ZASADY RACHUNKÓW WYŻSZYCH.

ZASADY
RACHUNKÓW WYŻSZYCH

przez

A. J. Stodółkiewicza.

WYDANIE DRUGIE
poprawione i znacznie powiększone.

WARSZAWA.
DRUK J. SIKORSKIEGO, WARECKA 14.

1898.

Дозволено Цензурою
Варшава, 13 Февраля 1898 г.

Pamięci

Jana Śniadeckiego

polskiego astronoma i matematyka,

w 68-ą rocznicę śmierci

pracę niniejszą

poświęcam.

PRZEDMOWA.

Gdym przed dwoma laty po raz pierwszy ogłaszał drukiem swoją pracę p. t. „*Zasady rachunków wyższych*“, wyobrażałem sobie, że zainteresuję szerokie koła czytelników; wszak nie brak u nas ludzi, których byt w mniejszym lub większym stopniu zależy od znajomości nauk matematycznych. Były to jednak złudzenia, zwykłe u autorów, piszących na uciechę moli. Jeżeli mimo to obecnie, zamierzając zsumować i zakończyć swoją działalność na polu naukowem, odważyłem się opracować drugie wydanie tej samej pracy, to tylko dla tego, że usilnie pragnąłem poprawić i uzupełnić pierwsze wydanie, zbyt niedokładne. W „*Zasadach rachunków wyższych*“ starałem się, o ile można, iść drogami własnemi i tak w układzie materyału, jak i w treści nie naśladować nikogo. Nie liczę na natychmiastowe powodzenie mojej pracy, lecz żywię nadzieję, że moje metody i dowodzenia przekonają niechętnych dla nowości, oraz że w niedługim czasie uzyskają prawo obywatelstwa w nauce.

W zakończeniu dodam jeszcze, że pierwotnie przygotowałem był materyał do pracy znacznie obszerniejszej, aniżeli niniejsza, lecz niemożność uzyskania ani zapomogi, ani pożyczki pieniężnej, pomimo licznych moich starań i zabiegów w tym względzie, zmusiła mię do znacznego skrócenia dzieła.

Płock, w styczniu. 1898 r.

I. Teorya różnic.

§ 1. *Funkcye jednej zmiennej niezależnej.*

Różnicowaniem funkcyi jednej zmiennej niezależnej

$$\Phi = \Phi(x) \tag{1}$$

nazywać będziemy działanie, zapomocą którego kładziemy we wszystkich wyrazach funkcyi Φ wartości $x + \Delta x$ zamiast x i odciągamy wartość pierwotną wspomnianej funkcyi. Działanie takie oznaczamy symbolem Δ i piszemy

$$\Delta\Phi = \Phi_{x+\Delta x} - \Phi$$

Δx oznacza stały przyrostek zmiennej. Definicya powyższa nie ulega żadnej zmianie, gdy sama funkcya Φ zawiera w swoim kształcie pierwotnym (1) stały przyrostek Δx, tak naprzykład, gdyby było

$$\Phi = F_1(x + i\Delta x) + F_2(x + k\Delta x) + F_3(x + l\Delta x) + \ldots,$$

wówczas na mocy definicyi *różnicowania* będzie

$$\Delta\Phi = F_1[x + (i+1)\Delta x] + F_2[x + (k+1)\Delta x] + F_3[x + (l+1)\Delta x]$$
$$+ \ldots - F_1(x + i\Delta x) - F_2(x + k\Delta x) - F_3(x + l\Delta x) - \ldots$$

Wyrażenie takie, jak powyższe, nazywamy *różnicą rzędu 1-go*. Tak więc, mając wogóle daną funkcyę $F(x)$, piszemy jej różnicę rzędu 1-go w kształcie:

(2) $$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x),$$

gdzie ΔF oznacza przyrost funkcyi, odpowiadający przyrostkowi zmiennej Δx. Różnicując jeszcze raz wyrażenie (2), otrzymamy

$$\Delta\Delta F = F(x + 2\Delta x) - F(x + \Delta x) - F(x + \Delta x) + F(x);$$

albo, pisząc krócej, będziemy mieli

(3) $$\Delta^2 F = F(x + 2\Delta x) - 2F(x + \Delta x) + F(x);$$

$\Delta^2 F$ nazywa się *różnicą rzędu 2-go* danej funkcyi i otrzymuje się zapomocą dwukrotnego różnicowania. Chcąc otrzymać *różnicę rzędu 3-go*, stosujemy wzmiankowane wyżej działanie do równania (3), będzie wówczas

$$\Delta\Delta^2 F = F(x + 3\Delta x) - 2F(x + 2\Delta x) + F(x + \Delta x)$$
$$- F(x + 2\Delta x) + 2F(x + \Delta x) - F(x),$$

czyli

(4) $$\Delta^3 F = F(x + 3\Delta x) - 3F(x + 2\Delta x) + 3F(x + \Delta x) - F(x).$$

Łatwo sprawdzić, że wzór (4) otrzymaliśmy z (3) zapomocą działań, które symbolicznie można przedstawić tak:

$$\Delta\Delta^2 F = \Delta F(x + 2\Delta x) - \Delta\,[2F(x + \Delta x)] + \Delta F(x).$$

Na tym przykładzie uwidocznione jest ważne prawidło różnicowania, które udowodnimy ściśle i ogólnie na następnych stronicach.

Różnicą rzędu 4-go będzie podobnie

$$\Delta^4 F = F(x + 4\Delta x) - 4F(x + 3\Delta x) + 6F(x + 2\Delta x) - 4F(x + \Delta x) + F(x).$$

Nie trudno pisać po kolei wszystkie różnice, ponieważ, jak widzimy, spółczynniki liczebne są te same, które spotykamy w dwumianie Newtona. Przypuśćmy, że powyższe prawo tworzenia różnic ma miejsce dla rzędu k-go

(5) $$\begin{aligned}\Delta^k F = F(x + k\Delta x) - kF[x + (k-1)\Delta x]\\ + \frac{k(k-1)}{1\,.\,2} F[x + (k-2)\Delta x] - \ldots \pm kF(x + \Delta x) \mp F(x),\end{aligned}$$

w ostatnich wyrazach piszemy znaki podwójne, rozumiejąc przez to, że znaki dolne brać należy, gdy k liczba parzysta i górne, gdy k liczba nieparzysta. Ażeby otrzymać różnicę rzędu $k + 1$-go stosujemy do (5) działanie, które nazwaliśmy różnicowaniem, wskutek czego będziemy mieli

$$\Delta\Delta^k F = F[x + (k+1)\Delta x] - kF(x + k\Delta x) + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} F[x + (k-1)\Delta x]$$

$$- \ldots \pm kF[x + 2\Delta x] \mp F(x + \Delta x) - F(x + k\Delta x) + kF[x + (k-1)\Delta x]$$

$$- \ldots \mp kF(x + \Delta x) \pm F(x).$$

Po łatwem uporządkowaniu wyrazów oraz redukcyi będziemy mieli z ostatniego równania różnicę rzędu $k+1$-go

$$\Delta^{k+1} F = F[x + (k+1)\Delta x] - (k+1) F[x + k\Delta x]$$

$$+ \frac{(k+1)k}{1 \cdot 2} F[x + (k-1)\Delta x] - \ldots \mp (k+1) F(x + \Delta x) \pm F(x).$$

Tym sposobem prawo tworzenia rożnic wszelkich rzędów jest dowiedzione ogólnie. Gdy teraz rozpatrzymy uważnie wszystkie wyrażenia różnic (2) (3), (4) i t. p. dla $\Delta F, \Delta^2 F, \Delta^3 F, \ldots, \Delta^n F$ i wyrugujemy z nich ilości $F(x+\Delta x)$, $F(x+2\Delta x), \ldots, F[x + (n-1)\Delta x]$, natenczas nadzwyczaj prosto i łatwo otrzymamy wzór

$$F(x + n\Delta x) = F(x) + n\Delta F + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 F$$

(6)

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 F + \ldots + \Delta^n F.$$

Wzór ten jest bardzo ważny i, aby go dowieść ogólnie, należy okazać, że będąc prawdziwym dla liczby n, utrzymuje się także i dla liczby $n+1$. Dowodzenie to podamy najogólniej dla funkcyj wielu zmiennych niezależnych, tymczasem ograniczymy się wzmianką, że wzór (6) jest koniecznem następstwem przyjętych powyżej określeń różnic $\Delta F, \Delta^2 F, \Delta^3 F, \ldots, \Delta^n F$ i daje się zawsze łatwo wyprowadzić.

§ 2. *Funkcye wielu zmiennych niezależnych.*

hrp 1e st 5-

Jeżeli dana jest funkcya wielu zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, natenczas rozróżniamy *różnicowanie zupełne* oraz *częściowe*. Różnicowaniem zupełnem nazywamy takie działanie, zapomocą którego w danej funkcyi kładziemy $x_1 + \Delta x_1$, $x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n$ zamiast $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i następnie odciągamy pierwotną wartość funkcyi danej. Ilości $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ oznaczają *stałe* przyrostki zmiennych niezależnych. W myśl powyższej definicyi działania mamy dla danej funkcyi

$$\Psi = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

różnicę rzędu 1-go

(7) $$\Delta\Psi = \Psi_{x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2,\ldots,\, x_n+\Delta x_n} - \Psi$$

Różnicowaniem częściowem nazywamy podobne działanie, odpowiadające ściśle jednej tylko ze zmiennych x_i, tak naprzykład

(7a) $$\Delta_{x_i}\Psi = \Psi_{x_i+\Delta x_i} - \Psi,$$

$\Delta_{x_i}\Psi$ oznacza *różnicę częściową*, odpowiadającą zmiennej x_i.

Wszystkie inne zmienne, wchodzące w tę samą funkcyę Ψ, uważamy w tym przypadku za ilości stałe. Dla otrzymania *różnicy zupełnej rzędu 2-go* różnicujemy po raz wtóry wyrażenie (7) i będziemy mieli

$$\Delta^2\Psi = \Psi_{x_1+2\Delta x_1,\, x_2+2\Delta x_2,\ldots,\, x_n+2\Delta x_n} - \Psi_{x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2,\ldots x_n+\Delta x_n}$$
$$- \Psi_{x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2,\ldots,\, x_n+\Delta x_n} + \Psi,$$

czyli

(8) $$\Delta^2\Psi = \Psi_{x_1+2\Delta x_1,\, x_2+2\Delta x_2,\ldots,\, x_n+2\Delta x_n} - 2\Psi_{x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2,\ldots,\, x_n+\Delta x_n} + \Psi.$$

Różnicując (8) jeszcze raz, otrzymamy *różnicę zupełną rzędu 3-go*

$$\Delta^3\Psi = \Psi_{x_1+3\Delta x_1,\, x_2+3\Delta x_2,\ldots,\, x_n+3\Delta x_n} - 2\Psi_{x_1+2\Delta x_1,\, x_2+2\Delta x_2,\ldots,\, x_n+2\Delta x_n}$$
$$+ \Psi_{x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2,\ldots,\, x_n+\Delta x_n} - \Psi_{x_1+2\Delta x_1,\, x_2+2\Delta x_2,\ldots,\, x_n+2\Delta x_n}$$
$$+ 2\Psi_{x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2,\ldots,\, x_n+\Delta x_n} - \Psi,$$

czyli po uproszczeniu będzie:

(9) $$\Delta^3\Psi = \Psi_{x_1+3\Delta x_1,\, x_2+3\Delta x_2,\ldots,\, x_n+3\Delta x_n} - 3\Psi_{x_1+2\Delta x_1,\, x_2+2\Delta x_2,\ldots,\, x_n+2\Delta x_n}$$
$$+ 3\Psi_{x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2,\ldots,\, x_n+\Delta x_n} - \Psi.$$

Różnicując wzór (9) jeszcze raz, otrzymujemy *różnicę zupełną rzędu 4-go*:

$$\Delta^4\Psi = \Psi_{x_1+4\Delta x_1,\, x_2+4\Delta x_2,\ldots,\, x_n+4\Delta x_n} - 4\Psi_{x_1+3\Delta x_1,\, x_2+3\Delta x_2,\ldots,\, x_n+3\Delta x_n}$$
$$+ 6\Psi_{x_1+2\Delta x_1,\, x_2+2\Delta x_2,\ldots,\, x_n+2\Delta x_n} - 4\Psi_{x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2,\ldots,\, x_n+\Delta x_n} + \Psi.$$

Prawo tworzenia różnic zupełnych jest tem samem prawem, które już spotykaliśmy dla funkcyj jednej zmiennej niezależnej. Spółczynniki kolejnych wyrazów we wzorach różnic zupełnych następują po sobie tak, jak w dwumianie Newtona. Tym sposobem *różnicą zupełną rzędu k-go* będzie

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta^k \Psi = {} & \Psi_{x_1+k\Delta x_1,\, x_2+k\Delta x_2, \ldots, x_n+k\Delta x_n} - k\Psi_{x_1+(k-1)\Delta x_1, x_2+(k-1)\Delta x_2, \ldots, x_n+(k-1)\Delta x_n} \\ & + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}\,\Psi_{x_1+(k-2)\,\Delta x_1,\, x_2+(k-2)\,\Delta x_2, \ldots, x_n+(k-2)\Delta x_n} \\ & - \ldots \pm k\Psi_{x_1+\Delta x_1,\, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n} \mp \Psi. \end{aligned}\right.$$

W ostatnich wyrazach piszemy znaki podwójne, rozumiejąc przez to, że górne znaki brać trzeba, gdy k jest liczbą nieparzystą, a dolne, gdy k liczba parzysta. Jeżeli zróżnicujemy wzór (10), natenczas otrzymamy różnicę zupełną rzędu $k+1$-go; spostrzeżemy łatwo, że wzmiankowane wyżej prawo tworzenia różnic zupełnych utrzymuje się dla rzędu $k+1$-go, co znaczy, że prawo to jest ogólne dla różnic wszelkich rzędów. Jak się tworzą różnice częściowe rozmaitych rzędów dla pewnej zmiennej x_i, o tem mówić szczegółowo nie ma potrzeby, gdyż powtarzalibyśmy wszystko to, co powiedziane było o różnicach funkcyi jednej zmiennej niezależnej. Powiemy tylko słów kilka o sposobach pisania. Gdy zróżnicujemy wzór (7a) jeszcze raz względem x_i, natenczas będzie

$$(11)\qquad \overset{2}{\Delta}_{x^2_i}\Psi = \Psi_{x_i+2\Delta x_i} - 2\Psi_{x_i+\Delta x_i} + \Psi$$

$\overset{2}{\Delta}_{x^2_i}\Psi$ jest symboliczny sposób pisania *różnicy częściowej rzędu 2-go*, wziętej dwukrotnie względem x_i. Jeżeli zaś wzór (7a) zróżnicujemy powtórnie względem zmiennej x_k, wówczas będziemy pisać

$$(12)\qquad \overset{2}{\Delta}_{x_i,\, x_k}\Psi = \Psi_{x_i+\Delta x_i,\, x_k+\Delta x_k} - \Psi_{x_k+\Delta x_k} - \Psi_{x_i+\Delta x_i} + \Psi;$$

$\overset{2}{\Delta}_{x_i,\, x_k}\Psi$ oznacza *różnicę częściową rzędu 2-go*, wziętą nasamprzód względem x_i, a potem względem x_k. Wyrażenie (12) można otrzymać jeszcze drugim sposobem, biorąc różnicę

$$(13)\qquad \Delta_{x_k}\Psi = \Psi_{x_k+\Delta x_k} - \Psi$$

i następnie różnicując względem x_i

$$(14)\qquad \overset{2}{\Delta}_{x_k,x_i}\Psi = \Psi_{x_i+\Delta x_i,\, x_k+\Delta x_k} - \Psi_{x_i+\Delta x_i} - \Psi_{x_k+\Delta x_k} + \Psi.$$

Widzimy, że napisana różnica nie zależy od porządku kolejnych różnicowań, czyli że

$$\overset{2}{\Delta}_{x_i,\, x_k}\Psi = \overset{2}{\Delta}_{x_k,\, x_i}\,\Psi.$$

Jestto powszechne prawo różnic częściowych, które niżej udowodnimy ogólnie. Jeżeli wyrażenie (11) zróżnicujemy względem x_k, natenczas będzie

$$\overset{3}{\Delta}_{x^2_i, x_k}\Psi = \Psi_{x_i+2\Delta x_i, x_k+\Delta x_k} - 2\Psi_{x_i+\Delta x_i, x_k+\Delta x_k} + \Psi_{x_k+\Delta x_k}$$

$$- \Psi_{x_i+2\Delta x_i} + 2\Psi_{x_i+\Delta x_i} - \Psi.$$

Zróżnicujemy teraz wyrażenie (14) względem x_i, wówczas otrzymamy

$$\overset{3}{\Delta}_{x_k, x^2_i}\Psi = \Psi_{x_i+2\Delta x_i, x_k+\Delta x_k} - \Psi_{x_i+2\Delta x_i} - \Psi_{x_i+\Delta x_i, x_k+\Delta x_k} + \Psi_{x_i+\Delta x_i}$$

$$- \Psi_{x_i+\Delta x_i, x_k+\Delta x_k} + \Psi_{x_i+\Delta x_i} + \Psi_{x_k+\Delta x_k} - \Psi,$$

skąd widoczna, że

$$\overset{3}{\Delta}_{x^2_i, x_k}\Psi = \overset{3}{\Delta}_{x_k, x^2_i}\Psi.$$

Ażeby to prawo o porządku różnicowań dowieść ogólnie, dajmy jakąkolwiek różnicę rzęd v-go w kształcie

(15) $$\overset{v}{\Delta}_{x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_p, \ldots, x_v}\Psi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_p, \ldots, x_v, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_l, \ldots, \Delta x_p, \ldots, \Delta x_v)$$

i zróżnicujmy napisane wyrażenie nasamprzód względem x_l, będzie

$$\overset{v+1}{\Delta}_{x_1, x_2, \ldots, x^2_l, \ldots, x_p, \ldots, x_v}\Psi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_l+\Delta x_l, \ldots, x_p, \ldots, x_v, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$$
$$\ldots, \Delta x_l, \ldots, \Delta x_p, \ldots, \Delta x_v) - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_p, \ldots, x_v, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$$
$$\ldots, \Delta x_l, \ldots, \Delta x_p, \ldots, \Delta x_v);$$

następnie różnicujemy ostatnie wyrażenie względem x_p

$$\overset{v+2}{\Delta}_{x_1, x_2, \ldots, x_l^2, \ldots, x_p^2, \ldots, x_v}\Psi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_l+\Delta x_l, \ldots, x_p+\Delta x_p, \ldots, x_v, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$$
$$\ldots, \Delta x_l, \ldots, \Delta x_p, \ldots, \Delta x_v) - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_p+\Delta x_p, \ldots, x_v, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$$
$$\ldots, \Delta x_l, \ldots, \Delta x_p, \ldots, \Delta x_v) - \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_l+\Delta x_l, \ldots, x_p, \ldots, x_v, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$$
$$\ldots, \Delta x_l, \ldots, \Delta x_p, \ldots, \Delta x_v) + \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots, x_p, \ldots, x_v, \Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$$
$$\ldots, \Delta x_l, \ldots, \Delta x_p, \ldots, \Delta x_v).$$

Zupełnie podobne wyrażenie otrzymamy, jeżeli równanie (15) zróżnicujemy pierwej względem x_p a dopiero potem względem x_l, czyli mamy ogólnie dowiedzione prawo

$$\Delta^{v+2}_{x_1, x_2, \ldots, x^2_l, x^2_p, \ldots, x_v} \Psi = \Delta^{v+2}_{x_1, x_2, \ldots, x_l, x_p, \ldots, x_p, x_l, \ldots, x_v} \Psi,$$

które wysłowimy tak: *wartość różnicy jakiegokolwiek rzędu wcale nie zależy od porządku kolejnych różnicowań.*

Jeżeli rozpatrzymy uważnie wzory różnic zupełnych (7), (8), (9), (10) i wyrugujemy ilości

$$\Psi_{x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2,\ \ldots,\ x_n+\Delta x_n},$$

$$\Psi_{x_1+2\Delta x_1,\ x_2+2\Delta x_2, \ldots, x_n+2\Delta x_n}, \ \ldots, \ \Psi_{x_1+(k-1)\Delta x_1,\ x_2+(k-1)\Delta x_2,\ \ldots,\ x_n+(k-1)\Delta x_n}$$

natenczas otrzymamy wzór

$$\Psi_{x_1+k\Delta x_1,\ x_2+k\Delta x_2, \ldots, x_n+k\Delta x_n} = \Psi + k\Delta\Psi + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2\Psi + \tag{16}$$

$$\ldots + k\Delta^{k-1}\Psi + \Delta^k\Psi.$$

Dla ścisłego dowiedzenia ogólności ostatniego wzoru udowodnimy wprzód kilka zasadniczych prawideł różnicowania.

§ 3. *Zasadnicze własności różnic.*

Twierdzenie I. *Różnica rzędu 1-go pozostaje bez żadnej zmiany, jeżeli do funkcyi dodamy stałą dowolną, lub też jakąkolwiek funkcyę peryodyczną.*

W rzeczy samej, mając

$$f = f\,(x, y, z, \ldots)$$

i różnicę pierwszą

$$\Delta f = f\,(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f\,(x, y, z, \ldots), \tag{a}$$

utworzymy różnicę dla

$$f_1 = f\,(x, y, z, \ldots) + c,$$

gdzie c oznacza albo stałą dowolną, albo też funkcyę peryodyczną

$$c = \varphi\,(x, y, z, \ldots). \tag{b}$$

W przypadku stałej dowolnej mamy

$$\Delta f_1 = f\,(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) + c - f\,(x, y, z, \ldots) - c;$$

skąd widoczna, że

$$\Delta f_1 = \Delta f, \qquad \text{c. b. d. d.}$$

W przypadku gdy c oznacza funkcyę peryodyczną (b), będziemy mieli

$$\Delta f_1 = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) + \varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots)$$
$$- f(x, y, z, \ldots) - \varphi(x, y, z, \ldots).$$

Ponieważ jednak funkcya peryodyczna φ czynić musi zadość warunkowi

$$\varphi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) = \varphi(x, y, z, \ldots)$$

będzie więc i w tym drugim przypadku

$$\Delta f_1 = \Delta f. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Kształt funkcyi okresowej czyli peryodycznej można zawsze wybrać tak

$$\varphi = \varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{\Delta x}, \cos\frac{2\pi x}{\Delta x}, \sin\frac{2\pi y}{\Delta y}, \cos\frac{2\pi y}{\Delta y}, \sin\frac{2\pi z}{\Delta z}, \cos\frac{2\pi z}{\Delta z}, \ldots\right),$$

gdzie φ oznacza funkcyę zupełnie dowolną. Widoczna, że funkcya φ nie zmienia wartości, jeżeli zamiast x położymy $x+\Delta x$ zamiast y weźmiemy $y+\Delta y$ i t. d., a to dla tego, że w tym przypadku wartość łuku zwiększa się o 2π, co nie może wpłynąć na zmianę funkcyi.

Twierdzenie II. *Różnica rzędu 2-go nie podlega żadnej zmianie, gdy do funkcyi dodamy wyraz kształtu:*

$$\frac{x}{\Delta x}\varphi_1 + \frac{y}{\Delta y}\varphi_2 + \frac{z}{\Delta z}\varphi_2 + \ldots + \Psi,$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \Psi$ oznaczają stałe dowolne lub też jakiekolwiek funkcye peryodyczne.

Gdy mamy daną funkcyę

$$f = f(x, y, z, \ldots)$$

i jej różnicę pierwszą w kształcie (a, twier. I), natenczas kładąc

$$f_2 = f(x, y, z, \ldots) + \frac{x}{\Delta x}\varphi_1 + \frac{y}{\Delta y}\varphi_2 + \frac{z}{\Delta z}\varphi_3 + \ldots + \Psi, \text{*)}$$

---

*) $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ są ilości stałe, często bywa dogodniej oznaczać je przez $h, k, l, \ldots$

otrzymamy

$$\Delta f_2 = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) + \frac{x+\Delta x}{\Delta x}\varphi_1 + \frac{y+\Delta y}{\Delta y}\varphi_2$$

$$+\frac{z+\Delta z}{\Delta z}\varphi_3 + \ldots + \Psi - f(x, y, z, \ldots) - \frac{x}{\Delta x}\varphi_1 - \frac{y}{\Delta y}\varphi_2 - \frac{z}{\Delta z}\varphi_3 - \ldots - \Psi,$$

czyli po łatwem uproszczeniu będzie

$$\Delta f_2 = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots - f(x, y, z, \ldots).$$

Stąd różnicę rzędu 2-go otrzymamy, kładąc we wszystkich wyrazach $x+\Delta x$ zamiast x, $y+\Delta y$ zamiast y, $z+\Delta z$ zamiast z i t. d. i odciągając całkowitą wartość pierwotną, będzie więc

$$\Delta^2 f_2 = f(x+2\Delta x, y+2\Delta y, z+2\Delta z, \ldots) - 2f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots)$$
$$+ f(x, y, z, \ldots).$$

Wyrazy $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ w odejmowaniu zniknąć muszą, gdyż oznaczają funkcye peryodyczne. Widzimy więc, że

$$\Delta^2 f_2 = \Delta^2 f. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Podobną własność można także dowieść dla wszystkich różnic rzędów wyższych, lecz dodane dowolnie wyrazy, zawierające funkcye peryodyczne, przybierają kształt coraz bardziej zawiły. Tak naprzykład do różnicy rzędu 3-go można dodawać

$$\frac{x^2}{(\Delta x)^2}\varphi_1 + \frac{y^2}{(\Delta y)^2}\varphi_2 + \frac{z^2}{(\Delta z)^2}\varphi_3 + \ldots + \frac{x}{\Delta x}\psi_1 + \frac{y}{\Delta y}\psi_2 + \frac{z}{\Delta z}\psi_3 + \ldots + \Psi,$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \Psi$ oznaczają stałe dowolne lub dowolne funkcye peryodyczne.

Twierdzenie III. *Różnica jakiegokolwiek rzędu iloczynu funkcyi przez ilość stałą równa się iloczynowi stałej przez różnicę tego samego rzędu funkcyi.* (I) st. 14

Niech będzie dana funkcya

$$f = f(x, y, z, \ldots)$$

i różnica rzędu k:

$$\Delta^k f = f(x+k\,\Delta x,\ y+k\,\Delta y,\ z+k\,\Delta z, \ldots)$$
$$- kf(x+(k-1)\,\Delta x,\ y+(k-1)\,\Delta y,\ z+(k-1)\,\Delta z, \ldots)$$
$$+ \frac{k(k-1)}{1\,.\,2} f(x+(k-2)\,\Delta x,\ y+(k-2)\,\Delta y,\ z+(k-2)\,\Delta z, \ldots) - \ldots$$
$$\ldots \pm f(x, y, z, \ldots).$$

Podobnie będziemy mieli

$$\Delta^k (af) = af(x+k\Delta x,\ y+k\Delta y,\ z+k\Delta z, \ldots)$$
$$- k\,a\,f(x+(k-1)\,\Delta x,\ y+(k-1)\,\Delta y,\ z+(k-1)\,\Delta z, \ldots) + \ldots$$
$$\ldots \pm af(x, y, z, \ldots)$$

gdzie a jest ilość stała. Wziąwszy a za nawias we wszystkich wyrazach ostatniego równania, łatwo zauważymy, że

$$\Delta^k (af) = a\,\Delta^k f, \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Twierdzenie IV. *Różnica sumy funkcyj danych równa się sumie takich samych różnic wszystkich funkcyj.*

Niech będzie dana suma

$$s = F_1(x, y, z. \ldots) + F_2(x, y, z, \ldots) + \ldots + F_n(x, y, z, \ldots).$$

Różnica rzędu k będzie, jak wiemy, taka:

$$\Delta^k s = F_1(x+k\Delta x.\,y+k\Delta y, z+k\Delta z, \ldots) + F_2(x+k\Delta x, y+k\Delta y, z+k\Delta z, \ldots) + \ldots$$
$$\ldots + F_n(x+k\Delta x,\ y+k\Delta y,\ z+k\Delta z, \ldots) + \ldots$$
$$- k\,[F_1(x+(k-1)\,\Delta x,\ y+(k-1)\,\Delta y,\ z+(k-1)\,\Delta z, \ldots)$$
$$+ F_2(x+(k-1)\,\Delta x,\ y+(k-1)\,\Delta y,\ z+(k-1)\,\Delta z, \ldots)$$
$$\ldots + F_n(x+(k-1)\,\Delta x,\ y+(k-1)\,\Delta y,\ z+(k-1)\,\Delta z, \ldots)] + \ldots$$
$$\ldots \pm F_1(x, y, z, \ldots) \pm F_2(x, y, z, \ldots) \pm F_n(x, y, z, \ldots).$$

Po uporządkowaniu wyrazów powyższego równania tak, ażeby naprzód napisane były te wyrazy, które zawierają F_1, potem wszystkie te, które zawierają F_2 i t. d., zauważymy, że

$$\Delta^k s = \Delta^k F_1 + \Delta^k F_2 + \ldots + \Delta^k F_n. \qquad \text{c. b. d. d.}$$

Przejdziemy teraz do oznaczenia *różnicy iloczynu* dwóch funkcyi danych.

Niech dany będzie iloczyn

(A) $$u = f(x, y, z, \dots) \,.\, F(x, y, z, \dots)\,.$$

Wiemy, że różnicę powyższego iloczynu można napisać tak

$$\Delta u = f(x+\Delta x,\, y+\Delta y,\, z+\Delta z, \dots) \,.\, F(x+\Delta x,\, y+\Delta y,\, z+\Delta z, \dots) - f\,.\,F\,;$$

Dalej wiemy także, że

(B) $$\begin{cases} f(x+\Delta x,\, y+\Delta y,\, z+\Delta z, \dots) = f + \Delta f\,, \\ F(x+\Delta x,\, y+\Delta y,\, z+\Delta z, \dots) = F + \Delta F\,. \end{cases}$$

Podstawiwszy te wartości w równanie (A), otrzymamy

$$\Delta u = (f+\Delta f)\,(F+\Delta F) - f\,.\,F$$

czyli

$$\Delta\,(f\,.\,F) = f\,.\,\Delta F + F\,.\,\Delta f + \Delta f\,.\,\Delta F$$

Jestto *różnica rzędu 1-go* iloczynu funkcyj danych.
Napiszemy dalej różnicę rzędu 2-go poprzedniego iloczynu u w kształcie:

(C) $$\begin{aligned} \Delta^2 u = {} & f(x+2\Delta x,\, y+2\Delta y,\, z+2\Delta z, \dots) \,.\, F(x+2\Delta x,\, y+2\Delta y,\, z+2\Delta z, \dots) \\ & - 2f(x+\Delta x,\, y+\Delta y,\, z+\Delta z, \dots) \,.\, F(x+\Delta x,\, y+\Delta y,\, z+\Delta z, \dots) + f\,.\,F\,. \end{aligned}$$

Wiemy, że (porówn. wzór 16)

$$f(x+2\Delta x,\, y+2\Delta y,\, z+2\Delta z, \dots) = f + 2\Delta f + \Delta^2 f,$$

$$F(x+2\Delta x,\, y+2\Delta y,\, z+2\Delta z, \dots) = F + 2\Delta F + \Delta^2 F;$$

oprócz tego mamy jeszcze związki (B). Podstawiwszy napisane powyżej wartości, oraz wartości (B) w równanie (C), będziemy mieli

$$\Delta^2 u = (f+2\Delta f+\Delta^2 f)\,(F+2\Delta F+\Delta^2 F) - 2\,(f+\Delta f)\,(F+\Delta F) + f\,.\,F,$$

skąd po łatwem uproszczeniu otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta^2\,(f\,.\,F) = {} & f\,\Delta^2 F + 2\,\Delta f\,.\,\Delta F + F\,.\,\Delta^2 f + 2\,\Delta f\,.\,\Delta^2 F + 2\,\Delta^2 f\,.\,\Delta F \\ & + \Delta^2 f\,.\,\Delta^2 F \end{aligned}$$

Jestto *różnica rzędu 2-go* iloczynu dwóch funkcyj danych. Tym sposobem prowadząc dowodzenie dalej, otrzymamy wzór dla różnicy rzędu k w następującym kształcie:

$$
(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta^k (f\,.\,F) = {} & f\,.\,\Delta^k F + k\,\Delta f\,.\,\Delta^{k-1} F + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2 f\,.\,\Delta^{k-2} F + \ldots \\
& \ldots + k\,\Delta^{k-1} f\,.\,\Delta F + F\,.\,\Delta^k f \\
& + k\left[\Delta f\,.\,\Delta^k F + (k-1)\,\Delta^2 f\,\Delta^{k-1} F + \frac{(k-1)(k-2)}{1\,.\,2}\,\Delta^3 f\,\Delta^{k-2} F + \ldots\right. \\
& \qquad \left.\ldots + (k-1)\,\Delta^{k-1} f\,.\,\Delta^2 F + \Delta^k f\,.\,\Delta F\right] \\
& + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}\left[\Delta^2 f\,.\,\Delta^k F + (k-2)\,\Delta^3 f\,\Delta^{k-1} F + \frac{(k-2)(k-3)}{1\,.\,2}\,\Delta^4 f\,.\,\Delta^{k-2} F + \ldots\right. \\
& \qquad \left.\ldots + (k-2)\,\Delta^{k-1} f\,.\,\Delta^3 F + \Delta^k f\,.\,\Delta^2 F\right] + \ldots \\
& \ldots + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}\left[\Delta^{k-2} f\,.\,\Delta^k F + 2\,\Delta^{k-1} f\,.\,\Delta^{k-1} F + \Delta^k f\,.\,\Delta^{k-2} F\right] \\
& + k\left[\Delta^{k-1} f\,.\,\Delta^k F + \Delta^k f\,.\,\Delta^{k-1} F\right] + \Delta^k f\,.\,\Delta^k F.
\end{aligned}\right.
$$

Przyjmując, że wzór, napisany powyżej, ma miejsce dla $\Delta^k\,(f\,.\,F)$ i, stosując znowu symbol Δ do każdego wyrazu, będziemy mieli na uwadze, że

$$\Delta\,(f\,.\,\Delta^k F) = f\,\Delta^{k+1} F + \Delta^k F\,.\,\Delta f + \Delta f\,.\,\Delta^{k+1} F,$$

$$\Delta\,(k\,\Delta f\,.\,\Delta^{k-1} F) = k\,\{\Delta f\,.\,\Delta^k F + \Delta^{k-1} F\,.\,\Delta^2 f + \Delta^2 f\,.\,\Delta^k F\},$$

$$\Delta\left[\frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2 f\,.\,\Delta^{k-2} F\right] = \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}\left[\Delta^2 f\,.\,\Delta^{k-1} F + \Delta^{k-2} F\,.\,\Delta^3 f + \Delta^{k-1} F\,.\,\Delta^3 f\right],$$

i t. p.

następnie podstawiwszy podobne wartości we wzór, napisany dla $\Delta^{k+1}\,(f\,.\,F)$, zauważymy po dokonaniu łatwych uproszczeń, że wspomniany wzór dla $\Delta^{k+1}\,(f\,F)$ tem tylko różni się od wzoru (D), że zamiast k będziemy mieli wszędzie $k+1$. Tym sposobem staje się niewątpliwem, że wzór (D) jest ogólnym i prawdziwym zawsze.

Skorzystamy teraz z własności różnic, dowiedzionych w twierdzeniach III i IV, i udowodnimy ogólność wzoru (16). Napiszmy wzmiankowany wzór w kształcie

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
& f\,(x_1 + n\Delta x_1,\, x_2 + n\Delta x_2, \ldots, x_s + n\Delta x_s) = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_s) + n\Delta f \\
& + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2 f + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\Delta^3 f + \ldots + n\,\Delta^{n-1} f + \Delta^n f.
\end{aligned}\right.
$$

Jeżeli wzór ten jest prawdziwy dla liczby n, natenczas utrzymuje się także i dla liczby $n+1$. W rzeczy samej, stosując symbol Δ do każdego wyrazu równania (17), otrzymamy

$$\Delta f(x_1+n\Delta x_1, x_2+n\Delta x_2, \ldots, x_s+n\Delta x_s) = \Delta f + n\Delta^2 f + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^3 f$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^4 f + \ldots + n\Delta^n f + \Delta^{n+1} f,$$

czyli

$$f[x_1+(n+1)\Delta x_1, x_2+(n+1)\Delta x_2, \ldots, x_s+(n+1)\Delta x_s)]$$
$$- f(x_1+n\Delta x_1, x_2+n\Delta x_2, \ldots, x_s+n\Delta x_s)$$
$$= \Delta f + n\Delta^2 f + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^3 f + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^4 f + \ldots + n\Delta^n f + \Delta^{n+1} f.$$

Po wyrugowaniu z ostatniego równania wielkości $f(x_1+n\Delta x_1, x_2+n\Delta x_2, \ldots, x_s+n\Delta x_s)$ przy pomocy wzoru (17) będziemy mieli widocznie

$$f[x_1+(n+1)\Delta x_1, x_2+(n+1)\Delta x_2, \ldots, x_s+(n+1)\Delta x_s]$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_s) + (n+1)\Delta f + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta^2 f + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\Delta^3 f$$
$$+ \ldots + (n+1)\Delta^n f + \Delta^{n+1} f.$$

Jestto wzór (17) ze zmianą liczby n na $n+1$ we wszystkich wyrazach. Dowiedliśmy więc ściśle, że wzór (17) jest prawdziwym zawsze i postać zewnętrzna tego wzoru pozostaje bez zmiany tak dla funkcyj wielu zmiennych niezależnych, jak i dla funkcyi jednej zmiennej, ponieważ w obu wymienionych przypadkach dowodzenie powyższe pozostaje jednakowem.

§ 4. *Związki pomiędzy różnicami zupełnemi oraz częściowemi.*

Dla znalezienia ogólnego związku, jaki istnieje pomiędzy różnicą zupełną funkcyi wielu zmiennych oraz pomiędzy odpowiedniemi różnicami częściowemi zajmiemy się naprzód przypadkami szczególnemi; bowiem przypadek najogólniejszy, gdy dana funkcya zawiera n zmiennych niezależnych, nasunąłby odrazu zbyt duże trudności do pokonania.

Niech będzie dana funkcya dwóch zmiennych niezależnych

$$f = f(x, y). \tag{18}$$

Różnicą zupełną rzędu 1-go będzie

$$\Delta f = f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x, y), \tag{19}$$

gdzie Δx i Δy oznaczają przyrostki zmiennych niezależnych, Δf odpowiedni przyrost funkcyi. Dla różnicy zupełnej rzędu 1-go można dowieść pewnego twierdzenia, które będzie zasadniczem w teoryi różnic funkcyj dwóch zmiennych niezależnych.

Oznaczmy *różnicę częściową* względem samej zmiennej x tak

$$\Delta_x f = f(x+\Delta x,\, y) - f(x, y), \tag{20}$$

tudzież, *różnicę częściową* względem samej zmiennej y

$$\Delta_y f = f(x,\, y+\Delta y) - f(x, y). \tag{21}$$

Kładąc w (20) $y+\Delta y$ zamiast y w obydwóch wyrazach i odciągając wartość pierwotną danej różnicy, otrzymamy różnicę rzędu 2-go, wziętą nasamprzód względem x, a potem względem y

$$\Delta^2_{x,y} f = f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x,\, y+\Delta y) - f(x+\Delta x,\, y) + f(x, y). \tag{22}$$

To samo wyrażenie moglibyśmy otrzymać z (21), kładąc $x+\Delta x$ zamiast x w obydwóch wyrazach i odciągając ich wartość pierwotną. Z tego wypada, że

$$\Delta^2_{x,y} f = \Delta^2_{y,x} f. \tag{23}$$

Gdy dodamy odpowiedniemi stronami równania (20), (21) i (22), łatwo spostrzeżemy, że

$$\Delta f = \Delta_x f + \Delta_y f + \Delta^2_{x,y} f, \tag{24}$$

czyli, *różnica zupełna rzędu 1-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych równa się sumie trzech różnic częściowych: różnicy rzędu 1-go względem x, więcej różnica częściowa rzędu 1-go względem y, więcej różnica częściowa rzędu 2-go względem x* i *y*.

Jestto twierdzenie zasadnicze, które da nam możność wyprowadzenia różnic zupełnych, rzędów wyższych.

Biorąc różnicę zupełną obu stron równania (19), otrzymamy

$$\Delta\Delta f = \Delta f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - \Delta f(x, y),$$

skąd na zasadzie (24) będzie

$$\Delta^2 f = \Delta_x f(x+\Delta x, y+\Delta y) + \Delta_y f(x+\Delta x, y+\Delta y) + \Delta^2_{x,y} f(x+\Delta x, y+\Delta y)$$
$$- \Delta_x f(x, y) - \Delta_y f(x, y) - \Delta^2_{x,y} f(x, y),$$

czyli

$$\Delta^2 f = f(x+2\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y+\Delta y) + f(x+\Delta x, y+2\Delta y)$$
$$- f(x+\Delta x, y+\Delta y) + f(x+2\Delta x, y+2\Delta y) - f(x+\Delta x, y+2\Delta y)$$
$$- f(x+2\Delta x, y+\Delta y) + f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)$$
$$+ f(x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y) - f(x+\Delta x, y+\Delta y)$$
$$+ f(x, y+\Delta y) + f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

Stąd po łatwem uproszczeniu otrzymamy

$$\Delta^2 f = f(x+2\Delta x, y+2\Delta y) - 2f(x+\Delta x, y+\Delta y) + f(x, y). \tag{25}$$

Wzór ten z innego punku widzenia wyprowadziliśmy w § 2.

$\Delta^2 f$ jestto *różnica zupełna rzędu 2-go* funkcyi dwóch zmiennych niezależnych. Napiszemy teraz następujące różnice częściowe:

$$\Delta^2_{x,x} f = f(x+2\Delta x, y) - 2f(x+\Delta x, y) + f(x, y),$$
$$\Delta^2_{y,y} f = f(x, y+2\Delta y) - 2f(x, y+\Delta y) + f(x, y),$$
$$\Delta^2_{x,y} f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y),$$
$$\Delta^3_{x,x,y} f = f(x+2\Delta x, y+\Delta y) - 2f(x+\Delta x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y)$$
$$- f(x+2\Delta x, y) + 2f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$
$$\Delta^3_{y,y,x} f = f(x+\Delta x, y+2\Delta y) - 2f(x+\Delta x, y+\Delta y) + f(x+\Delta x, y)$$
$$- f(x, y+2\Delta y) + 2f(x, y+\Delta y) - f(x, y),$$
$$\Delta^4_{x,x,y,y} f = f(x+2\Delta x, y+2\Delta y) - 2f(x+\Delta x, y+2\Delta y) + f(x, y+2\Delta y)$$
$$- f(x+2\Delta x, y+\Delta y) + 2f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)$$
$$- f(x+2\Delta x, y+\Delta y) + 2f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)$$
$$+ f(x+2\Delta x, y) - 2f(x+\Delta x, y) + f(x, y).$$

Sposób pisania podobnych różnic częściowych nie przedstawia żadnych trudności. Stosujemy łatwo prawidła różnicowania podobne, jak dla (20), (21), (22). Po uważnem rozpatrzeniu napisanych powyżej równań nie trudno spostrzedz następujący związek:

$$\Delta^2 f = \Delta^2_{x,x} f + 2\Delta^2_{x,y} f + \Delta^2_{y,y} f + 2\Delta^3_{x,x,y} f + 2\Delta^3_{y,y,x} f + \Delta^4_{x,x,y,y} f. \tag{26}$$

Wzór ten łatwiejszą drogą można otrzymać z (24) zapomocą różnicowania

$$\Delta\Delta f = \Delta\,(\Delta_x f + \Delta_y f + \Delta^2_{x,y} f)$$

czyli

$$\Delta^2 f = \Delta_x\,(\Delta_x f + \Delta_y f + \Delta^2_{x,y} f) + \Delta_y\,(\Delta_x f + \Delta_y f + \Delta^2_{x,y} f)$$
$$+ \Delta^2_{x,y}\,(\Delta_x f + \Delta_y f + \Delta^2_{x,y} f).$$

Stąd po wykonaniu wskazanych różnicowań będzie

$$\Delta^2 f = \Delta^2_{x,x} f + \Delta^2_{x,y} f + \Delta^3_{x,x,y} f + \Delta^2_{x,y} f + \Delta^2_{y,y} f + \Delta^3_{x,y,y} f +$$
$$+ \Delta^3_{x,x,y} f + \Delta^3_{x,y,y} f + \Delta^4_{x,x,y,y} f;$$

zrobiwszy redukcye, otrzymamy z ostatniego równania wzór (26).

Na zasadzie prawa tworzenia się różnic częściowych można zauważyć

$$(27)\qquad \Delta^3_{x,x,y} f = \Delta^3_{y,x,x} f,\quad \Delta^3_{y,y,x} f = \Delta^3_{x,y,y} f,\quad \Delta^4_{x,x,y,y} f = \Delta^4_{y,y,x,x} f.$$

Tym sposobem sprawdzamy ogólnie dowiedzione prawo o porządku różnicowań. Ażeby otrzymać *różnicę zupełną rzędu 3-go* stosujemy do (25) znowu twierdzenie zasadnicze (24) i otrzymamy nasamprzód

$$\Delta\Delta^2 f = \Delta f\,(x+2\Delta x,\, y+2\Delta y) - \Delta\,[2f\,(x+\Delta x,\, y+\Delta y)] + \Delta f\,(x, y),$$

następnie

$$\Delta^3 f = \Delta_x f\,(x+2\Delta x,\, y+2\Delta y) + \Delta_y f\,(x+2\Delta x,\, y+2\Delta y)$$
$$+ \Delta^2_{x,y} f\,(x+2\Delta x,\, y+2\Delta y) - \Delta_x\,[2f\,(x+\Delta x,\, y+\Delta y)]$$
$$- \Delta_y\,[2f\,(x+\Delta x,\, y+\Delta y)] - \Delta^2_{x,y}\,[2f\,(x+\Delta x,\, y+\Delta y)]$$
$$+ \Delta_x f\,(x, y) + \Delta_y f\,(x, y) + \Delta^2_{x,y} f\,(x, y)$$

Zastępując w ostatniem każdą z różnic częściowych jej wartością, otrzymamy po uproszczeniu

$$(28)\qquad \begin{aligned} \Delta^3 f = {} & f\,(x+3\Delta x,\, y+3\Delta y) - 3f\,(x+2\Delta x,\, y+2\Delta y) \\ & + 3f\,(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f\,(x, y). \end{aligned}$$

To samo z innego punktu widzenia napisaliśmy w § 2.

