'on coupe l'ellipsoïde par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, la section sera un cercle.

225. Si l'on coupe l'ellipsoïde par un plan oblique ou parallèle à l'axe de rotation, la section sera une ellipse.

DES SURFACES PARABOLOÏDES.

226. Supposons l'axe d'une parabole dans une position horizontale dans l'espace, et que cette courbe tourne autour de cet axe horizontal; la surface qu'elle engendrera sera une *paraboloïde*.

227. Toute section perpendiculaire à l'axe de rotation dans une paraboloïde est un cercle.

228. Toute section faite dans la paraboloïde par un plan oblique à l'axe de rotation est une ellipse.

229. Toute section faite dans la paraboloïde par un plan parallèle à l'axe de rotation est une parabole.

DES SURFACES HYPERBOLOÏDES.

230. Supposons l'axe intérieur d'une hyperbole dans une situation horizontale; ne considérons qu'une branche de cette courbe, et supposons qu'elle tourne autour de son axe; la surface ainsi engendrée sera une *hyperboloïde*.

Si nous considérions les deux branches de l'hyperbole et si nous prenions indifféremment l'un des deux axes de cette courbe pour l'axe de rotation, nous aurions des surfaces à deux nappes, qui seraient inapplicables en architecture, à moins que ce ne fût pour quelque ornement particulier, tel qu'un vase ou autre chose de ce genre.

231. Toute section faite par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, dans une hyperboloïde, est un cercle.

232. Toute section faite dans l'hyperboloïde par un plan oblique à l'axe de rotation, est une ellipse.

233. Toute section faite par un plan parallèle à l'axe de rotation dans une hyperboloïde est une hyperbole. Si le plan passe par l'axe de rotation, la section sera l'hyperbole génératrice.

Dans toutes les surfaces de révolutions que nous venons de définir, nous avons soigneusement distingué le cas où l'axe de rotation était vertical, et le cas où cet axe était horizontal ; mathématiquement parlant cette distinction est inutile, parce que, dans tous les cas que nous avons examinés et dans une infinité d'autres, tant que la génératrice reste la même, quelque soit la position de l'axe de rotation dans l'espace, la surface a toujours la même forme ; aussi les géomètres appellent-ils ellipsoïde toute surface engendrée par la révolution d'une ellipse autour de l'un de ses axes ; paraboloïde, toute surface engendrée par la révolution d'une parabole autour de son axe, hyperboloïde, toute surface engendrée par la révolution d'une hyperbole autour de l'un de ses axes. Mais ces distinctions étaient nécessaires pour pouvoir, par la suite, définir et classer convenablement les différentes espèces de voûtes.

DES SURFACES ANNULAIRES.

234. Supposons une courbe plane quelconque dans un plan vertical : supposons hors de cette courbe, et dans son plan, une droite verticale ; si nous imaginons la courbe en question tournant avec son plan autour de la droite verticale, la surface engendrée par la courbe sera une surface *annulaire*.

Si la génératrice est un cercle, la surface annulaire sera circulaire ; si la génératrice est une ellipse, la surface sera annulaire elliptique ; si cette génératrice était une parabole ou une hyperbole, la surface serait annulaire parabolique ou hyperbolique.

Dans les cas où la génératrice sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, il faudra supposer que l'un des axes de la courbe est vertical, et dans le cas de l'hyperbole, ce sera l'axe intérieur, pour que la surface ait une forme applicable en architecture.

235. Toute section faite par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation dans une surface annulaire quelconque sera un cercle.

236. Toute section faite par un plan passant par l'axe de rotation se composera de deux courbes séparées, parfaitement égales à la génératrice.

Quant aux sections qui ne seront pas perpendiculaires à l'axe de rotation, et qui ne passeront pas par cet axe, elles seront des courbes variables de forme.

DES SURFACES GAUCHES.

237. Si l'on suppose deux droites dans l'espace, non situées dans le même plan, et qu'une troisième droite glisse sur les deux premières d'une certaine manière, on aura une surface gauche.

Toute section faite par un plan qui ne passera pas par une génératrice de la surface gauche sera une certaine courbe.

Telles sont les différentes surfaces que nous avions besoin de connaître d'une manière particulière. Ces différentes espèces de surfaces sont ou ne sont pas développables.

238. Une surface est développable, lorsqu'on peut l'étendre sur un plan, sans plis ni déchirure. Toutes les surfaces à une seule courbure sont développables : de sorte que toute surface, engendrée par une ligne droite, et dont les génératrices infiniment voisines sont successivement deux à deux dans le même plan, sont développables. Ainsi, de toutes les surfaces définies jusqu'ici, il n'y a que les surfaces cylindriques et les surfaces coniques qu'on puisse développer.

Pour se faire une idée de ce qu'on appelle le développement d'une surface, il faut supposer une surface à une seule courbure, appuyée sur un plan, par l'une de ses génératrices, et qu'ensuite on fasse tourner cette surface de manière que toutes ses génératrices viennent successivement se déposer sur ce plan : l'ensemble de toutes ces génératrices, ainsi déposées sur le plan, formera le développement de la surface.

