O pewnym zagadnieniu, dotyczącym funkcji przemiennych.

W artykule „Zasady rachunku iteracyjnego" (Wektor, № IX, 1912, str. 505) p. Ł. Böttcher dowodzi twierdzenia, że dwie funkcje, będące iteracjami jednej i tej samej trzeciej, są przemienne, i dodaje, że pytanie, czy odwrócenie tego twierdzenia jest również słuszne, pozostaje dotąd otwarte.

Pytanie to pragnę rozstrzygnąć przecząco, podając nader prosty przykład dwuch funkcji ciągłych, przemiennych, nie będących iteracjami jednej i tej samej funkcji.

Połóżmy mianowicie (dla wszystkich x rzeczywistych, albo nawet na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej):

$$\varphi(x)=2x, \quad \psi(x)=3x. \tag{1}$$

W myśl definicji naszych mamy przy wszelkim x

$$\varphi\psi(x)=\varphi(3x)=6x,$$

oraz

$$\psi\varphi(x)=\psi(2x)=6x,$$

zatym tożsamościowo

$$\psi\varphi(x)=\varphi\psi(x),$$

co dowodzi, że uważane funkcje są przemienne. Załóżmy teraz, że funkcje nasze są iteracjami jednej i tej samej funkcji $f(x)$ (ciągłej lub nie), że więc mamy przy pewnych całkowitych m i n dla każdego x

$$\varphi(x)=f_m(x), \quad \psi(x)=f_n(x) \tag{2}$$

Przez $f_0(x)$ rozumiemy samo x; przez $f_k(x)$, przy naturalnym k, rozumiemy k-tą iterację funkcji $f(x)$, t. j. funkcję

$$\underbrace{ff\ldots f}_{k \text{ razy}}(x),$$

wreszcie przez $f_{-k}(x)$, przy naturalnym k, rozumiemy k-tą iterację funkcji odwrotnej względem $f(x)$.

Iterując n razy funkcję $\varphi(x)$, zaś funkcję $\psi(x)$ iterując m razy, otrzymamy, w myśl (2),

$$\varphi_n(x)=f_{mn}(x), \quad \psi_m(x)=f_{nm}(x);$$

skąd tożsamościowo

$$\varphi_n(x)=\psi_m(x). \tag{3}$$

Lecz, jak łatwo obliczyć, mamy przy wszelkim całkowitym $k\ (\geqq 0)$

$$\varphi_k(x)=2^k x, \text{ zaś } \psi_k(x)=3^k x.$$

Tożsamość (3) pociąga zatym za sobą tożsamość

$$2^n x=3^m x,$$

skąd równość

$$2^n=3^m.$$

Przy całkowitych m i n równość ta zachodzi tylko dla $m=n=0$. Mielibyśmy więc, w myśl (2), tożsamościowo

$$\varphi(x)=x, \quad \psi(x)=x,$$

wbrew definicji naszych funkcji.

Podobnych przykładów na funkcje przemienne, nie będące iteracjami jednej i tej samej funkcji, możnaby podać mnóstwo; wymienimy tu jeszcze tylko jeden, również bardzo prosty, mianowicie:

$$\varphi(x)=x^2, \quad \psi(x)=x^3.$$

Lwów. *Stanisław Ruziewicz.*