Drogą podobną, jak powyżej, daje się wyprowadzić związek pomiędzy różnicą zupełną rzędu 3-go i odpowiedniemi różnicami częściowemi:

$$(29)\qquad \begin{aligned} \Delta^3 f = {} & \Delta^3_{x,x,x} f + 3\Delta^3_{x,x,y} f + 3\Delta^3_{x,y,y} f + \Delta^3_{y,y,y} f + 3\Delta^4_{x,x,x,y} f \\ & + 6\Delta^4_{x,x,y,y} f + 3\Delta^4_{x,y,y,y} f + 3\Delta^5_{x,x,y,y,y} f + 3\Delta^5_{x,x,x,y,y} f + \Delta^6_{x,x,x,y,y,y} f. \end{aligned}$$

Dalej, otrzymamy także *różnicę zupełną rzędu 4-go*:

$$(30)\quad \begin{aligned} \Delta^4 f &= f\,(x+4\Delta x,\ y+4\Delta y) - 4f\,(x+3\Delta x,\ y+3\Delta y) \\ &+ 6f\,(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y) - 4f\,(x+\Delta y,\ y+\Delta y) + f\,(x,\ y), \end{aligned}$$

tudzież, jej związek z różnicami częściowemi:

$$(31)\quad \begin{aligned} \overset{4}{\Delta} f &= \overset{4}{\Delta}_{x^{(4)}} f + 4\,\overset{4}{\Delta}_{x^{(3)},\,y} f + 6\,\overset{4}{\Delta}_{x^{(2)},\,y^{(2)}} f + 4\,\overset{4}{\Delta}_{x,y^{(3)}} f + \overset{4}{\Delta}_{y^{(4)}} f \\ &+ 4\,\overset{5}{\Delta}_{x^{(4)},\,y} f + 12\,\overset{5}{\Delta}_{x^{(3)},\,y^{(2)}} f + 12\,\overset{5}{\Delta}_{x^{(2)},\,y^{(3)}} f + 4\,\overset{5}{\Delta}_{x,y^{(4)}} f \\ &+ 6\,\overset{6}{\Delta}_{x^{(4)},\,y^{(2)}} f + 12\,\overset{6}{\Delta}_{x^{(3)},\,y^{(3)}} f + 6\,\overset{6}{\Delta}_{x^{(2)},\,y^{(4)}} f + \\ &+ 4\,\overset{7}{\Delta}_{x^{(4)},\,y^{(3)}} f + 4\,\overset{7}{\Delta}_{x^{(3)},\,y^{(4)}} f + \overset{8}{\Delta}_{x^{(4)},\,y^{(4)}} f. \end{aligned}$$

Tym sposobem można uzasadnić wzór ogólny

$$(32)\quad \begin{aligned} \Delta^k f &= f\,(x+k\Delta x,\ y+k\Delta y) - kf\,(x+[k-1]\,\Delta x,\ y+[k-1]\,\Delta y) \\ &+ \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2} f\,(x+[k-2]\,\Delta x,\ y+[k-2]\,\Delta y) - \ldots \pm f\,(x,\ y) \end{aligned}$$

a także związek, zawierający różnice częściowe:

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} \overset{k}{\Delta} f &= \overset{k}{\Delta}_{x^{(k)}} f + k\,\overset{k}{\Delta}_{x^{(k-1)},\,y} f + \frac{k\,k-1}{1\,.\,2}\,\overset{k}{\Delta}_{x^{(k-2)},\,y^{(2)}} f + \ldots \\ &\qquad \ldots + k\,\overset{k}{\Delta}_{x,\,y^{(k-1)}} f + \overset{k}{\Delta}_{y^{(k)}} f \\ &+ k\left[\overset{k+1}{\Delta}_{x^{(k)},\,y} f + (k-1)\,\overset{k+1}{\Delta}_{x^{(k-1)},\,y^{(2)}} f + \frac{(k-1)\,(k-2)}{1\,.\,2}\,\overset{k+1}{\Delta}_{x^{(k-2)},\,y^{(3)}} f + \ldots \right. \\ &\qquad \left. \ldots + (k-1)\,\overset{k+1}{\Delta}_{x^{(2)},\,y^{(k-1)}} f + \overset{k+1}{\Delta}_{x,y^{(k)}} f \right] \\ &+ \frac{(k\,k-1)}{1\,.\,2}\left[\overset{k+2}{\Delta}_{x^{(k)},\,y^{(2)}} f + (k-2)\,\overset{k+2}{\Delta}_{x^{(k-1)},\,y^{(3)}} f + \frac{(k-2)\,(k-3)}{1\,.\,2}\,\overset{k+2}{\Delta}_{x^{(k-2)},\,y^{(4)}} f + \ldots \right. \\ &\qquad \left. \ldots + (k-2)\,\overset{k+2}{\Delta}_{x^{(3)},\,y^{(k-1)}} f + \overset{k+2}{\Delta}_{x^{(2)},\,y^{(k)}} f \right] + \ldots \\ &\ldots + \frac{k\,(k-1)}{1\,.\,2}\left[\overset{2k-2}{\Delta}_{x^{(k)},\,y^{(k-2)}} f + 2\,\overset{2k-2}{\Delta}_{x^{(k-1)},\,y^{(k-1)}} f + \overset{2k-2}{\Delta}_{x^{(k-2)},\,y^{(k)}} f\right] \\ &\qquad + k\left[\overset{2k-1}{\Delta}_{x^{(k)},\,y^{(k-1)}} f + \overset{2k-1}{\Delta}_{x^{(k-1)},\,y^{(k)}} f\right] + \overset{2k}{\Delta}_{x^{(k)},\,y^{(k)}} f; \end{aligned} \right.$$

dla krótkości wprowadziliśmy oznaczenia $x^{(s)}$ zamiast $x, x, x, \ldots s$ razy. Dowieść można, że gdy wzór napisany ma miejsce dla $\Delta^k f$, natenczas, stosując symbol Δ do każdego wyrazu i pamiętając związek (24), zauważymy po uproszczeniu, że wzór będzie także prawdziwym i dla $\Delta^{k+1} f$, czyli że wzór ten jest zawsze prawdziwy.

Możemy oprócz tego napisać wzór:

$$(34)\quad \begin{aligned} f(x+n\Delta x, y+n\Delta y) &= f(x,y) + n\Delta f + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 f + \ldots + \Delta^n f, \end{aligned}$$

który jest szczególnym przypadkiem ogólnie dowiedzionego wzoru (17).

Przejdźmy teraz do funkcyj trzech zmiennych niezależnych.

Metoda postępowania pozostanie tą samą, jak poprzednio, lecz wzory odpowiednie będą więcej złożone.

Niech będzie funkcya trzech zmiennych niezależnych

$$F = F(x, y, z).$$

Różnicą zupełną rzędu 1-go będzie

$$(35)\quad \Delta F = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y, z).$$

Napiszmy następujące różnice częściowe:

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_x F &= F(x+\Delta x, y, z) - F(x, y, z), \\ \Delta_y F &= F(x, y+\Delta y, z) - F(x, y, z), \\ \Delta_z F &= F(x, y, z+\Delta z) - F(x, y, z), \\ \Delta^2_{x,y} F &= F(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - F(x, y+\Delta y, z) - F(x+\Delta x, y, z) \\ &\quad + F(x, y, z), \\ \Delta^2_{x,z} F &= F(x+\Delta x, y, z+\Delta z) - F(x, y, z+\Delta z) - F(x+\Delta x, y, z) \\ &\quad + F(x, y, z), \\ \Delta^2_{y,z} F &= F(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y, z+\Delta z) - F(x, y+\Delta y, z) \\ &\quad + F(x, y, z), \\ \Delta^3_{x,y,z} F &= F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y+\Delta y, z+\Delta z) \\ &\quad - F(x+\Delta x, y, z+\Delta z) + F(x, y, z+\Delta z) - F(x+\Delta x, y+\Delta y, z) \\ &\quad + F(x, y+\Delta y, z) + F(x+\Delta x, y, z) - F(x, y, z). \end{aligned} \right.$$

Jako następstwo prawideł pisania tych różnic wypada widoczne prawo symbolów

$$(37)\qquad \Delta^2_{x,y}F=\Delta^2_{y,x}F,\ \Delta^2_{x,z}F=\Delta^2_{z,x}F,\ \Delta^2_{y,z}F=\Delta^2_{z,y}F,\ \Delta^3_{x,y,z}F=\Delta^3_{y,x,z}F,$$

i t. d.

Prawo to dowiedliśmy ogólnie w § 2.

Dodając odpowiedniemi stronami wszystkie, napisane powyżej, różnice częściowe (36), łatwo otrzymamy

$$(38)\qquad \Delta F=\Delta_x F+\Delta_y F+\Delta_z F+\Delta^2_{x,y} F+\Delta^2_{x,z} F+\Delta^2_{y,z} F+\Delta^3_{x,y,z} F.$$

Jestto twierdzenie zasadnicze dla funkcyj trzech zmiennych niezależnych. *Różnica zupełna rzędu 1-go funkcyi trzech zmiennych niezależnych równa się sumie trzech różnic częściowych rzędu 1-go względem każdej zmiennej zosobna, więcej suma trzech różnic częściowych rzędu 2-go względem każdej pary zmiennych, więcej różnica częściowa rzędu 3-go względem wszystkich zmiennych.*

Dalej różnicą zupełną rzędu 2-go będzie

$$\Delta\Delta F=\Delta F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-\Delta F(x,y,z),$$

czyli

$$\begin{aligned}\Delta^2 F=\ &\Delta_x F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)+\Delta_y F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\\&+\Delta_z F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)+\Delta^2_{x,y} F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\\&+\Delta^2_{x,z} F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)+\Delta^2_{y,z} F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\\&+\Delta^3_{x,y,z} F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-\Delta_x F-\Delta_y F-\Delta_z F-\Delta^2_{x,y} F\\&-\Delta^2_{x,z} F-\Delta^2_{y,z} F-\Delta^3_{x,y,z} F.\end{aligned}$$

Zastąpiwszy w powyższem różnice częściowe przez ich wartości, po uproszczeniu otrzymamy różnicę zupełną rzędu 2-go w kształcie:

$$(39)\qquad \begin{aligned}\Delta^2 F=\ &F(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y,\ z+2\Delta z)-2F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\\&+F(x,y,z).\end{aligned}$$

Jeżeli teraz zróżnicujemy powtórnie wzór (38), będziemy mieli

$$\Delta\Delta F = \Delta\,(\Delta_x F + \Delta_y F + \Delta_z F + \Delta^2_{x,y} F + \Delta^2_{x,z} F + \Delta^2_{y,z} F + \Delta^3_{x,y,z} F),$$

czyli

$$\begin{aligned}
\Delta^2 F = {} & \Delta_x\,(\Delta_x F + \Delta_y F + \Delta_z F + \Delta^2_{x,y} F + \Delta^2_{x,z} F + \Delta^2_{y,z} F + \Delta^3_{x,y,z} F)\\
& + \Delta_y\,(\Delta_x F + \Delta_y F + \Delta_z F + \Delta^2_{x,y} F + \Delta^2_{x,z} F + \Delta^2_{y,z} F + \Delta^3_{x,y,z} F)\\
& + \Delta_z\,(\Delta_x F + \Delta_y F + \Delta_z F + \Delta^2_{x,y} F + \Delta^2_{x,z} F + \Delta^2_{y,z} F + \Delta^3_{x,y,z} F)\\
& + \Delta^2_{x,y}\,(\Delta_x F + \Delta_y F + \Delta_z F + \Delta^2_{x,y} F + \Delta^2_{x,z} F + \Delta^2_{y,z} F + \Delta^3_{x,y,z} F)\\
& + \Delta^2_{x,z}\,(\Delta_x F + \Delta_y F + \Delta_z F + \Delta^2_{x,y} F + \Delta^2_{x,z} F + \Delta^2_{y,z} F + \Delta^3_{x,y,z} F)\\
& + \Delta^2_{y,z}\,(\Delta_x F + \Delta_y F + \Delta_z F + \Delta^2_{x,y} F + \Delta^2_{x,z} F + \Delta^2_{y,z} F + \Delta^3_{x,y,z} F)\\
& + \Delta^3_{x,y,z}\,(\Delta_x F + \Delta_y F + \Delta_z F + \Delta^2_{x,y} F + \Delta^2_{x,z} F + \Delta^2_{y,z} F + \Delta^3_{x,y,z} F).
\end{aligned}$$

Stąd po wykonaniu wskazanych działań i redukcyi wypada

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta^2 F = {} & \overset{2}{\Delta}_{x^{(2)}} F + 2\overset{2}{\Delta}_{x,y} F + \overset{2}{\Delta}_{y^{(2)}} F + 2\overset{2}{\Delta}_{x,z} F + 2\overset{2}{\Delta}_{y,z} F + \overset{2}{\Delta}_{z^{(2)}} F\\
& + 2\overset{3}{\Delta}_{x^{(2)},y} F + 2\overset{3}{\Delta}_{x^{(2)},z} F + 2\overset{3}{\Delta}_{x,y^{(2)}} F + 2\overset{3}{\Delta}_{y^{(2)},z} F + 2\overset{3}{\Delta}_{x,z^{(2)}} F\\
& + 2\overset{3}{\Delta}_{y,z^{(2)}} F + 6\overset{3}{\Delta}_{x,y,z} F + \overset{4}{\Delta}_{x^{(2)},y^{(2)}} F + \overset{4}{\Delta}_{y^{(2)},z^{(2)}} F + \overset{4}{\Delta}_{x^{(2)},z^{(2)}} F\\
& + 4\overset{4}{\Delta}_{x^{(2)},y,z} F + 4\overset{4}{\Delta}_{x,y^{(2)},z} F + 4\overset{4}{\Delta}_{x,y,z^{(2)}} F + 2\overset{5}{\Delta}_{x^{(2)},y^{(2)},z} F\\
& + 2\overset{5}{\Delta}_{x^{(2)},y,z^{(2)}} F + 2\overset{5}{\Delta}_{x,y^{(2)},z^{(2)}} F + \overset{6}{\Delta}_{x^{(2)},y^{(2)},z^{(2)}} F.
\end{aligned}\right.$$

Wypisawszy szczegółowo wszystkie wartości różnic częściowych i dokonawszy redukcyi, otrzymamy wzór (39). Tym sposobem sprawdzimy, że wzór (40) jest rzetelnym. Postępując podobnie dalej, zróżnicujemy równanie (40); gdy następnie różnicowania zupełne zastąpimy częściowemi, podług wzoru (38), i wykonamy redukcye, natenczas znajdziemy łatwo:

$$
\begin{aligned}
\overset{3}{\Delta} F = {} & \overset{3}{\Delta}_{x^{(3)}} F + 3\overset{3}{\Delta}_{x^{(2)},y} F + 3\overset{3}{\Delta}_{x^{(2)},z} F + \overset{3}{\Delta}_{y^{(3)}} F + 3\overset{3}{\Delta}_{x,y^{(2)}} F + \overset{3}{\Delta}_{z^{(3)}} F + 3\overset{3}{\Delta}_{z,y^{(2)}} F \\
& + 3\overset{3}{\Delta}_{x,z^{(2)}} F + 3\overset{3}{\Delta}_{y,z^{(2)}} F + 6\overset{3}{\Delta}_{x,y,z} F + 3\overset{4}{\Delta}_{x^{(3)},y} F + 6\overset{4}{\Delta}_{x^{(2)},y^{(2)}} F + 15\overset{4}{\Delta}_{x^{(2)},y,z} F + 3\overset{4}{\Delta}_{x^{(3)},z} F \\
& + 6\overset{4}{\Delta}_{x^{(2)},z^{(2)}} F + 3\overset{4}{\Delta}_{x,y^{(3)}} F + 15\overset{4}{\Delta}_{x,y^{(2)},z} F + 3\overset{4}{\Delta}_{y^{(3)},z} F + 6\overset{4}{\Delta}_{y^{(2)},z^{(2)}} F + 15\overset{4}{\Delta}_{x,y,z^{(2)}} F \\
& + 3\overset{4}{\Delta}_{x,z^{(3)}} F + 3\overset{4}{\Delta}_{y,z^{(3)}} F + 3\overset{5}{\Delta}_{x^{(3)},y^{(2)}} F + 3\overset{5}{\Delta}_{x^{(2)},y^{(3)}} F + 21\overset{5}{\Delta}_{x^{(2)},y^{(2)},z} F + 21\overset{5}{\Delta}_{x,y^{(2)},z^{(2)}} F \\
& + 3\overset{5}{\Delta}_{y^{(3)},z^{(2)}} F + 3\overset{5}{\Delta}_{y^{(2)},z^{(3)}} F + 3\overset{5}{\Delta}_{x^{(3)},z^{(2)}} F + 21\overset{5}{\Delta}_{x^{(2)},y,z^{(2)}} F + 3\overset{5}{\Delta}_{x^{(2)},z^{(3)}} F + 9\overset{5}{\Delta}_{x^{(3)},y,z} F \\
& + 9\overset{5}{\Delta}_{x,y^{(3)},z} F + 9\overset{5}{\Delta}_{x,y,z^{(3)}} F + 9\overset{6}{\Delta}_{x^{(3)},y^{(2)},z} F + 9\overset{6}{\Delta}_{x^{(2)},y^{(3)},z} F + 24\overset{6}{\Delta}_{x^{(2)},y^{(2)},z^{(2)}} F \\
& + 9\overset{6}{\Delta}_{x^{(3)},y,z^{(2)}} F + 9\overset{6}{\Delta}_{x^{(2)},y,z^{(3)}} F + 9\overset{6}{\Delta}_{x,y^{(3)},z^{(2)}} F + 9\overset{6}{\Delta}_{x,y^{(2)},z^{(3)}} F + \overset{6}{\Delta}_{x^{(3)},y^{(3)}} F \\
& + \overset{6}{\Delta}_{y^{(3)},z^{(3)}} F + \overset{6}{\Delta}_{x^{(3)},z^{(3)}} F + 9\overset{7}{\Delta}_{x^{(3)},y^{(2)},z^{(2)}} F + 9\overset{7}{\Delta}_{x^{(2)},y^{(3)},z^{(2)}} F + 9\overset{7}{\Delta}_{x^{(2)},y^{(2)},z^{(3)}} F \\
& + 3\overset{7}{\Delta}_{x^{(3)},y^{(3)},z} F + 3\overset{7}{\Delta}_{x^{(3)},y,z^{(3)}} F + 3\overset{7}{\Delta}_{x,y^{(3)},z^{(3)}} F + 3\overset{8}{\Delta}_{x^{(3)},y^{(3)},z^{(2)}} F + 3\overset{8}{\Delta}_{x^{(2)},y^{(3)},z^{(3)}} F \\
& + 3\overset{8}{\Delta}_{x^{(3)},y^{(2)},z^{(3)}} F + \overset{9}{\Delta}_{x^{(3)},y^{(3)},z^{(3)}} F .
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Jestto związek różnicy zupełnej rzędu 3-go funkcyi trzech zmiennych niezależnych z różnicami częściowemi. Różnicując równanie (41) jeszcze raz, można otrzymać podobnie $\Delta^4 F$, wyrażone przez odpowiednie różnice częściowe. Wzór dla $\Delta^4 F$ staje się więcej złożonym, aniżeli (41); z tego powodu pisanie wspomnianego wzoru pomijamy, aby uniknąć zbytecznej rozwlekłości. Podobnie, jak dla funkcyj dwóch zmiennych niezależnych, będziemy mieli wzór

$$
\begin{aligned}
F(x+n\Delta x,\, y+n\Delta y,\, z+n\Delta z) = {} & F(x,y,z) + n\Delta F + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 F \\
& + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 F + \ldots + n\Delta^{n-1} F + \Delta^n F,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

będący szczególnym przypadkiem ogólnie dowiedzionego wzoru (17).

Zastanawiając się nad wzorami (24) i (38), spostrzegamy, że wzór ogólny dla funkcyi n zmiennych niezależnych będzie taki:

$$(43)\quad \Delta\Psi = \sum_{i}^{1,\ldots,n} \Delta_{x_i}\Psi + \sum_{i,k}^{1,\ldots,n} \overset{2}{\Delta}_{x_i,x_k}\Psi + \sum_{i,k,l}^{1,\ldots,n} \overset{3}{\Delta}_{x_i,x_k,x_l}\Psi + \ldots + \overset{n}{\Delta}_{x_1,x_2,\ldots,x_n}\Psi,$$

gdzie sumy odnoszą się tylko do kombinacyj liczb $1, 2, \ldots, n$.

Jeżeli przypuścić, że wzór (43) jest prawdziwym dla n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, to można dowieść, że pozostanie również prawdziwym i dla $n+1$ zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Tym sposobem okażemy ściśle, że związek (43) jest ogólnym i nie może podlegać żadnej wątpliwości. Dajmy, że we wzorze (43) funkcya Ψ zawiera także ilość x_{n+1}, lecz uważaną we wszystkich wyrazach jako wielkość stałą. Oczywista, kształt zewnętrzny różnicy zupełnej $\Delta\Psi$ pozostanie bez zmiany, chociaż wzór (43) zawiera według naszego założenia ilość x_{n+1}, uważaną za parametr stały, a to dla tego, że ilość stała nie podlega różnicowaniu. Możemy wypowiedzianą wyżej myśl wyrazić równaniem

$$(44)\quad \begin{aligned} \Psi_{x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n, x_{n+1}} - \Psi_{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}} &= \sum_{i}^{1,\ldots,n} \Delta_{x_i}\Psi + \sum_{i,k}^{1,\ldots,n} \overset{2}{\Delta}_{x_i,x_k}\Psi \\ &+ \sum_{i,k,l}^{i,\ldots,n} \overset{3}{\Delta}_{x_i,x_k,x_l}\Psi + \ldots + \overset{n}{\Delta}_{x_1,x_2,\ldots,x_n}\Psi. \end{aligned}$$

Przestańmy nadal uważać x_{n+1} za stałą i poddajmy wzór (44) różnicowaniu względem x_{n+1}, będzie wówczas

$$\begin{aligned} &\Psi_{x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots x_n+\Delta x_n, x_{n+1}+\Delta x_{n+1}} - \Psi_{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}+\Delta x_{n+1}} \\ &\quad - \Psi_{x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n, x_{n+1}} + \Psi_{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}} \\ &= \sum_{i}^{1,\ldots,n} \Delta^2_{x_i,x_{n+1}}\Psi + \sum_{i,k}^{1,\ldots,n} \Delta^3_{x_i,x_k,x_{n+1}}\Psi + \sum_{i,k,l}^{1,\ldots,n} \Delta^4_{x_i,x_k,x_l,x_{n+1}}\Psi + \ldots \\ &\quad + \overset{n+1}{\Delta}_{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}}\Psi. \end{aligned}$$

Dodajmy teraz wzór ostatni z wzorem (44), natenczas łatwo otrzymamy

$$(45)\quad \begin{aligned} &\Psi_{x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n, x_{n+1}+\Delta x_{n+1}} - \Psi_{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}+\Delta x_{n+1}} \\ &= \sum_{i}^{1,\ldots,n} \Delta_{x_i}\Psi + \sum_{i,k}^{1,\ldots,n,n+1} \Delta^2_{x_i,x_k}\Psi + \sum_{i,k,l}^{1,\ldots,n,n+1} \Delta^3_{x_i,x_k,x_l}\Psi + \ldots \\ &\quad + \overset{n+1}{\Delta}_{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}}\Psi. \end{aligned}$$

Wiedząc dalej, że różnicą częściową co do zmiennej x_{n+1} będzie

$$\Psi_{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}+\Delta x_{n+1}} - \Psi_{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}} = \Delta_{x_{n+1}}\Psi.$$

Dodamy ten ostatni związek do równania (45) i otrzymamy widocznie

$$\Psi_{x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n, x_{n+1}+\Delta x_{n+1}} - \Psi_{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}}$$

$$= \sum_{i}^{1,\ldots,n,n+1} \Delta_{x_i}\Psi + \sum_{i,k}^{1,\ldots,n,n+1} \Delta^2_{x_i, x_k}\Psi + \sum_{i,k,l}^{1,\ldots,n,n+1} \Delta^3_{x_i, x_k, x_l}\Psi + \ldots + \Delta^{n+1}_{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}}\Psi.$$

Pierwsza strona powyższego przedstawia nam różnicę zupełną $\Delta\Psi$ widzimy więc, że wzór (43) pozostaje prawdziwym i dla funkcyj $n+1$ zmiennych niezależnych, co było do dowiedzenia.

II. Rachunek różniczkowy.

Od rachunku różnic przejdziemy do rachunku różniczkowego, robiąc jedno ogólne przypuszczenie, że przyrostki zmiennych niezależnych $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ stają się nieskończenie małemi. Oprócz tego rozważać będziemy *funkcye ciągłe* t. j. takie, których przyrostki stają się ilościami nieskończenie małemi, gdy $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ dążą do zera. Gdyby przyrostki funkcyj przybierały wartość ∞, podczas gdy przyrostki zmiennych niezależnych byłyby nieskończenie małemi, natenczas mówić będziemy, że funkcya ma ciągłość zerwaną. Przedmiotem wszystkich naszych rozumowań, które poniżej wyłożymy, będą funkcye ciągłe.

Wiadomości wstępne.

W rachunku różniczkowym mamy do czynienia z ilościami nowego rodzaju, które nazywamy *nieskończenie małemi.* Ilości tych nie spotykamy w rachunkach skończonych, z tego powodu podamy kilka twierdzeń, dotyczących ilości nieskończenie małych.

Jeżeli mamy pewien układ ilości skończonych

(A) $$a, b, c, \ldots, n,$$

to wielkościami nieskończenie małemi rzędu 1-go nazywamy takie ilości

(B) $$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu,$$

które, zmniejszając się nieskończenie, dążą do zera, czyli nikną wobec ilości skończonych układu (A). Wskutek takiego założenia ilości

$$a+\alpha,\ b+\beta,\ c+\gamma, \ldots, n+\nu$$

przedstawiać będą ilości *zmienne*, których granice będą odpowiednio równe wielkościom

$$a, b, c, \ldots, n.$$

Ilościami nieskończenie małemi rzędu 2-go nazywamy iloczyny, złożone z dwóch czynników, lub też drugie potęgi wielkości (B). tak więc

$$(C) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} & \alpha\beta,\quad \alpha\gamma,\quad \beta\gamma, \ldots \\ \text{lub} & \alpha^2,\quad \beta^2,\quad \gamma^2, \ldots \end{array} \right.$$

będą ilości nieskończenie małe rzędu 2-go. Ilości (C) zmniejszają się prędzej, aniżeli (B) i nikną wobec poprzedzających.

Podobnie iloczyny ilości (B) po trzy, lub trzecie potęgi będą nieskończenie małe rzędu 3-go

$$\begin{array}{ll} & \alpha\beta\gamma,\quad \alpha\beta\delta, \ldots \\ \text{lub} & \alpha^3,\quad \beta^3,\quad \gamma^3, \ldots; \end{array}$$

ilości rzędu 3-go zmniejszają się prędzej, aniżeli rzędu 2-go (C) i wskutek tego nikną wobec ilości (C). Podobnie dalej, iloczyny ilości (B), wziętych po i, lub i-te potęgi będą nieskończenie małemi rzędu i-go.

Wszystkie prawdy rachunków nieskończonościowych opierają się na kilku nadzwyczaj prostych twierdzeniach, które poniżej wyłożymy:

Twierdzenie I. *Ilości zmienne, równe między sobą, mają także granice równe.*

W rzeczy samej, gdybyśmy przypuścili przeciwnie, że ilości równe mogą mieć granice różne, natenczas koniecznie wypływałby stąd wniosek, że jedna i ta sama wielkość może mieć dwie różne granice, co jest niemożliwem; więc też twierdzenie, wypowiedziane wyżej, żadną miarą nie może być poddane w wątpliwość.

Twierdzenie II. *Granica sumy skończonej liczby składników równa się sumie granic każdego ze składników zosobna.*

Ażeby dowieść tej prawdy, dajmy ilości zmienne w kształcie

$$(E) \qquad a+\alpha,\quad b+\beta,\quad c+\gamma, \ldots, n+\nu,$$

gdzie $a, b, c, \ldots, n$ są ilości oznaczone, zaś $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ zmienne, nieskończenie zdążające do zera. Liczba wielkości (E) jest, według założenia, skończoną. Jeżeli wszystkie wielkości (E) dodamy, natenczas będzie

$$(F) \quad a+\alpha+b+\beta+c+\gamma+\ldots+n+\nu=a+b+c+\ldots+n+\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu.$$

Druga strona powyższego jest tem samem, co i pierwsza, tylko składniki napisane są w innym porządku bez zmiany sumy. Z równości (F) czytamy, że granicą sumy, napisanej po pierwszej stronie, jest wielkość

$$a+b+c+\ldots+n,$$

czyli suma granic ilości danych (E). Druga część sumy

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\nu,$$

będzie ilością nieskończenie małą i znika w granicy, jeżeli tylko liczba składników jest ograniczona. Widzimy więc, że twierdzenie nasze jest dowiedzione.

Wniosek. Twierdzenie II może być nieprawdziwem, gdy liczba składników sumy jest nieskończenie wielką, czyli nieograniczoną. Istotnie będzie wówczas

$$a+\alpha+b+\beta+c+\gamma+\ldots(\text{ad infinitum})=a+b+c+\ldots+\alpha+\beta+\gamma+\ldots(\text{ad inf.}).$$

Widoczną jest rzeczą, że druga część sumy, napisanej po drugiej stronie znaku równości może już niebyć ilością nieskończenie małą, lecz przeciwnie, suma

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots(\text{ad. inf.})=R$$

może zdążać do pewnej ilości skończonej R. Tak więc w tym przypadku twierdzenie II przestaje być prawdą niewątpliwą; trzeba zbadać wyraz dopełniający R i, jeżeli będziemy w stanie dowieść, że R dąży do zera, natenczas twierdzenie II utrzyma się także dla nieskończonej liczby wyrazów.

Twierdzenie III. *Granica iloczynu równa się iloczynowi granic.*

Dajmy iloczyn ograniczonej liczby czynników

$$(G) \quad \begin{aligned}&(a+\alpha)(b+\beta)(c+\gamma)\ldots(n+\nu)=abc\ldots n+(bc\ldots n)\alpha\\&+(ac\ldots n)\beta+(ab\ldots n)\gamma+\ldots+(ab.c\ldots)\nu+\Omega,\end{aligned}$$

gdzie tak, jak poprzednio, $a, b, c, \ldots, n$ oznaczają ilości skończone, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \nu$ nieskończenie małe; głoska Ω oznacza dla krótkości sumę wyrazów, zawierających iloczyny nieskończenie małych po dwie, po trzy, po cztery i t. d. Z równości (G) czytamy wprost, że granicą iloczynu, napisanego po pierwszej stronie znaku równości, będzie iloczyn granic, czyli wielkość

$$abc\ldots n,$$

gdyż wszystkie pozostałe wyrazy w granicy znikają, jako nieskończenie małe. c. b. d. d.

Wniosek I. Twierdzenie III może nie być prawdziwem, gdy liczba czynników będzie nieograniczenie wielką, bowiem w tym przypadku może być suma

$$(bc\ldots n)\,\alpha + (ac\ldots n)\,\beta + (ab\ldots n)\,\gamma + \ldots + (abc\ldots)\,\nu + \ldots = R$$

w granicy równa ilości skończonej R.

Wniosek II. Z twierdzenia III wypływa, że *granica ilorazu równa się ilorazowi granic*. W rzeczy samej będzie

$$\frac{a+\alpha}{b+\beta}\cdot(b+\beta)=a+\alpha\,,$$

skąd wypada

$$\lim\left(\frac{a+\alpha}{b+\beta}\right).\lim\,(b+\beta)=\lim\,(a+\alpha),$$

czyli widocznie

$$\lim\left(\frac{a+\alpha}{b+\beta}\right)=\frac{\lim\,(a+\alpha)}{\lim\,(b+\beta)}=\frac{a}{b}$$

c. b. d. d.

Symbol *lim* jest skróconem słowem łacińskiem *limes*, co znaczy granica

§ 1. *Funkcye jednej zmiennej niezależnej.*

Niech daną będzie funkcya

$$F=F(x).$$

Różniczką rzędu 1-go nazywamy granicę różnicy rzędu 1-go

$$dF=\lim\Delta F=\lim\left[F(x+\Delta x)-F(x)\right],$$

gdy Δx nieograniczenie zdąża do zera.

Pochodną rzędu 1-go nazywamy granicę stosunku

$$\lim\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim\left.\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\right|_{\Delta x=0}=F'(x)\,;$$

oznaczamy powyższą granicę przez $\frac{dF}{dx}$, albo też przez $F'(x)$.

Różniczką rzędu 2-go jest granica różnicy rzędu 2-go

$$d^2F = \lim \Delta^2 F = \lim \left[F(x+2\Delta x) - 2F(x+\Delta x) + F(x)\right]$$

gdy Δx zdąża do zera.

Widzieliśmy w teoryi różnic, że

$$\Delta^2 F = \Delta\Delta F,$$

oczywista, taka sama zależność istnieć musi i dla granic

$$d^2F = ddF.$$

Dalej, *pochodna rzędu 2-go* jest granicą stosunku drugiej różnicy funkcyi do kwadratu Δx, gdy Δx zdąża do zera

$$\lim \frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} = \lim \left.\frac{F(x+2\Delta x) - 2F(x+\Delta x) + F(x)}{\Delta x^2}\right|_{\Delta x=0} = F''(x).$$

Granicę powyższą, zgodnie z poprzedzającem, oznaczać będziemy albo przez $\frac{d^2F}{dx^2}$, albo też przez $F''(x)$.

Różniczka rzędu 3-go jest granicą różnicy rzędu 3-go

$$d^3F = \lim \Delta^3 F = \lim \left[F(x+3\Delta x) - 3F(x+2\Delta x) + 3F(x+\Delta x) - F(x)\right],$$

gdy Δx dąży do zera.

Ponieważ dla różnic mieliśmy

$$\Delta^3 F = \Delta\Delta^2 F,$$

więc i w granicy dla odpowiedniej różniczki istnieć będzie to samo prawo

$$d^3F = dd^2F.$$

Pochodną rzędu 3-go nazywamy granicę stosunku różnicy 3-go rzędu funkcyi danej do sześcianu Δx, gdy Δx zdąża do zera

$$\lim \frac{\Delta^3 F}{\Delta x^3} = \lim \left.\frac{F(\Delta+3\Delta x) - 3F(x+2\Delta x) + 3F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x^3}\right|_{\Delta x=0} = F'''(x),$$

podobnie, jak powyżej, trzecią pochodną oznaczać będziemy albo przez $\frac{d^3F}{dx^3}$, albo przez $F'''(x)$.

Wogóle, różniczka k-go rzędu jest granicą k-ej różnicy funkcyi, tudzież pochodna k-go rzędu jest granicą stosunku k-ej różnicy funkcyi do k-ej potęgi przyrostka Δx, gdy Δx zdąża do zera.

Zastosujemy teraz prawidła wyłożone do znajdywania pochodnych rozmaitych rzędów funkcyj zasadniczych. Dajmy m-tę *potęgę*

$$y = x^m$$

Pierwsza pochodna będzie

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \left.\frac{(x+h)^m - x^m}{h}\right|_{h=0} = mx^{m-1}.$$

Jestto bardzo łatwem do dowiedzenia, należy tylko rozwinąć $(x+h)^m$ podług znanego w algebrze wzoru Newtona. Druga pochodna powyższej funkcyi będzie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \lim \left.\frac{(x+2h)^m - 2(x+h)^m + x^m}{h^2}\right|_{h=0} ;$$

pisząc w postaci rozwiniętej, otrzymamy

$$\lim \left.\frac{(x+2h)^m - 2(x+h)^m + x^m}{h^2}\right|_{h=0} = \lim \frac{1}{h^2} \Big[x^m + mx^{m-1} . 2h$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1 . 2} x^{m-2} (2h)^2 + \ldots - 2 \Big\{ x^m + mx^{m-1} h$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1 . 2} x^{m-2} h^2 + \ldots \Big\} + x^m \Big] = m(m-1) x^{m-2} ,$$

tak więc będzie

$$\frac{d^2 x^m}{dx^2} = m(m-1) x^{m-2} .$$

Zamiast tego postępowania w celu znalezienia pochodnej rzędu 2-go moglibyśmy różniczkować pochodnę rzędu 1-go

$$\frac{d}{dx}(mx^{m-1}) = m(m-1) x^{m-2}.$$

Podobnemi drogami znaleść łatwo pochodnę rzędu 3-go, 4-go i wogóle rzędu i-go

$$\frac{d^i x^m}{dx^i} = m\,(m-1)\ldots(m-i+1)\,x^{m-i};$$

gdy będzie $i=m$, natenczas pochodna staje się ilością stałą i dalsze pochodne rzędów wyższych będą zerami.

Dajmy *funkcyę logarytmową*

$$y = \lg x\,.$$

Pochodna rzędu 1-go będzie

$$\frac{dy}{dx} = \lim \left.\frac{\lg(x+h) - \lg x}{h}\right|_{h=0};$$

przyjmując $h = \frac{x}{m}$ zauważymy, że, gdy h dąży do zera, to m w tym samym czasie zdąża do ∞. Widzimy dalej, że

$$\text{(o)} \qquad \frac{dy}{dx} = \lim\left(\frac{1}{h}\lg\frac{x+h}{x}\right)_{h=0} = \lim\left[\frac{m}{x}\lg\left(1+\frac{1}{m}\right)\right]_{m=\infty}.$$

Łatwo jednak dowieść, że

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m_{m=\infty} = e,$$

gdzie e oznacza zasadę logarytmów naturalnych; w tym celu należy tylko rozłożyć m-tą potęgę powyższego dwumianu podług wzoru Newtona. Tym sposobem widocznem będzie z równania (o), że

$$\frac{d\lg x}{dx} = \frac{1}{x}\,.$$

Weźmy dalej pochodnę rzędu 2-go funkcyi logarytmowej

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim \left.\frac{\lg(x+2h) - 2\lg(x+h) + \lg x}{h^2}\right|_{h=0} = \lim\lg\left[\frac{(x+2h)\,x}{(x+h)^2}\right]^{\frac{1}{h^2}}.$$

Dajmy $h = mxi$, gdzie $i = \sqrt{-1}$, wówczas będziemy mieli

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim\lg\left[\frac{x^2+2mi\,x^2}{x^2+2mi\,x^2-m^2x^2}\right]^{-\frac{1}{m^2x^2}}_{m=0} = -\frac{1}{x^2}\lim\lg\left(\frac{1+2mi}{1+2mi-m^2}\right)^{\frac{1}{m^2}}_{m=0},$$

czyli

$$\text{(p)}\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\lim \lg \left(\frac{1}{1-\frac{m^2}{1+2mi}}\right)^{\frac{1}{m^2}}_{m=0} = -\frac{1}{x^2}\lim \lg \left(1-\frac{m^2}{1+2mi}\right)^{-\frac{1}{m^2}}_{m=0}.$$

Możemy łatwo dowieść, że

$$\lim \left(1-\frac{m^2}{1+2mi}\right)^{-\frac{1}{m^2}}_{m=0} = e,$$

albowiem, rozwijając podług wzoru Newtona, otrzymujemy

$$\left(1-\frac{m^2}{1+2mi}\right)^{-\frac{1}{m^2}} = 1+\frac{1}{m^2}\left(\frac{m^2}{1+2mi}\right)+\frac{1}{2m^2}\left(\frac{1}{m^2}+1\right)\left(\frac{m^2}{1+2mi}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2\,.\,3m^2}\left(\frac{1}{m^2}+1\right)\left(\frac{1}{m^2}+2\right)\left(\frac{m^2}{1+2mi}\right)^3+\dots$$

czyli

$$\left(1-\frac{m^2}{1+2mi}\right)^{-\frac{1}{m^2}} = 1+\frac{1}{1+2mi}+\frac{1+m^2}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{1+2mi}\right)^2$$
$$+\frac{(1+m^2)\,(1+2m^2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{1}{1+2mi}\right)^3+\dots$$

Gdy $m=0$, natenczas szereg, napisany po drugiej stronie znaku równości, dąży do swej granicy e. Zauważymy tutaj jeszcze, że druga strona powyższego równania tworzy się z nieograniczonej liczby składników; zgodnie więc z tem, co powiedzieliśmy w wniosku z twierdzenia II, baczyć trzeba, czy suma wyrazów niknących nie utworzy wielkości oznaczonej. W tym jednak przypadku nie mamy żadnej wątpliwości co do tego, że suma wyrazów niknących będzie zerem, bowiem widoczna, iż każdy z wspomnianych wyrazów przy $m=0$ staje się ilością nieskończenie małą rzędu wyższego aniżeli pierwszy. Takim sposobem niewątpliwie z równania (p) wypada

$$\frac{d^2 \lg x}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\,.$$

Wyprowadziliśmy pochodnę logarytmu rzędu 2-go całkiem niezależnie od pochodnej rzędu 1-go, wiemy jednak, że ten sam wypadek możnaby było otrzymać przez różniczkowanie pochodnej rzędu 1-go

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Podobną metodą możemy po kolei znaleźć następne pochodne rzędów wyższych funkcyi logarytmowej. Wogóle będziemy mieli

$$\frac{d^k \lg x}{dx^k} = (-1)^{k-1} . 1 . 2 . 3 \ldots (k-1)\, x^{-k};$$

łatwo dowodzi się, że, jeżeli wzór powyższy jest prawdziwym dla liczby k, natenczas utrzymuje się także i dla liczby $k+1$.

Przejdziemy teraz do *funkcyi wykładniczej*

$$y = a^x .$$

Pierwsza pochodna

$$\frac{dy}{dx} = \lim \left.\frac{a^{x+h} - a^x}{h}\right|_{h=0} = \lim a^x \left.\frac{(a^h - 1)}{h}\right|_{h=0} .$$

Jeżeli damy

$$\text{(q)} \qquad a^h - 1 = \frac{1}{m},$$

natenczas będzie widocznie

$$\lim a^x \left(\frac{a^h-1}{h}\right)_{h=0} = \lim \left.\frac{a^x \lg a}{\lg\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\right|_{m=\infty} = a^x \lg a .$$

Znaleźliśmy więc

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \lg a.$$

Druga pochodna funkcyi wykładniczej będzie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim \left.\frac{a^{x+2h} - 2a^{x+h} + a^x}{h^2}\right|_{h=0} = \lim a^x \left[\frac{a^h-1}{h}\right]^2_{h=0} .$$

Robiąc znowu podobne, jak powyżej, przypuszczenie (q), znajdziemy

$$\frac{d^2 a^x}{dx^2} = a^x \lg^2 a .$$

Jestto szczególny przypadek wzoru ogólnego

$$\frac{d^k a^x}{dx^k} = a^x \lg^k a,$$

ktory się bardzo łatwo udowadnia. Gdyby było $a = e$, natenczas

$$\frac{d^k e^x}{dx^k} = e^x.$$

Można powiedzieć, że funkcya e^x jest nieruchomą, gdyż różniczkowania wszelkich rzędów pozostawiają tę funkcyę bez żadnej zmiany.

Dalej niech będzie dana *funkcya trygonometryczna*

$$y = \sin x.$$

Pochodna rzędu 1-go jest

$$\frac{dy}{dx} = \lim \left.\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}\right|_{h=0} = \lim \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

skąd widoczna, że

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x,$$

gdyż stosunek *wstawy* do swego łuku zdąża do granicy 1, jeżeli h dąży do 0.

Pochodna rzędu 2-go funkcyi $\sin x$ otrzymuje się tak

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim \left.\frac{\sin(x+2h) - 2\sin(x+h) + \sin x}{h^2}\right|_{h=0}$$

$$= \lim \left.\frac{2\sin(x+h) \,.\, \cos h - 2\sin(x+h)}{h^2}\right|_{h=0};$$

zamieniliśmy w powyższem

$$\sin(x+2h) + \sin x = 2\sin(x+h)\cos h$$

przez wartość, napisaną po drugiej stronie znaku równości ostatniego związku. Następnie zrobimy łatwe przekształcenia

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim \frac{2}{h^2} \sin(x+h)\ [\cos h - 1] = \lim \left\{- \frac{2}{h^2} \sin(x+h) \,.\, 2\sin^2 \frac{h}{2}\right\},$$

czyli

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim \left\{ - \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} \sin(x+h) \right\}_{h=0} = -\sin x,$$

a to dla tego, iż wiemy

$$\lim \left. \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right|_{h=0} = 1 .$$

Takim sposobem, niezależnie od pochodnej rzędu 1-go, dowiedliśmy

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = - \sin x ,$$

ten sam wypadek moglibyśmy także otrzymać przez różniczkowanie pochodnej rzędu 1-go. Weźmy jeszcze pochodną rzędu 3-go

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \lim \left. \frac{\sin(x+3h) - 3 \sin(x+2h) + 3 \sin(x+h) - \sin x}{h^3} \right|_{h=0} .$$

Łącząc w powyższym liczniku wyrazy pierwszy z ostatnim oraz drugi z trzecim, otrzymamy bez żadnych trudności

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \lim \left. \frac{2 \cos\left(x + \frac{3}{2} h\right) \sin \frac{3}{2} h - 3 \,.\, 2 \cos\left(x + \frac{3}{2} h\right) \sin \frac{h}{2}}{h^3} \right|_{h=0},$$

czyli

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \lim \frac{2 \cos\left(x + \frac{3}{2} h\right)}{h^3} \left\{ \sin \frac{3}{2} h - 3 \sin \frac{h}{2} \right\}_{h=0} .$$

Wiemy jednak na zasadzie znanego wzoru trygonometryi, że

$$\sin 3 \frac{h}{2} - 3 \sin \frac{h}{2} = - 4 \sin^3 \frac{h}{2} ,$$

więc będzie

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \lim \left\{ -\frac{8\cos\left(x+\frac{3}{2}h\right)}{h^3}\sin^3\frac{h}{2} \right\}_{h=0}$$

$$= \lim \left\{ -\frac{\sin^3\frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^3}\cos\left(x+\frac{3}{2}h\right) \right\}_{h=0},$$

skąd widoczna, że

$$\frac{d^3\sin x}{dx^3} = -\cos x.$$

Prowadząc podobne dowodzenia dalej dla pochodnych rzędów wyższych, dojdziemy do wzoru ogólnego

$$\frac{d^k\sin x}{dx^k} = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Niech będzie dana *dostawa*

$$y = \cos x,$$

natenczas pierwsza pochodna jest

$$\frac{dy}{dx} = \lim \left.\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\right|_{h=0} = \lim \left\{ -\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) \right\}_{h=0},$$

skąd wypada

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x.$$

Pochodna rzędu 2-go będzie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim \left.\frac{\cos(x+2h) - 2\cos(x+h) + \cos x}{h^2}\right|_{h=0}.$$

Łącząc w liczniku wyrazy pierwszy z ostatnim, będziemy mieli

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim \frac{2\cos(x+h)\cos h - 2\cos(x+h)}{h^2} = \lim \frac{2\cos(x+h)}{h^2}\Big[\cos h - 1\Big]_{h=0}$$

czyli

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lim \left\{- \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} \cos(x+h)\right\}_{h=0} = -\cos x\,.$$

Tą drogą niezależnie od pochodnej rzędu 1-go znaleźliśmy

$$\frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x.$$

Ten sam wypadek otrzymać można przez powtórne różniczkowanie pochodnej rzędu 1-go. Pochodną rzędu 3-go będzie

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \lim \left.\frac{\cos(x+3h) - 3\cos(x+2h) + 3\cos(x+h) - \cos x}{h^3}\right|_{h=0}.$$

Jeżeli połączymy w powyższym liczniku wyrazy pierwszy z ostatnim oraz drugi z trzecim, natenczas łatwo otrzymamy

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \lim \frac{-2\sin\left(x + \frac{3}{2}h\right)}{h^3}\left(\sin\frac{3h}{2} - 3\sin\frac{h}{2}\right)_{h=0},$$

przekształcając podobnie, jak dla trzeciej pochodnej *sin* x, będzie

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \lim \left\{\sin\left(x + \frac{3h}{2}\right) \frac{\sin^3 \frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^3}\right\}_{h=0} = \sin x,$$

tak więc mamy

$$\frac{d^3 \cos x}{dx^3} = \sin x\,.$$

Rozumując podobnie dla następnych pochodnych rzędów wyższych, spostrzeżemy, że wzór ogólny będzie

$$\frac{d^k \cos x}{dx^k} = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Nie będziemy tutaj powtarzać powszechnie znanych*) i prostych dowodzeń dla wyprowadzenia wzorów:

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d\,\mathrm{cotg}\,x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\frac{d\sec x}{dx} = \mathrm{tg}\,x \sec x, \quad \frac{d\,\mathrm{cosec}\,x}{dx} = -\mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{cosec}\,x.$$

W dalszym ciągu przejdziemy do funkcyj kołowych.