Les corps n'ayant de forme que parce qu'ils sont terminés ou qu'ils ont des limites, et les limites des corps étant des surfaces, il nous sera facile maintenant de définir la forme des corps, puisque nous savons ce que c'est qu'une surface.

239. Tout corps terminé par des plans, s'appelle *polyèdre*.

Les polyèdres se distinguent par le nombre de leurs faces.

Le plus simple des polyèdres a quatre faces : il s'appelle *tétraèdre;* celui qui a cinq faces, s'appelle *pentaèdre;* celui qui a six faces, s'appelle *exaèdre;* celui qui en a sept, *eptaèdre;* celui qui en a huit, *octaèdre*, etc. Au reste, on énonce tout aussi bien un polyèdre en désignant le nombre de ses faces, qu'en se servant des dénominations précédentes.

Parmi les polyèdres, nous distinguerons les prismes et les pyramides.

240. Si l'on imagine un polygone se mouvant parallèlement à lui-même, en glissant sur une droite, jusqu'à une certaine distance de sa première position, le corps engendré par ce polygone sera un *prisme*. Ainsi un prisme a deux faces, qui peuvent être des polygones quelconques, lesquelles sont égales et parallèles; quant aux faces latérales, elles sont toujours des parallélogrammes.

Un prisme est droit ou oblique, selon que ses arrêtes sont perpendiculaires ou obliques au plan du polygone générateur, qui est la base du prisme.

Un prisme prend le nom du polygone qui lui sert de base : si cette base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc., le prisme est dit triangulaire, quadrilatère, pentagonal, etc.

Si la base d'un prisme est un parallélogramme, alors, toutes ses faces étant des parallélogrammes, on lui donne le non de *parallélipipède*.

Un parallélipipède est rectangle, quand toutes ses faces sont des rectangles : il est oblique dans toute autre circonstance.

241. Si l'on suppose un polygone quelconque et un point pris au-dessus du plan de ce polygone, et que des plans soient menés par ce point et chaque côté du polygone, ces plans s'intercepteront de manière à former des triangles qui, avec le premier polygone, termineront ce qu'on appelle une *pyramide*. Le premier polygone est la *base* de la pyramide. Le point où se réunissent tous les triangles, se nomme le *sommet*.

Une pyramide est triangulaire, quadrangulaire, pentagonale, exagonale, etc., suivant que sa base est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc,

Si la base d'une pyramide est un polygone régulier, et qu'en même temps la perpendiculaire abaissée de son sommet sur la base passe par le centre de cette base, la pyramide sera *régulière;* dans toute autre circonstance elle sera *irrégulière*.

242. Si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à la base, et qu'on supprime la partie du sommet, on aura un *tronc* de pyramide.

243. Si l'on suppose une surface cylindrique coupée par deux plans parallèles, et que les intersections de ces plans avec la surface, soient des courbes fermées, le solide terminé par la surface cylindrique et les deux plans, sera ce qu'on appelle un *cylindre*.

Si les intersections des plans parallèles en question avec la surface sont des cercles, le cylindre sera circulaire; si ces intersections sont des ellipses, le cylindre sera elliptique. Quelles que soient ces mêmes intersections, elles prendront le nom de *bases* du cylindre.

Le cylindre sera droit ou oblique, selon que ses génératrices seront perpendiculaires ou obliques à la base.

244. Un cône est un corps terminé par une nappe d'une surface conique, et par un plan qui coupe toutes les génératrices de cette nappe.

Si la section de ce plan est un cercle, le cône est circulaire; si elle est elliptique, le cône sera elliptique. Un cône circulaire est droit, quand l'axe de sa surface est perpendiculaire au plan qui le termine; il est oblique dans tout autre cas.

La section du plan avec la surface conique, est la base du cône.

245. Une sphère est un corps terminé par une surface sphérique.

Un sphéroïde est terminé par une surface sphéroïde, etc.

CHAPITRE V.

Des Murs.

246. Nous distinguerons les murs par leur forme, et nous aurons :

1°. Les murs plans, c'est-à-dire à surfaces planes;

2°. Les murs cylindriques, c'est-à-dire à surfaces cylindriques;

3°. Les murs coniques, c'est-à-dire à surfaces coniques;

4°. Les murs gauches, c'est-à-dire à surfaces gauches.

DES MURS PLANS.

247. Les murs plans seront de deux espèces : Les *murs droits,* dont les deux faces seront des plans verticaux et parallèles; les murs *en talus,* dont une face sera verticale, et l'autre inclinée vers la première, ou dont les deux faces s'inclineront l'une vers l'autre.

DES MURS DROITS.

248. On doit regarder, comme autant d'axiômes, les principes suivans :

1°. *Dans un ouvrage quelconque, les pierres doivent être disposées de ma-*