Niech będzie dane

$$y = \arcsin x.$$

Pierwszą pochodnę znajdujemy według ogólnego prawidła

(s) $$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\arcsin(x+h) - \arcsin x}{h}\Bigg|_{h=0};$$

dajmy

(r) $$\arcsin(x+h) = z, \quad \arcsin x = u.$$

Widoczna, że gdy h zdąża do zera, w tym samym czasie z dąży nieograniczenie do u. Z równań (r) wypada

$$x + h = \sin z, \quad x = \sin u,$$

i wskutek tego będzie

$$h = \sin z - \sin u.$$

Takim sposobem zamiast związku (s) będziemy mieli

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{z-u}{\sin z - \sin u}\Bigg|_{z=u} = \lim \frac{z-u}{2\sin\frac{z-u}{2}\,.\,\cos\frac{z+u}{2}}\Bigg|_{z=u},$$

ponieważ jednak wiemy, że

---

*) Patrz „Zasady rachunku różniczkowego" etc. W. Folkierskiego, str. 304, 305, 306.

$$\lim \left(\frac{\frac{z-u}{2}}{\sin \frac{z-u}{2}} \right)_{z=u} = 1,$$

więc będzie widocznie w granicy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos u} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}}.$$

Tą drogą znaleźliśmy szukaną pochodnę

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dajmy jeszcze

$$y = \operatorname{arc} \cos x.$$

Pierwsza pochodna będzie

$$(t) \qquad \frac{dy}{dx} = \lim \left. \frac{\operatorname{arc} \cos (x+h) - \operatorname{arc} \cos x}{h} \right|_{h=0}.$$

Załóżmy

$$\operatorname{arc} \cos (x+h) = z, \quad \operatorname{arc} \cos x = u,$$

czyli

$$x + h = \cos z, \quad x = \cos u, \quad h = \cos z - \cos u.$$

Na zasadzie powyższych związków przekształcimy równanie (t)

$$\frac{dy}{dx} = \lim \left. \frac{z-u}{\cos z - \cos u} \right|_{z=u} = \lim \left(\frac{\frac{z-u}{2}}{-\sin \frac{z-u}{2} \sin \frac{z+u}{2}} \right)_{z=u}.$$

Przeszedłszy do granicy, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin u} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 u}}.$$

czyli

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Niech będzie dane

$$y = \text{arc tg}\, x,$$

natenczas pierwsza pochodna jest

$$(v) \qquad \frac{dy}{dx} = \lim \frac{\text{arc tg}\,(x+h) - \text{arc tg}\, x}{h}\Bigg|_{h=0}.$$

Zakładając

$$\text{arc tg}\,(x+h) = z, \quad \text{arc tg}\, x = u,$$

czyli

$$x + h = \text{tg}\, z, \quad x = \text{tg}\, u, \quad h = \text{tg}\, z - \text{tg}\, u,$$

zamiast związku (v) będziemy mieli

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{z-u}{\text{tg}\, z - \text{tg}\, u}\Bigg|_{z=u} = \lim \frac{(z-u)\cos z\,.\,\cos u}{\sin\,(z-u)}\Bigg|_{z=u}.$$

Stąd widoczna, że w granicy będzie

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 u = \frac{1}{1+\text{tg}^2\, u},$$

czyli

$$\frac{d\,\text{arc tg}\, x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Podobną metodą znajdziemy bardzo łatwo

$$\frac{d\,\text{arc cotg}\, x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d\,\text{arc sec}\, x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

$$\frac{d\,\text{arc cosec}\, x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

§ 2. *Wzór Taylora.*

Wzór (17, rozd. I) dowiedziony ogólnie, możemy zastosować do funkcyi jednej zmiennej niezależnej, pisząc

$$
(1)\qquad \begin{aligned} F(x+n\Delta x) &= F(x) + n\frac{\Delta F}{\Delta x}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2}\Delta x^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 F}{\Delta x^3}\Delta x^3 + \dots \end{aligned}
$$

Zrobiliśmy we wzorze (17) zamiany widoczne

$$
\Delta F = \frac{\Delta F}{\Delta x}\Delta x, \quad \Delta^2 F = \frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2}\Delta x^2, \text{ i t. d.}
$$

Jeżeli przyjmiemy w powyższym wzorze, że Δx zdąża do zera nieograniczenie i że $F(x)$ jest funkcya ciągła, natenczas w myśl okıeślenia pochodnych rozmaitych rzędów będziemy mieli

$$
(2)\qquad \frac{\Delta^i F}{\Delta x^i} = F^{(i)}(x) + \varepsilon_i\,,
$$

gdzie $F^{(i)}(x) = \dfrac{d^i F}{dx^i}$ oznacza pochodnę i-go rzędu, zaś ε_i oznacza ilość, znikającą wraz z Δx. Wzór (1) wskutek związków (2) przybierze postać taką:

$$
(3)\qquad \begin{aligned} F(x+n\Delta x) &= F(x) + n\Delta x\,[F'(x)+\varepsilon_1] + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta x^2\,[F''(x)+\varepsilon_2] + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta x^3\,[F'''(x)+\varepsilon_3] + \dots \end{aligned}
$$

Załóżmy dalej

$$
\Delta x = \frac{h}{n}, \quad n = \infty\,;
$$

jeżeli pod głoską h rozumieć będziemy ilość stałą, oznaczoną, natenczas $\Delta x = \dfrac{h}{n}$ dążyć będzie nieograniczenie do zera, co jest w zupełnej zgodzie z poprzedzającemi założeniami (2). Wzór (3) będziemy mogli napisać w kształcie

$$
\begin{aligned} F(x+h) &= F(x) + h\,[F'(x)+\varepsilon_1] + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{h}{\Delta x}\left(\frac{h-\Delta x}{\Delta x}\right).\,[F''(x)+\varepsilon_2]\,\Delta x^2 \\ &+ \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{h}{\Delta x}\left(\frac{h-\Delta x}{\Delta x}\right)\left(\frac{h-2\Delta x}{\Delta x}\right)[F'''(x)+\varepsilon_3]\,\Delta x^3 + \dots \end{aligned}
$$

Wykonawszy wskazane mnożenia, po skróceniu i odpowiedniem uszykowaniu wyrazów, otrzymamy z ostatniego równania

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}F'''(x) + \ldots$$

$$+ \left[h\varepsilon_1 + \frac{h^2\varepsilon_2}{1.2} + \frac{h^3\varepsilon_3}{1.2.3} + \ldots\right] + \Omega,$$

gdzie dla krótkości Ω oznacza sumę tych wyrazów, które zawierają nieskończenie małe rzędu wyższego, aniżeli pierwszy

$$\Omega = -\frac{h\,\Delta x\,.\,\varepsilon_2}{1.2} - \frac{h^2\,\Delta x\,.\,\varepsilon_3}{1.2.3} + \ldots.$$

Gdy przejdziemy do granic, natenczas wyraz Ω znika, lecz

$$\left[h\varepsilon_1 + \frac{h^2\,\varepsilon_2}{1.2} + \frac{h^3\,\varepsilon_3}{1.2.3} + \ldots\right]$$

może mieć w granicy wartość skończoną R, bowiem wyraz ten przedstawia sumę nieskończenie wielkiej liczby składników, z których każdy jest ilością nieskończenie małą rzędu 1-go. Takim sposobem otrzymaliśmy nadzwyczaj ważny wzór Taylora w kształcie

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}F'''(x) + \ldots + R.$$

R nosi nazwę *reszty* wzoru Taylora. Wielu sławnych matematyków zajmowało się znalezieniem wartości reszty R, przytoczymy tylko najbardziej używane wzory.

Lagrange znalazł

$$R = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x+\Theta h). \qquad (0<\Theta<1)$$

Cauchy dał inną postać reszty

$$R = \frac{(1-\Theta)^{n-1}\,h^n}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+\Theta h),$$

gdzie $0 < \Theta < 1$.

Ażeby można było stosować wzór Taylora, trzeba koniecznie, aby szereg był zbieżny i aby wyraz dopełniający R stawał się zerem w miarę nieograniczonej liczby składników szeregu. Godnem jest uwagi to, że w wielu razach można obejść się bez badania reszt, jeżeli rozumować sposobem następującym. Niech będzie dana funkcya $f(x)$ taka, że zastosowawszy wzór Taylora, otrzymujemy szereg zbieżny i wyraz dopełniający niewątpliwie dąży do zera, natenczas będzie

$$(4) \qquad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) + \dots$$

Jeżeli równość ta jest prawdziwą, wówczas wszystkie własności, które ma strona pierwsza, powinny mieć miejsce i po stronie drugiej. Lewa strona nie zmienia się wcale, jeżeli x zastąpimy przez h i odwrotnie, gdyż $x + h = h + x$.

Ta sama własność musi się powtarzać i po stronie prawej równości (4) czyli będzie szereg drugiej postaci

$$(5) \qquad f(x+h) = f(h) + xf'(h) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(h) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(h) + \dots$$

Zbadawszy w każdym poszczególnym przypadku zbieżność szeregu Taylora w obydwóch wzmiankowanych wyżej postaciach, dla dowolnych wartości x i h, mamy zupełne prawo uważać wzór Taylora za dowiedziony bez roztrząsania reszt. Szczególny przypadek wzoru (5), gdy $h = 0$, przyjęto nazywać wzorem Maclaurin'a. Ażeby dowieść, że wzór (5) będzie prawdziwym, gdy przyjmiemy $h=0$, należy wpierw zbadać, czy szeregi (4) i (5) pozostaną zbieżne dla wartości h, dowolnie małych, dodatnych lub ujemnych; w takim tylko przypadku będziemy mogli zrobić przejście do $h = 0$. Kładąc w (5) $x + h = y$, otrzymamy jeszcze szereg

$$f(y) = f(h) + (y-h) f'(h) + \frac{(y-h)^2}{1 \cdot 2} f''(h) + \frac{(y-h)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(h) + \dots$$

który jest w zastosowaniach więcej dogodny, aniżeli szereg Maclaurin'a, gdyż ilość dowolną h możemy tutaj w każdym szczególnym przypadku dobrać podług upodobania i przytem tak, aby szereg napisany był możliwie *szybko-zbieżny*.

W zakończeniu uwag naszych nad wzorem Taylora powiemy jeszcze słów kilka o głośnym przykładzie Cauchy'ego

$$f(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Stosując wzór Taylora w drugiej postaci (5), otrzymamy

$$f(x+h) + e^{-\frac{1}{(x+h)^2}} = f(h) + xf'(h) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(h) + \ldots + e^{-\frac{1}{h^2}}$$

(5a)

$$+ x \frac{2e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^3} + \frac{x^2}{1\,.\,2}\left(\frac{4e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^6} - \frac{6e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^4}\right) + \ldots$$

Widzimy, że te wyrazy po prawej stronie, które wypadły z rozwinięcia funkcyi $e^{-\frac{1}{(x+h)^2}}$ w szereg, można napisać tak

(6)

$$e^{-\frac{1}{h^2}} + x \frac{2e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^3} + \frac{x^2}{1\,.\,2}\left(\frac{4e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^6} - \frac{6e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^4}\right) + \ldots$$

$$= e^{-\frac{1}{h^2}}\left[1 + \frac{2x}{h^3} + \frac{x^2}{1\,.\,2}\left(\frac{4}{h^6} - \frac{6}{h^4}\right) + \ldots\right].$$

Przyjmiemy teraz, że h przybiera wartości coraz mniejsze i nieograniczenie dąży do zera; spostrzeżemy łatwo, że po lewej stronie (6) każdy wyraz, z wyjątkiem pierwszego przedstawia się pod postacią nieoznaczoną $\frac{0}{0}$, której prawdziwa wartość znajduje się wiadomemi sposobami i staje się równą zeru. Po prawej zaś stronie (6) pierwszy czynnik staje się zerem, lecz całe wyrażenie, wzięte w nawiasy [ ], będzie wielkością ∞. Takim sposobem, gdy $h = 0$, równość (6) możemy przedstawić symbolicznie tak

$$0 + 0 + 0 + \ldots \text{(ad infinitum)} = 0\,.\,\infty.$$

Inaczej być nie mogło, gdyż nieskończona suma ilości niknących nie może być dowolnie brana równą zeru. Jasnem się staje teraz, że szereg Taylora (5a), przy $h = 0$, będzie

$$e^{-\frac{1}{x^2}} + f(x) = 0\,.\,\infty + f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(0) + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(0) + \ldots$$

Znaczyć to będzie, że, chcąc do przykładu Cauchy'ego stosować twierdzenie Taylora, należy po prawej stronie powyższej równości ilość nieoznaczoną $0\,.\,\infty$ zastąpić znowu przez $e^{-\frac{1}{x^2}}$, gdyż funkcya $e^{-\frac{1}{x^2}}$ nie daje rozkładu na szereg.

Inaczej wnioskował Cauchy; opuszczając symbol $0\,.\,\infty$, Cauchy dowodził, iż absurd nieunikniony

$$e^{-\frac{1}{x^2}} + f(x) = f(x) \quad *)$$

potwierdza zdanie o konieczności roztrząsania reszt wzoru Taylora.

Na poprzedzających stronicach okazaliśmy, że reszty wzoru Taylora ukazują się sposobem zupełnie naturalnym i są uzasadnione; jednakże przykład Cauchy'ego, przytoczony powyżej, nie może służyć do tego celu, do którego niedokładnie był przeznaczony przez wynalazcę.

§ 3. *Prawidła różniczkowania.*

Wskazawszy w § 1 ogólne i łatwe drogi do znajdowania pochodnych rozmaitych rzędów funkcyj zasadniczych, przejdziemy teraz do pochodnej *funkcyi funkcyj* czyli *funkcyi złożonej.*

Gdybyśmy mieli funkcyę złożoną w kształcie

$$u = f(x_n),$$

$$x_n = \varphi_n(x_{n-1}), \quad x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_{n-2}), \; \ldots, \; x_2 = \varphi_2(x_1),$$

natenczas, nie rozwiązując ostatecznie układu równań, możemy znaleźć pochodnę u względem x_1. W tym celu napiszmy tożsamość

$$\frac{\Delta u}{\Delta x_1} = \frac{\Delta u}{\Delta x_n} \cdot \frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} \cdots \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1};$$

przeszedłszy do granic, będziemy mieli

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{du}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_{n-1}} \cdots \frac{dx_2}{dx_1}.$$

Wzór ten przedstawia łatwe prawidło pisania pochodnej funkcyi złożonej.

Twierdzenia, które wyprowadziliśmy w poprzedzającym rozdziale dla różnic funkcyj wielu zmiennych niezależnych, będą mieć, bezwątpienia, miejsce dla jednej zmiennej.

Z twierdzenia 1-go wypada dla funkcyi jednej zmiennej.

$$\Delta(F + c) = \Delta F,$$

gdzie c oznacza stałą dowolną, lub funkcyę peryodyczną.

---

*) Przykład ten jest przytoczony między innemi w podręczniku Sturm'a: „Cours d'analyse".

Przechodząc od ostatniego równania do granic, otrzymamy

$$d\,(F+c) = dF,$$

czyli, że, *różniczka nie zmienia się, jeżeli do funkcyi dodamy stałą dowolną.* O funkcyi peryodycznej w granicy mowy być nie może, gdyż nieskończenie, małe przyrostki znikają.

Oprócz tego, widocznem jest

$$\frac{\Delta\,(F+c)}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

stąd w granicy będzie:

$$\frac{d\,(F+c)}{dx} = \frac{dF}{dx}$$

czyli, *pochodna nie zmienia się, jeżeli do funkcyi dodamy stałą.*

Z twierdzenia III mamy

$$\Delta^k\,(a\,F) = a\,\Delta^k\,F,$$

skąd w granicy będzie

$$d^k\,(a\,F) = a\,d^k\,F.$$

Podobnie dla pochodnej

$$\frac{\Delta^k\,(a\,F)}{\Delta x^k} = a\,\frac{\Delta^k\,F}{\Delta x^k},$$

czyli w granicy

$$\frac{d^k\,(a\,F)}{dx^k} = a\,\frac{d^k\,F}{dx^k}.$$

Widzimy więc, że *pochodna iloczynu funkcyi przez stałą równa się iloczynowi stałej przez pochodną tego samego rzędu funkcyi.* To samo mamy i dla różniczki.

Z twierdzenia IV-go wnioskujemy, że, mając daną sumę

$$s = F_1\,(x) + F_2\,(x) + \ldots + F_n\,(x),$$

otrzymamy różnicę k-go rzędu

$$\Delta^k s = \Delta^k F_1 + \Delta^k F_2 + \ldots + \Delta^k F_n,$$

stąd w granicy będzie

$$d^k s = d^k F_1 + d^k F_2 + \ldots + d^k F_n.$$

Podobnie dla pochodnych będzie także

$$\frac{\Delta^k s}{\Delta x^k} = \frac{\Delta^k F_1}{\Delta x^k} + \frac{\Delta^k F_2}{\Delta x^k} + \ldots + \frac{\Delta^k F_n}{\Delta x^k}$$

w granicy

$$\frac{d^k s}{dx^k} = \frac{d^k F_1}{dx^k} + \frac{d^k F_2}{dx^k} + \ldots + \frac{d^k F_n}{dx^k}.$$

Tak więc, *pochodna sumy równa się sumie pochodnych tego samego rzędu.* Podobnie będzie i dla różniczki.

Ażeby wyprowadzić pochodną i różniczkę iloczynu, dla łatwiejszego zrozumienia weźmiemy nasamprzód różnicę rzędu 1-go. W rozdziale poprzedzającym otrzymaliśmy

(1) $$\Delta (f.F) = f\,\Delta F + F.\Delta f + \Delta f.\Delta F.$$

Gdy stąd przejdziemy wprost do granicy, natenczas dla różniczki wzór będzie taki

(j) $$d\,(f.F) = f.dF + F.df.$$

Ostatni wyraz po drugiej stronie (l) musi zniknąć, jako nieskończenie mała rzędu 2-go.

Dla pochodnej będzie związek

(m) $$\frac{\Delta (f.F)}{\Delta x} = f\frac{\Delta F}{\Delta x} + F\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}.\Delta F,$$

który otrzymaliśmy z poprzedzającego (l), dzieląc wszystkie wyrazy przez Δx. Przechodząc od ostatniego związku do granic, mamy

$$\frac{d\,(f.F)}{dx} = f\frac{dF}{dx} + F\frac{df}{dx},$$

ostatni wyraz w (m) znika, ponieważ *pochodna* jest ilością skończoną i nie może zawierać nieskończenie małej. Różniczkę iloczynu możemy także otrzymać z pochodnej, mnożąc tę ostatnią przez dx.

Dla różnicy rzędu 2-go mieliśmy wzór

$$\Delta^2 (f.F) = f\,\Delta^2 F + 2\,\Delta f.\Delta F + F\,\Delta^2 f + 2\,\Delta f.\Delta^2 F + 2\,\Delta^2 f.\Delta F + \Delta^2 f.\Delta^2 F,$$

skąd, dzieląc przez Δx^2, otrzymamy

$$\frac{\Delta^2 (f.F)}{\Delta x^2} = f\frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} + 2\frac{\Delta f}{\Delta x}.\frac{\Delta F}{\Delta x} + F\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2} + 2\,\Delta f\frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} + 2\frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}\Delta F + \frac{\Delta^2 f}{\Delta x^2}.\Delta^2 F. \tag{n}$$

Po przejściu do granicy będzie widocznie

$$\frac{d^2 (f.F)}{dx^2} = f\frac{d^2 F}{dx^2} + 2\frac{df}{dx}.\frac{dF}{dx} + F\frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Te zaś wyrazy w równaniu (n), które zawierają ilości nieskończenie małe, zniknąć muszą. Podobny wzór będzie dla różniczki rzędu 2-go, gdy pomnożymy pochodną, wyżej napisaną, przez dx^2. Taką samą drogą z wzoru (D), rozd. I, przedstawiającego k-ą różnicę iloczynu, otrzymamy pochodnę k-go rzędu, za pomocą metody granic

$$\frac{d^k (f.F)}{dx^k} = f\frac{d^k F}{dx^k} + k\frac{df}{dx}\frac{d^{k-1}F}{dx^{k-1}} + \frac{k(k-1)}{1.2}\frac{d^2 f}{dx^2}\frac{d^{k-2}F}{dx^{k-2}} + \ldots + k\frac{d^{k-1}f}{dx^{k-1}}\frac{dF}{dx} + F\frac{d^k f}{dx^k}.$$

Jestto znany wzór Leibnitz'a.

Z prawideł różniczkowania iloczynów można łatwo wyprowadzić odpowiednie prawidło dla *ilorazu*. Niech będzie dany iloraz dwóch funkcyj zmiennej niezależnej x

$$\frac{f}{F}.$$

Możemy napisać tożsamość

$$f = \frac{f}{F}.F;$$

różniczkując według prawidła, dowiedzionego dla iloczynu, będziemy mieli

$$\frac{df}{dx} = F\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{F}\right) + \frac{f}{F}\frac{dF}{dx},$$

skąd wypada wprost

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{F}\right) = \frac{F\frac{df}{dx} - f\frac{dF}{dx}}{F^2}.$$

Jestto pochodna ilorazu. Mnożąc pochodną przez dx, otrzymamy podobny wzór dla różniczki.

§ 4. *Wyrażenia nieoznaczone.*

Odróżniamy dwa typy główne wyrażeń nieoznaczonych. Postać symboliczna pierwszego typu jest $\frac{0}{0}$, drugiego zaś 1^∞.

Niech będzie dany ułamek

$$\left.\frac{f(x)}{F(x)}\right|_{x=a} = \frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0}.$$

Ażeby odnaleźć prawdziwą wartość powyższego ułamku, weźmy

$$\frac{f(a+\varepsilon)}{F(a+\varepsilon)},$$

gdzie ε oznacza ilość dowolnie małą.

Stosując do licznika i mianownika wzór Taylor'a, będziemy mieli

$$\frac{f(a+\varepsilon)}{F(a+\varepsilon)} = \frac{f(a) + \varepsilon f'(a) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} f''(a) + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} f'''(a) + \dots}{F(a) + \varepsilon F'(a) + \frac{\varepsilon^2}{1.2} F''(a) + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} F'''(a) + \dots}.$$

Ponieważ jednak według założenia mamy

$$f(a) = F(a) = 0,$$

więc będzie po skróceniu przez ε

$$\frac{f(a+\varepsilon)}{F(a+\varepsilon)} = \frac{f'(a) + \frac{\varepsilon}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \ldots}{F'(a) + \frac{\varepsilon}{1 \cdot 2} F''(a) + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'''(a) + \ldots}.$$

Kładąc w powyższem $\varepsilon = 0$, otrzymamy

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Jestto szukana wartość danego wyrażenia nieoznaczonego.

Jeżeli $f'(a)$ i $F'(a)$ nie są zerami, natenczas wyrażenie nieoznaczone nazywać będziemy *jednokrotnie nieoznaczonem*. Gdyby $f'(a)$ i $F'(a)$ były równe zerom, w tym przypadku będzie widocznie

(p) $$\frac{f'(a)}{F'(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)};$$

dane wyrażenie będziemy nazywać *dwukrotnie nieoznaczonem*, jeżeli ma miejsce związek (p) i $f''(a)$, $F''(a)$ nie równe zeru.

Dalej, gdyby i $f''(a) = F''(a) = 0$, natenczas jest widocznem, że

$$\frac{f''(a)}{F''(a)} = \frac{f'''(a)}{F'''(a)}.$$

Jeżeli $f'''(a)$ i $F'''(a)$ nie będą równe zeru, w tym przypadku ułamek $\frac{f'''(a)}{F'''(a)}$ będzie przedstawiać prawdziwą wartość danego wyrażenia, które nazywać będziemy *trzykrotnie nieoznaczonem* i t. d.

Wyrażenia nieoznaczone drugiego typu mają kształt

$$u = [F(x)]^{f(x)}.$$

Dajmy, że dla pewnej wartości $x = a$ będzie

$$F(a) = 1, \quad f(a) = \infty$$

i wskutek tego $u = 1^\infty$.

Ażeby znaleść prawdziwą wartość danego wyrażenia, koniecznem jest przejście do logarytmu

$$\lg u = f(x) \lg F(x)\Big|_{x=a},$$

czyli

$$\lg u = \frac{\lg F(a)}{\frac{1}{f(a)}} = \frac{0}{0}.$$

W dalszym ciągu stosujemy prawidło, dowiedzione dla wyrażeń typu $\frac{0}{0}$ i, znalazłszy prawdziwą wartość

$$\lg u = Q,$$

będziemy mieli widocznie

$$u = e^Q.$$

Wszelkie inne wyrażenia nieoznaczone możemy zawsze doprowadzić do dwóch typów głównych, powyżej wzmiankowanych.

§ 5. *Funkcye wielu zmiennych.*

Gdy mamy daną funkcyę wielu zmiennych niezależnych

$$f = f(x, y, z, \ldots),$$

natenczas możemy ustanowić ściśle pojęcia *pochodnej częściowej* rzędu 1-go względem pewnej zmiennej, lub pochodnych częściowych rzędów wyższych względem kilku zmiennych, lub względem wszystkich zmiennych. Pochodne te przedstawiają we wszystkich własnościach zupełne podobieństwo do pochodnych funkcyi jednej zmiennej niezależnej; odrębnych własności te pochodne wcale nie posiadają, możnaby więc nazywać je wprost *pochodnemi* funkcyj wielu zmiennych, bez dodawania wyrazu *częściowe* lub *cząstkowe*. Dla funkcyj wielu zmiennych niezależnych możemy także określić pojęcie *różniczki zupełnej*, która będzie ściśle odpowiadać różniczce funkcyi jednej zmiennej, oprócz tego będziemy jeszcze odróżniać pojęcie *różniczki częściowej* lub *cząstkowej*, która odpowiadać będzie pochodnej, wziętej względem jednej, lub kilku zmiennych.

Dajmy nasamprzód funkcyę dwóch zmiennych niezależnych

$$f = f(x, y).$$

Różniczką zupełną powyższej funkcyi jest granica

$$df = \lim \Delta f = \lim \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)\right], \tag{q'}$$

gdy Δx wraz z Δy zdążają do zera.

Z wzoru (24) *teoryi różnic* otrzymujemy wprost

$$(q'') \qquad \Delta f = \frac{\Delta_x f}{\Delta x} \, . \, \Delta x + \frac{\Delta_y f}{\Delta y} \, . \, \Delta y + \frac{\Delta^2_{x,y} f}{\Delta x \, . \, \Delta y} \, \Delta x \, . \, \Delta y.$$

Przeszedłszy do granic, będziemy mieli

$$(q) \qquad df = \frac{df}{dx} \, dx + \frac{df}{dy} \, dy \, .$$

Ostatni wyraz musi zniknąć, jako nieskończenie mała rzędu 2-go. Wzór (q) jestto *różniczka zupełna* rzędu 1-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych. Wyraz oddzielny

$$\frac{df}{dx} \, dx = d_x f$$

nazywamy *różniczką częściową* względem zmiennej x. Podobnie wyraz drugi

$$\frac{df}{dy} \, dy = d_y f$$

nazywamy *różniczką częściową* względem zmiennej y. Wyraz, znikający w powyższem (q)

$$\frac{d^2 f}{dx \, dy} \, dx \, dy = d^2_{x,y} f$$

nazywać będziemy *różniczką częściową rzędu 2-go* względem zmiennych x i y.

W teoryi różnic (23) dowiedliśmy prawa symbolów

$$\Delta^2_{x,y} f = \Delta^2_{y,x} f \, .$$

więc i w granicy być musi także

$$d^2_{x,y} f = d^2_{y,x} f \, ,$$

skąd wypada widocznie

$$\frac{d^2 f}{dx \, dy} = \frac{d^2 f}{dy \, dx} \, .$$

Wyjaśnimy poniżej, co rozumieć należy pod pochodnemi częściowemi.

$$\frac{df}{dx} = \lim \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim \left.\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\right|_{\Delta x = 0},$$

$$\frac{df}{dy} = \lim \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim \left.\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right|_{\Delta y = 0},$$

$$\frac{d^2 f}{dx\, dy} = \lim \frac{\Delta_{x,y} f}{\Delta x\, \Delta y}$$

$$= \lim \left.\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x, y)}{\Delta x \,.\, \Delta y}\right|_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y = 0}}.$$

Dla znalezienia wartości pierwszych dwóch pochodnych granice odnajdują się sposobem zwykłym. Ażeby znaleść granicę

$$\text{(r)} \qquad \lim \frac{\Delta_{x,y} f}{\Delta x \,.\, \Delta y}$$

szukać należy nasamprzód granicy względem Δx, uważając Δy za ilość stałą, potem dopiero szukamy drugi raz granicy względem Δy. Istotnie, biorąc w powyższem pochodnę licznika i mianownika względem ilości Δx będziemy mieli

$$\frac{\dfrac{df(x+\Delta x, y+\Delta y)}{dx} \cdot \dfrac{dx}{\Delta x} - \dfrac{df(x+\Delta x, y)}{dx} \cdot \dfrac{dx}{\Delta x}}{\Delta y}.$$

Przypuszczając tutaj, że Δx dąży do zera, będzie

$$\frac{\dfrac{df(x, y+\Delta y)}{dx} - \dfrac{df(x, y)}{dx}}{\Delta y}.$$

Gdy Δy dąży do zera, natenczas ułamek ostatni będzie $\frac{0}{0}$, biorąc znowu pochodne licznika i mianownika względem Δy, otrzymamy

$$\frac{d^2 f(x, y+\Delta y)}{dx\, dy} \; \frac{dy}{\Delta y}$$

czyli, przyjmując Δy dążącem nieograniczenie do zera, będzie

$$\frac{d^2 f(x, y)}{dx\, dy}.$$

Jestto prawdziwa wartość stosunku nieoznaczonego (r), gdy Δx i Δy zdążają do zera.

Z wzoru (26), który otrzymaliśmy w teoryi różnic, mamy

$$\Delta^2 f = \frac{\Delta^2{}_{x,x} f}{\Delta x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\Delta^2{}_{x,y} f}{\Delta x \,.\, \Delta y} \,.\, \Delta x \,.\, \Delta y + \frac{\Delta^2{}_{y,y} f}{\Delta y^2} \Delta y^2 + 2 \frac{\Delta^3{}_{x,x,y} f}{\Delta x^2 \, \Delta y} \Delta x^2 \,.\, \Delta y$$
$$+ 2 \frac{\Delta^3{}_{y,y,x} f}{\Delta y^2 \,.\, \Delta x} \Delta y^2 \,.\, \Delta x + \frac{\Delta^4{}_{x,x,y,y} f}{\Delta x^2 \,.\, \Delta y^2} \Delta x^2 \,.\, \Delta y^2 \,.$$

Przeszedłszy do granic, otrzymamy różniczkę zupełną rzędu 2-go

$$\text{(t)} \qquad d^2 f = \frac{d^2 f}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2 f}{dx\, dy} dx\, dy + \frac{d^2 f}{dy^2} dy^2 \,.$$

Pozostałe wyrazy znikają, jako nieskończenie małe rzędów wyższych. Dla różnic mieliśmy prawo symbolów (27)

$$\Delta^3{}_{x,x,y} f = \Delta^3{}_{y,x,x} f, \quad \Delta^3{}_{y,y,x} f = \Delta^3{}_{x,y,y} f, \quad \Delta^4{}_{x,x,y,y} f = \Delta^4{}_{y,y,x,x} f$$

podobnie także będzie w granicach dla odpowiednich różniczek

$$d^3{}_{x,x,y} f = d^3{}_{y,x,x} f, \quad d^3{}_{y,y,x} f = d^3{}_{x,y,y} f, \quad d^4{}_{x,x,y,y} f = d^4{}_{y,y,x,x} f$$

skąd wypada, że

$$\frac{d^3 f}{dx^2\, dy} = \frac{d^3 f}{dy\, dx^2}, \quad \frac{d^3 f}{dy^2\, dx} = \frac{d^3 f}{dx\, dy^2}, \quad \frac{d^4 f}{dx^2\, dy^2} = \frac{d^4 f}{dy^2\, dx^2} \,.$$

Takim samym sposobem, jak powyżej, z wzoru (33), który przedstawia k-tą różnicę, przechodzimy do granic:

$$d^k f = \frac{d^k f}{dx^k} dx^k + k \frac{d^k f}{dx^{k-1}\, dy} dx^{k-1}\, dy + \frac{k(k-1)}{1 \,.\, 2} \frac{d^k f}{dx^{k-2} dy^2} dx^{k-2} dy^2 + \ldots$$
$$\ldots + k \frac{d^k f}{dx\, dy^{k-1}} dx\, dy^{k-1} + \frac{d^k f}{dy^k} dy^k \,.$$

Jestto wzór, który przedstawia *różniczkę zupełną rzędu* k-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych.

W przypadku szczególnym, gdy mamy jedną zmienną niezależną t

$$f = f(x, y),$$
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

wzory poprzedzające będą miały kształt prostszy.

Dzieląc wszystkie wyrazy wzoru (q) przez dt, otrzymamy

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{u}$$

Tutaj dla odróżnienia piszemy ∂ zamiast d, gdyż znaczenia pochodnych $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ są innego rodzaju, aniżeli $\frac{df}{dx}$ i $\frac{df}{dy}$, pochodnych w całem znaczeniu tego wyrazu.

W szczególnym przypadku, gdy będzie

$$f = f(t, y), \quad y = F(t),$$

natenczas w poprzedzającym wzorze pochodnej kładziemy $x = t$, wskutek tego będzie:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{w}$$

Chcąc dalej otrzymać drugą pochodną wyrażenia (u), należy różniczkować poraz drugi według tego samego prawidła

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt}$$

Po wykonaniu wskazanych działań i redukcyi, otrzymamy

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2},$$

gdzie druga potęga dwumianu w nawiasach ma znaczenie symboliczne, co znaczy, że potęgi ilości $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ należy zastępować odpowiedniemi rzędami pochodnych. Przyjmując $x = t$, otrzymamy drugą pochodną dla przypadku (w) w kształcie:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

W teoryi różnic wyprowadziliśmy wzór (34)

$$f(x+n\Delta x, y+n\Delta y) = f(x, y) + n\Delta f + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 f + \ldots + \Delta^n f.$$

Zastąpiwszy w powyższem $\Delta f, \Delta^2 f, \ldots$ ich wartościami w różnicach częściowych, będziemy mieli

$$f(x+n\Delta x, y+n\Delta y) = f(x,y) + n\left[\frac{\Delta_x f}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta_y f}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta^2_{x,y} f}{\Delta x\,\Delta y}\Delta x\,\Delta y\right]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left[\frac{\Delta^2_{x,x} f}{\Delta x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\Delta^2_{x,y} f}{\Delta x\,\Delta y}\Delta x\,\Delta y + \frac{\Delta^2_{y,y} f}{\Delta y^2}\Delta y^2 + 2\frac{\Delta^3_{x,x,y} f}{\Delta x^2\,.\,\Delta y}\Delta x^2\,\Delta y\right.$$

$$\left. + 2\frac{\Delta^3_{x,y,y} f}{\Delta x\,\Delta y^2}\Delta x\,\Delta y^2 + \frac{\Delta^4_{x,x,y,y} f}{\Delta x^2\,\Delta y^2}\Delta x^2\,\Delta y^2\right] + \ldots.$$

Przyjmując tutaj $n=\infty$, $n\Delta x = h$, $n\Delta y = k$, otrzymamy

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\left(\frac{df}{dx} + \varepsilon_1\right) + k\left(\frac{df}{dy} + \varepsilon_2\right) + h\,\Delta y\left(\frac{d^2f}{dx\,dy} + \varepsilon_3\right)$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2}\left[h^2\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \varepsilon_4\right) + 2hk\left(\frac{d^2f}{dx\,dy} + \varepsilon_3\right) + k^2\left(\frac{d^2f}{dy^2} + \varepsilon_5\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2}\left[2h^2\left(\frac{d^3f}{dx^2\,dy} + \varepsilon_6\right)\Delta y + 2k^2\left(\frac{d^3f}{dx\,dy^2} + \varepsilon_7\right)\Delta x\right.$$

$$\left. + hk\left(\frac{d^4f}{dx^2\,dy^2} + \varepsilon_8\right)\Delta x\,\Delta y\right] + \ldots.$$

gdzie wszystkie ilości ε znikają jednocześnie z Δx i Δy. Gdy teraz przejdziemy od wyżej napisanego wzoru do granic, natenczas będzie

$$\text{(v)}\quad \begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x,y) + h\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy} \\ &+ \frac{1}{1\,.\,2}\left[h^2\frac{d^2f}{dx^2} + 2hk\frac{d^2f}{dx\,dy} + k^2\frac{d^2f}{dy^2}\right] + \ldots + R, \end{aligned}$$

gdzie R oznacza granicę następującej sumy:

$$R = \lim\left[h\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 + h\,\Delta y\frac{d^2f}{dx\,dy} + \frac{1}{1\,.\,2}(h^2\varepsilon_4 + 2hk\,\varepsilon_3 + k^2\varepsilon_5)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1\,.\,2}\left(2h^2\,\Delta y\frac{d^3f}{dx^2\,dy} + 2k^2\,\Delta x\frac{d^3f}{dx\,dy^2}\right) + \ldots\right].$$

Ponieważ wiemy, że granicą sumy nieskończenie wielkiej liczby składników, z których każdy jest nieskończenie małą rzędu 1-go, może być wielkość oznaczona R, więc też, przechodząc do granic, piszemy we wzorze Taylora (v) wyraz dopełniający R. Posiadamy kilka wyrażeń, przedstawiających pod rozmaitemi postaciami resztę wzoru Taylora. Poniżej wyłożymy, jaką drogą można uniknąć badania reszt. Przypuśćmy, że wybraliśmy taką funkcyę, dla której szereg, napisany po drugiej stronie równości (v), jest zbieżny i oprócz tego, że wyraz dopełniający staje się zerem. W takim przypadku widzimy, że pierwsza strona równości (v) pozostaje bez żadnej zmiany, jeżeli x zastąpimy przez przyrostek h i naodwrót h przez zmienną x, a także, gdy zmienną y zastąpimy przez przyrostek k, tudzież k przez y. Wniosek stąd taki, że ta sama własność powinna być i po drugiej stronie równości, a więc, jeżeli pierwsza strona ma być tem samem, co i druga, czyli, jeżeli rozwinięcie ściśle odnosi się do funkcyi, napisanej po pierwszej stronie, natenczas powinno być także

$$
\text{(z)} \quad \begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(h, k) + x\left(\frac{df}{dx}\right)_{h,k} + y\left(\frac{df}{dy}\right)_{h,k} \\ &+ \frac{1}{1\,.\,2}\left[x^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{h,k} + 2xy\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)_{h,k} + y^2\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_{h,k}\right] + \ldots.
\end{aligned}
$$

Wzór powyższy jest ogólniejszym od wzoru Maclaurin'a i, ażeby przejść stąd do szeregu Maclaurin'a, należy tylko przyjąć $h = k = 0$. Wprowadzamy dalej wniosek, że dla tych wszystkich funkcyj ciągłych, dla których szereg napisany w postaci (v) jest zbieżny, gdy h i k przybierają wartości dowolnie małe dodatne lub odjemne, a także jeżeli i szereg w postaci (z) dla takich samych wartości h i k pozostaje również zbieżny; natenczas dla tych funkcyj szereg Maclaurin'a będzie mieć zawsze miejsce bez badania reszt. Przeciwnie, gdyby sprawdzenie zbieżności w obu wzmiankowanych postaciach było zbyt trudnem, nie pozostanie nam nic innego, jak roztrząsać wyraz dopełniający.

Kładąc we wzorze (z)

$$
x + h = z, \quad y + k = u,
$$

otrzymamy odmienną postać szeregu Taylora:

$$
\begin{aligned} f(z, u) &= f(h, k) + (z-h)\left(\frac{df}{dz}\right)_{h,k} + (u-k)\left(\frac{df}{du}\right)_{h,k} \\ &+ \frac{1}{1\,.\,2}\left[(z-h)^2\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)_{h,k} + 2(z-h)(u-k)\left(\frac{d^2f}{dz\,du}\right)_{h,k} + (u-k)^2\left(\frac{d^2f}{du^2}\right)_{h,k}\right] + \ldots
\end{aligned}
$$

Wzór ten jest daleko ogólniejszy od wzoru Maclaurin'a. Ilości dowolne h i k możemy wybrać podług upodobania; wskutek tego możemy szereg ostatni uczynić *szybko-zbieżnym*.

Twierdzenie III w zastosowaniu do funkcyi dwóch zmiennych niezależnych będzie

$$\Delta^k (af) = a \Delta^k f,$$

gdzie a oznacza *stałą*. Podobnie i w granicy będziemy mieli

$$d^k (af) = a\, d^k f.$$

Jestto ta sama własność, którą mieliśmy dla funkcyi jednej zmiennej niezależnej; tylko nastąpiła taka zmiana, że w powyższem wzorze f ma znaczenie

$$f = f(x, y).$$

Dalej dla sumy

$$s = F_1 (x, y) + F_2 (x, y) + \ldots + F_n (x, y)$$

z twierdzenia IV wypada różnica

$$\Delta^k s = \Delta^k F_1 + \Delta^k F_2 + \ldots + \Delta^k F_n.$$

W granicy będzie to samo prawo symbolów

$$d^k s = d^k F_1 + d^k F_2 + \ldots + d^k F_n.$$

Podobne twierdzenie mieliśmy już dla sumy funkcyj jednej zmiennej niezależnej.

Dla iloczynu dwóch funkcyj zmiennych niezależnych x i y mieliśmy w *teoryi różnic* wzór (D). Przechodząc do granic, otrzymamy różniczkę k-go rzędu iloczynu, w kształcie:

$$d^k (f . F) = f\, d^k F + k\, df . d^{k-1} F + \frac{k\,(k-1)}{1 . 2} d^2 f . d^{k-2} F + \ldots + F\, d^k f.$$

Pozostałe wyrazy znikają, jako nieskończenie małe rzędów wyższych, aniżeli k-go. W ostatnim wzorze f oznacza $f(x, y)$, a F ma znaczenie $F(x, y)$. Dalej, weźmy funkcyę trzech zmiennych niezależnych

$$F = F(x, y, z).$$

Różniczką zupełną napisanej funkcyi jest granica

$$dF = \lim \Delta F = \lim \left[F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z) \right],$$

gdy Δx, Δy, Δz zdążają nieograniczenie do zera.

W przypadku funkcyi trzech zmiennych niezależnych mieliśmy dla *różnicy zupełnej* wzór (28). Wzór wzmiankowany możemy napisać tak

$$
(w)\quad
\begin{aligned}
\Delta F = {} & \frac{\Delta_x F}{\Delta x}\Delta x + \frac{\Delta_y F}{\Delta y}\Delta y + \frac{\Delta_z F}{\Delta z}\Delta z + \frac{\Delta^2{}_{x,y}F}{\Delta x\,\Delta y}\Delta x\,.\,\Delta y + \frac{\Delta^2{}_{x,z}F}{\Delta x\,\Delta z}\Delta x\,.\,\Delta z \\
& + \frac{\Delta^2{}_{y,z}F}{\Delta y\,.\,\Delta z}\Delta y\,.\,\Delta z + \frac{\Delta^3{}_{x,y,z}F}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y\,.\,\Delta z\,.
\end{aligned}
$$

Przechodząc do granic, przypuszczamy, że Δx, Δy, Δz są nieskończenie małemi i natenczas będziemy mieli *różniczkę zupełną rzędu 1-go* w kształcie

$$
dF = \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz\,.
$$

Jak się znajdują granice stosunków

$$
\lim \frac{\Delta^2{}_{x,y}F}{\Delta x\,\Delta y}\,,
$$

o tem mówiliśmy, rozpatrując funkcye pochodne w przypadku dwóch zmiennych niezależnych. Tutaj nadmienimy jeszcze, że

$$
\frac{d^3F}{dx\,dy\,dz} = \lim \frac{\Delta^3{}_{x,y,z}F}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}
$$

$$
\begin{aligned}
= \lim \Bigg[& \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x+\Delta x, y, z+\Delta z) - F(x+\Delta x, y+\Delta y, z)}{\Delta x\,.\,\Delta y\,.\,\Delta z} \\
& + \frac{F(x,y,z+\Delta z) + F(x, y+\Delta y, z) + F(x+\Delta x, y, z) - F(x,y,z)}{\Delta x\,.\,\Delta y\,.\,\Delta z} \Bigg]_{\Delta x=0,\,\Delta y=0,\,\Delta z=0}.
\end{aligned}
$$

Dla znalezienia prawdziwej wartości powyższego stosunku szukamy nasamprzód granicy względem Δx, uważając Δy i Δz za stałe; następnie szukamy granicy poraz drugi względem Δy, uważając Δz jako stałą. Nakoniec szukamy granicy względem Δz. Podobnie, jak to uczyniliśmy w przypadku dwóch zmiennych niezależnych, moglibyśmy i tutaj dowieść, że ostateczną wartością granicy być musi pochodna:

$$
\frac{d^3F}{dx\,dy\,dz}\,.
$$

Z prawa, dotyczącego porządku różnicowań (37)

$$
\Delta^2{}_{x,y}F = \Delta^2{}_{y,x}F,\quad \Delta^2{}_{x,z}F = \Delta^2{}_{z,x}F,\quad \Delta^3{}_{x,y,z}F = \Delta^3{}_{y,x,z}F = \Delta^3{}_{y,z,x}\ \text{i t. d.}
$$

wypływa w granicy prawo o porządku różniczkowań

$$d^2_{x,y}F = d^2_{y,x}F,\quad d^2_{x,z}F = d^2_{z,x}F,\quad d^3_{x,y,z}F = d^3_{y,x,z}F,\quad \text{i t. d.}$$

skąd będzie widocznie

$$\frac{d^2F}{dx\,dy} = \frac{d^2F}{dy\,dx},\quad \frac{d^2F}{dx\,dz} = \frac{d^2F}{dz\,dx},\quad \frac{d^3F}{dx\,dy\,dz} = \frac{d^3F}{dy\,dx\,dz}\quad \text{i t. d.}$$

Dla różnicy zupełnej rzędu 2-go mieliśmy wzór (40), który możemy napisać w kształcie:

$$\Delta^2 F = \frac{\Delta^2_{x^{(2)}} F}{\Delta x^2}\Delta x^2 + 2\,.\frac{\Delta^2_{x,y} F}{\Delta x\,.\,\Delta y}\Delta x\,.\,\Delta y + \frac{\Delta^2_{y^{(2)}} F}{\Delta y^2}\Delta y^2 + 2\,.\frac{\Delta^2_{x,z}F}{\Delta x\,\Delta z}\Delta x\,.\Delta z$$
$$+ 2\,.\frac{\Delta^2_{y,z} F}{\Delta y.\Delta z}\Delta y\,.\,\Delta z + \frac{\Delta^2_{z^{(2)}} F}{\Delta z^2}\Delta z^2 + 2\,.\frac{\Delta^3_{x^{(2)},y} F}{\Delta x^2.\Delta y}\Delta x^2.\Delta y + 2.\frac{\Delta^3_{x^{(2)},z} F}{\Delta x^2\,.\,\Delta z}\Delta x^2\,\Delta z$$
$$+ 2\,.\frac{\Delta^3_{x,y^{(2)}} F}{\Delta x\,\Delta y^2}\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y^2 + 2\,.\frac{\Delta^3_{y^{(2)},z} F}{\Delta y^2\,\Delta z}\,.\,\Delta y^2\,.\,\Delta z + 2\,.\frac{\Delta^3_{x,z^{(2)}} F}{\Delta x\,\Delta z^2}\,.\,\Delta x\,.\,\Delta z^2$$
$$+ 2\,.\frac{\Delta^3_{y,z^{(2)}} F}{\Delta y\,\Delta z^2}\,.\,\Delta y\,.\,\Delta z^2 + 6\,.\frac{\Delta^3_{x,y,z} F}{\Delta x.\Delta y.\Delta z}\Delta x\,.\,\Delta y\,.\,\Delta z + \frac{\Delta^4_{x^{(2)},y^{(2)}} F}{\Delta x^2\,.\,\Delta y^2}\Delta x^2\,.\,\Delta y^2$$
$$+ \frac{\Delta^4_{y^{(2)},z^{(2)}} F}{\Delta y^2\,.\,\Delta z^2}\,.\,\Delta y^2\,.\,\Delta z^2 + \frac{\Delta^4_{x^{(2)},z^{(2)}} F}{\Delta x^2\,.\,\Delta z^2}\,.\,\Delta x^2\,.\,\Delta z^2 + 4\,.\frac{\Delta^4_{x^{(2)},y,z} F}{\Delta x^2\,\Delta y.\Delta z}\,.\,\Delta x^2\,.\,\Delta y\,.\,\Delta z$$
$$+ 4\,.\frac{\Delta^4_{x,y^{(2)},z} F}{\Delta x.\Delta y^2.\Delta z}\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y^2\,.\,\Delta z + 4\,.\frac{\Delta^4_{x,y,z^{(2)}} F}{\Delta x\,.\,\Delta y\,.\,\Delta z^2}\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y\,.\,\Delta z^2$$
$$+ 2\,.\frac{\Delta^5_{x^{(2)},y^{(2)},z} F}{\Delta x^2.\,\Delta y^2.\,\Delta z}\Delta x^2\;\Delta y^2\,.\Delta z + 2\,.\frac{\Delta^5_{x^{(2)},y,z^{(2)}} F}{\Delta x^2.\Delta y\,.\,\Delta z^2}\Delta x^2 : \Delta y\,.\,\Delta z^2$$
$$+ 2\,.\frac{\Delta^5_{x,y^{(2)},z^{(2)}} F}{\Delta x.\Delta y^2.\Delta z^2}\,.\,\Delta x\,.\,\Delta y^2\,.\,\Delta z^2 + \frac{\Delta^6_{x^{(2)},y^{(2)},z^{(2)}} F}{\Delta x^2.\,\Delta y^2.\,\Delta z^2},\,\Delta x^2\,.\,\Delta y^2\,.\,\Delta z^2\,.$$

Przeszedłszy do granic, otrzymamy wzór różniczki zupełnej rzędu 2-go

$$d^2F = \frac{d^2F}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2F}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2F}{dy^2}dy^2$$
$$+ 2\frac{d^2F}{dx\,dz}dx\,dz + 2\frac{d^2F}{dy\,dz}dy\,dz + \frac{d^2F}{dz^2}dz^2\,.$$

Nieskończenie małe rzędu wyższego ponad 2-gi znikają.

Podobnie przechodzimy łatwo do różniczki zupełnej rzędu 3-go, biorąc odpowiedni wzór różnicy (41). W szczególnym przypadku, gdy będzie dane

$$F = F(x, y, z)$$

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t),$$

wówczas poprzedni wzór różniczki rzędu 1-go będziemy mogli podzielić przez dt

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Jestto pochodna funkcyi złożonej w przypadku jednej zmiennej niezależnej pod pozorem trzech zmiennych. Ażeby otrzymać pochodną rzędu 2-go należy wzór ostatni różniczkować powtórnie, natenczas będzie:

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dF}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dF}{dt}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dF}{dt}\right)\frac{dz}{dt},$$

czyli widocznie

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2},$$

gdzie 2-ga potęga wielomianu w nawiasach ma znaczenie symboliczne, dla ułatwienia pisowni; potęgi ilości $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ należy zastępować odpowiedniemi rzędami. Gdyby był zamiast powyższego przypadek prostszy

$$F = F(t, y, z),$$

$$y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

wówczas we wzorach poprzedzających przyjęlibyśmy $x = t$.

Takim sposobem pierwsza pochodna miałaby kształt

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Podobnym sposobem zmienia się łatwo i kształt pochodnej rzędu 2-go.

Pisaliśmy powyżej tylko wzory pochodnych, jednak samo przez się rozumie się, że odpowiednie różniczki otrzymamy, mnożąc wszystkie wyrazy pochodnych przez dt w pierwszym rzędzie i przez dt^2 w drugim.

W teoryi różnic mieliśmy wzór (42)

$$F(x+n\Delta x, y+n\Delta y, z+n\Delta z) = F(x, y, z) + n\Delta F$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 F + \ldots + \Delta^n F.$$

Zastępując w powyższem różnice zupełne ΔF, $\Delta^2 F$, ... przez ich wartości w różnicach częściowych i, przechodząc następnie do nieskończenie małych, będziemy przypuszczać

$$n\Delta x = h, \quad n\Delta y = k, \quad n\Delta z = l, \qquad n = \infty .$$

Tym sposobem, powtórzywszy rozumowania podobne, jak dla funkcyj dwóch zmiennych niezależnych, otrzymamy znany wzór Taylora

$$F(x+h\ y+k, z+l) = F(x, y, z) + h\frac{dF}{dx} + k\frac{dF}{dy} + l\frac{dF}{dz}$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left[h^2\frac{d^2F}{dx^2} + 2hk\frac{d^2F}{dx\,dy} + k^2\frac{d^2F}{dy^2} + 2hl\frac{d^2F}{dx\,dz} + 2kl\frac{d^2F}{dy\,dz} + l^2\frac{d^2F}{dz^2}\right]$$

$$+ \ldots + R .$$

Dajmy, że szereg, powyżej napisany, jest zbieżny i że wyraz dopełniający staje się zerem; natenczas ponieważ strona pierwsza nie zmienia wcale wartości przy zamianie x na h i h na x, y na k i k na y, z na l tudzież l na z, więc jeżeli rozkład rzetelnie odnosi się do funkcyi, napisanej po pierwszej stronie, to ta sama własność musi mieć miejsce i na drugiej stronie równości, czyli

$$F(x+h, y+k, z+l) = F(h, k, l) + x\left(\frac{dF}{dx}\right)_{h,k,l} + y\left(\frac{dF}{dy}\right)_{h,k,l} + z\left(\frac{dF}{dz}\right)_{h,k,l}$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left[x^2\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{h,k,l} + 2xy\left(\frac{d^2F}{dx\,dy}\right)_{h,k,l} + y^2\left(\frac{d^2F}{dy^2}\right)_{h,k,l} + 2xz\left(\frac{d^2F}{dx\,dz}\right)_{h,k,l}\right.$$

$$\left. + 2yz\left(\frac{d^2F}{dy\,dz}\right)_{h,k,l} + z^2\left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)_{h,k,l}\right] + \ldots$$

Dla prawdziwości twierdzenia Taylor'a konieczną jest zbieżność szeregu w obu napisanych postaciach; oprócz tego, jeżeli zauważymy, że twierdzenie Taylor'a utrzymuje się dla h, k, l dowolnie małych dodatnych i odjemnych, wówczas bezpiecznie możemy przejść do przypadku szczególnego $h = k = l = 0$. Możemy także otrzymać znacznie dogodniejszą postać wzoru, kładąc podobnie, jak to czyniliśmy dla funkcyj dwóch zmiennych

$$x + h = z, \quad y + k = u, \quad z + l = v;$$

w tym przypadku z ostatniego wzoru otrzymujemy

$$F(z,u,v)=F(h,k,l)+(z-h)\left(\frac{dF}{dz}\right)_{h,k,l}+(u-k)\left(\frac{dF}{du}\right)_{h,k,l}+(v-l)\left(\frac{dF}{dv}\right)_{h,k,l}$$

$$+\frac{1}{1\,.\,2}\left[(z-h)^2\left(\frac{d^2F}{dz^2}\right)_{h,k,l}+2(z-h)(u-k)\left(\frac{d^2F}{dz\,du}\right)_{h,k,l}+(u-k)^2\left(\frac{d^2F}{du^2}\right)_{h,k,l}\right.$$

$$\left.+2(z-h)(v-l)\left(\frac{d^2F}{dz\,dv}\right)_{h,k,l}+2(u-k)(v-l)\left(\frac{d^2F}{du\,dv}\right)_{h,k,l}+(v-l)^2\left(\frac{d^2F}{dv^2}\right)_{h,k,l}\right]+\ldots$$

Mając daną funkcyę n zmiennych niezależnych, dowiedliśmy wzoru różnicy zupełnej (43). Przypuściwszy, że symbol Δ oznacza ilości nieskończenie małe, otrzymamy w granicach

$$d\Psi=\sum_{i=1}^{i=n} d_{x_i}\Psi;$$

wszystkie pozostałe wyrazy wzoru (43) przy powyższem założeniu znikają, jako nieskończenie małe rzędu większego ponad pierwszy. Pisząc wzór ostatni bardziej szczegółowo, będziemy mieli

$$(\mathrm{w}') \qquad d\Psi=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{d\Psi}{dx_i}\,dx_i\,.$$

Jestto wzór *różniczki zupełnej* funkcyi n zmiennych niezależnych. Stosując to samo prawidło różniczkowania powtórnie do wzoru (w'), znajdujemy *różniczkę zupełną rzędu 2-go*

$$(\mathrm{v}') \qquad d^2\Psi=\left(\frac{d\Psi}{dx_1}\,dx_1+\frac{d\Psi}{dx_2}\,dx_2+\ldots+\frac{d\Psi}{dx_n}\,dx_n\right)^{(2)}$$

gdzie druga potęga ma tylko znaczenie symboliczne, co znaczy, że potęgi ilości $\frac{d\Psi}{dx_i}$ należy zastępować odpowiedniemi rzędami. Różniczkując jeszcze raz równanie (v'), otrzymujemy *różniczkę zupełną rzędu 3-go*

$$d^3\Psi=\left(\frac{d\Psi}{dx_1}\,dx_1+\frac{d\Psi}{dx_2}\,dx_2+\ldots+\frac{d\Psi}{dx_n}\,dx_n\right)^{(3)}.$$

Taką drogą dochodzimy do wzoru ogólnego

$$d^k\Psi=\left(\frac{d\Psi}{dx_1}\,dx_1+\frac{d\Psi}{dx_2}\,dx_2+\ldots+\frac{d\Psi}{dx_n}\,dx_n\right)^{(k)}.$$

Ażeby dowieść prawdziwości wzoru ostatniego, trzeba go napisać w postaci rozwiniętej i zastosować różniczkowanie zupełne jeszcze raz; wówczas zauważymy, że wzór wzmiankowany utrzymuje się i dla różniczki $d^{k+1}\Psi$ czyli, że jest prawdziwym zawsze.

Gdy pod pozorem n zmiennych wchodzi sposobem niewyraźnym jedna tylko zmienna niezależna t, natenczas będziemy mogli wszystkie wyrazy równania (w′) podzielić przez dt i otrzymamy wyrażenie pochodnej

$$\frac{d\Psi}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

Różniczkując powtórnie względem dt, znajdziemy łatwo

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}\right)^{(2)} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{d^2x_i}{dt^2}.$$

Jestto wyrażenie pochodnej rzędu 2-go, gdy pod pozorem n zmiennych mamy w istocie jedną zmienną niezależną t. Dalej kładąc w obydwóch wzorach, napisanych wyżej, $x_1 = t$, wskutek czego będzie

$$\frac{dx_1}{dt} = 1, \quad \frac{d^2x_1}{dt^2} = 0,$$

otrzymamy przypadek nieco odmienny od powyższego:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt},$$

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}\right)^{(2)} + \sum_{i=2}^{i=n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{d^2x_i}{dt^2}.$$

Wzory te stosują się w przypadku

$$\Psi = \Psi(t, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$
$$x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t), \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t).$$

Od wzoru (17), dowiedzionego najogólniej w teoryi różnic, przechodzimy do odpowiedniego wzoru w rachunku różniczkowym, powtarzając podobne rozumowania, jak dla dwóch i trzech zmiennych. Na tej drodze otrzymamy wzór Taylor'a

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_s + h_s) = f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$$
$$+ h_1 \frac{df}{dx_1} + h_2 \frac{df}{dx_2} + \ldots + h_s \frac{df}{dx_s} + \frac{1}{1.2}\left(h_1 \frac{df}{dx_1} + h_2 \frac{df}{dx_2} + \ldots + h_s \frac{df}{dx_s}\right)^{(2)}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(h_1 \frac{df}{dx_1} + h_2 \frac{df}{dx_2} + \ldots + h_s \frac{df}{dx_s}\right)^{(3)} + \ldots + R.$$

Uwagi nad tym wzorem są zupełnie podobne do tych, jakie czyniliśmy dla jednej, dwóch, etc. zmiennych; unikając zbytecznej rozwlekłości, nie będziemy tutaj przytaczać wspominanych kilkakrotnie uwag. Prawidła różniczkowania sum, iloczynów, ilorazów funkcyj n zmiennych niezależnych są takie same, jak dla funkcyj jednej, dwóch lub więcej zmiennych.

§ 6. *Objaśnienie geometryczne pochodnej.*

Niech będzie dana krzywa MNR (fig. 1), wyrażona równaniem

$$y = f(x).$$

Weźmy na danej krzywej pewien punkt $M(x, y)$; wiemy, że $AM = y$ przedstawia rzędną, której odpowiada odcięta $OA = x$. Dajmy jeszcze na

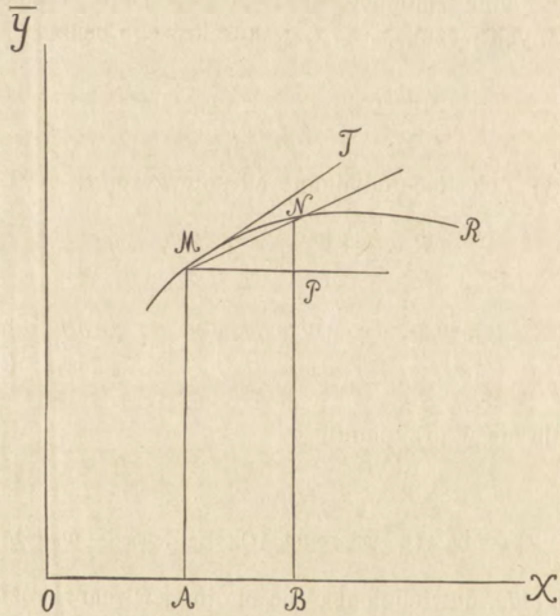


Fig. 1.

tej samej krzywej drugi punkt N, którego rzędna $NB = y + \Delta y$ i odcięta $OB = x + \Delta x$. Takim sposobem na figurze widoczna, że

$$MP = \Delta x \quad \text{i} \quad NP = \Delta y\,.$$

Z trójkąta MNP spostrzegamy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} NMP\,.$$

Przypuśćmy teraz, że punkt N zbliża się nieograniczenie do punktu M, natenczas przyrostki Δy i Δx będą zmniejszać się coraz bardziej i zdążać do zer, lecz mimo to stosunek $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nie może zniknąć lecz zdąża do swej granicy $\frac{dy}{dx}$. Jednocześnie kąt NMP zdąża także do swej granicy $< TMP$ a sieczna NM zbliża się nieograniczenie do stycznej TM. Widzimy więc że w granicy będzie

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} TMP\,.$$

Pochodna równa się stycznej trygonometrycznej kąta, utworzonego pomiędzy styczną w danym punkcie M oraz osią X. Rachunek różniczkowy daje nam możność kreślenia stycznych do wszelkich krzywych, wyrażonych równaniami analitycznemi.

III. Rachunki odwrotne.

Widzieliśmy w rozdziałach poprzedzających, że dla każdej funkcyi danej możemy łatwo napisać jej *różnicę* lub *różniczkę* jakiegokolwiek rzędu. Odwrotnie, gdy mając daną jakąbądź różnicę lub różniczkę funkcyi nieznanej, szukać będziemy samej funkcyi, takie zadanie należeć będzie do rachunku odwrotnego. Podczas, gdy zadanie wprost możemy łatwo rozwiązać dla wszelkich funkcyj, pomyślanych podług upodobania, to jednak zadanie odwrotne staje się bardzo trudnem i bywa możliwem do wykonania pod postacią skończoną tylko w szczególnych przypadkach.

§ 1. *Rachunek sum całkowych.*

Zajmiemy się nasamprzod *rachunkiem sum* czyli rachunkiem odwrotnym względem *rachunku różnic.* Jako symbol rachunku odwrotnego będziemy używać znaku Σ tak, że mając funkcyę

$$f = f(x, y, z, \ldots),$$

możemy napisać tożsamość

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\Delta\Sigma f(x, y, z, \ldots) = \Sigma\,\Delta f \\ &= \Sigma\,[f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)]. \end{aligned}$$

Jestto widoczne, gdyż symbole Σ i Δ oznaczają rachunki względem siebie odwrotne i, będąc razem wzięte, nie mogą nic zmienić. Równość (1) możemy napisać inaczej, oznaczając drugą stronę przez

$$F(x, y, z, \ldots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots);$$

natenczas zamiast (1) będzie

$$\Delta\Sigma f(x, y, z, \ldots) = F(x, y, z, \ldots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots).$$

Stąd widocznie, stosując znowu symbol Σ do obu stron, będziemy mieli

$$\Sigma f(x, y, z, \ldots) = \Sigma F(x, y, z, \ldots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots) + c. \tag{2}$$

W szczególnym przypadku, gdy mamy tylko jedną zmienną niezależną, będzie

$$\Sigma f(x) = \Sigma F(x, \Delta x) + c.$$

We wzorach powyższych f oznacza funkcyę daną, ΣF jestto niewiadoma wartość sumy całkowej, c zaś oznacza stałą dowolną lub dowolną funkcyę peryodyczną, którą, jak wiemy, zawsze dodawać można bez zmiany różnicy.

Widzimy więc, że znaleźć sumę całkową w granicach nieoznaczonych

$$\Sigma f(x, y, z, \ldots)$$

znaczyć będzie to samo, co znaleźć taką funkcyę wszystkich zmiennych niezależnych, tudzież przyrostków stałych $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$, której różnica zupełna rzędu pierwszego równa się funkcyi

$$f(x, y, z, \ldots),$$

napisanej pod znakiem Σ.

Dalej wyprowadzimy kilka twierdzeń zasadniczych dla rachunku sum całkowych.

Napiszmy tożsamość

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots,$$

gdzie dla krótkości piszemy f_i zamiast szczegółowo

$$f_i(x, y, z, \ldots), \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Z powyższej tożsamości wypływa druga tożsamość, widoczna sama przez się:

$$\Delta\Sigma(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots) = \Delta\Sigma f_1 + \Delta\Sigma f_2 + \Delta\Sigma f_3 + \ldots,$$

czyli

$$\Delta\Sigma\,(f_1+f_2+f_3+\ldots)=\Delta\{\Sigma f_1+\Sigma f_2+\Sigma f_3+\ldots\}.$$

Wiemy jednak, że jeżeli różnice rzędu 1-go dwóch jakichkolwiek funkcyj są równe, natenczas same funkcye różnią się między sobą tylko o ilość stałą lub o funkcyę peryodyczną dowolną, będzie więc z poprzedzającego

$$\Sigma\,(f_1+f_2+f_3+\ldots)=\Sigma f_1+\Sigma f_2+\Sigma f_3+\ldots+c.$$

Tutaj ilość c może być opuszczoną zupełnie. Widzimy więc, że, aby zastosować do sumy algebraicznej działanie, wyrażone znakiem Σ, trzeba wykonać wspomniane działanie nad każdym składnikiem z osobna. Oczywista, prawidło, wypowiedziane wyżej, stosuje się bez żadnej zmiany do przypadku szczególnego, gdy mamy sumę funkcyj jednej zmiennej niezależnej.

Dalej napiszmy tożsamość

$$af=af\,(x,y,z,\ldots),$$

gdzie a oznacza stały mnożnik. Będziemy mieli widocznie

$$\Delta\Sigma\,(af)=a\,.\,\Delta\Sigma f,$$

czyli

$$\Delta\Sigma\,(af)=\Delta\,[a\Sigma f],$$

skąd wypada

$$\Sigma\,(af)=a\Sigma f+c.$$

Ilość c może być tutaj opuszczoną. Widzimy więc, że *suma pewnej funkcyi, pomnożonej przez stałą, równa się stałej, pomnożonej przez sumę samej funkcyi.*

Mając dany iloczyn dwóch funkcyj jednej zmiennej niezależnej

$$f\,(x)\,.\,F\,(x),$$

dowiedliśmy w teoryi różnic następującego wzoru:

$$\Delta\,(f\,.\,F)=f\,.\,\Delta F+F\,.\,\Delta f+\Delta f\,.\,\Delta F.$$

Zastosowawszy znak Σ do każdego wyrazu powyższego równania, łatwo otrzymamy

(2a) $$\Sigma f\,\Delta F=f\,.\,F-\Sigma F\,\Delta f-\Sigma\,\Delta f\,.\,\Delta F.$$

Wzór ten może być bardzo pomocnym przy szukaniu wartości sum całkowych.

Sumą podwójną będziemy nazywać wyrażenie:

$$\Sigma\Sigma\, f(x, y, z, \ldots) = \Phi(x, y, z, \ldots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots)$$

$$+ \frac{x}{\Delta x} c_1 + \frac{y}{\Delta y} c_2 + \frac{z}{\Delta z} c_3 + \ldots + c,$$

w którem f oznacza funkcyę daną, Φ oznacza taką funkcyę, której różnica zupełna rzędu drugiego równa się funkcyi danej f. Wyrazy zaś, zawierające ilości dowolne $c_1, c_2, c_3, \ldots, c$ są takie, które, jak dowiedliśmy w rozdziale I, nie zmieniają wcale wartości różnicy rzędu 2-go.

Sumą potrójną

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, f(x, y, z, \ldots)$$

będziemy nazywać taką funkcyę wszystkich zmiennych tudzież stałych dowolnych, której różnica zupełna rzędu trzeciego równa się funkcyi danej f, i t. d.

Zajmiemy się teraz sumami funkcyj jednej zmiennej niezależnej.

Można łatwo znaleść pod postacią skończoną

$$\Sigma f(x),$$

jeżeli $f(x)$ oznacza funkcyę wymierną całkowitą

$$f(x) = A\Sigma\, x^m + B\Sigma\, x^{m-1} + C\Sigma\, x^{m-2} + \ldots + Mx + N.$$

$A, B, C, \ldots$ są ilości stałe, m liczba całkowita.

W tym przypadku będziemy mieli

$$\Sigma f(x) = A\Sigma\, x^m + B\Sigma\, x^{m-1} + C\Sigma\, x^{m-2} + \ldots + M\Sigma\, x + N\Sigma\, x^0;$$

czyli zagadnienie nasze sprowadza się do znalezienia

$$\Sigma\, x^p,$$

gdzie p jest jakakolwiek liczba całkowita lub zero. Ażeby znaleźć wartość Σ, w tym celu zastosujemy wzór Taylora w kształcie:

$$\Delta f(x) = \Delta x \,.\, f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2} \,.\, f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, f'''(x) + \ldots$$

Stosując tutaj znak Σ do każdego wyrazu, otrzymamy

$$(3) \quad f(x) = \Delta x \,.\, \Sigma f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2} \,.\, \Sigma f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, \Sigma f'''(x) + \ldots$$

Szereg powyższy musi być skończonym, gdyż, przyjmując $f(x) = x^p$, p-ta pochodna będzie równą $1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-1)\,p$ i na wyrazie, który zawiera ostatnią pochodną, szereg kończy się.

Jeżeli założymy nasamprzód

$$f(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

natenczas z wzoru (3) otrzymamy

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} = \Delta x \, \Sigma \, x^m + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2} \,.\, m \, \Sigma \, x^{m-1} + \frac{(\Delta x)^3}{1\,.\,2\,.\,3} \,.\, m(m-1) \, \Sigma \, x^{m-2} + \ldots$$

Kładąc dalej we wzorze (3)

$$f(x) = \frac{x^m}{m},$$

będziemy mieli

$$\frac{x^m}{m} = \Delta x \, \Sigma \, x^{m-1} + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2} (m-1) \, \Sigma \, x^{m-2}$$

$$+ \frac{(\Delta x)^3}{1\,.\,2\,.\,3} (m-1)(m-2) \, \Sigma \, x^{m-3} + \ldots$$

Następnie damy we wzorze (3)

$$f(x) = \frac{x^{m-1}}{m-1}$$

i t. d. Takim sposobem, zniżając kolejno potęgę x, dojdziemy nakoniec do

$$f(x) = \frac{x^2}{2}$$

będzie natenczas

$$\frac{x^2}{2} = \Delta x \, \Sigma \, x + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2} \, \Sigma \, x^0$$

i nareszcie, gdy $f(x) = x$, będzie

$$x = \Delta x \, \Sigma \, x^0 .$$

Tak więc będziemy mieli układ $m+1$ równań liniowych, z których wyrugujemy m ilości Σx^0, Σx, ..., Σx^{m-1} i jako ostateczny wypadek rugowania otrzymamy wzór pod postacią skończoną, dający wartość $\Sigma \, x^m$. Z powodu wielkiej ilości równań otrzymanie ogólnego wzoru dla $\Sigma \, x^m$ jest zawiłe i przedstawia znaczne trudności; łatwo jednak wzór może być napisany w postaci wyznacznika $m+1$ stopnia.

Ograniczymy się na tem miejscu napisaniem szczególnych przypadków dla $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned}
\Sigma \, x^0 &= \frac{x}{\Delta x} + c, \\
\Sigma \, x &= \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{x}{2} + c, \\
\Sigma \, x^2 &= \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x \, . \, \Delta x}{6} + c, \\
\Sigma \, x^3 &= \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2 \Delta x}{4} + c, \\
\Sigma \, x^4 &= \frac{x^5}{5\Delta x} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3 \Delta x}{3} - \frac{x\,(\Delta x)^3}{30} + c, \\
\Sigma \, x^5 &= \frac{x^6}{6\Delta x} - \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4 \Delta x}{12} - \frac{x^2\,(\Delta x)^3}{12} + c .
\end{aligned} \right.$$

i t. d.

We wszystkich wzorach, powyżej napisanych, c oznacza stałą dowolną lub dowolną funkcyę peryodyczną.

Widzimy więc, że szereg Taylora daje nam możność łatwego wyprowadzenia wzoru $\Sigma \, f(x)$, gdy $f(x)$ oznacza funkcyę wymierną całkowitą. Tą samą metodę stosować można i do wszelkich innych funkcyj $f(x)$, lecz wzory, otrzymane na tej drodze, będą miały postać szeregów nieskończonych.

Ażeby otrzymać sumy podwójne, stosujemy znak Σ do każdego wyrazu wzorów (4), wskutek czego otrzymamy

$$\Sigma\Sigma\, x^0 = \frac{1}{\Delta x}\Sigma\, x + c\,\Sigma\, x^0 + c_1,$$

$$\Sigma\Sigma\, x = \frac{1}{2\Delta x}\Sigma\, x^2 - \frac{1}{2}\Sigma\, x + c\,\Sigma\, x^0 + c_1,$$

$$\Sigma\Sigma\, x^2 = \frac{1}{3\Delta x}\Sigma\, x^3 - \frac{1}{2}\Sigma\, x^2 + \frac{\Delta x}{6}\Sigma\, x + c\,\Sigma\, x^0 + c_1,$$

$$\Sigma\Sigma\, x^3 = \frac{1}{4\Delta x}\Sigma\, x^4 - \frac{1}{2}\Sigma\, x^3 + \frac{\Delta x}{4}\Sigma\, x^2 + c\,\Sigma\, x^0 + c_1,$$

i t. d.

skąd po wyrugowaniu sum pojedyńczych przy pomocy wzorów (4), łatwo otrzymujemy:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\Sigma\Sigma\, x^0 &= \frac{x^2}{2\,(\Delta x)^2} - \frac{x}{2\Delta x} + c\,\frac{x}{\Delta x} + c_1\,,\\
\Sigma\Sigma\, x &= \frac{x^3}{6\,(\Delta x)^2} - \frac{x^2}{3\Delta x} + \frac{x}{3} + c\,\frac{x}{\Delta x} + c_1\\
\Sigma\Sigma\, x^2 &= \frac{x^4}{12\,(\Delta x)^2} - \frac{x^3}{3\Delta x} + \frac{5x^2}{12} - \frac{x\Delta x}{6} + \frac{cx}{\Delta x} + c_1\,,\\
\Sigma\Sigma\, x^3 &= \frac{x^5}{20\,(\Delta x)^2} - \frac{x^4}{4\Delta x} + \frac{5x^3}{12} - \frac{x^2\Delta x}{4} + \frac{x(\Delta x)^2}{30} + c\,\frac{x}{\Delta x} + c_1.
\end{aligned}\right.$$

i t. d.

c i c_1 oznaczają stałe dowolne lub dowolne funkcye peryodyczne.

Chcąc otrzymać sumy potrójne, znowu stosujemy znak Σ do każdego wyrazu wzorów (5) i po uproszczeniu będziemy mieli:

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, x^0 = \frac{x^3}{6\,(\Delta x)^3} - \frac{x^2}{2(\Delta x)^2} + \frac{x}{3\Delta x} + c\,\frac{x^2}{(\Delta x)^2} + c'\,\frac{x}{\Delta x} + c''\,,$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, x = \frac{x^4}{24\,(\Delta x)^3} - \frac{x^3}{4\,(\Delta x)^2} + \frac{11\,x^2}{24\,\Delta x} - \frac{x}{4} + c\,\frac{x^2}{(\Delta x)^2} + c'\,\frac{x}{\Delta x} + c''\,,$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, x^2 = \frac{x^5}{60\,(\Delta x)^3} - \frac{x^4}{8\,(\Delta x)^2} + \frac{x^3}{3\,\Delta x} - \frac{3x^2}{8} + \frac{3x\,\Delta x}{20}$$

$$+ c\,\frac{x^2}{(\Delta x)^2} + c'\,\frac{x}{\Delta x} + c''.$$

i t. d.

Dalej tą samą drogą można otrzymać sumy poczwórne i wogóle jakiekolwiek sumy wielokrotne.

Jeżeli mamy funkcyę całkowitą wymierną z wielu zmiennemi, to i w tym przypadku wzór Taylora prowadzi do znalezienia sumy całkowej. W rzeczy samej, w przypadku funkcyi dwóch zmiennych niezależnych mamy

(6)
$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + h\,\frac{df}{dx} + k\,\frac{df}{dy}$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2}\left(h^2\,\frac{d^2f}{dx^2} + 2hk\,\frac{d^2f}{dx\,dy} + k^2\,\frac{d^2f}{dy^2}\right) + \dots$$

czyli

(7)
$$\Delta f = h\,\frac{df}{dx} + k\,\frac{df}{dy} + \frac{1}{1\,.\,2}\left(h^2\,\frac{d^2f}{dx^2} + 2hk\,\frac{d^2f}{dx\,dy} + k^2\,\frac{d^2f}{dy^2}\right) + \dots$$

Dla krótkości piszemy w powyższem h zamiast Δx i k zamiast Δy. Szereg (7) w przypadku, gdy f oznacza funkcyę wymierną całkowitą, musi się skończyć na pewnym wyrazie.

Jeżeli zastosujemy znak Σ do każdego wyrazu równości (7), natenczas otrzymamy

(8)
$$f = h \sum \frac{df}{dx} + k \sum \frac{df}{dy} + \frac{h^2}{2} \sum \frac{d^2f}{dx^2} + hk \sum \frac{d^2f}{dx\,dy}$$

$$+ \frac{k^2}{2} \sum \frac{d^2f}{dy^2} + \dots$$

Przy pomocy wzoru (8) możemy zawsze znaleść

$$\Sigma\, f(x, y),$$

jeżeli f oznacza jakąkolwiek funkcyę wymierną całkowitą.

Weźmy naprzykład

$$\Sigma\, xy\,;$$

z wzoru (8), dając $f = x^2y$, wypada łatwo:

(9) $$x^2y = 2h\,\Sigma\, xy + k\,\Sigma\, x^2 + h^2\,\Sigma\, y + 2hk\,\Sigma\, x + h^2k\,\Sigma\, x^0\, y^0.$$

Kładąc we wzorze (8)

$$f = xy\,,$$

będziemy mieli

$$xy = h\,\Sigma\, y + k\,\Sigma\, x + hk\,\Sigma\, x^0\, y^0,$$

skąd wypada

(9,a) $$\Sigma\, x^0\, y^0 = \frac{xy - h\,\Sigma\, y - k\,\Sigma\, x}{hk}\,.$$

Podstawiając znalezioną wyżej wartość $\Sigma\, x^0\, y^0$ w równości (9), tudzież uwzględniając wartości Σx, Σx^2, Σy, które odnajdziemy pomiędzy równaniami (4), po uproszczeniu otrzymamy z (9)

$$\Sigma\, xy = \frac{x^2y}{2h} - \frac{xy}{2} - \frac{kx^3}{6h^2} + \frac{kx}{6}\,.$$

Wiemy jednak, że wartość $\Sigma\, xy$ powinna być symetryczną funkcyą x i y, wskutek tego, zmieniając x na y tudzież h na k i odwrotnie, będziemy mieli z ostatniego równania

(9,b) $$\Sigma\, xy = \frac{y^2x}{2k} - \frac{xy}{2} - \frac{hy^3}{6k^2} + \frac{hy}{6}\,.$$

Dodawszy powyższe dwa równania, łatwo znajdziemy szukaną wartość $\Sigma\, xy$ w kształcie:

(10) $$\Sigma\, xy = \frac{x^2y}{4h} + \frac{y^2x}{4k} - \frac{xy}{2} - \frac{kx^3}{12h^2} - \frac{hy^3}{12k^2} + \frac{kx+hy}{12} + c_1\frac{x}{h} + c_2\frac{y}{k} + c.$$

Nie trudno sprawdzić, że różnicą zupełną funkcyi, napisanej po drugiej stronie, będzie dana ilość xy. Głoski c_1, c_2, c_3 oznaczają stałe dowolne lub też dowolne funkcye peryodyczne.

Gdybyśmy chcieli znaleść

$$\Sigma\Sigma\, xy\,,$$

natenczas w (10) znowu stosujemy znak Σ do każdego wyrazu i po dokonaniu uproszczeń i wyrugowaniu ilości $\Sigma\, x^2y$ $\Sigma\, y^2x$, $\Sigma\, xy, \ldots$, otrzymamy nakoniec szukaną sumę podwójną Tą samą metodę stosujemy do kolejnego znajdowania wszelkich sum całkowych wielokrotnych.

Gdy zamiast funkcyi dwóch zmiennych niezależnych mamy pod znakiem Σ funkcyę trzech lub więcej zmiennych, natenczas postępowanie, opisane powyżej, nie ulegnie żadnym zmianom, tylko za każdym razem użyć trzeba wzoru Taylora, odpowiadającego ściśle danej liczbie zmiennych.

Dotąd mówiliśmy tylko o sumowaniu całkowem w granicach nieoznaczonych i widzieliśmy, że wzory sum mają postać skończoną w przypadku, gdy funkcya, napisana pod znakiem Σ, jest wymierną i całkowitą. Jeżeli jednak mamy znaleźć *sumę całkową* w granicach danych od x_0 do X:

$$(11) \qquad \sum_{x_0}^{X} f(x) = \mathop{S}_{x_0}^{X} f(x),$$

natenczas zadanie staje się łatwem i zawsze będzie możliwem pod postacią skończoną, niezależnie od kształtu funkcyi $f(x)$. Równość (11) przedstawia dwojaki sposób pisania; jakie zaś jest bliższe znaczenie sumy całkowej w granicach danych, o tem będzie mowa poniżej.

W rozdziale I wyprowadziliśmy wzór

$$f(x+n\Delta x) = f(x) + n\Delta f + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 f$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 f + \ldots + \Delta^n f\,.$$

Jeżeli w ostatnim równaniu zastosujemy znak Σ do każdego wyrazu, natenczas będzie

$$\Sigma f(x+n\Delta x) - \Sigma f(x) = nf + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\Delta f$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^2 f + \ldots + \Delta^{n-1} f\,.$$

Przyjmując następnie

$$x = x_0, \quad x_0 + n\,\Delta x = X,$$

z powyższego otrzymamy

$$(12) \quad \begin{aligned} \Sigma f(X) - \Sigma f(x_0) &= \frac{X - x_0}{\Delta x} \cdot f + \frac{(X-x_0)(X-x_0-\Delta x)}{1 \,.\, 2 \,.\, (\Delta x)^2} \Delta f \\ &+ \frac{(X-x_0)(X-x_0-\Delta x)(X-x_0-2\Delta x)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, (\Delta x)^3} \,.\, \Delta^2 f + \ldots + \Delta^{n-1} f. \end{aligned}$$

Takie wyrażenie jak (12) nazywamy sumą w granicach danych od x_0 do X, lub *sumą całkową oznaczoną* i piszemy dla krótkości

$$(13) \qquad \Sigma f(X) - \Sigma f(x_0) = \sum_{x_0}^{X} f(x), \quad \text{lub też } \underset{x_0}{\overset{X}{S}} f(x).$$

Widzimy więc, że suma oznaczona równa się różnicy dwóch sum nieoznaczonych, z których pierwsza odpowiada górnej granicy zmiennej x, druga zaś dolnej granicy x.

Druga strona równości (12) wskazuje nam te działania, które dają możność znaleść zawsze wartość sumy oznaczonej, gdy n liczba całkowita.

Z równości (13) widoczna

$$(13,a) \qquad \underset{x_0}{\overset{X}{S}} f(x) = - \underset{X}{\overset{x_0}{S}} f(x)$$

czyli, że suma oznaczona zmienia znak, jeżeli przestawimy wzajemnie granice sumy

Wyłożymy teraz kilka sposobów, pożytecznych przy szukaniu sum funkcyj przestępnych. Wiemy, że różnicą funkcyi jednej zmiennej niezależnej jest wyrażenie

$$(14) \qquad \Delta f = f(x+h) - f(x),$$

gdzie zamiast Δx piszemy głoskę h, aby ułatwić pisanie.

Dajmy, że druga strona powyższego równania przekształca się tak

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x) \,.\, \psi(h),$$

natenczas będzie widocznie

$$\Sigma \Delta f = \Sigma \varphi(x) \,.\, \psi(h)$$

czyli

$$f = \psi(h)\, \Sigma\, \varphi(x),$$

skąd wypada

$$\Sigma\, \varphi(x) = \frac{f(x)}{\psi(h)}.$$

Tak więc w przytoczonym wyżei przypadku wzór sumy łatwo znajduje się pod postacią skończoną. Dalej może się zdarzyć przekształcenie

$$\Delta f_1 = \varphi_1(x) \,.\, \psi_1(h) + \varphi_2(x) \,.\, \psi_2(h),$$

gdy napotkamy jeszcze oprócz tego

$$\Delta f_2 = \varphi_1(x) \,.\, \xi_1(h) + \varphi_2(x) \,.\, \xi_2(h),$$

natenczas, całkując zapomocą sum wyraz po wyrazie, otrzymamy układ dwóch równań liniowych

$$f_1 = \psi_1(h)\, \Sigma\, \varphi_1(x) + \psi_2(h)\, \Sigma\, \varphi_2(x),$$

$$f_2 = \xi_1(h)\, \Sigma\, \varphi_1(x) + \xi_2(h)\, \Sigma\, \varphi_2(x).$$

Z powyższego układu bardzo łatwo będzie znaleźć $\Sigma\, \varphi_1(x)$ oraz $\Sigma\, \varphi_2(x)$. Zamiast dwóch równań mogłoby być przekształcenie, zawarte w układzie n równań liniowych. We wszystkich wspomnianych wyżej przypadkach odnajdywanie wzorów sum daje się nader łatwo uskutecznić pod postacią skończoną. Tak naprzykład, niech będzie funkcya wykładnicza

$$f = a^{mx},$$

w której a oraz m oznaczają jakiekolwiek ilości stałe.

Różnicą tej funkcyi będzie

$$\Delta(a^{mx}) = a^{m(x+h)} - a^{mx} = a^{mx}(a^{mh} - 1).$$

Po zcałkowaniu obydwóch stron znajdziemy z ostatniego równania

$$a^{mx} = \Sigma\, a^{mx}(a^{mh} - 1),$$

skąd wypada

$$\Sigma\, a^{mx} = \frac{a^{mx}}{a^{mh} - 1}.$$

Wzór ten będzie miał postać najogólniejszą, gdy po drugiej stronie dodamy $+c$, t. j. ilość stałą lub dowolną funkcyę peryodyczną.

Jako zastosowanie drugiego przekształcenia, z pomiędzy wspomnianych wyżej, dajmy

$$f_1 = \sin(mx+n), \quad f_2 = \cos(mx+n),$$

gdzie m i n oznaczają pewne stałe, x ilość zmienną. Będziemy mieli

$$\Delta \sin(mx+n) = \sin(mx+mh+n) - \sin(mx+n),$$
$$\Delta \cos(mx+n) = \cos(mx+mh+n) - \cos(mx+n),$$

czyli

$$\Delta \sin(mx+n) = \sin(mx+n)\cos mh + \cos(mx+n)\sin mh - \sin(mx+n),$$
$$\Delta \cos(mx+n) = \cos(mx+n)\cos mh - \sin(mx+n)\sin mh - \cos(mx+n).$$

Całkując oba równania, łatwo otrzymamy

$$\sin(mx+n) = (-1+\cos mh)\,\Sigma \sin(mx+n) + \sin mh\,\Sigma \cos(mx+n),$$
$$\cos(mx+n) = (-1+\cos mh)\,\Sigma \cos(mx+n) - \sin mh\,\Sigma \sin(mx+n).$$

Takim sposobem otrzymaliśmy układ dwóch równań liniowych dla dwóch sum niewiadomych. Wyciągnąwszy z powyższego układu wartości sum szukanych, znajdziemy

$$\Sigma \sin(mx+n) = \frac{(-1+\cos mh)\sin(mx+n) - \sin mh\cos(mx+n)}{2(1-\cos mh)} + c,$$

$$\Sigma \cos(mx+n) = \frac{(-1+\cos mh)\cos(mx+n) + \sin mh\sin(mx+n)}{2(1-\cos mh)} + c.$$

Jako ogólną metodę całkowania dla wszelkich funkcyj wyprowadzimy wzór w kształcie szeregu nieskończonego następującym sposobem.

Mając napisane równanie (14), rozwiniemy $f(x+h)$ w szereg Taylora drugiej postaci, będziemy mieli wówczas

$$\Delta f = -f(x) + f(h) + xf'(h) + \frac{x^2}{1\,.\,2} f''(h) + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(h) + \ldots$$

Zastosowawszy tutaj do każdego wyrazu znak Σ, otrzymamy

$$f(x) = -\Sigma f(x) + f(h)\,\Sigma x^0 + f'(h)\,\Sigma x$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2} f''(h)\,\Sigma x^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(h)\,\Sigma x^3 + \ldots$$

skąd będzie widocznie

$$\Sigma f(x) = -f(x) + f(h)\,\Sigma x^0 + f'(h)\,\Sigma x$$
$$+ \frac{1}{1.2} f''(h)\,\Sigma x^2 + \frac{1}{1.2.3} f'''(h)\,\Sigma x^3 + \ldots$$

Samo przez się rozumie się, że dla rzetelności wzoru ostatniego wymagać trzeba zbieżności szeregu oraz dążenia reszty do zera. Wielkości Σx^0, Σx, $\Sigma x^2, \ldots$ zastąpić można ich wartościami (4).

Widzimy, że wszelkie zagadnienia, doprowadzające do wyrażeń $\Sigma f(x)$ można uważać za rozwiązane w zupełności, gdyż jakkolwiek nie umiemy napisać ogólnego wzoru $\Sigma f(x)$ pod postacią skończoną, to jednak jesteśmy zawsze w możności przy pomocy szeregów obliczać wartości wszelkich sum i w razie potrzeby możemy ułożyć ich tablice, podobne do tablic logarytmów. Zupełnie podobną drogą, jak dla funkcyi jednej zmiennej, z szeregu Taylora można otrzymać wzór dla funkcyj dwóch zmiennych niezależnych w kształcie:

$$\Sigma f(x, y) = -f(x, y) + f(h, k)\,\Sigma x^0 y^0 + \left(\frac{df}{dx}\right)_{h,k} \Sigma x$$
$$+ \left(\frac{df}{dy}\right)_{h,k} \Sigma y + \frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{h,k} \Sigma x^2 + 2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)_{h,k} \Sigma xy\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_{h,k} \Sigma y^2\right] + \ldots$$

gdzie dla krótkości napisaliśmy h zamiast Δx i k zamiast Δy.

§ 2. *Równania różnicowe.*

Najogólniejszem zadaniem w rachunku odwrotnym będzie to, gdy mamy jedno równanie lub układ kilku równań i szukać będziemy funkcyi, czyniącej im zadość tożsamościowo. Kształt ogólny równań różnicowych z jedną zmienną niezależną jest

(15) $$F(x, y, \Delta x, \Delta y) = 0\,;$$

w tym przypadku szukamy funkcyi

(16) $$f(x, y) = c,$$

która czyni zadość danemu równaniu; c oznacza stałą dowolną lub dowolną funkcyę peryodyczną. W myśl powyższego określenia całki będzie

$$M\,[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)]=F(x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y),$$

gdzie M oznacza pewien *czynnik całkujący*. Jeżeli $M=1$, natenczas dane równanie różnicowe nazywać będziemy *dokładnem* rzędu 1-go.

Może się także zdarzyć, że równanie (15) przedstawia różnicę zupełną rzędu 2-go pewnej funkcyi $\varphi(x, y)$ tak iż

$$M\,[\varphi(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y)-2\varphi(x+\Delta x,\ y+\Delta y)+\varphi(x,\ y)]=F(x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y).$$

W tym przypadku całką będzie nie równanie (16), lecz

$$\varphi(x,\ y)=c_1\frac{x}{\Delta x}+c_2\frac{y}{\Delta y}+c_3\ ; \tag{17}$$

po drugiej stronie znaku równości napisaliśmy wyrazy, które, jak wiemy, znikają przy dwukrotnem różnicowaniu, jeżeli tylko pod głoskami c_1, c_2, c_3 rozumiemy stałe dowolne lub dowolne funkcye peryodyczne. Równanie dane w ostatnim przypadku będziemy nazywać *drugorzędnem*.

Możemy także napotkać przypadek, gdy równanie (15), pomnożone przez pewien czynnik $\frac{1}{M}$, wyobraża różnicę rzędu 3-go niewiadomej funkcyi $\psi(x, y)$, wówczas będzie

$$M\,[\psi(x+3\Delta x, y+3\Delta y)-3\psi(x+2\Delta x, y+2\Delta y)+3\psi(x+\Delta x, y+\Delta y)-\psi(x,y)]$$
$$=F(x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y)\,.$$

W tym ostatnim przypadku całką nie będzie ani równananie (16), ani (17), lecz

$$\psi(x,\ y)=c_1\frac{x^2}{(\Delta x)^2}+c_2\frac{y^2}{(\Delta y)^2}+c_3\frac{x}{\Delta x}+c_4\frac{y}{\Delta y}+c_5\,. \tag{18}$$

Równanie dane w omówionych wyżej okolicznościach nazywać będziemy *trzeciorzędnem*. Wyrazy, napisane po drugiej stronie znaku równości (18), znikają przy trzykrotnem różnicowaniu. Tak samo możemy jeszcze spotkać równanie (15) tego rodzaju, że pierwsza strona, będąc pomnożoną przez pewien czynnik, przedstawi nam różnicę zupełną rzędu 4-go niewiadomej funkcyi $\chi(x, y)$; i t. d.

Kształt ogólny równań różnicowych rzędów wyższych będzie w przypadku jednej zmiennej niezależnej

$$F(x, y, \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta^2 y,\ \Delta^3 y,\ .\ .\ .\ ,\ \Delta^n y)=0,$$

któremu powinno czynić zadość

$$y = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Równanie różnicowe zupełne z wielu zmiennemi niezależnemi ma kształt

$$F(x, y, z, \ldots, \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots, f, \Delta f, \Delta^2 f, \Delta^3 f, \ldots, \Delta^n f) = 0,$$

któremu czyni zadość tożsamościowo

$$f = f(x, y, z, \ldots, c_1, c_2, c_3, \ldots).$$

Oprócz równań różnicowych zupełnych mogą być równania częściowe, zawierają różnice częściowe rozmaitych rzędów.

Dla objaśnienia teoryi i sposobów całkowania rozwiążemy kilka przykładów. Niech będzie równanie różnicowe:

$$F = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + y\,\Delta x + x\,\Delta y + \Delta x\,.\,\Delta y + 2y\,\Delta y + (\Delta y)^2 = 0.$$

Jeżeli napisane równanie jest dokładne tak, iż ma miejsce

$$F = \Delta^i f,$$

natenczas całką szukaną będzie widocznie

$$f = \Sigma\Sigma\Sigma \ldots (i \text{ razy})\, F.$$

Metoda taka stosuje się zawsze, ilekroć razy szukamy całki równania dokładnego.

Probujemy nasamprzód, czy powyższe równanie nie będzie różnicą rzędu 1-go. Gdyby to przypuszczenie istotnie miało miejsce dla danego równania, natenczas wyrażenie

$$2\,\Delta x\,\Sigma x + (\Delta x)^2\,\Sigma x^0 + \Delta x\,\Sigma y + \Delta y\,\Sigma x + \Delta x\,\Delta y\,\Sigma x^0 y^0$$
$$+ 2\,\Delta y\,\Sigma y + (\Delta y)^2\,\Sigma y^0 = c$$

nie powinno zawierać ani Δx, ani Δy, czyli po przecałkowaniu wszystkie wyrazy, zawierające stałe przyrostki Δx oraz Δy, powinny zniknąć. W rzeczy samej, gdy w powyższem podstawimy wartości $\Sigma x^0, \Sigma y^0, \Sigma x, \Sigma y, \Sigma x^0 y^0$ (4), (9,a), natenczas po uproszczeniu otrzymamy

$$x^2 + xy + y^2 = c.$$

Jestto całka równania danego; c może tutaj oznaczać albo stałą dowolną, albo też dowolną funkcyę peryodyczną. Gdyby po jednorazowym przecałkowaniu przyrostki Δx oraz Δy nie znikły, znaczyłoby to, że dane równanie nie przedstawia różnicy dokładnej rzędu 1-go; wówczas należałoby równanie różnicowe całkować dwukrotnie. Gdyby i dwukrotne całkowanie danego równania nie doprowadziło do pożądanego celu, natenczas trzeba próbować całkowania po raz trzeci i t. d. Jeżeli wszystkie kolejne całkowania nie dają nam wyrażenia, niezależnego od Δx, Δy, wówczas będziemy mogli twierdzić, że dane równanie różnicowe nie jest dokładne. W tym ostatnim przypadku powinniśmy poszukiwać mnożnika dopełniającego, który zamieniłby dane równanie na różnicę dokładną pewnego rzędu.

Niech będzie dane równanie różnicowe

$$F = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2xy\,\Delta y + x\,(\Delta y)^2 + y^2\,\Delta x + 2y\,\Delta x\,\Delta y$$
$$+ \Delta x\,(\Delta y)^2 + 2y\,\Delta y + (\Delta y)^2 = 0.$$

Jeżeli to równanie przedstawia różnicę dokładną, natenczas wyrażenie

$$2\Delta x\,\Sigma x + (\Delta x)^2\,\Sigma x^0 + 2\Delta y\,\Sigma\,xy + (\Delta y)^2\,\Sigma x + \Delta x\,\Sigma\,y^2$$
$$+ 2\Delta x\,\Delta y\,\Sigma y + \Delta x\,(\Delta y)^2\,\Sigma\,x^0 y^0 + 2\Delta y\,\Sigma y + (\Delta y)^2\,\Sigma y^0 = c$$

powinno być niezależnem od stałych przyrostków Δx oraz Δy. Istotnie, gdy wyrugujemy z powyższego Σx^0, Σx, Σy^0, Σy, Σy^2, $\Sigma x^0\,y^0$ przy pomocy wzorów (4), (9,a) i uwzględnimy częściową wartość Σxy, (9,b):

$$\Sigma\,xy = \frac{y^2 x}{2\,\Delta y} - \frac{xy}{2} - \frac{(\Delta x)\,y^3}{6\,(\Delta y)^2} + \frac{(\Delta x)\,y}{6},$$

wówczas po dokonaniu wszystkich redukcyj łatwo otrzymamy

$$x^2 + xy^2 + y^2 = c.$$

Jestto całka szukana danego równania różnicowego. Podobnie, jak poprzednio, c oznacza stałą dowolną, albo też funkcyę

$$c = \psi\left(\sin 2\pi\,\frac{x}{\Delta x},\ \sin 2\pi\,\frac{y}{\Delta y},\ \cos 2\pi\,\frac{x}{\Delta x},\ \cos 2\pi\,\frac{y}{\Delta y}\right).$$

W roztrząsanych dwóch przykładach mieliśmy do czynienia z równaniami dokładnemi i z tego powodu całki znaleźliśmy łatwo, stosując sumowanie do każdego wyrazu równaniania różnicowego. Gdyby jednak napisane wyżej równania nie były dokładne, wówczas sposób powyższy nie doprowadziłby nas do całek. W tym drugim przypadku pozostaje niewiadomym pewien czynnik całkujący, który dopełnia dane równanie różnicowe tak, iż pierwsza strona wraz z mnożnikiem stanowi różnicę dokładną jakiegokolwiek rzędu.

Metod, służących do znajdywania czynnika całkującego, nie znamy, objaśnimy jednak rzecz samą na jednym prostym przykładzie. Niech będzie dane

$$y \Delta x - x \Delta y = 0.$$

Stosując sumowania do każdego wyrazu, nie możemy nigdy dojść do takiego wyrażenia, w którem przyrostki Δx i Δy znikają; wnioskujemy z tego, że napisane równanie nie jest dokładne. W istocie, czynnik dopełniający będzie

$$M = \frac{1}{y\,(y+\Delta y)}\,;$$

teraz łatwo daje się zauważyć, że w równaniu

$$\frac{y \Delta x - x \Delta y}{y\,(y+\Delta y)} = 0$$

pierwsza strona przedstawia różnicę zupełną ilorazu $\frac{x}{y}$. Takim sposobem całką szukaną będzie

$$\frac{x}{y} = c.$$

§ 3. *Rachunek całkowy.*

Podamy kilka ogólnych własności i sposobów obliczania wszelkich całek, pomijając metody całkowania pod postacią skończoną, jako znane ze wszystkich podręczników rachunku całkowego.

Jeżeli mamy daną różniczkę

$$f'(x) \,.\, dx$$

i szukać będziemy funkcyi pierwotnej $f(x)$, natenczas takie zagadnienie będzie zasadniczem w *rachunku całkowym.* Piszemy w tym przypadku

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + c. \tag{19}$$

Funkcya pierwotna $f(x)$ nazywa się *całką*; głoska c oznacza stałą dowolną, którą, jak widzieliśmy, zawsze dodawać można do funkcyi bez zmiany jej różniczki.

Możemy dowieść, że

$$\int f'(x)\, dx = \lim \Delta x \,.\, \Sigma f'(x)\,.$$

Istotnie, mając na uwadze związek (19), z wzoru (3) wypada

$$\int f'(x)\, dx = \Delta x \,.\, \Sigma f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2} \Sigma f''(x) + \ldots$$

Przechodząc następnie do granicy, z ostatniego równania będziemy mieli

$$\int f'(x)\, dx = \lim \Delta x\, \Sigma f'(x)\,, \tag{20}$$

pozostałe zaś wyrazy w granicy zniknąć muszą, gdyż zawierają wyższe potęgi nieskończenie małego przyrostka zmiennej niezależnej.

Dalej stosując działanie Σ do każdego wyrazu równania (3), otrzymamy:

$$\Sigma f(x) = \Delta x\, \Sigma\Sigma f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{1\,.\,2} \Sigma\Sigma f''(x) + \ldots, \tag{21}$$

atoli wiemy, że

$$\Sigma f(x) = \Sigma \int f'(x)\, dx\,.$$

Podstawiwszy powyższy związek w równość (21) i następnie mnożąc wszystkie wyrazy przez Δx, będziemy mieli

$$\Delta x\, \Sigma \int f'(x)\, dx = (\Delta x)^2\, \Sigma\Sigma f'(x) + \frac{(\Delta x)^3}{1\,.\,2} \Sigma\Sigma f''(x) + \ldots \tag{22}$$

Na zasadzie związku (20) widoczna, że

$$\lim \Delta x \,.\, \Sigma \int f'(x)\, dx = \int dx \int f'(x)\, dx\,;$$

wskutek tego, gdy od równania (22) przejdziemy do granic, będzie natenczas:

$$\int dx \int f'(x)\, dx = \lim\, (\Delta x)^2 \,.\, \Sigma\Sigma f'(x)\,. \tag{23}$$

Pozostałe wyrazy po drugiej stronie równości (22) w granicy zniknąć muszą, gdyż zawierają wyższe potęgi przyrostka Δx zmiennej niezależnej.

Podobnie, stosując znowu znak Σ do każdego wyrazu równości (22) i mnożąc przez Δx, otrzymamy

$$\Delta x \, \Sigma \, \Delta x \, \Sigma \int f'(x)\, dx = (\Delta x)^3 \, \Sigma\Sigma\Sigma \, f'(x) + \frac{(\Delta x)^4}{1\,.\,2} \, \Sigma\Sigma\Sigma \, f''(x) + \ldots$$

Gdy przejdziemy od ostatniego równania do granic, będzie

$$(24) \qquad \int dx \int dx \int f'(x)\, dx = \lim \, (\Delta x)^3 \, \Sigma\Sigma\Sigma \, f'(x).$$

Rozumowanie powyższe można łatwo poprowadzić dalej dla wszelkich całek wielokrotnych.

Wszystkie wzory podobne, jak (20), (23), (24), ..., wyrażają związek zasadniczy pomiędzy rachunkiem całkowym i rachunkiem sum całkowych Gdyby rachunek sum był nam dobrze znany dla wszelkich funkcyj, natenczas za pomocą metody granic łatwo przeszlibyśmy do rachunku całkowego. Niestety rachunek sum zbadany jest tylko dla funkcyj wymiernych i całkowitych, wykładniczych i niektórych trygonometrycznych, dla innych zaś funkcyj nie posiadamy wzorów pod postacią skończoną.

Jeżeli z wzoru (2a, § 1) zrobimy łatwe przejście do granic, natenczas będzie

$$\int f\, dF = f\,.\,F - \int F\, df.$$

Jestto znany wzór *całkowania częściowego.*

Dajmy *sumę* funkcyj

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_i(x);$$

jeżeli pomnożymy obie strony powyższego przez dx i zastosujemy do każdego wyrazu symbole $d\int$, wzajemnie znoszące się, natenczas będziemy mieli

$$d\int F(x)\, dx = d\int f_1(x)\, dx + d\int f_2(x)\, dx + \ldots + d\int f_i(x)\, dx,$$

czyli

$$d\int F(x)\, dx = d\left(\int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx + \ldots + \int f_i(x)\, dx\right),$$

skąd widoczna

$$\int F(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_i(x)\,dx$$

Jestto prawidło *całkowania sumy.* Wzór ten łatwo otrzymać zapomocą granic z odpowiedniego wzoru sum.

Dalej, mając daną funkcyę, pomnożoną przez ilość stałą a

$$a\,F(x),$$

znajdujemy

$$d\int a\,F(x)\,dx = a\,d\int F(x)\,dx = d\left(a\int F(x)\,dx\right),$$

więc będzie

$$\int a\,F(x)\,dx = a\int F(x)\,dx.$$

Widzimy, że mnożnik stały wychodzi przed znak $\int$ bez żadnej zmiany.

Szukanie całek oznaczonych

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

przedstawia zawsze zadanie łatwiejsze i wartość takiej całki może być wiadomą niezależnie od kształtu całki nieoznaczonej.

W rzeczy samej, jeżeli pomnożymy wszystkie wyrazy równości (12) przez Δx i przejdziemy do granic, przyjąwszy Δx nieskończenie zdążającem do zera, natenczas będzie

$$(25)\quad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X-x_0)\,f(x_0) + \frac{(X-x_0)^2}{1\,.\,2}\,f'(x_0) + \frac{(X-x_0)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,f''(x_0) + \ldots$$

Z równania (13) widoczna, że

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \Delta x\,.\,\mathop{S}_{x_0}^{X} f(x);$$

oprócz tego z wspomnianego związku (13) wnioskujemy jeszcze, że, jeżeli

$$\int f(x)\, dx = \lim \Delta x \, \Sigma f(x) = \varphi(x),$$

natenczas będzie

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = \varphi(X) - \varphi(x_0) \tag{26}$$

czyli, że całka oznaczona równa się zawsze różnicy dwóch krańcowych wartości odpowiedniej całki nieoznaczonej. Po większej części, kształt całki nieoznaczonej bywa nam nieznzny i wskutek tego wzór (25) będziemy uważać za zasadniczy tak przy obliczaniu wartości całek oznaczonych, jak i przy poszukiwaniu ich własności. Wiadomo, że szereg nieskończony w kształcie (25) zawsze jest zbieżny i we wszystkich przypadkach może być użyty; gdyby jednak granice całki były $+\infty$ i $-\infty$, natenczas przed użyciem wzoru (25) należy daną całkę przekształcić za pomocą wprowadzenia nowej zmiennej tak, ażeby granice stały się skończone.

Jeżeli równość (13,a) pomnożymy przez Δx i następnie przejdziemy do granic, natenczas otrzymamy znaną własność całek oznaczonych:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = -\int_{X}^{x_0} f(x)\, dx.$$

Z równości (26) widoczna, że

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = \varphi(X) - \varphi(a) + \varphi(a) - \varphi(x_0),$$

czyli że

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = \int_{a}^{X} f(x)\, dx + \int_{x_0}^{a} f(x)\, dx.$$

Tym sposobem każdą całkę oznaczoną możemy rozłożyć na sumę dwóch całek, podług powyższego prawidła. Każdą z tych dwóch nowych całek znowu możemy zastąpić sumą dwóch innych, czyli moglibyśmy daną całkę rozłożyć na snmę czterech całek oznaczonych; i t. d.

Ażeby znaleźć szereg dla całki nieoznaczonej, zauważymy, że ma miejsce zawsze

$$\int f(x)\, dx = \int_h^x f(x)\, dx.$$

Istotnie, wiemy, iż na zasadzie wzoru (26) będzie

$$\int_h^x f(x)\, dx = \varphi(x) - \varphi(h),$$

wskutek tego mamy

$$\int f(x)\, dx = \varphi(x) - \varphi(h) = \varphi(x) + c,$$

gdzie pod $-\varphi(h)$ zawsze rozumieć możemy stałą dowolną c, bowiem h jest ilość zupełnie dowolna. Po tej uwadze można zastosować szereg (25) do wszelkiej całki nieoznaczonej

$$(27) \qquad \int f(x)\, dx = (x-h) f(h) + \frac{(x-h)^2}{1\,.\,2} f'(h) + \frac{(x-h)^3}{1\,.\,2\,.\,3} f''(h) + \ldots$$

Szereg ten używany jest powszechnie przy wartości $h = 0$; widzimy jednak, że szereg dla h jakiegokolwiek będzie o wiele ogólniejszym, aniżeli dla $h = 0$. W zastosowaniach praktycznych wzór (27) przedstawia tę znaczną dogodność, że rozporządzamy wielkością h podług upodobania i możemy zrobić szereg szybko zbieżnym.

W dalszym ciągu zastosujemy wzór Taylora do obliczania całek oznaczonych wielokrotnych, jak naprzykład

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dx\, dy,$$

w których granice x_0, X tudzież y_0, Y są między sobą niezależne.

Dajmy na to, że

$$(28) \qquad \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy = F(x, Y) - F(x, y_0),$$

gdzie F oznacza całkę, którą otrzymalibyśmy z całkowania nieoznaczonego $\int f(x, y)\, dy$. Wykonawszy całkowanie jeszcze raz co do x, otrzymamy z (28)

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{X} F(x, Y)\, dx - \int_{x_0}^{X} F(x, y_0)\, dx,$$

czyli

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dx\, dy = \varphi(X, Y) - \varphi(x_0, Y) - \varphi(X, y_0) + \varphi(x_0, y_0), \tag{29}$$

gdzie φ oznaczą całkę, którą otrzymać można z $\int f(x, y)\, dy$ zapomocą całkowania nieoznaczonego względem zmiennej x czyli z dwukrotnego całkowania $\iint f(x, y)\, dx\, dy$. Napiszmy teraz szereg Taylora dla funkcyi dwóch zmiennych niezależnych

$$\left\{\begin{aligned} f(x+h, y+k) = {} & f(x, y) + h\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy} + \frac{1}{1.2}\left(h^2\frac{d^2f}{dx^2} + 2hk\frac{d^2f}{dx\,dy} + k^2\frac{d^2f}{dy^2}\right) \\ & + \frac{1}{1.2.3}\left(h^3\frac{d^3f}{dx^3} + 3h^2k\frac{d^3f}{dx^2dy} + 3hk^2\frac{d^3f}{dx\,dy^2} + k^3\frac{d^3f}{dy^3}\right) \\ & + \frac{1}{1.2.3.4}\left(h^4\frac{d^4f}{dx^4} + 4h^3k\frac{d^4f}{dx^3dy} + 6h^2k^2\frac{d^4f}{dx^2\,dy^2} + 4hk^3\frac{d^4f}{dx\,dy^3} + k^4\frac{d^4f}{dy^4}\right) + \ldots \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Dalej napiszemy jeszcze szczególne przypadki powyższego wzoru dla $k = 0$

$$f(x+h, y) = f(x, y) + h\frac{df}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3f}{dx^3} + \frac{h^4}{1.2.3.4}\frac{d^4f}{dx^4} + \ldots$$

tudzież dla $h = 0$

$$f(x, y+k) = f(x, y) + k\frac{df}{dy} + \frac{k^2}{1.2}\frac{d^2f}{dy^2} + \frac{k^3}{1.2.3}\frac{d^3f}{dy^3} + \frac{k^4}{1.2.3.4}\frac{d^4f}{dy^4} + \ldots$$

Jeżeli teraz w dwóch ostatnich wzorach zmienimy znaki na odwrotne we wszystkich wyrazach i następnie dodamy do (30), natenczas po dokonaniu redukcyj łatwo otrzymamy

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$

$$= \frac{1}{1.2} 2hk \frac{d^2 f}{dx\, dy} + \frac{1}{1.2.3}\left(3h^2 k \frac{d^3 f}{dx^2\, dy} + 3hk^2 \frac{d^3 f}{dx\, dy^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4}\left(4h^3 k \frac{d^4 f}{dx^3\, dy} + 6h^2 k^2 \frac{d^4 f}{dx^2\, dy^2} + 4hk^3 \frac{d^4 f}{dx\, dy^3}\right) + \ldots$$

Mnożąc każdy wyraz powyższego przez $dx\, dy$ i całkując dwukrotnie, będziemy mieli

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} &\iint f(x+h, y+k)\, dx\, dy - \iint f(x+h, y)\, dx\, dy \\ &\qquad - \iint f(x, y+k)\, dx\, dy + \iint f(x, y)\, dx\, dy \\ &= \frac{1}{1.2} 2hk f(x, y) + \frac{1}{1.2.3}\left(3h^2 k \frac{df}{dx} + 3hk^2 \frac{df}{dy}\right) \\ &\qquad + \frac{1}{1.2.3.4}\left(4h^3 k \frac{d^2 f}{dx^2} + 6h^2 k^2 \frac{d^2 f}{dx\, dy} + 4hk^3 \frac{d^2 f}{dy^2}\right) + \ldots \end{aligned} \right.$$

gdzie $\iint f(x+h, y+k)\, dx\, dy$ oznacza, że naprzód znaleźć trzeba wartość $\iint f(x, y)\, dx\, dy$, a dopiero po przecałkowaniu podstawić $x+h$ na miejsce x tudzież $y+k$ na miejsce y.

Tak samo $\iint f(x+h, y)\, dx\, dy$ znaczy, że wpierw napisać trzeba wartość $\iint f(x, y)\, dx\, dy$, a następnie po wykonaniu całkowań podstawić $x+h$ na miejsce x i t. p. Drugą stronę wzoru (31) pisać łatwo, gdyż prawo współczynników w nawiasach jest widoczne; są to współczynniki odpowiednich dwumianów Newtona, bez najwyższego oraz najniższego wyrazów. Przyjmijmy teraz

$$x = x_0, \quad x^0 + h = X, \quad y = y_0, \quad y_0 + k = Y,$$

natenczas pierwsza strona równości (31) przedstawi nam zupełnie takie same wyrażenie, jak (29); rugując i po drugiej stronie ilości h i k, będziemy mieli wzór następujący

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{1.2}\,2\,(X-x_0)\,(Y-y_0)\,f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left[3\,(X-x_0)^2(Y-y_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0,y_0}+3\,(X-x_0)\,(Y-y_0)^2\left(\frac{df}{dy}\right)_{x_0,y_0}\right]$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4}\left[4\,(X-x_0)^3\,(Y-y_0)\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_0,y_0}+6\,(X-x_0)^2\,(Y-y_0)^2\left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)_{x_0,y_0}\right.$$

$$\left.+\,4\,(X-x_0)\,(Y-y_0)^3\left(\frac{d^2f}{dy^2}\right)_{x_0,y_0}\right]+\ldots\ldots$$

Wzór ten jest ogólny i służy dogodnie do obliczania jakiejkolwiek całki podwójnej oznaczonej, w której granice całkowania są skończone i niezależne między sobą. Jeżeli granice będą $+\infty$ i $-\infty$, lub gdyby między granicami jednego całkowania i drugiego istniała jakabądź zależność, natenczas trzeba wiadomemi sposobami przekształcić całkę, wprowadzając nowe zmienne tak, ażeby granice były skończone lub niezależne pomiędzy sobą. Dopiero po uskutecznieniu takiego przekształcenia można stosować wzór powyższy. Szereg, napisany po drugiej stronie znaku równości ostatniego wzoru, jest zawsze zbieżny dla skończonych wartości granic x_0, X, y_0, Y i tem szybciej szereg zdąża do swej granicy, im różnice $X-x_0$ oraz $Y-y_0$ są mniejsze. Można także wzór powyższy stosować i do całek podwójnych nieoznaczonych, biorąc te ostatnie w kształcie

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dx\,dy,$$

co jest zawsze możebnem.

Gdybyśmy chcieli otrzymać szereg podobny do całki potrójnej

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \varphi(X,Y,Z)-\varphi(X,Y,z_0)-\varphi(X,y_0,Z)$$

(32)

$$-\varphi(x_0,Y,Z)+\varphi(X,y_0,z_0)+\varphi(x_0,Y,z_0)+\varphi(x_0,y_0,Z)-\varphi(x_0,y_0,z_0),$$

gdzie, jak to bardzo łatwo dowieść, φ oznacza odpowiednią całkę potrójną nieoznaczoną, natenczas metoda całego naszego rozumowania nie ulegałaby zmianie, tylko należałoby wziąść za punkt wyjścia wzór Taylora, odpowiadający

$$f(x+h,\; y+k,\; z+l).$$

Tym sposobem można wyprowadzić wzory dla wszelkich całek wielokrotnych. Wszystkie wzory całek, wzmiankowane wyżej, można równie dobrze otrzymać z odpowiednich wzorów sum całkowych wielokrotnych, stosując metodę granic. Pominęliśmy tę drogę, używając sposobu przystępniejszego. Podamy jeszcze w zakończeniu rozdziału niniejszego kilka nieznanych dotąd twierdzeń, które wyrazimy krótkiemi równaniami. Z wzoru (26) wnioskujemy, że

$$\Delta\varphi = \int_x^{x+h} f(x)\, dx\,;$$

podobnie z wzoru (29) czytamy łatwo

$$\Delta^2{}_{x,y}\,\varphi = \int_x^{x+h}\int_y^{y+k} f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Tak samo z (32) wypada

$$\Delta^3{}_{x,y,z}\,\varphi = \int_x^{x+h}\int_y^{y+k}\int_z^{z+l} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,,$$

gdzie dla krótkości h, k, l oznaczają odpowiednio Δx, Δy, Δz.

Stosując teraz do obu stron powyższych równości całkowania, wyrażone zapomocą znaku Σ, będziemy mieli

$$\int f(x)\, dx = \Sigma \int_x^{x+h} f(x)\, dx\,,$$

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \sum_x \sum_y \int_x^{x+h}\int_y^{y+k} f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$\iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_x \sum_y \sum_z \int_x^{x+h}\int_y^{y+k}\int_z^{z+l} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,,$$

Są to proste związki pomiędzy dwóma rachunkami całkowemi Σ i $\int$.

§ 4. *Równania różniczkowe wogóle.*

Równania różniczkowe z jedną zmienną niezależną mają kształt najogólniejszy następujący

$$(33) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

którego całka

$$y = f(x, c)$$

tożsamościowo czynić zadość danemu równaniu. Jeżeli równanie (33) rozważemy względem pochodnej $\frac{dy}{dx}$, natenczas będzie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N},$$

gdzie M i N są pewne funkcye zmiennych x i y, Z ostatniego równania wypada

$$M\,dx + N\,dy = 0.$$

jest prostszy kształt równań różniczkowych rzędu 1-go z jedną zmienną niezależną, Równania rzędów wyższych z jedną zmienną niezależną oprócz pochodnej rzędu 1-go zawierają także pochodne rzędów wyższych. Dowiedziemy nasamprzód, że wszelkie równanie różniczkowe rzędu n-go posiada zawsze odpowiednią całkę. Dowód, przytoczony poniżej, będzie zarazem przybliżonym sposobem wykreślenia całki z danego równania.

Niech będzie dane równanie różniczkowe rzędu n-go z jedną zmienną niezalezną

$$(34) \qquad f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

Wiemy, że rozwiązaniem zupełnem powyższego równania będzie równanie pierwotne

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0,$$

w którem wszystkie stałe dowolne c tak się dają wyznaczyć, że przy szczególnej wartości $x{=}x_0$ funkcya y tudzież n—1 jej pochodnych mogą przybrać wartości upodobane, zupełnie dowolne.

Napiszmy równanie (34) w kształcie

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{35}$$

i zamiast tego rozważmy równanie inne

$$f\left(x, y, \frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \ldots, \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}\right) = 0. \tag{36}$$

Jeżeli przypuścimy, że w ostatniem równaniu Δx, Δy, $\Delta^2 y, \ldots, \Delta^n y$ są ilości nieskończenie małe, natenczas, przeszedłszy do granic, otrzymamy znowu równanie różniczkowe (34). Całka ogólna równania (36), jak zobaczymy poniżej, może być zawsze łatwo wykreślona geometrycznie, jeżeli Δx, Δy, $\Delta^2 y, \ldots, \Delta^n y$ oznaczają różnice skończone. Robiąc zaś te różnice o ile można najmniejszemi, będziemy mogli wykreślić krzywą, która będzie nadzwyczaj mało różnić się od krzywej, przedstawionej przez całkę równania różniczkowego (35). Tym sposobem możemy zawsze zbliżyć się do całki równania danego (34) tak dokładnie, jak tylko zapragniemy. Uwolniwszy równanie (36) od mianowników, możemy je napisać w kształcie

$$\varphi\,(x, y, h, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^n y) = 0, \tag{37}$$

gdzie zamiast Δx piszemy dla krótkości literę h, oznaczającą stały przyrostek zmiennej niezależnej.

Z całki ogólnej równania danego otrzymamy przez rozwiązanie względem y

$$y = \psi\,(x, c_1, c_2, \ldots, c_n);$$

z teoryi różnic skończonych wiemy, że wogóle dając

$$y = \psi\,(x),$$

będziemy mieli

$$\left\{\begin{array}{l}
\Delta y = \psi\,(x+h) - \psi\,(x) \\
\Delta^2 y = \psi\,(x+2h) - 2\psi\,(x+h) + \psi\,(x) \\
\Delta^3 y = \psi\,(x+3h) - 3\psi\,(x+2h) + 3\psi\,(x+h) - \psi\,(x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^n y = \psi\,(x+nh) - n\,\psi\,[x+(n-1)\,h] + \dfrac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\psi\,[x+(n-2)h] - \ldots \pm \psi(x).
\end{array}\right. \tag{38}$$

Powiedzieliśmy na samym początku, że stałe dowolne c_i, wchodzące w funkcyę ψ, mogą być zawsze tak wyznaczone, że dla $x=x_0$ tak y, jak i $n-1$ pochodnych $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ mogą otrzymać wartości zupełnie dowolne, z góry obrane. Wypada więc z tego jeszcze ważny wniosek, że i dla równania (36) nietylko y lecz także i wszystkie ilości $\frac{\Delta y}{h}, \frac{\Delta^2 y}{h^2}, \ldots, \frac{\Delta^{n-1}y}{h^{n-1}}$ mogą przybierać wartości dowolne, naprzód wyznaczone, a to dla tego, że całka równania (36) także zawiera n ilości stałych, które wiadomemi sposobami interpolacyi można wybrać tak, ażeby omówione wyżej warunki były spełnione. Innemi słowy mówiąc, ilości

$$\psi(x_0),\ \psi(x_0+h),\ \psi(x_0+2h),\ \ldots,\ \psi[x_0+(n-1)h]$$

mogą przybierać wartości zupełnie upodobane.

Podstawmy związki (38) w równanie (37), otrzymamy wówczas równanie w kształcie

$$\Psi\big(x, h, \psi(x), \psi(x+h), \psi(x+2h), \ldots, \psi(x+(n-1)h), \psi(x+nh)\big) = 0.$$

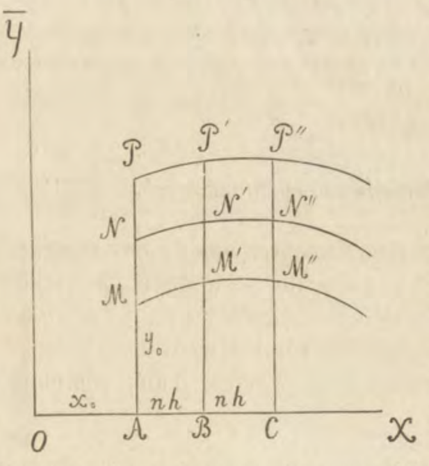
Rozwiązując względem $\psi(x+nh)$, będziemy mieli

$$(39)\qquad \psi(x+nh) = \Phi\big(x, h, \psi(x), \psi(x+h), \psi(x+2h), \ldots, \psi(x+(n-1)h)\big).$$

Jestto wartość rzędnej, odpowiadająca wartości odciętej $x+nh$.

Jeżeli teraz nakreślimy układ prostokątny współrzędnych i obierzemy dowolnie odciętą x_0 i oznaczymy parametry dowolne

$$\psi(x_0) = q_1,\ \psi(x_0+h) = q_2,\ \psi(x_0+2h) = q_3,\ \ldots,\ \psi[x_0+(n-1)h] = q_n,$$



natenczas z (39) będzie

$$(40)\qquad \begin{aligned} &\psi(x_0+nh) \\ &= \Phi(x_0, h, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n). \end{aligned}$$

Kształt funkcyi Φ jest dobrze określony, ponieważ wypływa drogą przekształceń z danego równania różniczkowego. Mamy więc w powyższem wartość rzędnej $\psi(x_0+nh)$, odpowiadającej odciętej x_0+nh; ta wartość rzędnej jest zależną od wielkości przyrostka h tudzież od n ilości dowolnych czyli parametrow $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Tym sposobem, dając na figurze odciętą $OA = x_0$ i rzędną $AM = y_0 = q_1$, obieramy podług upodobania liczbowe wartości parametrów $q_2, \ldots, q_n$; następnie możemy obliczyć z równania (40) wartość rzędnej $\psi(x_0+nh)$, gdzie h oznacza przyrostek bardzo mały. Po obliczeniu możemy na figurze wykreślić rzędną $M'B=\psi(x_0+nh)$ i oznaczyć drugi punkt krzywej M'. Dalej bierzemy za wartości pocoątkowe odcięte $OB=x_1$ i rzędną $M'B=y_1$ i znowu znajdziemy

$$\psi(x_1+nh)=\Phi(x_1, h, q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

będzie to wartość rzędnej $M''C=\psi(x_0+2nh)$, która odpowiada wartości odciętej $OC=x_0+2nh$, i która wyznacza trzeci punkt krzywej M''. Takim sposobem, wykreślając punkt za punktem $M, M', M'', \ldots$, nakreślimy żądaną krzywą, której przybliżenie do całki równania różniczkowego będzie o tyle większe, o ile mniejszym wybierzemy przyrostek h. Zamiast pierwszej rzędnej AM moglibyśmy byli wziąć rzędną AN i następnie taką samą drogą, jak powyżej, wyznaczylibyśmy punkta N', N'', i t. d. Otrzymalibyśmy drugą krzywą, objętą danem równaniem. Podobnie zamiast rzędnej AN możnaby było zaczynać od rzędnej AP i t. d. Taką drogą otrzymamy całą rodzinę linij krzywych, objętych równaniem ogólnem

$$y=\Phi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Dane równanie różniczkowe przedstawiać będzie pewną własność geometryczną całej rodziny krzywych wykreślonych.

Powyżej wyłożona metoda wykreślania całki z danego równania różniczkowego była używaną tylko dla równań rzędu 1-go. Metody tej nie można było uogólnić dla równań rzędu n-go z tej przyczyny, że nie zwracano wiele uwagi na teoryę różnic dla funkcyj jednej zmiennej, oraz wielu zmiennych. Obecnie, jak widzimy, metoda przybliżonego wykreślania całki dla równania rzędu n-go staje się łatwą do zrozumienia i bez żadnych trudności może być uogólnioną dla równań różniczkowych z wielu zmiennemi niezależnemi.

§ 5. *Własności układów równań różniczkowych.*

W dziale równań różniczkowych będziemy trzymać się dawnego sposobu pisania, używając symbolu ∂ dla oznaczenia pochodnych cząstkowych, oraz d dla różniczek zupełnych. Będziemy jednak pamiętali, że pomiędzy obydwoma sposobami pisania istotnej różnicy nie ma wcale.

Niech będzie dany układ równań różniczkowych z jedną zmienną niezależną w kształcie

$$\text{(a)} \qquad \frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n},$$

którego całki są

$$\text{(b)} \qquad f_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = c_i, \qquad (i=1,2,\ldots,n-1),$$

natenczas z układu (a) możemy utworzyć jedno równanie sposobem widocznym

$$\frac{\frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} dx_3 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} dx_n}{X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f_i}{\partial x_3} + \ldots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n}} = \frac{dx_1}{X_1}, \text{ lub} = \frac{dx_2}{X_2} = \text{i t. p.}$$

Skorzystaliśmy tutaj z powszechnie znanej własności układu równych stosunków. Widzimy, że po lewej stronie ostatniej równości licznik jest zawsze równy zeru, ponieważ przedstawia różniczkę zupełną równania (b); wnioskujemy stąd, że i mianownik także musi być zerem, czyli będzie

$$\text{(c)} \qquad X_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial f_i}{\partial x_3} + \ldots + X_n \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0, \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

$n-1$ równań różniczkowych cząstkowych. Takim sposobem wszystkie całki układu (a) sprawdzają jednocześnie równanie różniczkowe cząstkowe (c). Odwrotnie, gdy mamy dane równanie w kształcie (c), natenczas możemy także napisać układ (a).

Dalej, jeżeli mamy układ $n-m$ równań jednoczesnych

$$\text{(d)} \qquad dx_{m+r} = A_{1,r}\, dx_1 + A_{2,r}\, dx_2 + \ldots + A_{m,r}\, dx_m, \qquad (r=1,2,\ldots,n-m),$$

określających $n-m$ zmiennych zależnych $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+n-m}$, jako funkcye m zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_m$, wówczas spółczynniki A czynić powinny zadość pewnym warunkom całkowalności. Ażeby wyprowadzić wspomniane warunki, napiszmy różniczki zupełne w kształcie

$$\text{(e)} \qquad dx_{m+r} = \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_m} dx_m \qquad (r=1,2,\ldots,n-m)$$

i odejmijmy równania (d) i (e), natenczas otrzymamy

$$\left(A_{1,r} - \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(A_{2,r} - \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + \left(A_{m,r} - \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_m}\right) dx_m = 0\,.$$

Równanie to ustanawiałoby związek pomiędzy zmiennemi $x_1, x_2, \ldots, x_m$, ponieważ jednak wzmiankowane zmienne są zupełnie między sobą niezależne, więc związek ostatni istnieć nie może inaczej, jak tylko, gdy wszystkie współczynniki stają się zerami. Tym sposobem będzie

$$(f) \qquad A_{1,r} = \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_1}, \quad A_{2,r} = \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad A_{m,r} = \frac{\partial x_{m+r}}{\partial x_m},$$
$$(r=1, 2, \ldots, n-m).$$

Z znanego prawa o porządku różniczkowań wypada widocznie

$$\frac{dA_{i,r}}{dx_k} = \frac{dA_{k,r}}{dx_i},$$

czyli

$$\frac{\partial A_{i,r}}{\partial x_k} + \sum_{s=1}^{s=n-m} \frac{\partial A_{i,r}}{\partial x_{m+s}} \frac{\partial x_{m+s}}{\partial x_k} = \frac{\partial A_{k,r}}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{s=n-m} \frac{\partial A_{k,r}}{\partial x_{m+s}} \frac{\partial x_{m+s}}{\partial x_i}.$$

Mając na uwadze związki (f), z ostatniego otrzymujemy

$$(g) \qquad \frac{\partial A_{i,r}}{\partial x_k} + \sum_{s=1}^{s=n-m} \frac{\partial A_{i,r}}{\partial x_{m+s}} A_{k,s} = \frac{\partial A_{k,r}}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{s=n-m} \frac{\partial A_{k,r}}{\partial x_{m+s}} A_{i,s},$$
$$(r=1, 2, \ldots, n-m).$$

Są to warunki całkowalności dla układu danego (d) w przypadku, gdy wspomniany układ określa tylko $n-m$ zmiennych zależnych. Gdyby liczba zmiennych zależnych w układzie (d) była większą, aniżeli $n-m$, w tym przypadku warunki całkowalności stają się bardziej zawiłe. Jak pojmować należy układ dany, jeżeli liczba zmiennych zależnych przewyższa liczbę $n-m$, o tem ogłosiłem kilka prac w pismach Akademii nauk w Paryżu r. 1895.

Dajmy, że całki układu (d) są

$$f_r(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) = c_r;$$
$$(r=1, 2, \ldots, n-m),$$

biorąc różniczki zupełne, otrzymamy z powyższego

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_r}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial x_m} dx_m + \frac{\partial f_r}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1}$$
$$+ \frac{\partial f_r}{\partial x_{m+2}} dx_{m+2} + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Po wyrugowaniu z ostatniego różniczek $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \ldots, dx_n$ przy pomocy równań (d) będziemy mieli

$$\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_1} + A_{1,1}\frac{\partial f_r}{\partial x_{m+1}} + A_{1,2}\frac{\partial f_r}{\partial x_{m+2}} + \ldots + A_{1,n-m}\frac{\partial f_r}{\partial x_n}\right) dx_1$$

$$+\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_2} + A_{2,1}\frac{\partial f_r}{\partial x_{m+1}} + A_{2,2}\frac{\partial f_r}{\partial x_{m+2}} + \ldots + A_{2,n-m}\frac{\partial f_r}{\partial x_n}\right) dx_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{\partial f_r}{\partial x_m} + A_{m,1}\frac{\partial f_r}{\partial x_{m+1}} + A_{m,2}\frac{\partial f_r}{\partial x_{m+2}} + \ldots + A_{m,n-m}\frac{\partial f_r}{\partial x_n}\right) dx_m = 0.$$

Równanie to ustanawiałoby związek pomiędzy zmiennemi $x_1, x_2, \ldots, x_m$, które, jak wiemy, są zupełnie niezależne. Stąd wnioskujemy, że koniecznem jest

$$\text{(h)} \qquad \frac{\partial f_r}{\partial x_s} + A_{s,1}\frac{\partial f_r}{\partial x_{m+1}} + A_{s,2}\frac{\partial f_s}{\partial x_{m+2}} + \ldots + A_{s,n-m}\frac{\partial f_r}{\partial x_n} = 0,$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m).$$

Układ powyższy (h) ma ważne znaczenie w nauce i nosi nazwę *układu Jacobi'ego*, od nazwiska uczonego, który poraz pierwszy wyłożył teoryę i sposoby całkowania takiego układu. Widzimy więc, że całki układu (d), czyniącego zadość warunkom całkowalności, sprawdzać muszą jednocześnie układ równań różniczkowych cząstkowych. Opierając się jedynie na tej własności, wyłożyłem był sposoby całkowania układu (d) w Pamiętniku Akademii Umiejętności w Krakowie za rok 1883. Jeżeli w układzie (h) współczynniki $A_{s,i}$ nie czynią zadość warunkom całkowalności (g) i pozostają zupełnie dowolne, natenczas układ równań cząstkowych nosi nazwę *układu normalnego.*

Możemy dowieść twierdzenia, którego dokładna znajomość bywa pożyteczna przy całkowaniu równań wogóle.

Wszelki układ normalny zawsze zastąpić można odpowiednim układem o różniczkach zupełnych.

Jakoż niech będzie układ normalny

$$\text{(i)} \qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_{1,1}\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \ldots + A_{1,n-m}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,\\
&\frac{\partial f}{\partial x_2} + A_{2,1}\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \ldots + A_{2,n-m}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial f}{\partial x_m} + A_{m,1}\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} + \ldots + A_{m,n-m}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,
\end{aligned}\right.$$

w którem współczynniki A są jakiekolwiek funkcye zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pomnóżmy powyższe równania odpowiednio przez ilości nieoznaczone $p_1, p_2, \ldots, p_m$, natenczas po dodaniu wszystkich równań otrzymamy

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + p_m \frac{\partial f}{\partial x_m} + (p_1 A_{1,1} + p_2 A_{2,1} + \ldots + p_m A_{m,1}) \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}$$

$$+ \ldots + (p_1 A_{1,n-m} + p_2 A_{2,n-m} + \ldots + p_m A_{m,n-m}) \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

równanie różniczkowe cząstkowe, któremu według tego, co powiedzieliśmy na początku paragrafu, odpowiada następujący układ równań zwyczajnych

$$\text{(k)} \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{p_1} = \frac{dx_2}{p_2} = \ldots = \frac{dx_m}{p_m} = \frac{dx_{m+1}}{p_1 A_{1,1} + p_2 A_{2,1} + \ldots + p_m A_{m,1}} = \ldots \\ = \frac{dx_n}{p_1 A_{1,n-m} + p_2 A_{2,n-m} + \ldots + p_m A_{m,n-m}}. \end{aligned}$$

Oznaczając tutaj stały stosunek przez dt, będziemy mieli

$$p_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad p_2 = \frac{dx_2}{dt}, \ldots, p_m = \frac{dx_m}{dt}.$$

gdy zaś przy pomocy powyższych związków wyrugujemy ilości $p_1, p_2, \ldots, p_m$ z układu (k) i następnie skrócimy przez dt, natenczas otrzymamy $n-m$ równań o różniczkach zupełnych

$$\text{(l)} \quad dx_{m+r} = A_{1,r}\, dx_1 + A_{2,r}\, dx_2 + \ldots + A_{m,r}\, dx_m, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-m),$$

w których współczynniki A są jakiekolwiek i mogą nie czynić zadość żadnym warunkom całkowalności. Odwrotne twierdzenie, iż układowi (l) odpowiada zawsze układ pomocniczy równań cząstkowych (i), nie byłoby tutaj niczem uzasadnione. Odwrotne twierdzenie będzie prawdziwe tylko w tym jedynie przypadku, gdy wszystkie współczynniki układ (l) spełniają warunki (g).

§ 6. *Teorya ogólna równań różniczkowych zupełnych rzędu 1-go z wielu zmiennemi niezależnemi.*

Niech będzie dane równanie różniczkowe o różniczkach zupełnych

$$(a) \quad X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_i\, dx_i + \ldots + X_n\, dx_n = 0,$$

określające jednę zmienną, jako funkcyę pozostałych zmiennych niezależnych. Napiszmy całkę równania (α) w postaci ogólnej

$$(\beta) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c.$$

Równanie (α) nazywać będziemy *dokładnem*, jeżeli lewa strona przedstawia różniczkę zupełną rzędu 1-go funkcyi F. W tem przypuszczeniu będzie

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n$$

$$= X_1\, dx_1 + X_2\, dx_3 + \ldots + X_i\, dx_i + \ldots + X_n\, dx_n\,;$$

widoczna więc, że istnieją związki

$$X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}\,, \quad X_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}\,.$$

Różniczkując pierwsze z powyższych równań względem x_k, a drugie względem x_i i pamiętając znane prawo o porządku różniczkowań, otrzymamy

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\,, \quad (i, k = 1, \ldots, n \text{ wszystkim kombinacyom})\,.$$

Tym sposobem będziemy mieli $\frac{n(n-1)}{2}$ równań warunkowych (γ).

Jeżeli teraz przypuścimy, że równanie (α) nie jest dokładne i wyznacza zmienną x_n, jako funkcyę pozostałych zmiennych niezależnych, natenczas będzie

$$dx_n = \frac{\partial x_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x_n}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial x_i} dx_i + \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} dx_{n-1}\,,$$

oprócz tego z równania danego (α) wypływa

$$dx_n = -\frac{X_1}{X_n} dx_1 - \frac{X_2}{X_n} dx_2 - \ldots - \frac{X_i}{X_n} dx_i - \ldots - \frac{X_{n-1}}{X_n} dx_{n-1}\,.$$

Odejmując dwa ostatnie równania, znajdujemy

$$\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1} + \frac{X_1}{X_n}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_2} + \frac{X_2}{X_n}\right) dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_i} + \frac{X_i}{X_n}\right) dx_i$$

$$+ \ldots + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} + \frac{X_{n-1}}{X_n}\right) dx_{n-1} = 0\,.$$

Równanie to, gdyby istniało, określałoby związek pomiędzy zmiennemi niezależnemi, co jest sprzeczne z założeniem; wnioskujemy z tego, że równanie powyższe istnieć nie może, a więc współczynniki równania powinny być zerami, czyli

$$(\delta) \qquad \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = -\frac{X_i}{X_n}, \qquad (i=1,2,\ldots,n-1).$$

Napiszmy podobne równanie dla wskaźnika k

$$(\varepsilon) \qquad \frac{\partial x_n}{\partial x_k} = -\frac{X_k}{X_n}.$$

Następnie, gdy zróżniczkujemy równanie (δ) względem x_k tudzież równanie (ε) względem x_i, otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\frac{X_i}{X_n}\right) + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(-\frac{X_i}{X_n}\right)\frac{\partial x_n}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{X_k}{X_n}\right) + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(-\frac{X_k}{X_n}\right)\frac{\partial x_n}{\partial x_i}.$$

Wyrugowawszy z powyższego ilości $\frac{\partial x_n}{\partial x_i}$ oraz $\frac{\partial x_n}{\partial x_k}$ przy pomocy równań (δ), (ε), po dokonaniu łatwych działań i uproszczeń znajdziemy

$$(\zeta) \qquad X_n\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right) + X_i\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_k}\right) + X_k\left(\frac{\partial X_n}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_n}\right) = 0,$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Tym sposobem otrzymujemy $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ równań warunkowych (ζ), którym powinny czynić zadość współczynniki równania danego (α) w przypadku, gdy to równanie nie jest dokładne, lecz wyznacza jedną zmienną x_n, jako funkcyę pozostałych zmiennych niezależnych.

Na równanie dane (α), gdy nie jest dokładnem, możemy jeszcze patrzeć z innego punktu widzenia. Pomnóżmy lewą stronę równania (α) przez pewien czynnik μ, nieznany nam bliżej, jednak taki, iż będzie miał miejsce związek

$$\mu\,(X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_i\,dx_i + \ldots + X_n\,dx_n) = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n,$$

natenczas będzie widocznem, że

$$(\varkappa) \qquad \mu X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \mu X_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Czynnik μ, czyniący zadość powyższemu warunkowi, nazywa się *czynnikiem całkującym* i wogóle przedstawia niewiadomą funkcyę zmiennych. Czynnik μ równa się jedności, gdy równanie (α) będzie dokładnem.

Rugując funkcyę F z równań $(\varkappa)$, otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\mu X_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu X_k),$$

czyli

$$(\lambda) \qquad X_i \frac{\partial \mu}{\partial x_k} - X_k \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) = 0,$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Jeżeli oprócz równania (λ) napiszemy podobne dla wskaźników i oraz n, tudzież dla k, n, natenczas po wyrugowaniu z wspomnianych trzech równań ilości $\frac{\partial \mu}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \mu}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \mu}{\partial x_n}$ otrzymamy znowu warunki (ζ), które powyżej inną drogą otrzymaliśmy. Gdy przedstawimy całkę równania (λ) w kształcie

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu) = c,$$

wówczas równanie (λ) można będzie napisać tak

$$-X_i \frac{\partial V}{\partial x_k} + X_k \frac{\partial V}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V}{\partial \mu} = 0.$$

Zmieniając wartości wskaźników i, k od 1 do n otrzymamy pewną liczbę układów równań różniczkowych cząstkowych. Wystarczającem będzie zbadać tylko jeden z tych układów

$$(\nu) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{X_i}{X_n} \frac{\partial V}{\partial x_n} + \frac{\mu}{X_n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V}{\partial \mu} = 0.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wiemy z poprzedzającego §, że układowi równań różniczkowych cząstkowych (ν), odpowiada zawsze układ dwóch równań o różniczkach zupełnych

$$(\pi) \qquad \left\{ \begin{aligned} dx_n &= \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(-\frac{X_i}{X_n}\right) dx_i\,, \\ \frac{d\mu}{\mu} &= \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{X_n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_i}\right) dx_i\,. \end{aligned} \right.$$

Pierwsze z tych równań jest, oczywista, równaniem danem (α), drugie zaś można napisać w kształcie

$$(\varrho) \qquad d \lg \mu = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{X_n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_i}\right) dx_i\,.$$

Ostatnie równanie daje nam bardzo ważny związek czynnika całkującego z współczynnikami danego równania różniczkowego; związek ten pozwala znaleźć czynnik μ dla wielu równań. Znajomość ilości μ przy szukaniu całki (β) sprowadza zagadnienie do całkowania równania dokładnego.

Istnieje kilka sposobów całkowania równania dokładnego, wyłożymy poniżej sposób najprostszy i najłatwiejszy do pamiętania.

Wiemy już, że równanie dokładne czynić musi zadość warunkowi

$$(\sigma) \quad dF = X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_i\, dx_i + \ldots + X_{n-1}\, dx_{n-1} + X_n\, dx_n\,,$$

gdzie F oznacza szukaną całkę. Ponieważ związek powyższy istnieje tożsamościowo, a więc przy wszelkich wartościach na zmienne, zatem nie przestanie być prawdziwym, gdy zamiast $x_2, x_3, \ldots, x_n$ położymy jakiekolwiek stałe, będzie wówczas

$$(\tau) \qquad dF = X_1\, dx_1\,.$$

Pozostałe wyrazy w (σ) znikną, gdyż różniczki ilości stałych są zerami. Całkując równanie (τ) w granicach od $x_{1,0}$ do x_1 otrzymamy

$$(\varphi) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n) - F(x_{1,0}, x_2, \ldots, x_n) = \int_{x_{1,0}}^{x_1} X_1\, dx_1\,,$$

gdzie, według poprzedzającego założenia, ilości $x_2, x_3, \ldots, x_n$ uważamy jako pewne stałe. Gdy teraz w równaniu (σ) położymy we wszystkich wyrazach zamiast x_1 wartość początkową stałą $x_{1,0}$, natenczas otrzymamy równanie

$$(\xi) \qquad dF_0 = X_{2,0}\, dx_2 + X_{3,0}\, dx_3 + \ldots + X_{n,0}\, dx_n\,,$$

w którem, oczywista, F_0 ma znaczenie

$$F_0 = F(x_{1,0}, x_2, x_3, \ldots \; x_n),$$

oraz $X_{2,0}$, $X_{3,0}$, ..., $X_{n,0}$ oznaczają współczynniki X_2, X_3, ..., X_n, z tą jednak zmianą, iż we wszystkich wyrazach położono zamiast x_1 wartość początkową $x_{1,0}$. Ponieważ związek (ξ) musi zachodzić przy wszelkich wartościach na zmienne $x_2, x_3, \ldots, x_n$, więc pozostanie prawdziwym, gdy zamiast $x_3, x_4, \ldots, x_n$ położymy jakiebądź stałe, będzie wówczas

$$dF_0 = X_{2,0}\, dx_2 .$$

Całkując ostatnie równanie w granicach od $x_{2,0}$ do x_2, znajdujemy

$$(\psi) \qquad F(x_{1,0}, x_2, x_3, \ldots, x_n) - F(x_{1,0}, x_{2,0}, x_3, \ldots, x_n) = \int\limits_{x_{2,0}}^{x_2} X_{2,0}\, dx_2 .$$

Gdy następnie w równaniu (ξ) damy $x_2 = x_{2,0}$, wówczas będziemy mieli

$$(\chi) \qquad dF_{0,0} = X_{3,0,0}\, dx_3 + X_{4,0,0}\, dx_4 + \ldots + X_{n,0,0}\, dx_n ,$$

gdzie $F_{0,0}$ ma znaczenie

$$F_{0,0} = F(x_{1,0}, x_{2,0}, x_3, x_4, \ldots, x_n),$$

oraz $X_{3,0,0}$, $X_{4,0,0}$, ..., $X_{n,0,0}$ oznaczają współczynniki $X_3, X_4, \ldots, X_n$ z tą zmianą, iż we wszystkich wyrazach zamiast dwóch zmiennych x_1, x_2 położono wartości początkowe $x_{1,0}$, $x_{2,0}$.

Atoli związek (χ) zachodzi tożsamościowo, więc też pozostanie prawdziwym, gdy zamiast $x_4, x_5, \ldots, x_n$ położymy pewne stałe, wówczas będzie

$$dF_{0,0} = X_{3,0,0}\, dx_3 .$$

Całkując powyższe równanie w granicach od $x_{3,0}$ do x_3, będziemy mieli

$$(\omega) \quad F(x_{1,0}, x_{2,0}, x_3, x_4, \ldots, x_n) - F(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_4, \ldots, x_n) = \int\limits_{x_{3,0}}^{x_3} X_{3,0,0}\, dx_3 .$$

Rozumowanie takie bardzo łatwo prowadzi się dalej. Gdy teraz dodamy wszystkie równania (φ), (ψ), (ω) i t. d. znajdziemy bez żadnych trudności wzór całki szukanej

$$F = \int\limits_{x_{1,0}}^{x_1} X_1\, dx_1 + \int\limits_{x_{2,0}}^{x_2} X_{2,0}\, dx_2 + \int\limits_{x_{3,0}}^{x_3} X_{3,0,0}\, dx_3 + \ldots + \int\limits_{x_{n,0}}^{x_n} X_{n,0,0,\ldots,0}\, dx_n .$$

Znaczenia $X_{2.0}$, $X_{3,0,0}$, $X_{4,0,0,0}$, ... są ściśle omówione wyżej. Po wykonaniu wskazanych całkowań w ostatnim wzorze można następnie wszystkie wyrazy, zawierające wartości początkowe $x_{1,0}$, $x_{2,0}$, $x_{3,0}$, ... złączyć w jedną stałą dowolną C. Wzór całki powyższej podany był poraz pierwszy przez Jacobi'ego; wzór ten jednak był dowiedzionym sposobem odmiennym od przytoczonego w niniejszej pracy mojej,

Równania liniowe. Ogólny kształt równań różniczkowych linijowych z wielu zmiennemi jest następujący:

$$(\mathrm{m})\qquad X du + (Y'_1 + Z'_1 u)\,dx_1 + (Y'_2 + Z'_2 u)\,dx_2 + \ldots + (Y'_n + Z'_n u)\,dx_n = 0,$$

w którem X, Y'_1, Z'_1, Y'_2, Z'_2. ... oznaczają pewne funkcye zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Jeżeli oznaczymy

$$\frac{Y'_1}{X} = Y_1, \quad \frac{Z'_1}{X} = Z, \quad \frac{Y'_2}{X} = Y_2, \quad \frac{Z'_2}{X} = Z_2, \ldots,$$

$$\frac{Y'_n}{X} = Y_n, \quad \frac{Z'_n}{X} = Z,$$

natenczas zamiast równania (m) możemy napisać i uważać za ogólne następujące równanie linijowe

$$(\mathrm{n})\qquad du + (Y_1 + Z_1 u)\,dx_1 + (Y_2 + Z_2 u)\,dx_2 + \ldots + (Y_n + Z_n u)\,dx_n = 0.$$

W przypadku, gdy równanie (n) wyznacza jedną tylko zmienną zależną u, wówczas powinny być spełnione warunki całkowalności

$$\frac{\partial Y_k}{\partial x_i} + u\frac{\partial Z_k}{\partial x_i} - Z_k(Y_i + Z_i u) = \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} + u\frac{\partial Z_i}{\partial x_k} - Z_i(Y_k + Z_k u),$$

czyli po widocznem uproszczeniu będzie

$$\frac{\partial Y_k}{\partial x_i} + u\frac{\partial Z_k}{\partial x_i} - Y_i Z_k = \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} + u\frac{\partial Z_i}{\partial x_k} - Y_k Z_i.$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Atoli według naszego założenia współczynniki Y_s, Z_s nie zawierają wcale zmiennej zależnej u, wskutek tego ostatnie równanie rozłoży się na dwa następujące

$$(\mathrm{o})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial Y_k}{\partial x_i} - Y_i Z_k = \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} - Y_k Z_i, \\ &\frac{\partial Z_k}{\partial x_i} = \frac{\partial Z_i}{\partial x_k}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right.$$

Dalej ze związku (ϱ), zastosowanego do równania (n), wypada widocznie

$$d \lg \mu = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i \, dx_i,$$

równanie to musi być koniecznie dokładnem na mocy warunków (o), a więc będziemy mieli wprost

$$\lg \mu = \int \sum_{i=1}^{i=n} Z_i \, dx_i.$$

skąd znajdujemy

$$\mu = e^{\int \sum_{i=1}^{i=1} Z_i \, dx_i}.$$

Widzimy więc, że równania linijowe w kształcie (n) całkują się zawsze pod postacią skończoną, bowiem czynnik całkujący może być zawsze łatwo znaleziony sposobem, opisanym powyżej.

Równania jednorodne. Równaniem różniczkowem jednorodnem

$$X_1 \, dx_1 + X_2 \, dx_2 + \ldots + X_n \, dx_n = 0,$$

nazywamy takie równanie, którego współczynniki X_i czynią zadość warunkom całkowalności (ζ) i oznaczają funkcye wymierne jednorodne jednakowego stopnia, zawierające zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Czynnik całkujący takiego równania może być zawsze znaleziony zapomocą metody ogólnej, którą poniżej wyłożymy.

Teorya czynnika całkującego. Gdy współczynniki X_i równania danego (α) oznaczają jakiekolwiek funkcye wymierne, natenczas możemy dać następujący sposób ogólny dla znalezienia czynnika całkującego Widocznem jest, iż równania (λ) można napisać tak

$$\text{(p)} \qquad X_i \frac{\partial \lg \mu}{\partial x_k} - X_k \frac{\partial \lg \mu}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = 0,$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dla wyznaczenia wartości funkcyi $\lg \mu$ nie potrzebujemy bynajmniej całkować układu równań różniczkowych cząstkowych (p) w całej ogólności; zadanie takie byłoby o wiele trudniejszem, aniżeli całkowanie równania (α). W naszem zagadnieniu koniecznem będzie znaleźć jakimbądź sposobem rozwiązanie szczególne czyli wartość $\lg \mu$, sprawdzającą tożsamościowo wszystkie równania (p). Tak postawione zagadnienie daje się rozwiązać w bardzo wielu razach sposobem następującym. Oznaczmy

$$\frac{\partial \lg \mu}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial \lg \mu}{\partial x_k} = p_k,$$

natenczas zamiast układu (p), napiszemy

$$\text{(q)} \qquad X_i p_k - X_k p_i + \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = 0,$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

oprócz tego będziemy mieli różniczkę zupełną

$$\text{(r)} \qquad d \lg \mu = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \, dx_i,$$

skąd widoczna

$$\text{(s)} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

Ażeby zamienić równania (q) i (s) na tożsamości, dajmy

$$\text{(t)} \qquad p_i = \frac{M_i}{N_i}, \quad p_k = \frac{M_k}{N_k}, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie wogóle M_s oznacza funkcyę wymierną całkowitą stopnia m_s-go zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$M_s = a_1 x_1^{m_s} + a_2 x_2^{m_s} + \ldots + a_n x_n^{m_s} + b_1 x_1^{m_s - 1} x_2 + b_2 x_2^{m_s - 1} x_3$$
$$+ \ldots + c_1 x_1^{m_s - 2} x_2^2 + c_2 x_2^{m_s - 2} x_3^2 + \ldots;$$

podobnie N_3 oznacza funkcyę wymierną całkowitą stopnia n_s-go wszystkich. Ilości a_r, b_r, c_r, ..., m_s, n_s są stałe, które możemy wybrać podług upodobania.

Podstawiając wartości (t) w równania (q) i (s) i przyrównywając do zera wszystkie współczynniki stałe, otrzymamy pewną liczbę równań dla wyznaczenia wspomnianych stałych a, b, c, ... Nakoniec pozostanie nam do przecałkowania równanie dokładne (r), z którego znajdziemy wartość $\lg \mu$. W przypadku, gdy danem będzie równanie różniczkowe (α) jednorodne, natenczas M_s, N_s oznaczać będą nietylko funkcye wymierne całkowite lecz zarazem i jednorodne, stopni wogóle różnych.

Zagadnienie Pfaff'a. Gdy równanie różniczkowe

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_n\, dx_n = 0, \tag{u}$$

nie jest ani dokładnem, ani nie czyni zadość warunkom (ζ) w tym przypadku liczba całek jest większą, aniżeli jedna.

Dajmy na to, że całki będą miały kształt

$$f_r\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, k), \tag{v}$$

wówczas różniczki zupełne powyższych równań (v) będą

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f_r}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial x_n}\, dx_n = 0. \tag{w}$$

Jeżeli teraz pomnożymy pierwsze z równań (w) przez pewien czynnik M_1, drugie przez $M_2, \ldots,$ k-te przez M_k i następnie wszystkie równania dodamy, natenczas otrzymamy jedno równanie rożniczkowe równoważne względem danego równania (u) i wskutek tego współczynniki wspomnianych równań będą proporcyonalne, będziemy tedy mieli

$$\left\{\begin{array}{l}
M_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + M_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \ldots + M_k \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} = a\, X_1\,, \\
M_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + M_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + M_k \dfrac{\partial f_k}{\partial x_2} = a\, X_2\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
M_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + M_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} + \ldots + M_k \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} = a\, X_n\,.
\end{array}\right. \tag{z}$$

Jestto układ n równań, zawierających k funkcyj nieznanych $\dfrac{M_1}{a}$, $\dfrac{M_2}{a}, \ldots, \dfrac{M_k}{a}$, oraz k całek $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Widzimy stąd, że, jeżeli współczynniki X_s nie sprawdzają żadnych równań warunkowych, w takim przypadku liczba równań układu (z) powinna być równą liczbie niewiadomych, czyli $2k=n$. Wypada z tego wniosek, że liczba zmiennych równania danego (u) powinna być parzystą, oraz że liczba całek równa się połowie liczby wszystkich zmiennych. Zagadnienie, wyżej wysłowione, staje się nieoznaczonem, gdy liczba zmiennych równania danego będzie nieparzystą i w tym ostatnim przypadku jedną całkę można wybrać podług upodobania

Jeżeli jednak będzie $k < \frac{n}{2}$, czyli liczba równań (z) będzie większą od liczby ilości niewiadomych, wzmiankowanych wyżej, natenczas po wyrugowaniu wszystkich ilości $\frac{M_s}{a}$, f_s z układu (z) otrzymamy pewną liczbę równań warunkowych dla samych współczynników X_s. Warunki wspomniane przedstawiają się pod postacią funkcyj Pfaff'a, których kształt wyznaczyłem bliżej w pismach Akademii nauk w Paryżu r. 1892 i 1894, tudzież w „Pracach matematyczno-fizycznych" w Warszawie.

§ 7. *Teorya ogólna równań różniczkowych zupełnych rzędu 2-go z wielu zmiennemi niezależnemi.*

Przedmiotem niniejszego § jest nadzwyczaj rozległy dział równań różniczkowych, niebadanych w tej postaci, jaką zajmować się będziemy. Równania, o których będzie mowa poniżej, przedstawiają same przez się znaczny interes, a oprócz tego stosują się do teoryi równań różniczkowych cząstkowych rzędu 2-go.

W znanych mi dziełach dawnych autorów badane są niby równania zupełne rzędu 2-go z wielu zmiennemi, lecz bez wyrazu głównego, zawierającego różniczkę zupełną rzędu 2-go; są to więc w rzeczywistości równania rzędu 1-go w kształcie:

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i\,(dx_i)^2 + 2\sum_{i,k} B_{i,k}\,dx_i\,dx_k = 0\,.$$

Dziwić się temu nie można, że nowsi autorowie dzieł matematycznych całkowicie opuszczali w wykładach swoich powyżej napisaną klasę równań, nie przedstawiającą nic godnego uwagi.

Ogólny kształt równania różniczkowego zupełnego rzędu 2-go z wielu zmiennemi niezależnemi jest następujący:

$$(1)\qquad A\,d^2u + U(du)^2 + 2\sum_{i=1}^{i=n} U_i\,du\,dx_i + \sum_{i=1}^{i=n} X_{i,i}\,(dx_i)^2 + 2\sum_{i,k} X_{i,k}\,dx_i\,dx_k = 0,$$

gdzie u jest zmienna zależna, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zmienne niezależne.

Spółczynniki A, U, U_i, $X_{i,i}$, $X_{i,k}$ oznaczają pewne funkcye wszystkich zmiennych; ostatnia suma $\sum_{i,k}$ tak w powyższem równaniu, jak i we wszystkich innych, spotykanych w § niniejszym, odnosi się tylko do wszystkich kombinacyj liczb 1, 2, ..., n, wziętych po dwie.

Całką równania danego (1) nazywamy taką funkcyę

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

zmiennych niezależnych x_i, tudzież stałych dowolnych c, iż, gdy napiszemy wartości jej różniczek zupełnych

$$du = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i\,,$$

$$d^2u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dx_i^2 + 2 \sum_{i,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} dx_i\, dx_k$$

i podstawimy powyższe wartości w równanie (1), natenczas otrzymamy *tożsamość bezwzględną*, czyli, że wszystkie współczynniki równania staną się zerami. W rzeczy samej, gdy wykonamy powyżej wzmiankowane podstawienie, wówczas będzie

$$A \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dx_i^2 + 2A \sum_{i,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} dx_i\, dx_k + U \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_i^2$$

$$+ 2U \sum_{i,k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_i\, dx_k + 2 \sum_{i=1}^{i=n} U_i\, dx_i \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=n} X_{i,i}\, dx_i^2 + 2 \sum_{i,k} X_{i,k}\, dx_i\, dx_k = 0\,.$$

Po należytem uporządkowauiu wyrazów z ostatniego równania otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left[A \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + U \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + 2U_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + X_{i,i}\right] dx_i^2 + \sum_{i,k} \left[2A \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}\right.$$

$$\left. + 2U \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} + 2U_i \frac{\partial u}{\partial x_k} + 2U_k \frac{\partial u}{\partial x_i} + 2X_{i,k}\right] dx_i\, dx_k = 0\,,$$

z przyczyny niezależności różniczek dx_s wypada z powyższego

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} A \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + U \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + 2U_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + X_{i,i} = 0\,, \\ \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \\ A \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} + U \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} + U_i \dfrac{\partial u}{\partial x_k} + U_k \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + X_{i,k} = 0\,, \\ \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n \text{ kombinacyom}). \end{array}\right.$$

Takim sposobem całka równania danego (1) będzie jednocześnie całką wspólną układu (2) równań różniczkowych cząstkowych rzędu 2-go.

Bardziej szczegółowa teorya równania (1), oraz sposoby całkowania będą wyłożone w pracy niniejszej na następnych stronicach, bezpośrednio zaś przejdziemy do przypadków szczególnych.

Dajmy w równaniu (1)

$$A = 1, \quad U = 0, \quad U_i = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

natenczas otrzymamy, przypadek znacznie prostszy i łatwiejszy od poprzedzającego

$$(3) \qquad d^2u + \sum_{i=1}^{i=n} X_{i,i}\, dx_i^2 + 2\sum_{i,k} X_{i,k}\, dx_i\, dx_k = 0.$$

Rownanie, napisane wyżej, będziemy nazywali *dokładnem*, jeżeli przedstawia różniczkę zupełną rzędu 2-go pewnej funkcyi u, a więc spółczynniki $X_{i,i}$ $X_{i,k}$ nie zawierają zmiennej zależnej u i oprócz tego czynią zadość warunkom

$$(4) \qquad -X_{i,i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad -X_{i,k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k},$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Zapomocą różniczkowania równań (4) otrzymujemy bardzo łatwo

$$(5) \qquad \frac{\partial X_{i,i}}{\partial x_k} = \frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_l} = \frac{\partial X_{i,l}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 X_{i,i}}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 X_{k,k}}{\partial x_i^2}.$$

Związki powyższe wypływają sposobem widocznym z prawa o porządku różniczkowań; ostatni z tych związków można opuszczać, gdyż wypływa z pierwszego zapomocą różniczkowania względem x_k, w rzeczy samej będzie

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 X_{i,i}}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 X_{i,k}}{\partial x_k\, \partial x_i}.$$

Zmieniając w (6) wskaźniki i na k i odwrotnie, otrzymamy

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 X_{k,k}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 X_{k,i}}{\partial x_i\, \partial x_k}.$$

Drugie strony równań (6) i (7) przedstawiają jedno i to samo, gdyż $X_{i,k} = X_{k,i}$ wskutek tego i pierwsze strony muszą być równe między sobą.

Tym sposobem widzimy, że, jeżeli równanie (3) ma być *dokładne*, natenczas konieczne są warunki:

$$(8)\qquad \frac{\partial X_{i,i}}{\partial x_k} = \frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_l} = \frac{\partial X_{i,l}}{\partial x_k},$$

$$(i, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Okażemy poniżej, że warunki (8) wystarczają dla znalezienia całki równania dokładnego. W rzeczy samej, mamy widocznie

$$-X_{1,1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2};$$

całkując ostatnie równanie, otrzymamy:

$$(9)\qquad u = -\iint X_{1,1}\, dx_1^2 + Ax_1 + B,$$

gdzie A i B oznaczają funkcye dowolne zmiennych $x_2, x_3, \ldots, x_n$, ponieważ znak $\int$ odnosi się tylko do zmiennej x_1. Ażeby wyznaczyć funkcye A i B, zróżniczkujmy (9) względem x_1, będzie wówczas

$$(10)\qquad \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\iint X_{1,1}\, dx_1^2 + A;$$

różniczkując (10) jeszcze raz względem x_s, otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_s} = -\frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_s}\iint X_{1,1}\, dx_1^2 + \frac{\partial A}{\partial x_s},$$

$$(s = 2, 3, \ldots, n),$$

skąd wypada widocznie

$$(11)\qquad \frac{\partial A}{\partial x_s} = -X_{1,s} + \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_s}\iint X_{1,1}\, dx_1^2.$$

Wiemy, że różniczka zupełna rzędu 1-go funkcyi A będzie

$$dA = \sum_{s=2}^{s=n} \frac{\partial A}{\partial x_s}\, dx_s,$$

podstawiając tutaj wartość (11) na miejsce $\frac{\partial A}{\partial x_s}$ i oznaczając dla skrócenia

$$(12)\qquad D = \iint X_{1,1}\, dx_1^2,$$

będziemy mieli

$$dA = \sum_{s=2}^{s=n} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \, \partial x_s} - X_{1,s} \right) dx_s \,. \tag{13}$$

Wszystkie spółczynniki równania (13) nie mogą wcale zawierać zmiennej x_1, ponieważ mamy widocznie

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \, \partial x_s} - X_{1,s} \right) = 0,$$
$$(s = 2, 3, \ldots, n),$$

mając na uwadze wartość (12), otrzymujemy z powyższego

$$\frac{\partial X_{1,1}}{\partial x_s} - \frac{\partial X_{1,s}}{\partial x_1} = 0.$$

Jestto jeden z warunków (8), które według założenia muszą koniecznie zachodzić. Oprócz tego widzimy, że równanie (13) przedstawia także różniczkę dokładną, gdyż niezbędne warunki będą spełnione. Istotnie mamy

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \, \partial x_l} - X_{1,l} \right) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \, \partial x_k} - X_{1,k} \right),$$

co jest widoczną tożsamością na zasadzie warunków (8). Takim sposobem, całkując równanie (13) metodą Jacobi'ego, otrzymamy

$$A = \int_{x_{2,0}}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \, \partial x_2} - X_{1,2} \right) dx_2 + \int_{x_{3,0}}^{x_3} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \, \partial x_3} - X_{1,3} \right)_{x_2 = x_{2,0}} + \ldots .$$
$$+ \int_{x_{n,0}}^{x_n} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \, \partial x_n} - X_{1,n} \right) dx_n \Bigg|_{\substack{x_2 = x_{2,0} \\ x_3 = x_{3,0} \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} = x_{n-1,0}}} ,$$

gdzie $x_{2,0}, x_{3,0}, \ldots, x_{n,0}$ oznaczają początkowe wartości zmiennych; wyrazy, zawierające te początkowe wartości, można w końcu zebrać w jeden wyraz, oznaczony głoską C. W dalszym ciągu podamy sposób znalezienia wartości funkcyi B. Różniczkujmy nasamprzód równanie (9) względem zmiennej x_s, będzie wówczas

$$\frac{\partial u}{\partial x_s} = - \frac{\partial}{\partial x_s} \iint X_{1,1} \, dx_1^{\,2} + x_1 \frac{\partial A}{\partial x_s} + \frac{\partial B}{\partial x_s} \,,$$

następnie, gdy wyrugujemy z powyższego ilość $\frac{\partial A}{\partial x_s}$ przy pomocy związku (11), natenczas otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x_s} = - \frac{\partial D}{\partial x_s} + x_1 \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \, \partial x_s} - X_{1,s} \right) + \frac{\partial B}{\partial x_s} ,$$

głoska D ma tutuj znaczenie poprzedzające (12).

Jeżeli zróżniczkujemy równanie ostatnie względem zmiennej x_r, będziemy mieli

$$(14) \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial x_s \, \partial x_r} = - X_{s,r} + \frac{\partial^2 D}{\partial x_s \, \partial x_r} - x_1 \left(\frac{\partial^3 D}{\partial x_1 \, \partial x_s \, \partial x_r} - \frac{\partial X_{1,s}}{\partial x_r} \right),$$

$$(s, r = 2, 3, \ldots, n).$$

Napisane wyrażenie nie może zawierać zmiennej x_1, czyli wszystkie wyrazy ze zmienną x_1 muszą się wzajemnie znosić, albowiem koniecznem będzie

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[- X_{s,r} + \frac{\partial^2 D}{\partial x_s \, \partial x_r} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \, \partial x_s} - X_{1,s} \right) \right] = 0;$$

pamiętając tutaj, że wyrażenie w małych nawiasach: $\frac{\partial^2 D}{\partial x_1 \, \partial x_s} - X_{1,s}$ nie zawiera x_1, jak tego dowiedliśmy poprzednio, otrzymamy łatwo z powyższego

$$- \frac{\partial X_{s,r}}{\partial x_1} + \frac{\partial X_{1,s}}{\partial x_r} = 0, \qquad (s, r = 2, 3, \ldots, n),$$

co jest tożsamością na mocy warunków (8).

Dalej wiemy, że różniczką zupełną rzędu 2-go funkcyi B będzie

$$d^2 B = \sum_{r=2}^{r=n} \frac{\partial^2 B}{\partial x_r^2} dx_r^2 + 2 \sum_{r,s} \frac{\partial^2 B}{\partial x_r \, \partial x_s} dx_r \, dx_s ;$$

stąd na zasadzie związków (14) wypadnie

$$(15) \left\{ \begin{aligned} d^2 B = & \sum_{r=2}^{r=n} \left(- X_{r,r} + \frac{\partial^2 D}{\partial x_r^2} + x_1 \frac{\partial X_{1,r}}{\partial x_r} - x_1 \frac{\partial^3 D}{\partial x_1 \, \partial x_r^2} \right) dx_r^2 \\ & + 2 \sum_{r,s} \left(- X_{r,s} + \frac{\partial^2 D}{\partial x_r \, \partial x_s} + x_1 \frac{\partial X_{1,s}}{\partial x_r} - x_1 \frac{\partial^3 D}{\partial x_1 \, \partial x_r \, \partial x_s} \right) dx_r \, dx_s . \end{aligned} \right.$$

Łatwo dowieść, że równanie (15) rzędu 2-go, zawierające $n-1$ zmiennych niezależnych $x_2, x_3, \ldots, x_n$, jest dokładne. Istotnie warunki (8) będą spełnione:

$$\frac{\partial}{\partial x_t}\left(-X_{r,r}+\frac{\partial^2 D}{\partial x_r^2}+x_1\frac{\partial X_{1,r}}{\partial x_r}-x_1\frac{\partial^3 D}{\partial x_1\,\partial x_r^2}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_r}\left(-X_{r,t}+\frac{\partial^2 D}{\partial x_r\,\partial x_t}+x_1\frac{\partial X_{1,t}}{\partial x_r}-x_1\frac{\partial^3 D}{\partial x_1\,\partial x_r\,\partial x_t}\right),$$

czyli

$$-\frac{\partial X_{r,r}}{\partial x_t}+x_1\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial X_{1,r}}{\partial x_t}\right)=-\frac{\partial X_{r,t}}{\partial x_r}+x_1\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial X_{1,t}}{\partial x_r}\right).$$

Jestto tożsamość widoczna, jeżeli spełnione są warunki całkowalności (8).

Podobnie mamy

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(-X_{r,s}+\frac{\partial^2 D}{\partial x_r\,\partial x_s}+x_1\frac{\partial X_{1,s}}{\partial x_r}-x_1\frac{\partial^3 D}{\partial x_1\,\partial x_r\,\partial x_s}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_s}\left(-X_{r,l}+\frac{\partial^2 D}{\partial x_r\,\partial x_l}+x_1\frac{\partial X_{1,l}}{\partial x_r}-x_1\frac{\partial^3 D}{\partial x_1\,\partial x_r\,\partial x_l}\right),$$

skąd widoczna

$$-\frac{\partial X_{r,s}}{\partial x_l}+x_1\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial X_{1,s}}{\partial x_l}\right)=-\frac{\partial X_{r,l}}{\partial x_s}+x_1\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial X_{1,l}}{\partial x_s}\right),$$

co jest tożsamością niewątpliwą przy spełnieniu warunków całkowalności (8).

Tak więc nasze zagadnienie doprowadziliśmy do całkowania równania (15), które jest zawsze *dokładnem* lecz zawiera tylko $n-1$ zmiennych niezależnych, czyli zawiera o jedną zmienną mniej, aniżeli równanie dane (3). Tym sposobem, mając całkę dla równania z dwoma zmiennemi niezależnemi, przejdziemy drogą, wyłożoną powyżej, do całki równania różniczkowego rzędu 2-go z trzema zmiennemi niezależnemi i t. p.

Zajmiemy się w dalszym ciągu znalezieniem całki dla równania różniczkowego zupełnego rzędu 2-go z trzema zmiennemi. Dajmy

$$d^2z-X\,dx^2-2Y\,dx\,dy-Z\,dy^2=0, \tag{16}$$

gdzie z jest zmienna zależna, x i y zmienne niezależne.

Przypuszczając, że równanie (16) jest dokładne, będziemy uważali spółczynniki X, Y, Z jako pewne funkcye zmiennych x i y, spełniające warunki

$$(17) \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Ponieważ wiemy, że

$$X = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

więc zapomocą całkowania otrzymamy

$$(18) \qquad z = \iint X\, dx^2 + Ax + B,$$

gdzie A i B oznaczają funkcye dowolne samej zmiennej y.

Różniczkując (18) względem x, a później względem y, będziemy mieli

$$Y = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \iint X\, dx^2 + \frac{dA}{dy},$$

skąd wypada

$$(19) \qquad A = \int \left(Y - \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \iint X\, dx^2 \right) dy.$$

Ażeby jednak napisana kwadratura była możebną do wykonania, koniecznym jest warunek

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Y - \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \iint X\, dx^2 \right) = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0;$$

atoli z drugiej strony wiemy, że związek powyższy musi zachodzić, jeżeli równanie (16) ma być dokładnem, więc też kwadratura (19) będzie rzeczywistą i zupełnie możliwą.

Dalej różniczkując równanie (18) względem y, będziemy mieli

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \iint X\, dx^2 + x \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dy},$$

stąd przy pomocy (19) otrzymamy łatwo

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\iint X\,dx^2 + x\left(Y - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\iint X\,dx^2\right) + \frac{dB}{dy}\,.$$

Różniczkując ostatnie równanie jeszcze raz względem y, otrzymujemy

$$Z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\iint X\,dx^2 + x\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\iint X\,dx^2\right) + \frac{d^2 B}{dy^2}\,.$$

Za pomocą dwukrotnego całkowania będziemy mieli z powyższego

$$B = \iint\left[Z - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\iint X\,dx^2 - x\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\iint X\,dx^2\right)\right]dy^2 + cy + c',$$

gdzie c, c' oznaczają stałe dowolne.

Ażeby kwadratura ostatnia była możebną do wykonania, koniecznem będzie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Z - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\iint X\,dx^2 - x\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\iint X\,dx^2\right)\right] = 0,$$

czyli widocznie

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

co też rzeczywiście ma miejsce wskutek warunków (17).

Mając teraz wartości na A i B, z równania (18) otrzymamy

$$z = \iint X\,dx^2 + x\int\left(Y - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\iint X\,dx^2\right)dy$$

$$+\iint\left[Z - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\iint X\,dx^2 - x\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\iint X\,dx^2\right)\right]dy^2 + c_1 x + c_2 y + c_3$$

c_1, c_2, c_3 oznaczają stałe dowolne.

Jestto całka szukana równania dokładnego (16). Mając zaś tę całkę, możemy bez trudności przejść do całki równania różniczkowego zupełnego rzędu 2-go z czterema zmiennemi i t. d.

Jeżeli w równaniu (3) spółczynniki $X_{i,i}$, $X_{i,k}$ oprócz zmiennych niezależnych zawierają także zmienną zależną u, natenczas napisane równanie różniczkowe przestaje być dokładnem. W tym przypadku równanie (3) będziemy nazywali *zupełnem*, albo *równaniem rzędu 2-go o różniczkach zupełnych z wielu zmiennemi.* Spółczynniki $X_{i,i}$, $X_{i,k}$ w omówionym wyżej przypadku nie spełniają warunków (8), niezbędnych dla równania dokładnego, lecz czynią zadość warunkom całkowalności więcej złożonym, aniżeli (8). Ponieważ przypuszczamy teraz, że spółczynniki $X_{i,i}$, $X_{i,k}$ zawierają funkcyę u, więc zamiast równań (8) będziemy mieli

$$\left(\frac{\partial X_{i,i}}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_i}\right), \quad \left(\frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial X_{k,k}}{\partial x_i}\right), \quad \left(\frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_l}\right) = \left(\frac{\partial X_{i,l}}{\partial x_k}\right),$$

nawiasy oznaczają tutaj, że brać należy pochodne zupełne.

Pisząc pierwsze dwa równania w postaci rozwiniętej, otrzymujemy

$$\frac{\partial X_{i,i}}{\partial x_k} + \frac{\partial X_{i,i}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{i,k}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_k} + \frac{\partial X_{i,k}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial X_{k,k}}{\partial x_i} + \frac{\partial X_{k,k}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i};$$

stąd wypada

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{\left(\frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_k} - \frac{\partial X_{k,k}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial X_{i,i}}{\partial u} - \left(\frac{\partial X_{i,i}}{\partial x_k} - \frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial X_{i,k}}{\partial u}}{\frac{\partial X_{i,i}}{\partial u}\frac{\partial X_{k,k}}{\partial u} - \left(\frac{\partial X_{i,k}}{\partial u}\right)^2} = P_i, \\ \frac{\partial u}{\partial x_k} &= \frac{\left(\frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_k} - \frac{\partial X_{k,k}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial X_{i,k}}{\partial u} - \left(\frac{\partial X_{i,i}}{\partial x_k} - \frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial X_{k,k}}{\partial u}}{\frac{\partial X_{i,i}}{\partial u}\frac{\partial X_{k,k}}{\partial u} - \left(\frac{\partial X_{i,k}}{\partial u}\right)^2} = P_k. \end{aligned}\right.$$

Ponieważ wiemy dalej, że

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_i},$$

więc z równań (20), w których dla krótkości oznaczymy drugie strony przez P_i, P_k, będziemy mieli zapomocą różniczkowania;

$$(21)\quad \frac{\partial P_i}{\partial x_k} + \frac{\partial P_i}{\partial u}P_k = \frac{\partial P_k}{\partial x_i} + \frac{\partial P_k}{\partial u}P_i.$$

Równanie (21) przedstawia nam warunki całkowalności dla spółczynników równania (3) w przypadku, gdy to równanie nie jest dokładne.

Zmieniając wartości wskaźników i, k od 1 do n, otrzymamy $\frac{n(n-1)}{2}$ równań warunkowych (21).

Dla znalezienia całki równania (3) w przypadku omówionym powyżej mamy różniczkę zupełną

$$du = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i,$$

czyli na zasadzie związków (20) będzie

$$du = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \, dx_i . \tag{22}$$

Widoczna, że warunki (21) są jednocześnie warunkami całkowalności równania (22), więc też pozostaje nam wiadomemi sposobami znaleźć całkę

$$f(u, x_1, x_2, \ldots, x_n) = c.$$

Ażeby teraz napisać całkę ogólną danego równania różniczkowego rzędu 2-go (3) należy w powyższem dodać wyraz

$$\sum_{i=1}^{i=n} c_i \, x_i,$$

gdzie c_i oznaczają stałe dowolne, albowiem wyraz ten przy dwukrotnem różniczkowaniu znika. Tym sposobem całką szukaną będzie

$$f(u, x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{i=n} c_i \, x_i + c_0 = 0 .$$

Gdy równanie (3) jest tego rodzaju, że spółczynniki $X_{i,i}$, $X_{i,k}$ nie sprawdzają ani warunków (8), ani też nie czynią zadość warunkom (21), w tym przypadku nie wszystkie z pomiędzy zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą niezależne. Całka równania danego będzie miała kształt

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots),$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $(m<n)$ będą zmienne niezależne, pozostałe zaś zmienne $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ będą zależne i związane będą układem równań

$$f_r(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = f_r,$$
$$(r = 1, 2, \ldots, n-m).$$

Od poszczególnych wartości liczby m zależy ilość warunków dla spółczynników równania danego. Ażeby nadal uprościć i ułatwić rozumowania zbyt zawiłe wogóle, zajmiemy się tylko przypadkiem czterech zmiennych. Przykład ten dostatecznie wyjaśni myśl zasadniczą.

Niech będzie równanie różniczkowe rzędu 2-go

$$
(23) \quad \begin{aligned} & d^2u + X_{1,1}\, dx_1{}^2 + X_{2,2}\, dx_2{}^2 + X_{3,3}\, dx_3{}^2 \\ & \qquad + 2X_{1,2}\, dx_1\, dx_2 + 2X_{1,3}\, dx_1\, dx_3 + 2X_{2,3}\, dx_2\, dx_3 = 0, \end{aligned}
$$

którego wszystkie spółczynniki X są pewne funkcye wszystkich zmiennych i wcale nie sprawdzają warunków (8), ani (21). Całka równania danego przedstawia się w kształcie

$$
u = u\,(x_1, x_2, x_3, c_1, c_2),
$$

gdzie zmienne x związane są oprócz tego jednem równaniem

$$
f\,(x_1, x_2, x_3) = f,
$$

a więc jedna ze zmiennych, naprzykład x_3, zależy od dwóch pozostałych zmiennych x_1 i x_2, wskutek tego będzie

$$
dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\, dx_2\,,
$$

$$
d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}\, dx_1{}^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2}\, dx_2{}^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_1\, dx_2.
$$

Podstawiając powyższe wartości w równanie (23), otrzymamy

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}\, dx_1{}^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2}\, dx_2{}^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_1\, dx_2 + X_{1,1}\, dx_1{}^2 + X_{2,2}\, dx_2{}^2 \\
& + X_{3,3}\left[\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 dx_1{}^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2 dx_2{}^2 + 2\,\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\, dx_1\, dx_2\right] + 2X_{1,2}\, dx_1\, dx_2 \\
& + 2X_{1,3}\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\, dx_2\right) dx_1 + 2\,X_{2,3}\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\, dx_2\right) dx_2 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Ponieważ jednak pomiędzy zmiennemi x_1 i x_2 nie może istnieć żaden związek, gdyż zmienne te są zupełnie niezależne, koniecznie więc powyższe równanie rozłoży się na następujące:

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2} + X_{1,1} + X_{3,3}\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 + 2\,X_{1,3}\,\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0,
$$

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2} + X_{2,2} + X_{3,3}\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2 + 2X_{2,3}\,\frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0,
$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2} + X_{1,2} + X_{3,3}\, \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\, \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + X_{1,3}\, \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + X_{2,3}\, \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0.$$

Jeżeli z równań, napisanych powyżej, zdołamy wyrugować dwie ilości u oraz x_3, otrzymamy natenczas jedno równanie warunkowe dla samych spółczynników równania (23) w przypadku, gdy to równanie posiada dwie całki.

Pozostaje nam jeszcze powiedzieć na tem miejscu słów kilka o *układzie równań jednoczesnych zupełnych rzędu 2-go*.

Dajmy układ równań różniczkowych zupełnych rzędu 2-go

$$(24) \qquad d^2u_s = \sum_{i=1}^{i=n} \overset{(s)}{X}_{i,i}\, dx_i^2 + 2\sum_{i,k} \overset{(s)}{X}_{i,k}\, dx_i\, dx_k\,, \qquad (s = 1, 2, \ldots, m),$$

zawierających m zmiennych zależnych $u_1, u_2, \ldots, u_m$, oraz n zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Jeżeli spółczynniki X są pewne funkcye samych zmiennych niezależnych $x_i, x_k, \ldots$, natenczas każde z równań układu (24) całkuje się z osobna i niezależnie od pozostałych równań; w tym przypadku układ nie przedstawia nic godnego uwagi.

Jeżeli zaś spółczynniki X będą funkcyami wszystkich zmiennych tak niezależnych, jako też zależnych, natenczas równania (24) przedstawią nam istotny i rzetelny układ równań, ściśle związanych między sobą.

Spółczynniki układu powinny spełniać warunki

$$\left(\frac{\partial \overset{(s)}{X}_{i,i}}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial \overset{(s)}{X}_{i,k}}{\partial x_i}\right), \qquad \left(\frac{\partial \overset{(s)}{X}_{i,k}}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial \overset{(s)}{X}_{k,k}}{\partial x_i}\right),$$

czyli

$$\frac{\partial \overset{(s)}{X}_{i,i}}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{\partial \overset{(s)}{X}_{i,i}}{\partial u_r}\, \frac{\partial u_r}{\partial x_k} = \frac{\partial \overset{(s)}{X}_{i,k}}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{\partial \overset{(s)}{X}_{i,k}}{\partial u_r}\, \frac{\partial u_r}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial \overset{(s)}{X}_{i,k}}{\partial x_k} + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{\partial \overset{(s)}{X}_{i,k}}{\partial u_r}\, \frac{\partial u_r}{\partial x_k} = \frac{\partial \overset{(s)}{X}_{k,k}}{\partial x_i} + \sum_{r=1}^{r=m} \frac{\partial \overset{(s)}{X}_{k,k}}{\partial u_r}\, \frac{\partial u_r}{\partial x_i}.$$

Różniczkując każde z powyższych równań względem zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i pamiętając, że wogóle będzie

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial x_p\, \partial x_q} = \overset{(r)}{X}_{p,q}\,, \qquad (r = 1, 2, \ldots, m), \quad (p, q = 1, 2, \ldots, n),$$

otrzymamy w końcu układ równań dla samych pochodnych cząstkowych rzędu 1-go $\frac{\partial u}{\partial x}$. Wyrugowawszy następnie z wspomnianych wyżej równań pochodne $\frac{\partial u}{\partial x}$, otrzymamy warunki całkowalności dla samych spółczynników układu (24).

Równanie różniczkowe ogólne rzędu 2-go. Niech będzie równanie różniczkowe

$$(25)\quad \begin{aligned} & A\, d^2u + U\,(du)^2 + 2\sum_{i=1}^{i=n} U_i\, dx_i\, du \\ & + \sum_{i=1}^{i=n} X_{i,i}\, dx_i^2 + 2\sum_{i,k} X_{i,k}\, dx_i\, dx_k = 0, \end{aligned}$$

gdzie u oznacza zmienną zależną, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zmienne niezależne, $A, U, U_i, X_{i,i}, X_{i,k}$ oznaczają pewne funkcye wszystkich zmiennych.

Dajmy całkę równania (25) w kształcie

$$(26)\quad f(u, x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0.$$

Różniczka zupełna funkcyi f będzie

$$\frac{\partial f}{\partial u}\, du + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i = 0\,.$$

Biorąc jeszcze raz różniczkę zupełną, otrzymamy

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial u}\, du + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\right) = 0,$$

czyli

$$(27)\quad \begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial u}\, d^2u + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\,(du)^2 + 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial x_i}\, du\, dx_i \\ & + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\, dx_i^2 + 2\sum_{i,k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k}\, dx_i\, dx_k = 0\,. \end{aligned}$$

Oczywista, spółczynniki równań (25), (27) powinny być proporcyonalne, ponieważ f jest całką równania (25), a więc będzie

$$
(28) \qquad \begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial u} = \mu A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \mu U, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \, \partial x_i} = \mu U_i, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \mu X_{i,i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k} = \mu X_{i,k},
\end{gathered}
$$

gdzie μ oznacza *czynnik całkujący* równania danego.

Przypuśćmy, że równanie różniczkowe (25) jest *dokładne*, czyli że $\mu=1$, natenczas, biorąc pod uwagę znane prawo o porządku różniczkowań, z równań (28) otrzymamy bardzo łatwo następujące związki:

$$
(29) \qquad \left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial A}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial A}{\partial x_i} = U_i, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} = \frac{\partial X_{i,i}}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \, \partial x_k} = \frac{\partial X_{i,k}}{\partial u}, \\
& \frac{\partial U_i}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial X_{i,i}}{\partial x_k} = \frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial X_{i,k}}{\partial x_l} = \frac{\partial X_{i,l}}{\partial x_k}.
\end{aligned} \right.
$$

Są to warunki całkowalności równania dokładnego. W tym przypadku drugie z pomiędzy równań (28) daje nam

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = U .
$$

Całkując dwukrotnie ostatnie równanie, będziemy mieli

$$
(30) \qquad f = \iint U \, du^2 + Bu + C,
$$

gdzie B i C oznaczają funkcye dowolne zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Wspomniane funkcye B oraz C możemy wyznaczyć tak, aby wyrażenie (30) było całką równania (25); w tym celu zróżniczkujmy (30) względem zmiennej u, wówczas będzie

$$
\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \iint U \, du^2 + B ,
$$

czyli na zasadzie pierwszego z równań (28) będziemy mieli

$$
(31) \qquad B = A - \frac{\partial R}{\partial u} ;
$$

gdzie dla krótkości użyliśmy oznaczenia

$$
(32) \qquad R = \iint U \, du^2 .
$$

Według założenia B nie może zawierać zmiennej u i rzeczywiście będzie mieć miejsce

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} = 0,$$

czyli

$$\frac{\partial A}{\partial u} - U = 0.$$

Związek ostatni musi zachodzić, jeżeli spełnione są warunki całkowalności (29). W celu oznaczenia funkcyi C zróżniczkujmy (30) względem x_i, wówczas będzie

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial R}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial B}{\partial x_i} + \frac{\partial C}{\partial x_i} + B\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

czyli widocznie

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + A\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial R}{\partial x_i} + u\frac{\partial B}{\partial x_i} + \frac{\partial C}{\partial x_i} + \left(B + \frac{\partial R}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i};$$

stąd na zasadzie równania (31) będziemy mieli wprost

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial R}{\partial x_i} + u\frac{\partial B}{\partial x_i} + \frac{\partial C}{\partial x_i}. \tag{33}$$

Różniczkując równanie (33) jeszcze raz względem x_i; otrzymamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial x_i\,\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2} + \frac{\partial B}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2},$$

czyli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2} + u\frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\left(B + \frac{\partial R}{\partial u}\right).$$

Po skróceniu wyrazów podobnych przy pomocy związku (31) z ostatniego równania otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2} + u\frac{\partial^2 B}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}.$$

Stąd, mając na uwadze wartości B oraz R (31) i (32), będziemy mieli

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} = X_{i,i} - \frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2} - u\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x_i^2\,\partial u}\right). \tag{34}$$

Różniczkując następnie równanie (33) względem x_k i powtarzając zupełnie podobne, jak wyżej, rachunki i skrócenia, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_i\,\partial x_k} = X_{i,k} - \frac{\partial^2 R}{\partial x_i\,\partial x_k} - u\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{\partial^3 R}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial u}\right). \tag{35}$$

Wiemy dalej, że różniczką zupełną rzędu 2-go funkcyi C będzie

$$d^2 C = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}\,dx_i^2 + 2\sum_{i,k} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i\,\partial x_k}\,dx_i\,dx_k\,.$$

Podstawiwszy w powyższem wartości na $\frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2}$ i $\frac{\partial^2 C}{\partial x_i\,\partial x_k}$ (34) i (35), otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} d^2 C &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(X_{i,i} - \frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2} - u\,\frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} + u\,\frac{\partial^3 R}{\partial x_i^2\,\partial u}\right) dx_i^2 \\ &+ 2\sum_{i,k}\left(X_{i,k} - \frac{\partial^2 R}{\partial x_i\,\partial x_k} - u\,\frac{\partial^2 A}{\partial x_i\,\partial x_k} + u\,\frac{\partial^3 R}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial u}\right) dx_i\,dx_k\,, \end{aligned} \tag{36}$$

którego spółczynniki nie zawierają wcale zmiennej u i czynią zadość warunkom równania dokładnego (8, § 2); w rzeczy samej, pamiętając, że wyrażenia

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x_i^2\,\partial u} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{\partial^3 R}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial u}$$

nie mogą zawierać zmiennej u na zasadzie pierwszego z pomiędzy równań (29), ponieważ widocznie

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{\partial^3 R}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial u}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}\left(\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial^2 R}{\partial u^2}\right) = 0,$$

a więc będziemy mieli

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[X_{i,i} - \frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2} - u\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x_i^2\,\partial u}\right)\right] = 0,$$

tudzież

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[X_{i,k}-\frac{\partial^2 R}{\partial x_i\,\partial x_k}-u\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_i\,\partial x_k}-\frac{\partial^3 R}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial u}\right)\right]=0,$$

skąd wypada

$$\frac{\partial X_{i,i}}{\partial u}=\frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2},\qquad \frac{\partial X_{i,k}}{\partial u}=\frac{\partial^2 A}{\partial x_i\,\partial x_k}.$$

Są to związki, które według założenia istnieć muszą, jeżeli spółczynniki równania (25) czynią zadość warunkom (29). Tak więc w równaniu (36) spółczynniki nie mogą zawierać zmiennej u, wszystkie wyrazy, zawierające wspomnianą zmienną, muszą się wzajemnie znosić. Oprócz tego spółczynniki równania (36) czynią zadość następującym warunkom:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(X_{i,k}-\frac{\partial^2 R}{\partial x_i\,\partial x_k}-u\,\frac{\partial^2 A}{\partial x_i\,\partial x_k}+u\,\frac{\partial^3 R}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial u}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(X_{i,i}-\frac{\partial^2 R}{\partial x_i^2}-u\,\frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2}+u\,\frac{\partial^3 R}{\partial x_i^2\,\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(X_{i,k}-\frac{\partial^2 R}{\partial x_i\,\partial x_k}-u\,\frac{\partial^2 A}{\partial x_i\,\partial x_k}+u\,\frac{\partial^3 R}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial u}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(X_{i,l}-\frac{\partial^2 R}{\partial x_i\,\partial x_l}-u\,\frac{\partial^2 A}{\partial x_i\,\partial x_l}+u\,\frac{\partial^3 R}{\partial x_i\,\partial x_l\,\partial u}\right).$$

Pamiętając, że wyrażenia w nawiasach zawierają u tylko pozornie, bardzo łatwo dowieść, że równania powyższe będą zachodzić tożsamościowo przy spełnieniu warunków (29). Takim sposobem będziemy mieli równanie dokładne (36), które całkować możemy zawsze metodą, wyłożoną szczegółowo w § 2 i § 3 pracy niniejszej.

Całką szukaną równania (25) będzie

$$f=\iint U\,du^2+u\left(A-\int U\,du\right)+C,$$

gdzie ilość C określa się ściśle równaniem (36), całkowalnem zawsze w przypadkach, roztrząsanych wyżej.

Jeżeli równanie (25) nie jest dokładnem, natenczas czynnik całkujący μ nie równa się 1 i wskutek tego będziemy mieli

$$\frac{\partial \mu A}{\partial u} = \mu U, \quad \frac{\partial \mu A}{\partial x_i} = \mu U_i, \quad \frac{\partial^2 \mu A}{\partial x_i^2} = \frac{\partial \mu X_{i,i}}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 \mu A}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial \mu X_{i,k}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \mu U_i}{\partial u} = \frac{\partial \mu U}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \mu X_{i,i}}{\partial x_k} = \frac{\partial \mu X'_{,k}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \mu X_{i,k}}{\partial x_l} = \frac{\partial \mu X_{i,l}}{\partial x_k}.$$

Po wyrugowaniu μ otrzymamy z powyższych równań warunki całkowalności dla spółczynników, gdy równanie (25) nie jest dokładne. W tym celu weźmy z powyższych równań pierwsze, drugie i piąte.

$$(37) \qquad \begin{cases} A \dfrac{\partial \mu}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial A}{\partial u} = \mu U, \\[2ex] \dfrac{\partial \mu A}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \mu A}{\partial u} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \mu U_i, \\[2ex] \dfrac{\partial \mu U_i}{\partial u} = \dfrac{\partial \mu U}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \mu U}{\partial u} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}. \end{cases}$$

Z dwóch ostatnich równań można wyrugować $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$; ponieważ z drugiego mamy

$$(38) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\mu U_i - \dfrac{\partial \mu A}{\partial x_i}}{\mu U},$$

wskutek tego trzecie równanie daje nam

$$(39) \qquad \frac{\partial \mu U_i}{\partial u} = \frac{\partial \mu U}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu U}{\partial u} \left(\frac{\mu U_i - \dfrac{\partial \mu A}{\partial x_i}}{\mu U} \right).$$

Z pierwszego z pomiędzy równań (37) znajdujemy

$$(40) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\mu}{A} \left(U - \frac{\partial A}{\partial u} \right);$$

z równania (39) wypada łatwo

$$\mu U \left(U_i \frac{\partial \mu}{\partial u} + \mu \frac{\partial U_i}{\partial u} \right) = \mu U^2 \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \mu^2 U \frac{\partial U}{\partial x_i} + \mu^2 U_i \frac{\partial U}{\partial u} + \mu U U_i \frac{\partial \mu}{\partial u}$$

$$- \mu^2 \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial A}{\partial x_i} - \mu U \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial u} - \mu A \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} - A U \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial \mu}{\partial x_i},$$

skąd bez żadnych trudności otrzymamy

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_i}=\frac{\mu}{A}\left(\frac{AU\dfrac{\partial U_i}{\partial u}-AU\dfrac{\partial U}{\partial x_i}-AU_i\dfrac{\partial U}{\partial u}+A\dfrac{\partial U}{\partial u}\dfrac{\partial A}{\partial x_i}+U^2\dfrac{\partial A}{\partial x_i}-U\dfrac{\partial A}{\partial x_i}\dfrac{\partial A}{\partial u}}{U\dfrac{\partial A}{\partial u}-A\dfrac{\partial U}{\partial u}}\right).$$

Zmieniając wskaźnik i na k, będziemy mieli podobne wyrażenie dla $\frac{\partial\mu}{\partial x_k}$. Dla k będziemy pisali wspomniane równania tak

$$\text{(41)}\qquad \frac{\partial\mu}{\partial x_i}=\frac{\mu}{A}Q_i,\qquad \frac{\partial\mu}{\partial x_k}=\frac{\mu}{A}Q_k,$$

gdzie wogóle będzie

$$Q_r=\frac{AU\dfrac{\partial U_r}{\partial u}-AU\dfrac{\partial U}{\partial x_r}-AU_r\dfrac{\partial U}{\partial u}+A\dfrac{\partial U}{\partial u}\dfrac{\partial A}{\partial x_r}+U^2\dfrac{\partial A}{\partial x_r}-U\dfrac{\partial A}{\partial x_r}\dfrac{\partial A}{\partial u}}{U\dfrac{\partial A}{\partial u}-A\dfrac{\partial U}{\partial u}}.$$

Stosując teraz prawo o porządku różniczkowań, otrzymamy z (40) i (41)

$$\frac{\partial^2\lg\mu}{\partial x_i\,\partial x_k}=\frac{\partial^2\lg\mu}{\partial x_k\,\partial x_i},\qquad \frac{\partial^2\lg\mu}{\partial u\,\partial x_i}=\frac{\partial^2\lg\mu}{\partial x_i\,\partial u},$$

czyli widocznie

$$\text{(42)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{Q_i}{A}\right)+\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{Q_i}{A}\right)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{Q_k}{A}\right)+\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{Q_k}{A}\right)\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[\dfrac{u-\dfrac{\partial A}{\partial u}}{A}\right]+\dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{U-\dfrac{\partial A}{\partial u}}{A}\right]\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{Q_i}{A}\right). \end{cases}$$

Atoli z równania (38) widzimy, że

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\mu U_i-\mu\dfrac{\partial A}{\partial x_i}-A\dfrac{\partial\mu}{\partial x_i}}{\mu U},$$

czyli na zasadzie (41) będzie

$$(43)\qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{U_i - \dfrac{\partial A}{\partial x_i} - Q_i}{U},$$

wskutek tego równania (42) dają nam

$$(44)\quad \left\{ \begin{aligned} & U\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{Q_i}{A}\right) + \left(U_k - Q_k - \frac{\partial A}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q_i}{A}\right) = U\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{Q_k}{A}\right) \\ & \qquad\qquad + \left(U_i - Q_i - \frac{\partial A}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q_k}{A}\right), \\ & U\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{U - \dfrac{\partial A}{\partial u}}{A}\right] + \left(U_i - Q_i - \frac{\partial A}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{U - \dfrac{\partial A}{\partial u}}{A}\right] = U\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q_i}{A}\right). \end{aligned} \right.$$

Zmieniając i, k od 1 do n otrzymamy wszystkiego $\frac{n(n+1)}{2}$ równań warunkowych (44). Równania te będą nam przedstawiały szukane warunki całkowalności w przypadku, gdy równanie (25) nie jest dokładne. Bez trudności znaleźć możemy teraz czynnik całkujący μ, wiedząc, że

$$d \lg \mu = \frac{\partial \lg \mu}{\partial u} du + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \lg \mu}{\partial x_i} dx_i,$$

czyli przy pomocy związków (40) i (41) będziemy mieli

$$(45)\qquad d \lg \mu = \frac{1}{A}\left(U - \frac{\partial A}{\partial u}\right) du + \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{i=n} Q_i\, dx_i .$$

Widoczna, że warunki (44) będą jednocześnie warunkami całkowalności dla równania (45). Znalazłszy czynnik całkujący μ, pomnożymy przezeń równanie (25) i dalej będziemy postępowali drogą, wyłożoną dla równania dokładnego. Godnem uwagi jest to, że pierwszą całkę równania (25) możemy znaleźć, całkując równanie

$$U\,du = \sum_{i=1}^{i=n}\left(U_i - Q_i - \frac{\partial A}{\partial x_i}\right) dx_i,$$

które napisaliśmy, mając na uwadze związek (43); atoli w tym przypadku nie możemy przejść do całki ogólnej tak, jak czyniliśmy w (22), dodając wyraz $\sum_i c_i x_i$ do całki pierwszej, gdyż równanie (25) oprócz różniczki rzędu 2-go d^2u zawiera także wyrazy, posiadające du oraz $(du)^2$, których w równaniu (3) nie ma.

Pozostaje nam jeszcze powiedzieć słów kilka o równaniu (25), gdy spółczynniki nie czynią zadość ani warunkom (29), ani (44). W tym przypadku istnieje całek więcej, niż jedna

$$f_r(u, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_r, \qquad (r=1,2,\ldots,m),$$

z których zapomocą dwukrotnego różniczkowania zupełnego otrzymamy

$$(46)\qquad \frac{\partial f_r}{\partial u} d^2u + \frac{\partial^2 f_r}{\partial u^2}(du)^2 + 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 f_r}{\partial u\, \partial x_i} du\, dx_i + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_i^2} dx_i^2$$

$$+ 2 \sum_{i,k} \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_i\, \partial x_k} dx_i\, dx_k = 0.$$

Jeżeli teraz pomnożymy równania (46) odpowiednio przez $F_1, F_2, \ldots, F_m$ i następnie wszystkie równania dodamy, otrzymamy jedno równanie, którego spółczynniki powinny być proporcyonalne ze spółczynnikami równania (25), będzie więc

$$(47)\qquad \begin{cases} F_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial u} + F_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial u} + \ldots + F_m \dfrac{\partial f_m}{\partial u} = aA, \\[2ex] F_1 \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} + F_2 \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} + \ldots + F_m \dfrac{\partial^2 f_m}{\partial u^2} = aU, \\[2ex] F_1 \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial u\, \partial x_i} + F_2 \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial u\, \partial x_i} + \ldots + F_m \dfrac{\partial^2 f_m}{\partial u\, \partial x_i} = aU_i, \qquad (i=1,2,\ldots,n), \\[2ex] F_1 \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_i^2} + F_2 \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_i^2} + \ldots + F_m \dfrac{\partial^2 f_m}{\partial x_i^2} = aX_{i,i}, \\[2ex] F_1 \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_i\, \partial x_k} + F_2 \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_i\, \partial x_k} + \ldots + F_m \dfrac{\partial^2 f_m}{\partial x_i\, \partial x_k} = aX_{i,k}, \\ \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Ilości $F_1, F_2, \ldots, F_m, a$ są pewne funkcye wszystkich zmiennych.

Równania (47) przedstawiają nam związki pomiędzy całkami równania (25) w przypadku, gdy spółczynniki nie czynią zadość warunkom (29) ani (44).

IV. Teorya przyrostków wykładniczych.*)

Jeżeli mamy układ liczb

$$a, b, c, d, \ldots, n$$

i jeżeli układ ten tworzy się podług pewnego prawa rachunkowego, to daje się pomyśleć dwojakiego rodzaju zależność jednych liczb względem drugich, czyli dwa odrębne rachunki.

Po pierwsze, układ może być utworzony podług *prawa różnic*

$$x, x+\Delta, x+2\Delta, x+3\Delta, \ldots, x+n\Delta, \ldots$$

albo też, po drugie, podług *prawa potęg*

$$x, xx^{\Gamma}, xx^{2\Gamma}, xx^{3\Gamma}, \ldots, xx^{n\Gamma}, \ldots$$

Pierwszemu rodzajowi zależności odpowiada *rachunek różnic*, gdy Δ jest ilość skończona, *rachunek równiczkowy*, gdy Δ jest nieskończenie mała. Drugiemu rodzajowi zależności odpowiada *rachunek przyrostków wykładniczych*, gdy Γ jest jakakolwiek ilość skończona, oraz *rachunek wykładniczkowy*, gdy Γ nieskończenie zdąża do zera. W rachunku różniczkowym funkcye pochodne należą do typu $\frac{0}{0}$, w rachunku wykładniczkowym pochodne zależeć będą od wyrażeń typu 1^{∞}.

Następujące rozumowanie okaże, w jaki sposób wspomniane wyżej rachunki zasadnicze wiążą się pomiędzy sobą.

---

*) *Théorie des accroissements exponentielles.*

Dajmy

$$y = f(x)$$

) przypuśćmy, że x otrzymuje przyrostek Δx, a jednocześnie y zwiększa się o Δy, natenczas będzie

$$1) \qquad y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Załóżmy dalej

$$(2) \qquad x + \Delta x = x^{1+\alpha},\ y + \Delta y = y^{1+\beta}.$$

Poostawiając ostatnie wartości w równanie (1), otrzymamy

$$y^{1+\beta} = f(x^{1+\alpha}).$$

Można łatwo dowieść, że α i β znikają jednocześnie: w rzeczy samej z równań (2) wypada

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lg(x+\Delta x) &= (1+\alpha) \,.\, \lg x, \\ \lg(y+\Delta y) &= (1+\beta) \,.\, \lg y; \end{aligned} \right.$$

Oprócz tego wiemy, że

$$\lg(x+\Delta x) - \lg x = A \,.\, \Delta x + \varepsilon\, \Delta x,$$

$$\lg(y+\Delta y) - \lg y = B \,.\, \Delta y + \eta \,.\, \Delta y,$$

gdzie A i B są pewne ilości skończone, ε i η nieskończenie małe. Mając na uwadze ostatnie związki, z równań (3) otrzymamy:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \Delta x \,.\, \frac{A+\varepsilon}{\lg x}, \\ \beta &= \Delta y \,.\, \frac{B+\eta}{\lg y}. \end{aligned} \right.$$

Widzimy więc, że ilości α i β znikają jednocześnie z Δy i Δx. Z równań (4) wnioskujemy także, że przyrostki wykładnicze zawsze zastąpić można przyrostkami różnicowemi. Gdyby jednak z powyższego zrobić wniosek, że rachunki przyrostków wykładniczych skończonych lub nieskończenie małych są zupełnie zbyteczne, ponieważ zawsze mogą być zastąpione rachunkami różnic lub różniczek, wniosek taki byłby zbyt powierzchownym i zarzut bezzasadnym. Możnaby było z równą słusznością twierdzić, że mnożenie jest działaniem zbytecznem, ponieważ zawsze może być zastąpione dodawaniem. Nikt jednak nie będzie dowodził bezużyteczności mnożenia; sądzę więc, że rachunku przyrostków wykładniczych lekceważyć nie można.

Być może, że rachunek wykładniczkowy nie będzie mieć nigdy tak wielkiego znaczenia, jak rachunek różniczek; to jednak wątpić nie można, że rachunek wykładniczkowy przedstawiać będzie w matematyce znaczne ułatwienia i skrócenia dróg rachunkowych, podobnie jak mnożenie skraca działania kolejnych dodawań. Po kilku uwagach wstępnych, powyżej wyłuszczonych, przejdziemy do teoryi przyrostków wykładniczych.

§ 1. *Funkcye jednej zmiennej niezależnej.*

Przyrostkiem wykładniczym funkcyi $f(x)$ nazywamy pewną ilość skończoną tego rodzaju, że, nadając jakikolwiek przyrostek Γx wykładnikowi zmiennej x, będziemy także mieli Γf odpowiedni przyrostek wykładnika funkcyi, czyli

$$[f(x)]^{1+\Gamma f} = f(x^{1+\Gamma x}).$$

Stąd wypada

$$[f(x)]^{\Gamma f} = \frac{f(x^{1+\Gamma x})}{f(x)}. \tag{5}$$

Γf jestto przyrostek wykładniczy rzędu 1-go funkcyi danej. Iloraz napisany po drugiej stronie znaku równości (5), będziemy nazywali *zmianostanem funkcyjnym* *), albo krócej *funkcyałem rzędu 1-go* i, dla krótkości, oznaczać możemy głoską Φ_1.

Widzimy więc, że funkcyał otrzymuje się, kładąc w funkcyi danej $x^{1+\Gamma x}$ zamiast x i dzieląc przez pierwotny stan funkcyi.

Biorąc logarytmy po obu stronach w (5), otrzymamy

$$\Gamma f = \frac{\lg f(x^{1+\Gamma x}) - \lg f(x)}{\lg f(x)}, \tag{6}$$

albo krócej

*) *L'antifonction ordinaire d'ordre 1-er.*

(6a) $$\Gamma f = \frac{\lg \Phi_1}{\lg f(x)}$$

czyli *przyrost wykładniczy rzędu 1-go przedstawia iloraz logarytmu funkcyału rzędu 1-go przez logarytm funkcyi danej.*

Twierdzenie I. Przyrost wykładniczy rzędu 1-go nie zmienia się wcale, gdy zamiast funkcyi $f(x)$ weźmiemy $[f(x)]^c$, gdzie c oznacza stałą dowolną.

W rzeczy samej, robiąc wyżej wymienione podstawienie, będziemy mieli równanie (6) w kształcie

$$\Gamma f = \frac{c \,.\, \lg f(x^{1+\Gamma x}) - c \,.\, \lg f(x)}{c \,.\, \lg f(x)} .$$

Widoczna, że ilość c skraca się i nie może wpływać na zmianę Γf. Jest rzeczą godną uwagi to, że c może być także dowolna funkcya wykładniczo-peryodyczna

$$c = \psi(x) = \psi(x^{1+\Gamma x})$$

i w tym przypadku Γf, jak widzimy, nie ulegnie żadnej zmianie. Kształt funkcyj wykładniczo-peryodycznych określimy bliżej na następnych stronicach, gdy będzie mowa o rachunkach odwrotnych.

Mając funkcyę $f(x)$ i jej funkcyał rzędu 1-go

$$\frac{f(x^{1+\Gamma x})}{f(x)},$$

otrzymamy *funkcyał rzędu 2-go*, kładąc w ostatnim znowu $x^{1+\Gamma x}$ na miejsce x i dzieląc przez stan pierwotny, będzie więc

$$\frac{f(x^{(1+\Gamma x)^2})}{f(x^{1+\Gamma x})} : \frac{f(x^{1+\Gamma x})}{f(x)} = \frac{f(x^{(1+\Gamma x)^2}) \,.\, f(x)}{[f(x^{1+\Gamma x})]^2} = \Phi_2 .$$

Będziemy w tym przypadku pisali

(7a) $$[f(x)]^{\Gamma^2 f} = \Phi_2 ,$$

skąd wypada

(7) $$\Gamma^2 f = \frac{\lg f(x^{(1+\Gamma x)^2}) - 2 \lg f(x^{1+\Gamma x}) + \lg f(x)}{\lg f(x)} ;$$

albo krócej

(7b) $$\Gamma^2 f = \frac{\lg \Phi_2}{\lg f(x)}$$

$\Gamma^2 f$ oznacza przyrost wykładniczy rzędu 2-go. Tak więc, *przyrostek wykładniczy rzędu 2-go równa się logarytmowi funkcyału rzędu 2-go, podzielonemu przez logarytm funkcyi.*

Dalej, kładąc w funkcyale rzędu 2-go znowu $x^{1+\Gamma x}$ na miejsce x i dzieląc przez stan pierwotny, będziemy mieli funkcyał rzędu 3-go:

$$\frac{f(x^{(1+\Gamma x)^3})\, f(x^{1+\Gamma x})}{[f(x^{(1+\Gamma x)^2})]^2} : \frac{f(x^{(1+\Gamma x)^2}) \cdot f(x)}{[f(x^{1+\Gamma x})]^2} = \frac{f(x^{(1+\Gamma x)^3}) \cdot [f(x^{1+\Gamma x})]^3}{[f(x^{(1+\Gamma x)^2})]^3 \cdot f(x)} = \Phi_3.$$

W tym przypadku piszemy

$$[f(x)]^{\Gamma^3 f} = \Phi_3 .$$

Biorąc logarytmy, otrzymujemy z powyższego:

(8) $$\Gamma^3 f = \frac{\lg f(x^{(1+\Gamma x)^3}) - 3 \lg f(x^{(1+\Gamma x)^2}) + 3 \lg f(x^{(1+\Gamma x)}) - \lg f(x)}{\lg f(x)},$$

albo krócej

(8a) $$\Gamma^3 f = \frac{\lg \Phi_3}{\lg f(x)} .$$

$\Gamma^3 f$ oznacza przyrost wykładniczy rzędu 3-go.

Tak więc, *przyrostek wykładniczy rzędu 3-go równa się logarytmowi funkcyału rzędu 3-go, podzielonemu przez logarytm funkcyi.*

Podobnie dalej będzie

$$[f(x)]^{\Gamma^4 f} = \frac{f(x^{(1+\Gamma x)^4}) \cdot [f(x^{(1+\Gamma x)^2})]^6 \cdot f(x)}{[f(x^{(1+\Gamma x)^3})]^4 \cdot [f(x^{1+\Gamma x})]^4} = \Phi_4 .$$

Logarytmując ostatnie równanie, będziemy mieli

(9) $$\Gamma^4 f = \frac{\lg f(x^{(1+\Gamma x)^4}) - 4 \lg f(x^{(1+\Gamma x)^3}) + 6 \lg f(x^{(1+\Gamma x)^2}) - 4 \lg f(x^{1+\Gamma x}) + \lg f(x)}{\lg f(x)} .$$

i t. d.

Sposób pisania przyrostków wykładniczych jest łatwy, gdyż, jak widzimy, współczynniki są te same, które już spotykaliśmy w różnicach rozmaitych rzędów i w znanym wzorze dwumianu Newtona.

Napiszemy teraz wzór główny i zasadniczy w teoryi przyrostków skończonych:

$$f\left(x^{(1+\Gamma x)^n}\right) = [f(x)]^{1+n\,.\,\Gamma f+\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\Gamma^2 f+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\Gamma^3 f+\ldots+\Gamma^n f} \tag{10}$$

Wzór ten obejmuje wszystkie definicye przyrostków wykładniczych; jakoż, kładąc $n=1$, otrzymamy

$$f\left(x^{1+\Gamma x}\right) = [f(x)]^{1+\Gamma f},$$

co jest prawdziwem na mocy (5). Kładąc w (10) $n=2$, będziemy mieli:

$$f\left(x^{1+\Gamma x)^2}\right) = [f(x)]^{1+2\Gamma f+\Gamma^2 f} = f(x)\,,\,[f(x)]^{2\Gamma f}\,.\,[f(x)]^{\Gamma^2 f}.$$

Po wyrugowaniu z ostatniego równania

$$[f(x)]^{\Gamma f},$$

przy pomocy (5) otrzymamy

$$[f(x)]^{\Gamma^2 f} = \frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}\right)\,.\,f(x)}{\left[f\left(x^{1+\Gamma x}\right)\right]^2},$$

co jest prawdziwe na zasadzie definicyi (7a). Tak samo będzie i dalej przy $n=3, 4, \ldots$ Przyjmując takim sposobem, że wzór (10) jest prawdziwym dla liczby n, możemy dowieść, że pozostanie prawdziwym i dla $n+1$. W rzeczy samej, według umówionego powyżej prawidła definicyą dla przyrostka wykładniczego $n+1$ rzędu będzie:

$$[f(x)]^{\Gamma^{n+1} f} = f\left(x^{(1+\Gamma x)^{n+1}}\right)\,.\,\left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^n}\right)\right]^{-(n+1)}\,.\,\left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^{n-1}}\right)\right]^{\frac{(n+1)n}{1\,.\,2}} \ldots$$

$$\ldots [f(x)]^{\pm 1}.$$

W ostatnim czynniku powyższego wzoru napisaliśmy wykładnik ± 1, co znaczy, że znak $+$ wziąć należy, gdy $n+1$ jest liczba parzysta, znak — weźmiemy w przypadku, gdy $n+1$ będzie liczba nieparzysta. Po wyrugowaniu z napisanego wyżej równania ilości

$$f\left(x^{(1+\Gamma x)^n}\right),\ f\left(x^{(1+\Gamma x)^{n-1}}\right), \ldots$$

przy pomocy (10) tudzież równań podobnych, napisanych dla $n-1$, $n-2$, i t. d., otrzymamy

$$[f(x)]^{\Gamma^{n+1}f} = f\left(x^{(1+\Gamma x)^{n+1}}\right) . [f(x)]^{-(n+1)\left\{1+n\Gamma f+\frac{n(n-1)}{1.2}\Gamma^2 f+\ldots+\Gamma^n f\right\}}$$

$$. [f(x)]^{\frac{(n+1)n}{1.2}\left\{1+(n-1)\Gamma f+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\Gamma^2 f+\ldots+\Gamma^{n-1}f\right\}} \ldots [f(x)]^{\pm 1},$$

skąd po łatwem uproszczeniu będzie

$$f\left(x^{(1+\Gamma x)^{n+1}}\right)$$

$$=[f(x)]^{\Gamma^{n+1}f+(n+1)\left\{1+n.\Gamma f+\frac{n(n-1)}{1.2}.\Gamma^2 f+\ldots+\Gamma^n f\right\}-\frac{(n+1).n}{1.2}\left\{1+(n-1)\Gamma f+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\Gamma^2 f+\ldots+\Gamma^{n-1}f\right\}+\ldots\mp 1}.$$

Wykonawszy w ostatniem wszystkie redukcye, będziemy mieli ostatecznie:

$$f\left(x^{(1+\Gamma x)^{n+1}}\right) = [f(x)]^{1+(n+1)\Gamma f+\frac{(n+1)n}{1.2}\Gamma^2 f+\ldots+\Gamma^{n+1}f}.$$

Tym sposobem wzór (10) staje się ogólnym i prawdziwym zawsze. Wzmiankowany wzór możemy także pisać w kształcie dogodniejszym, biorąc logarytmy po obu stronach

$$\text{(11)} \quad \frac{\lg f\left(x^{(1+\Gamma x)^n}\right)}{\lg f(x)} = 1 + n.\Gamma f + \frac{n(n-1)}{1.2}\Gamma^2 f + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\Gamma^3 f + \ldots + \Gamma^n f \ldots$$

Mając wyłożone poprzednio określenia przyrostków wykładniczych rozmaitych rzędów, możemy bez wszelkich trudności wyprowadzić następujące wzory przyrostków dla funkcyi zasadniczych:

$$\Gamma(x^m) = \Gamma x, \quad \Gamma^2(x^m) = (\Gamma x)^2, \quad \Gamma^3(x^m) = (\Gamma x)^3, \quad \text{i t. d.}$$

$$\Gamma(\lg x) = \frac{\lg(1+\Gamma x)}{\lg \lg x}, \quad \Gamma^2(\lg x) = 0, \quad \Gamma^3(\lg x) = 0, \quad \text{i t. d.}$$

$$\Gamma(a^x) = \frac{\lg a^{x(x^{\Gamma x}-1)}}{\lg a^x} = x^{\Gamma x} - 1, \quad \Gamma^2(a^x) = x^{(\Gamma x)^2+2\Gamma x} - 2x^{\Gamma x} + 1,$$

$$\Gamma^3(a^x) = x^{(\Gamma x)^3+3(\Gamma x)^2+3\Gamma x} - 3x^{(\Gamma x)^2+2\Gamma x} + 3x^{\Gamma x} - 1, \quad \text{i t. d.}$$

$$\Gamma(\sin x) = \frac{\lg \sin x^{1+\Gamma x}}{\lg \sin x} - 1, \quad \Gamma(\cos x) = \frac{\lg \cos x^{1+\Gamma x}}{\lg \cos x} - 1, \quad \text{i t. d.}$$

Gdy mamy a = stałej, natenczas $\Gamma a = \Gamma^2 a = \Gamma^3 a = \ldots = 0$. Dajmy jeszcze

$$y_i = f_i(x)$$

i niech będzie *suma algebraiczna*:

$$u = y_1 + y_2 + \ldots + y_n.$$

Stosując symbol Δ do każdego składnika napisanej sumy, będziemy mieli

$$\Delta u = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \ldots + \Delta y_n. \tag{12}$$

Widzieliśmy powyżej (4), że

$$\beta = \Delta y \,.\, \frac{B + \varepsilon}{\lg y}; \tag{13}$$

dalej wiedząc, iż

$$\beta = \Gamma y, \quad B = \frac{1}{y},$$

otrzymamy z (13)

$$\Delta y = y \lg y \,.\, \Gamma y + i,$$

gdzie i oznacza ilość nieskończenie małą. Uwzględniając ostatni związek, będziemy mieli z (12)

$$u \lg u \,.\, \Gamma u + i = y_1 \lg y_1 \,.\, \Gamma y_1 + i_1 + y_2 \lg y_2\, \Gamma y_2 + i_2 + \ldots$$
$$\ldots + y_n \lg y_n \,.\, \Gamma y_n + i_n.$$

W granicach ilości nieskończenie małe znikną i wskutek tego będzie

$$\Gamma(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$
$$= \frac{y_1 \lg y_1 \,.\, \Gamma y_1 + y_2 \lg y_2 \,.\, \Gamma y_2 + \ldots + y_n \lg y_n \,.\, \Gamma y_n}{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \,.\, \lg(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)}.$$

Wzór ten przedstawia sposób pisania oraz wartość przyrostka wykładniczego sumy algebraicznej.

Wyprowadzimy poniżej wzór przyrostka wykładniczego *iloczynu*

$$u = y \,.\, z,$$

$$y = f(x), \quad z = F(x).$$

Dla danego iloczynu będziemy mieli widocznie

$$u^{1+\Gamma u} = f(x^{1+\Gamma x}) \,.\, F(x^{1+\Gamma x}),$$

skąd wypada łatwo

$$u^{\Gamma u} = \frac{f(x^{1+\Gamma x})}{f(x)} \,.\, \frac{F(x^{1+\Gamma x})}{F(x)},$$

czyli

$$u^{\Gamma u} = y^{\Gamma y} \,.\, z^{\Gamma z}.$$

Logarytmując powyższe równanie, otrzymamy

$$\Gamma u \,.\, \lg u = \Gamma y \,.\, \lg y + \Gamma z \,.\, \lg z\,;$$

stąd wypływa

$$\Gamma(yz) = \frac{\lg y \,.\, \Gamma y + \lg z \,.\, \Gamma z}{\lg(yz)}.$$

Jestto wzór przyrostka wykładniczego rzędu 1-go dla iloczynu. Ażeby otrzymać przyrostek rzędu 2-go dla danego iloczynu, napiszemy na zasadzie przyjętej poprzednio definicyi

$$u^{\Gamma^2 u} = \frac{f(x^{(1+\Gamma x)^2}) \,.\, F(x^{(1+\Gamma x)^2})}{f(x^{1+\Gamma x}) \,.\, F(x^{1+\Gamma x})} : \frac{f(x^{1+\Gamma x}) \,.\, F(x^{1+\Gamma x})}{f(x) \,.\, F(x)},$$

czyli

$$u^{\Gamma^2 u} = \frac{f(x^{(1+\Gamma x)^2}) \ f(x)}{[f(x^{1+\Gamma x})]^2} \,.\, \frac{F(x^{(1+\Gamma x)^2}) \,.\, F(x)}{[F(x^{1+\Gamma x})]^2}.$$

Stąd widoczna, że

$$u^{\Gamma^2 u} = y^{\Gamma^2 y} \,.\, z^{\Gamma^2 z}.$$

Przechodząc do logarytmów, z ostatniego równania otrzymamy

$$\Gamma^2 u \,.\, \lg u = \Gamma^2 y \,.\, \lg y + \Gamma^2 z \,.\, \lg z\,,$$

więc będzie

$$\Gamma^2 (yz) = \frac{\lg y \,.\, \Gamma^2 y + \lg z \,.\, \Gamma^2 z}{\lg (yz)} .$$

Jestto wzór przyrostka wykładniczego rzędu 2-go dla iloczynu. Prowadząc dalej rozumowanie tą samą drogą, dojdziemy do wzoru przyrostka jakiegokolwiek rzędu

$$\Gamma^m (yz) = \frac{\lg y \,.\, \Gamma^m y + \lg z \,.\, \Gamma^m z}{\lg (yz)} .$$

Wzór ten bardzo łatwo daje się uogólnić dla jakiejbądź liczby czynników

$$\Gamma^m (y_1 \cdot y_2 \ldots y_n) = \frac{\lg y_1 \,.\, \Gamma^m y_1 + \lg y_2 \,.\, \Gamma^m y_2 + \ldots + \lg y_n \,.\, \Gamma^m y_n}{\lg (y_1 \cdot y_2 \ldots y_n)} .$$

Dowiedziemy jeszcze wzoru przyrostka wykładniczego rzędu m-go dla *ilorazu*. Przytem przytoczymy dowodzenie ogólne, które można stosować bez zmiany tak dla iloczynu, jak i dla ilorazu, tylko, ażeby ułatwić zrozumienie, dla iloczynu użyliśmy dowodzenia na przypadkach szczególnych.

Niech będzie dany iloraz

$$u = \frac{y}{z} ,$$

gdzie

$$y = f(x), \quad z = F(x).$$

Równanie, przyjęte za definicyę przyrostka m-go rzędu, będzie

14)
$$u^{\Gamma^m u} = \frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^m}\right)}{F\left(x^{(1+\Gamma x)^m}\right)} \cdot \left[\frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-1}}\right)}{F\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-1}}\right)}\right]^{-m} \cdot \left[\frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-2}}\right)}{F\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-2}}\right)}\right]^{\frac{m(m-1)}{1.2}} \cdots\cdots$$
$$\ldots \left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]^{\pm 1} .$$

Podobnie mamy

$$y^{\Gamma^m y} = f\left(x^{(1+\Gamma x)^m}\right) . \left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-1}}\right)\right]^{-m} . \left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-2}}\right)\right]^{\frac{m(m-1)}{1.2}} \ldots [f(x)]^{\pm 1} ,$$

tudzież

$$z^{\Gamma^m z} = F\left(x^{(1+\Gamma x)^m}\right) . \left[F\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-1}}\right)\right]^{-m} . \left[F\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-2}}\right)\right]^{\frac{m(m-1)}{1.2}} \ldots \left[F(x)\right]^{\pm 1};$$

widzimy więc, że z równania (14) wypada

$$u^{\Gamma^m u} = y^{\Gamma^m y} : z^{\Gamma^m z}.$$

Biorąc w ostatnim związku logarytmy, otrzymamy

$$\Gamma^m u \, . \lg u = \Gamma^m y \, . \lg y - \Gamma^m z \, . \lg z,$$

czyli

$$\Gamma^m \frac{y}{z} = \frac{\Gamma^m y \, . \lg y - \Gamma^m z \, . \lg z}{\lg\left(\frac{y}{z}\right)}.$$

W szczególnym przypadku, gdy $z = \frac{1}{a}$ = stałej, natenczas będzie

$$\Gamma^m (ay) = \frac{\Gamma^m y \, . \lg y}{\lg (ay)}.$$

§ 2. *Funkcye wielu zmiennych niezależnych.*

Przejdziemy teraz do określenia przyrostków wykładniczych funkcyi dwóch zmiennych niezależnych

$$f = f(x, y).$$

Jako definicyę *przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 1-go* przyjmujemy równanie

(15)
$$f^{\Gamma f} = \frac{f(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y})}{f(x, y)};$$

za definicyę *przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 2-go* bierzemy

(16)
$$f^{\Gamma^2 f} = \frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}, y^{(1+\Gamma y)^2}\right) . f(x, y)}{[f(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y})]^2}$$

i wogóle *przyrostkiem wykładniczym zupełnym rzędu* m-go będzie

$$f^{\Gamma^m f} = f\left(x^{(1+\Gamma x)^m},\ y^{(1+\Gamma y)^m}\right) . \left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-1}},\ y^{(1+\Gamma y)^{m-1}}\right)\right]^{-m}$$

$$. \left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^{m-2}},\ y^{(1+\Gamma y)^{m-2}}\right)\right]^{\frac{m(m-1)}{1.2}} \ldots \left[f(x, y)\right]^{\pm 1} .$$

W ostatnim czynniku powyższego wzoru będzie wykładnik $+1$, gdy m liczba parzysta, przeciwnie, wykładnik -1 wziąć należy w przypadku m nieparzystego.

Jako następstwo przyjętych określeń przyrostków wykładniczych będzie wzór zasadniczy

$$f\left(x^{(1+\Gamma x)^n},\ y^{(1+\Gamma y)^n}\right) = [f(x, y)]^{1+n\,.\,\Gamma f + \frac{n(n-1)}{1.2}\,.\,\Gamma^2 f + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,.\,\Gamma^3 f + \ldots + \Gamma^n f}$$

Prawdziwości tego wzoru dowodzi się zupełnie tak samo, jak dla funkcyi jednej zmiennej niezależnej; unikając zbytecznej rozwlekłości, nie będziemy po raz drugi powtarzali znanych dowodzeń.

Przeszedłszy do logarytmów, z ostatniego wzoru otrzymamy

$$\frac{\lg f\left(x^{(1+\Gamma x)^n},\ y^{(1+\Gamma y)^n}\right)}{\lg f(x, y)} = 1 + n\,\Gamma f + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,.\,\Gamma^2 f$$

(17)

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\Gamma^3 f + \ldots + \Gamma^n f .$$

Z równania (15) otrzymujemy

$$\Gamma f = \frac{\lg f\left(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y}\right) - \lg f(x, y)}{\lg f(x, y)} ;$$

stąd widoczna, że przyrostek wykładniczy Γf nie ulega żadnej zmianie, gdy zamiast $f(x, y)$ weźmiemy $[f(x, y)]^c$, gdzie c stała dowolna. W istocie będzie w tym przypadku

$$\Gamma f = \frac{c \lg f\left(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y}\right) - c \lg f(x, y)}{c \lg f(x, y)} .$$

Ułamek, napisany po drugiej stronie powyższej równości, skraca się przez c. Ilość c może być także dowolna funkcya wykładniczo-peryodyczna

$$c = \psi\,(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y}) = \psi\,(x, y)\,,$$

i w tym przypadku wzmiankowany ułamek skrócić można przez ψ.

Dla odróżnienia od *przyrostka wykładniczego zupełnego* nazywać będziemy *przyrostkiem częściowym* taki przyrostek wykładniczy, który odpowiada pewnej tylko zmiennej, podczas gdy wszystkie pozostałe zmienne traktujemy, jako ilości stałe, tak naprzykład

$$f^{\Gamma_x f} = \frac{f\,(x^{1+\Gamma x},\ y)}{f\,(x, y)}\,, \tag{18}$$

$$f^{\Gamma_y f} = \frac{f\,(x,\ y^{1+\Gamma y})}{f\,(x, y)}\,. \tag{19}$$

Przyrostek częściowy rzędu 2-go, wzięty nasamprzód względem zmiennej x, a póżniej względem y, otrzymamy, jeżeli podstawimy po drugiej stronie równości (18) $y^{1+\Gamma y}$ zamiast y i następnie podzielimy przez stan pierwotny, będzie więc:

$$f^{\Gamma^2_{x,y} f} = \frac{f\,(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y})\,.\,f\,(x, y)}{f\,(x,\ y^{1+\Gamma y})\,.\,f\,(x^{1+\Gamma x},\ y)}\,. \tag{20}$$

Zupełnie takie same wyrażenie otrzymamy z (19), kładąc po drugiej stronie znaku równości $x^{1+\Gamma x}$ zamiast x i dzieląc przez stan pierwotny:

$$f^{\Gamma^2_{y,x} f} = \frac{f\,(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y})\,.\,f\,(x, y)}{f\,(x^{1+\Gamma x},\ y)\,.\,f\,(x,\ y^{1+\Gamma y})}\,.$$

Z porównania dwóch ostatnich związków mamy prawo symbolów:

$$\Gamma^2_{x,y}\, f = \Gamma^2_{y,x}\, f.$$

Pomiędzy przyrostkiem wykładniczym zupełnym i przyrostkami częściowemi istnieje związek, który otrzymamy łatwo, mnożąc odpowiedniemi stronami równości (18), (19) i (20)

$$f^{\Gamma_x f + \Gamma_y f + \Gamma^2_{x,y} f} = \frac{f\,(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y})}{f\,(x, y)}\,.$$

Porównywając ostatnie równanie z (15), widzimy, że

$$f^{\Gamma_x f + \Gamma_y f + \Gamma^2_{x,y} f} = f^{\Gamma f}\,,$$

czyli

(21) $$\Gamma f = \Gamma_x f + \Gamma_y f + \Gamma^2_{x,y} f \,.$$

Tym sposobem, *przyrostek wykładniczy zupełny równa się sumie trzech przyrostków częściowych: przyrostkowi rzędu 1-go względem x, więcej przyrostek rzędu 1-go względem y, więcej przyrostek rzędu 2-go względem x* i *y*.

Mamy w tem twierdzeniu, równie jak i we wszystkich innych twierdzeniach, zupełne podobieństwo do wzorów różnic. Symbole Δ zastąpione są przez symbole Γ, wskutek tego treść wzorów jest inna, lecz forma zewnętrzna pozostaje bez zmiany. Forma zależy tylko od powszechnych praw algorytmii i we wszelkich rachunkach nie zmienia się; forma zewnętrzna pozostaje abstrakcyę niezależną, w którą przelewają się ideje rozmaitych rachunków.

Ażeby wyśledzić wspomniane podobieństwa dalej, przejdziemy do przyrostków rzędów wyższych.

Napiszmy następujące przyrostki wykładnicze częściowe rzędów wyższych:

(22) $$f^{\Gamma^2_{x,x} f} = \frac{f\,(x^{(1+\Gamma x)^2}, y)\,.\,f\,(x, y)}{[f\,(x^{1+\Gamma x}, y)]^2} \,,$$

(23) $$f^{\Gamma^2_{x,y} f} = \frac{f\,(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y})\,.\,f\,(x, y)}{f\,(x^{1+\Gamma x}, y)\,.\,f\,(x, y^{1+\Gamma y})} \,,$$

(24) $$f^{\Gamma^2_{y,y} f} = \frac{f\,(x, y^{(1+\Gamma y)^2})\,.\,f\,(x, y)}{[f\,(x, y^{1+\Gamma y})]^2} \,.$$

Dalej, kładąc w (22) $y^{1+\Gamma y}$ zamiast y we wszystkich wyrazach po drugiej stronie znaku równości i dzieląc przez stan pierwotny, otrzymamy

(25) $$f^{\Gamma^3_{x,x,y} f} = \frac{f\,(x^{(1+\Gamma x)^2}, y^{1+\Gamma y})\,.\,f\,(x, y^{1+\Gamma y})\,.\,[f\,(x^{1+\Gamma x}, y)]^2}{[f\,(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y})]^2\,.\,f\,(x^{(1+\Gamma x)^2}, y)\,.\,f\,(x, y)} \,;$$

podobnie z (24), kładąc $x^{1+\Gamma x}$ zamiast x we wszystkich wyrazach po drugiej stronie znaku równości i następnie dzieląc przez stan pierwotny będziemy mieli

(26) $$f^{\Gamma^3_{y,y,x} f} = \frac{f\,(x^{1+\Gamma x}, y^{(1+\Gamma y)^2})\,.\,f\,(x^{1+\Gamma x}, y)\,.\,[f\,(x, y^{1+\Gamma y})]^2}{[f\,(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y})]^2\,.\,f\,(x, y^{(1+\Gamma y)^2})\,.\,f\,(x, y)} \,.$$

Nakoniec, kładąc w (25) $y^{1+\Gamma y}$ zamiast y we wszystkich wyrazach po drugiej stronie znaku równości i dzieląc przez stan pierwotny, otrzymamy:

$$(27)\qquad f^{\Gamma^4_{x,x,y,y} f}$$

$$= \frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}, y^{(1+\Gamma y)^2}\right) . f\left(x, y^{(1+\Gamma y)^2}\right) . \left[f\left(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}\right)\right]^4 . f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}, y\right) . f(x, y)}{\left[f\left(x^{1+\Gamma x}, y^{(1+\Gamma y)^2}\right)\right]^2 . \left[f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}, y^{1+\Gamma y}\right)\right]^2 . \left[f\left(x, y^{1+\Gamma y}\right)\right]^2 \left[f\left(x^{1+\Gamma x}, y\right)\right]^2}$$

Wyrażenie (27) można otrzymać także z (26), kładąc we wszystkich wyrazach po drugiej stronie $x^{1+\Gamma x}$ zamiast x i dzieląc przez stan pierwotny. Wnioskujemy z tego, że

$$\Gamma^4_{x,x,y,y} f = \Gamma^4_{y,y,x,x} f .$$

Wzór (25) można otrzymać z równości (23), pisząc we wszystkich wyrazach po drugiej stronie $x^{1+\Gamma x}$ zamiast x i następnie dzieląc przez wartość pierwotną ułamku; stąd wypada wniosek, że

$$\Gamma^3_{x,x,y} f = \Gamma^3_{x,y,x} f .$$

Podobnie, pisząc w (23) we wszystkich wyrazach $y^{1+\Gamma y}$ na miejsce y i dzieląc przez pierwotną wartość ułamku, zauważymy, że

$$\Gamma^3_{x,y,y} f = \Gamma^3_{y,y,x} f .$$

i t. d.

Prawo symbolów jest to samo, które wyłożyliśmy w *teoryi różnic* w rozdziale I.

Podniósłszy do kwadratów równania (23), (25) i (26), dodamy tak otrzymane wypadki z równaniami (22), (24) i (27), będzie wówczas

$$f^{\Gamma^2_{x,x} f + 2\Gamma^2_{x,y} f + \Gamma^2_{y,y} f + 2\Gamma^3_{x,x,y} f + 2\Gamma^3_{y,y,x} f + \Gamma^4_{x,x,y,y} f}$$

$$= \frac{f\left(x^{(1+\Gamma x)^2}, y^{(1+\Gamma y)^2}\right) . f(x, y)}{\left[f\left(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}\right)\right]^2} .$$

Porównywając ostatni związek z (16), widzimy, że

$$(28)\qquad \Gamma^2 f = \Gamma^2_{x,x} f + 2\Gamma^2_{x,y} f + \Gamma^2_{y,y} f + 2\Gamma^3_{x,x,y} f + 2\Gamma^3_{y,y,x} f + \Gamma^4_{x,x,y,y} f .$$

Tym sposobem, *przyrostek wykładniczy zupełny rzędu 2-go* wyraża się za pomocą przyrostków częściowych tak samo, jak różnica zupełna rzędu 2-go przez odpowiednie różnice częściowe. Widzimy więc i tutaj, że prawa symbolów Δ i Γ niczem nie różnią się, chociaż treść wewnętrzna jest zupełnie inna.

Podobnie i dalej łatwo otrzymać związek *przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 3-go* z przyrostkami częściowemi

$$\Gamma^3 f = \Gamma^3{}_{x^{(3)}} f + 3\Gamma^3{}_{x^{(2)},y} f + 3\Gamma^3{}_{x,y^{(2)}} f + \Gamma^3{}_{y^{(3)}} f + 3\Gamma^4{}_{x^{(3)},y} f \tag{29}$$
$$+ 6\Gamma^4{}_{x^{(2)},\,y^{(2)}} f + 3\Gamma^4{}_{x,y^{(3)}} f + 3\Gamma^5{}_{x^{(2)},\,y^{(3)}} f + 3\Gamma^5{}_{x^{(3)},\,y^{(2)}} f + \Gamma^6{}_{x^{(3)},\,y^{(3)}} f.$$

Dla uniknienia pewnych trudności pisania, nie wyprowadzamy szczegółowo tego ostatniego wzoru, sądząc, że metoda postępowania jest dostatecznie powyżej objaśnioną i łatwą dla zrozumienia. Na poprzedzających stronicach mówiliśmy o licznych podobieństwach rachunku różnic tudzież rachunku przyrostków wykładniczych. Wspomnieć także trzeba o pewnej własności, która nie powtarza się w obu rachunkach i zasługuje na baczną uwagę.

W rachunku różnic mieliśmy

$$\Delta(\Delta f) = \Delta^2 f, \quad \Delta(\Delta^2 f) = \Delta^3 f, \; \ldots, \; \Delta(\Delta^i f) = \Delta^{i+1} f;$$

prawo to ma znaczenie drugorzędne, gdyż całą teoryę różnic można wykładać na zasadzie umówionych definicyj, nie robiąc najmniejszej wzmianki o tem prawie symbolów. Jednak na prawo, wymienione wyżej, od samego początku wykładu zwróciliśmy uwagę, ponieważ to daje nam znaczne udogodnienia tak w rachunku różnic, jak i w rachunku różniczkowym.

W rachunku przyrostków wykładniczych podobnego prawa symbolów

$$\Gamma(\Gamma^i f) = \Gamma^{i+1} f$$

nie ma wcale, ponieważ symbol Γ oznacza zawsze tylko pewien wykładnik wielkości, gdy tymczasem symbol Δ oznacza samą wielkość; więc też nie ma nic w tem sprzecznego, że prawo łączenia wielkości nie może być tożsamościowem względem praw kojarzenia wykładników pewnych wielkości.

W dalszym ciągu przejdziemy do funkcyj trzech zmiennych niezależnych

$$F = F(x, y, z).$$

Jako określenie *przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 1-go* przyjmujemy związek:

$$F^{\Gamma F} = \frac{F(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z})}{F(x, y, z)}. \tag{30}$$

Za określenie *przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 2-go* bierzemy

$$F^{\Gamma^2 F} = \frac{F\left(x^{(1+\Gamma x)^2},\ y^{(1+\Gamma y)^2},\ z^{(1+\Gamma z)^2}\right) . F(x, y, z)}{\left[F\left(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y},\ z^{1+\Gamma z}\right)\right]^2} . \tag{31}$$

Przyrostkiem wykładniczym zupełnym rzędu 3-go będzie $\Gamma^3 F$

$$F^{\Gamma^3 F} = \frac{F\left(x^{(1+\Gamma x)^3},\ y^{(1+\Gamma y)^3},\ z^{(1+\Gamma z)^3}\right) . \left[F\left(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y},\ z^{1+\Gamma z}\right)\right]^3}{\left[F\left(x^{(1+\Gamma x)^2},\ y^{(1+\Gamma y)^2},\ z^{(1+\Gamma z)^2}\right)\right]^3 . F(x, y, z)} \tag{32}$$

i t. p.

Następstwem przyjętych definicyj będzie wzór główny

$$F\left(x^{(1+\Gamma x)^n},\ y^{(1+\Gamma y)^n},\ z^{(1+\Gamma z)^n}\right)$$

$$= [F(x, y, z)]^{1 + n . \Gamma F + \frac{n(n-1)}{1.2} . \Gamma^2 F + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} . \Gamma^3 F + \ldots + \Gamma^n F}$$

który możemy pisać w postaci dogodniejszej:

$$\frac{\lg F\left(x^{(1+\Gamma x)^n},\ y^{(1+\Gamma y)^n},\ z^{(1+\Gamma z)^n}\right)}{\lg F(x, y, z)}$$

$$= 1 + n . \Gamma F + \frac{n(n-1)}{1.2} . \Gamma^2 F + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} . \Gamma^3 F + \ldots + \Gamma^n F. \tag{33}$$

Ogólna prawdziwość tego wzoru dowodzi się metodą, o której kilkakrotnie już wspominaliśmy w pracy niniejszej. Dowodzenia te, jako znane i łatwe, pomijamy.

Z równania (30) zapomocą logarytmowania otrzymujemy

$$\Gamma F = \frac{\lg F\left(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y},\ z^{1+\Gamma z}\right) - \lg F(x, y, z)}{\lg F(x, y, z)},$$

skąd widoczna, że przyrostek wykładniczy ΓF nie ulegnie żadnej zmianie gdy zamiast $F(x, y, z)$ weźmiemy $[F(x, y, z)]^c$, gdzie c oznacza stałą dowolną. W rzeczy samej będzie

$$\Gamma F = \frac{c \lg F\left(x^{1+\Gamma x},\ y^{1+\Gamma y},\ z^{1+\Gamma z}\right) - c \lg F(x, y, z)}{c \lg F(x, y, z)},$$

po skróceniu przez c otrzymamy pierwotną wartość ułamku. Łatwo zauważyć, że ilość c może być dowolna fnnkcya wykładniczo-peryodyczna

$$c = \psi\,(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z}) = \psi\,(x, y, z)\,;$$

w tym przypadku wzmiankowany wyżej ułamek skrócić można przez ψ.

Nazywając $\Gamma_x F$, $\Gamma_y F$, $\Gamma_z F$ *przyrostki wykładnicze częściowe rzędu 1-go*, będziemy mieli

$$(34)\qquad F^{\Gamma_x F} = \frac{F\,(x^{1+\Gamma x}, y, z)}{F\,(x, y, z)}\,,$$

$$(35)\qquad F^{\Gamma_y F} = \frac{F\,(x, y^{1+\Gamma y}, z)}{F\,(x, y, z)}$$

$$(36)\qquad F^{\Gamma_z F} = \frac{F\,(x, y, z^{1+\Gamma z})}{F\,(x, y, z)}\,.$$

Przyrostki częściowe rzędu 2-go będą miały kształt $\Gamma^2_{x,y} F$, $\Gamma^2_{x,z} F$ $\Gamma^2_{y,z} F$

$$(37)\qquad F^{\Gamma^2_{x,y} F} = \frac{F\,(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z)\,.\,F\,(x, y, z)}{F\,(x^{1+\Gamma x}, y, z)\,.\,F\,(x, y^{1+\Gamma y}, z)}\,,$$

$$(38)\qquad F^{\Gamma^2_{x,z} F} = \frac{F\,(x^{1+\Gamma x}, y, z^{1+\Gamma z})\,.\,F\,(x, y, z)}{F\,(x^{1+\Gamma x}, y, z)\,.\,F\,(x, y, z^{1+\Gamma z})}\,,$$

$$(39)\qquad F^{\Gamma^2_{y,z} F} = \frac{F\,(x, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z})\,.\,F\,(x, y, z)}{F\,(x, y^{1+\Gamma y}, z)\,.\,F\,(x, y, z^{1+\Gamma z})}\,.$$

Wyrażenie, napisane po drugiej stronie znaku równości (37), otrzymuje się z (34), kładąc we wszystkich wyrazach drugiej strony $y^{1+\Gamma y}$ zamiast y i następnie dzieląc przez wartość pierwotną. Można to samo otrzymać z (35), pisząc $x^{1+\Gamma x}$ na miejsce x i dzieląc przez wartość pierwotną; z tego wnioskujemy, że

$$\Gamma^2_{x,y} F = \Gamma^2_{y,x} F\,.$$

Wyrażenie, napisane po drugiej stronie znaku równości (38), otrzymaliśmy z (34), kładąc we wszystkich wyrazach drugiej strony $z^{1+\Gamma z}$ zamiast z i dzieląc przez stan pierwotny całego ułamku. Moglibyśmy takie same wyrażenie otrzymać z (36), napisawszy $x^{1+\Gamma x}$ na miejscu x i podzieliwszy przez wartość początkową; stąd wynika

$$\Gamma^2_{x,z} F = \Gamma^2_{z,x} F\,.$$

Podobnym sposobem objaśnia się łatwo, że

$$\Gamma^2_{y,x} F = \Gamma^2_{z,y} F\,.$$

Oznaczając *przyrost wykładniczy częściowy rzędu 3-go przez* $\Gamma^3_{x,y,z}F$, będziemy mieli

$$(40)\quad F^{\Gamma^3_{x,y,z}F} = \frac{F(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z}) \,.\, F(x^{1+\Gamma x}, y, z) \,.\, F(x, y^{1+\Gamma y}, z) \,.\, F(x, y, z^{1+\Gamma z})}{F(x^{1+\Gamma x}, y, z^{1+\Gamma z}) \,.\, F(x, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z}) \,.\, F(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z) \,.\, F(x,y,z)} \,.$$

Wyrażenie, które widzimy po drugiej stronie powyższego równania, otrzymaliśmy z (37), pisząc we wszystkich wyrazach strony drugiej $z^{1+\Gamma z}$ na miejscu z i następnie dzieląc przez wartość początkową całego ułamku. Takie same wyrażenie można otrzymać z (38), kładąc $y^{1+\Gamma y}$ zamiast y i dzieląc przez wartość pierwotną, lub też z (39), jeżeli napiszemy $x^{1+\Gamma x}$ na miejsce x i podzielimy przez stan początkowy ułamku.

Wnioskujemy stąd, że ma miejsce

$$\Gamma^3_{x,y,z}F = \Gamma^3_{y,x,z}F = \Gamma^3_{y,z,x}F = \Gamma^3_{x,z,y}F = \ldots$$

Ażeby wyprowadzić związek, istniejący pomiędzy przyrostkami wykładniczemi częściowemi tudzież przyrostkiem zupełnym, pomnożymy odpowiedniemi stronami równania (34), (35), (36), (37), (38), (39) i (40); natenczas będzie:

$$F^{\Gamma_x F + \Gamma_y F + \Gamma_z F + \Gamma^2_{x,y} F + \Gamma^2_{x,z} F + \Gamma^2_{y,z} F + \Gamma^3_{x,y,z} F} = \frac{F(x^{1+\Gamma x}, y^{1+\Gamma y}, z^{1+\Gamma z})}{F(x, y, z)} \,.$$

Porównawszy ostatnie równanie z (30), widzimy, że

$$(41)\quad \Gamma F = \Gamma_x F + \Gamma_y F + \Gamma_z F + \Gamma^2_{x,y} F + \Gamma^2_{x,z} F + \Gamma^2_{y,z} F + \Gamma^3_{x,y,z} F.$$

Tak więc, *przyrostek wykładniczy zupełny rzędu 1-go funkcyi trzech zmiennych niezależnych równa się sumie trzech przyrostków częściowych rzędu 1-go względem każdej zmiennej zosobna, więcej suma trzech przyrostków rzędu 2-go względem każdej pary zmiennych, więcej przyrostek częściowy rzędu 3-go względem wszystkich zmiennych.*

Podobną, jak powyżej, drogą można wyprowadzić wzór

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} \Gamma^2 F = {} & \Gamma^2_{x^{(2)}} F + 2\Gamma^2_{x,y} F + \Gamma^2_{y^{(2)}} F + 2\Gamma^2_{x,z} F + 2\Gamma^2_{y,z} F + \Gamma^2_{z^{(2)}} F \\ & + 2\Gamma^3_{x^{(2)},y} F + 2\Gamma^3_{x^{(2)},z} F + 2\Gamma^3_{x,y^{(2)}} F + 2\Gamma^3_{y^{(2)},z} F + 2\Gamma^3_{x,z^{(2)}} F + 2\Gamma^3_{y,z^{(2)}} F \\ & + 6\Gamma^3_{x,y,z} F + \Gamma^4_{x^{(2)},y^{(2)}} F + \Gamma^4_{x^{(2)},z^{(2)}} F + \Gamma^4_{y^{(2)},z^{(2)}} F + 4\Gamma^4_{x^{(2)},y,z} F \\ & + 4\Gamma^4_{x,y^{(2)},z} F + 4\Gamma^4_{x,y,z^{(2)}} F + 2\Gamma^5_{x^{(2)},y^{(2)},z} F + 2\Gamma^5_{x^{(2)},y,z^{(2)}} F \\ & + 2\Gamma^5_{x,y^{(2)},z^{(2)}} F + \Gamma^6_{x^{(2)},y^{(2)},z^{(2)}} F. \end{aligned}\right.$$

Wzór ten wyraża związek przyrostka wykładniczego zupełnego rzędu 2-go z przyrostkami częściowemi. Jakkolwiek dowodzenie tego wzoru jest bardzo łatwe, to jednak pisanie wszystkich wzorów częściowych byłoby niedogodne i zajęłoby zbyt wiele miejsca. Wzory przyrostków wykładniczych rzędów wyższych stają się coraz bardziej zawiłe, ograniczymy się więc tylko przypadkami, wyłożonemi powyżej.

Taka sama metoda, którą stosowaliśmy do funkcyj dwóch i trzech zmiennych niezależnych, zastosować się daje dalej do funkcyj czterech, pięciu i wogóle wielu zmiennych niezależnych. Powtarzanie w dalszym ciągu tych samych, jak poprzednio, rozumowań, uważamy tutaj za zbyteczne, sądząc, że praca niniejsza na ogólności dowodzeń nic nie straci.

V. Rachunek wykładniczkowy.*)

Przejdziemy teraz do rachunku ilości nieskończenie małych, przypuszczając, że we wszystkich wzorach poprzedzającego rozdziału przyrosty wykładnicze Γ dążą nieskończenie do zera. Będziemy pisali dla odróżnienia głoskę γ zamiast Γ, pamiętając zawsze, że Γ oznaczało przyrostki skończone, gdy tymczasem γ oznaczać będzie przyrostki wykładnicze, nieskończenie zdążające do zera czyli nieskończenie małe.

§ 1. *Funkcye jednej zmiennej niezależnej.*

Funkcyą nadpochodną rzędu 1-go **) nazywamy granicę stosunku przyrostku wykładniczego funkcyi do podobnego przyrostku zmiennej niezależnej, w miarę tego, gdy przyrostek γx zdąża do zera.

Będzie więc na zasadzie związku (6a, IV)

$$\lim \frac{\gamma f}{\gamma x} = \lim \frac{\lg \Phi_1}{\gamma x \,.\, \lg f(x)} \tag{1}$$

Łatwo zauważyć, że iloraz

$$\frac{\lg \Phi_1}{\gamma x}$$

*) *Calcul exponentiel.*

**) *La fonction super-dérivée.*

przedstawia się pod postacią nieoznaczoną $\frac{0}{0}$, gdy γx zdąża do zera. Granicę wzmiankowanego ilorazu oznaczymy przez $\lg U_1$, tak więc

$$\lim \frac{\lg \Phi_1}{\gamma x} = \lg U_1 .$$

Przeszedłszy od równania (1) do granic, pisać będziemy głoskę g zamiast głoski γ, tym sposobem z (1) otrzymamy

$$\frac{gf}{gx} = \frac{\lg U_1}{\lg f(x)} ,$$

$\frac{gf}{gx}$ jestto *nadpochodna rzędu 1-go.* Wielkość U_1 nazywać będziemy *funkcyałem wykładniczkowym rzędu 1-go**). Widzimy więc, że *nadpochodna rzędu 1-go równa się ilorazowi logarytmu funkcyału wykładniczkowego rzędu 1-go przez logarytm funkcyi danej.*

Funkcyą nadpochodną rzędu 2-go będzie granica stosunku przyrostka wykładniczego rzędu 2-go do kwadratu przyrostka wykładniczego zmiennej niezależnej, gdy ten ostatni zdąża do zera.

Takim sposobem ze związku (7b, IV) wypadnie

$$\lim \frac{\gamma^2 f}{\gamma x^2} = \lim \frac{\lg \Phi_2}{\gamma x^2 \,.\, \lg f(x)} .$$

Ponieważ jednak łatwo zauważyć, że stosunek

$$\frac{\lg \Phi_2}{\gamma x^2} = \frac{0}{0}$$

zdąża niewątpliwie do granicy oznaczonej, którą nazwiemy $\lg U_2$, wskutek tego mamy

$$\frac{g^2 f}{gx^2} = \frac{\lg U_2}{\lg f(x)} ,$$

U_2 jestto *funkcyał wykładniczkowy rzędu 2-go.* Tak więc *nadpochodna rzędu 2-go równa się logarytmowi funkcyału wykładniczkowego rzędu 2-go, podzielonemu przez logarytm funkcyi.*

---

*) *l'antifonction d'ordre 1-er.*

Funkcyą nadpochodną rzędu 3-go będzie granica stosunku przyrostka wykładniczego rzędu 3-go funkcyi danej do sześcianu przyrostka wykładniczego zmiennej niezależnej w miarę tego, gdy ten ostatni zdąża do zera.

Takim sposobem ze związku (8a, IV) mamy

$$\lim \frac{\gamma^3 f}{\gamma x^3} = \lim \frac{\lg \Phi_3}{\gamma x^3 \,.\, \lg f(x)};$$

atoli iloraz

$$\frac{\lg \Phi_3}{\gamma x^3} = \frac{0}{0}$$

zdąża do granicy oznaczonej, którą nazwiemy $\lg U_3$, będzie więc

$$\frac{g^3 f}{g x^3} = \frac{\lg U_3}{\lg f(x)},$$

U_3 jestto *funkcyał wykładniczkowy rzędu 3-go.*

Metoda naszego postępowania na tych kilku przypadkach szczególnych jest, jak się zdaje, w sposób dostateczny objaśnioną. Widzimy, że ma miejsce tutaj zupełna analogia do tego postępowania, jakie przyjęliśmy w określeniu pochodnych rozmaitych rzędów. Przyjęte powyżej definicye nadpochodnych pozwalają nam zawsze znaleść ich wartości dla funkcyi zasadniczych.

Będziemy mieli na zasadzie wzorów poprzedzającego rozdziału:

$$\frac{g(x^m)}{gx} = \lim \frac{\gamma(x^m)}{\gamma x} = 1,$$

$$\frac{g^2(x^m)}{gx^2} = \lim \frac{\gamma^2(x^m)}{\gamma x^2} = 1, \ldots, \frac{g^m(x^m)}{gx^m} = \lim \frac{\gamma^m(x^m)}{\gamma x^m} = 1.$$

$$\frac{g(\lg x)}{gx} = \lim \frac{\lg(1+\gamma x)}{\gamma x \,.\, \lg\lg x} = \frac{1}{\lg\lg x}, \quad \frac{g^2(\lg x)}{gx^2} = 0, \quad \text{i t. d.}$$

$$\frac{g(a^x)}{gx} = \lim \frac{x^{\gamma x} - 1}{\gamma x} = \lg x,$$

$$\frac{g^2(a^x)}{gx^2} = \lim \frac{x^{(\gamma x)^2 + 2\gamma x} - 2x^{\gamma x} + 1}{\gamma x^2} = \lg x + \lg^2 x,$$

i t. d.

W dalszym ciągu, dla łatwiejszego zrozumienia wszystkich zasad rachunku wykładniczkowego, postaramy się wyłożyć jeszcze raz cały wspomniany rachunek niezależnie oą przyjętych powyżej definicyj, wypływających wprost z teoryi przyrostków wykładniczych skończonych.

Dla udogodnienia pisać będziemy α zamiast γx, β zamiast γy, γ zamiast γz i t. d. Tym sposobem mając dane

$$y = f(x),$$

przypuszczamy, że wykładnik zmiennej niezależnej otrzymał nieskończenie mały przyrostek α. Wiemy, że jednocześnie wykładnik zmiennej zależnej otrzyma także pewien przyrostek nieskończenie mały β, będzie więc

$$y^{1+\beta} = f(x^{1+\alpha}),$$

skąd wypada

$$y^{\beta} = \frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)}.$$

Podnosząc obie strony ostatniego równania do potęgi $\frac{1}{\alpha}$, będziemy mieli

$$(2) \qquad y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Chociaż α i β znikają jednocześnie, to jednak stosunek tych ilości nie znika, bowiem druga strona powyższej równości ma postać nieoznaczoną 1^{∞} i prawdziwa wartość podobnego wyrażenia nieoznaczonego zawsze może być znalezioną. Druga strona w równaniu (2) dąży do granicy oznaczonej jednocześnie, gdy α zdąża do zera. Stosunek $\frac{\beta}{\alpha}$ nazywamy w granicy *funkcyą nadpochodną* i piszemy:

$$(3) \qquad y^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0}.$$

Równość ostatnią możemy pisać w kształcie;

$$y^{\frac{gy}{gx}gx} = \lim \left.\frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)}\right|_{\alpha=0}.$$

Ilość nieskończenie małą gy

$$gy = \frac{gy}{gx} \cdot gx$$

nazywamy *wykładniczkiem**) zmiennej zależnej y tudzież podobnie gx nazywać będziemy wykładniczkiem zmiennej niezależnej x.

Widzimy więc, że *funkcya nadpochodna jest ilorazem dwóch wykładniczków*: zmiennej zależnej tudzież niezależnej.

Funkcya nadpochodna nie zmienia się, jeżeli zamiast $f(x)$ weźmiemy $[f(x)]^c$, gdzie c oznacza stałą dowolną.

Istotnie, z równania (3) będzie

$$(y^c)^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{\{f(x^{1+\alpha})\}^c}{\{f(x)\}^c}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)}\right]^{\frac{c}{\alpha}}.$$

Jeżeli obie strony powyższego podniesiemy do potęgi $\frac{1}{c}$, zauważymy łatwo, że ilość c bez śladu zniknie, wskutek tego nadpochodna $\frac{gy}{gx}$ pozostanie wielkością bez zmiany. Granicę, do której zdąża druga strona (3), oznaczmy przez U_1, będzie natenczas

$$y^{\frac{gy}{gx}} = U_1 .$$

Logarytmując ostatnie równanie, otrzymamy

$$\frac{gy}{gx} = \frac{\lg U_1}{\lg y} . \tag{4}$$

y nazywamy, jak zwykle, *zasadą*, zaś wielkość U_1 będziemy nazywali *funkcyałem wykładniczkowym rzędu 1-go*. Tak więc, *nadpochodna równa się logarytmowi funkcyału, podzielonemu przez logarytm zasady*.

Z równania (4) widoczna, że

$$gy = \frac{\lg U_1}{\lg y} \cdot gx ,$$

*) *l'exponentielle.*

czyli, *wykładniczek zmiennej zależnej równa się nadpochodnej, pomnożonej przez wykładniczek zmiennej niezależnej.*

Celem rachunku wykładniczkowego jest dla każdej danej funkcyi znaleść jej *funkcyał* i następnie *nadpochodną.*

Zadaniem rachunku odwrotnego będzie szukanie *zasady*, mając daną funkcyę nadpochodną.

Zastosujemy teoryę wyłożoną do kilku funkcyj zasadniczych.

Niech będzie dana jakakolwiek *potęga*

$$y = x^m .$$

Nadając nieskończenie małe przyrostki wykładnikom, otrzymamy

$$y^{1+\beta} = x^{m(1+\alpha)} ,$$

skąd wypada

$$y^\beta = x^{m\alpha} ,$$

i wskutek tego

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = x^m = y.$$

Widzimy więc, że dla danej potęgi stosunek nieskończenie małych β i α zawsze pozostaje równym jedności, czyli w granicy mieć będziemy:

$$\frac{gy}{gx} = 1.$$

Będzie więc

$$\frac{g\,(x^m)}{gx} = 1.$$

czyli

$$g\,(x^m) = gx .$$

Jeżeli mamy dane $a =$ stałej, natenczas, oczywista, będzie $\frac{ga}{gx} = 0$, tudzież $ga = 0$.

Nadpochodna, oraz wykładniczek ilości stałej są zerami.

Niech będzie dany *logarytm*

$$y = \lg x .$$

Z równania (3) mamy

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{\lg (x^{1+\alpha})}{\lg x}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0};$$

stąd łatwo wypada

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim_{\alpha=0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e,$$

będzie więc

$$\frac{gy}{gx} = \frac{\lg e}{\lg y} = \frac{1}{\lg \lg x}.$$

Tym sposobem mamy *nadpochodnę logarytmu*

$$\frac{g\,(\lg x)}{gx} = \frac{1}{\lg \lg x},$$

oraz

$$g\,(\lg x) = \frac{gx}{\lg \lg x}.$$

Jestto wykładniczek logarytmu.

Dajmy funkcyę wykładniczą

$$y = a^x.$$

Z równania (3) wynika

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{a^{x^{1+\alpha}}}{a^x}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0}.$$

Ponieważ łatwo znajdujemy

$$\lim \left.\frac{\lg \left(\frac{a^{x^{1+\alpha}}}{a^x}\right)}{\alpha}\right|_{\alpha=0} = x \lg x \,.\, \lg a$$

więc będzie

$$y^{\frac{gy}{gx}} = e^{x \lg x \lg a},$$

skąd przez logarytmowanie otrzymujemy:

$$\frac{gy}{gx} = \frac{x \lg a \,.\, \lg x}{\lg (a^x)} = \lg x.$$

Takim sposobem *nadpochodna funkcyi wykładniczej* będzie

$$\frac{g\,(a^x)}{gx} = \lg x,$$

oraz wykładniczek

$$g\,(a^x) = \lg x \,.\, gx\,.$$

Dalej, niech będzie dana *funkcya trygonometryczna* w postaci:

$$y = \sin x\,;$$

równanie (3) będzie miało kształt

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{\sin (x^{1+\alpha})}{\sin x}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0}.$$

Ponieważ wiemy, że

$$\lim \left.\frac{\lg \dfrac{\sin (x^{1+\alpha})}{\sin x}}{\alpha}\right|_{\alpha=0} = x \operatorname{cotg} x \lg x\,,$$

wskutek tego otrzymamy

$$y^{\frac{gy}{gx}} = e^{x \operatorname{cotg} x \,.\, \lg x},$$

skąd wypada

$$\frac{gy}{gx} = \frac{x \operatorname{cotg} x \lg x}{\lg \sin x}\,,$$

Tak więc *nadpochodna wstawy* jest

$$\frac{g\,(\sin x)}{gx} = \frac{x \operatorname{cotg} x \lg x}{\lg \sin x},$$

oraz wykładniczek

$$g\,(\sin x) = \frac{x \operatorname{cotg} x \lg x}{\lg \sin x} \,.\, gx\,.$$

Niech będzie dane

$$y = \cos x\,;$$

podobnie, jak poprzednio, będzie

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim \left[\frac{\cos\,(x^{1+\alpha})}{\cos x}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0}.$$

Ponieważ wiemy, że

$$\lim \frac{\lg\left(\dfrac{\cos x^{1+\alpha}}{\cos x}\right)}{\alpha} = -\,x \operatorname{tg} x \lg x\,,$$

mamy więc

$$y^{\frac{gy}{gx}} = e^{-x \operatorname{tg} x \lg x}$$

skąd wypadnie

$$\frac{gy}{gx} = \frac{-\,x \operatorname{tg} x \lg x}{\lg \cos x}\,.$$

Tak więc, *nadpochodna dostawy* będzie

$$\frac{g\,(\cos x)}{gx} = -\,\frac{x \lg x \,.\, \operatorname{tg} x}{\lg \cos x},$$

oraz wykładniczek

$$g\,(\cos x) = -\,\frac{x \lg x \operatorname{tg} x}{\lg \cos x} \,.\, gx\,.$$

Zupełnie podobnemi sposobami znajdziemy łatwo

$$g\,(\mathrm{tg}\,x) = \frac{2x\,\lg x}{\sin 2x\,\lg \mathrm{tg}\,x}\,.\,gx\,,$$

$$g\,(\mathrm{cotg}\,x) = -\,\frac{2x\,\lg x}{\sin 2x\,\lg \mathrm{cotg}\,x}\,.\,gx\,,$$

$$g\,(\sec x) = \frac{x\lg x\;\mathrm{tg}\,x}{\lg \sec x}\,.\,gx\,,$$

$$g\,(\mathrm{cosec}\,x) = -\,\frac{x\lg x\;\mathrm{cotg}\,x}{\lg \mathrm{cosec}\,x}\,gx\,.$$

Dajmy jeszcze *funkcyę kołową* w kształcie:

$$y = \mathrm{arc}\sin x\,,$$

będziemy mieli

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \lim\left[\frac{\mathrm{arc}\sin(x^{1+\alpha})}{\mathrm{arc}\sin x}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0}.$$

Wiedząc, że

$$\lim\frac{\lg\left(\dfrac{\mathrm{arc}\sin x^{1+\alpha}}{\mathrm{arc}\sin x}\right)}{\alpha} = \frac{x\lg x}{\sqrt{1-x^2}\,.\,\mathrm{arc}\sin x}\,,$$

otrzymamy

$$\frac{gy}{gx} = \frac{x\lg x}{\sqrt{1-x^2}\;\mathrm{arc}\sin x\,\lg \mathrm{arc}\sin x}\,.$$

Takim sposobem wykładniczkiem *łuku wstawy* będzie

$$g\,(\mathrm{arc}\sin x) = \frac{x\lg x}{\sqrt{1-x^2}\;\mathrm{arc}\sin x\,.\,\lg \mathrm{arc}\sin x}\,.\,gx\,.$$

Podobną drogą można znaleźć dla innych funkcyj kołowych:

$$g\,(\text{arc}\cos x) = -\frac{x \lg x}{\sqrt{1-x^2}\,\text{arc}\cos x\,.\lg \text{arc}\cos x}\,.\,gx\,,$$

$$g\,(\text{arc}\,\text{tg}\, x) = \frac{x \lg x}{(1+x^2)\,\text{arc}\,\text{tg}\, x \lg \text{arc}\,\text{tg}\, x}\,.\,gx\,,$$

$$g\,(\text{arc}\,\text{cotg}\, x) = -\frac{x \lg x}{(1+x^2)\,\text{arc}\,\text{cotg}\, x \lg \text{arc}\,\text{cotg}\, x}\,gx.$$

i t. p.

Niech będą dane u i v dwie funkcye ciągłe zmiennej x, tudzież y ich iloczyn

$$y = u\,.\,v\,,$$

$$u = f\,(x), \quad v = \varphi\,(x)\,.$$

Oznaczając przez α przyrostek wykładniczy zmiennej niezależnej, oraz β jednoczesny przyrostek wykładnika funkcyi y, będziemy mieli:

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f\,(x^{1+\alpha})\,.\,\varphi\,(x^{1+\alpha})}{f\,(x)\,.\,\varphi\,(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\,;$$

przeszedłszy do granic, z powyższego otrzymamy

$$\lim\, y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \lim\left[\frac{f\,(x^{1+\alpha})}{f\,(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.\,\lim\left[\frac{\varphi\,(x^{1+\alpha})}{\varphi\,(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0}\,,$$

czyli widocznie

$$y^{\frac{gy}{gx}} = u^{\frac{gu}{gx}}\,.\,v^{\frac{gv}{gx}}\,.$$

Biorąc logarytmy po obu stronach, będziemy mieli

$$\frac{gy}{gx}\lg y = \frac{gu}{gx}\lg u + \frac{gv}{gx}\lg v.$$

Takim sposobem, nadpochodna danego iloczynu będzie

$$\frac{g\,(uv)}{gx} = \frac{\lg u\,.\,\frac{gu}{gx} + \lg v\,.\,\frac{gv}{gx}}{\lg\,(uv)}\,,$$

tudzież wykładniczek iloczynu

$$g\,(uv) = \frac{\lg u \,.\, gu + \lg v \,.\, gv}{\lg\,(uv)}\,.$$

Jeżeli będzie dany iloczyn trzech czynników

$$y = u \,.\, v \,.\, w\,,$$

$$u = f\,(x), \quad v = \varphi\,(x), \quad w = \psi\,(x),$$

natenczas podobnie, jak powyżej, będzie

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f\,(x^{1+\alpha}) \,.\, \varphi\,(x^{1+\alpha}) \,.\, \psi\,(x^{1+\alpha})}{f\,(x) \,.\, \varphi\,(x) \,.\, \psi\,(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

tudzież w granicy

$$\lim\, y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \lim \left[\frac{f\,(x^{1+\alpha})}{f\,(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}} .\, \lim \left[\frac{\varphi\,(x^{1+\alpha})}{\varphi\,(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}} .\, \lim \left[\frac{\psi\,(x^{1+\alpha})}{\psi\,(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0},$$

skąd widoczna

$$y^{\frac{gy}{gx}} = u^{\frac{gu}{gx}} \,.\, v^{\frac{gv}{gx}} \,.\, w^{\frac{gw}{gx}}\,.$$

Logarytmując, z ostatniego równania otrzymamy

$$\frac{g\,(u\,v\,w)}{gx} = \frac{\lg u \,.\, \frac{gu}{gx} + \lg v \,.\, \frac{gv}{gx} + \lg w \,.\, \frac{gw}{gx}}{\lg\,(u\,v\,w)}\,.$$

Łatwo zauważyć, że powyższe twierdzenie o nadpochodnej iloczynu rozciąga się widocznie na jakąkolwiek liczbę czynników.

Dajmy jeszcze *iloraz* dwóch funkcyi

$$y = \frac{u}{v}\,,$$

gdzie

$$u = f\,(x), \quad v = \psi\,(x)\,.$$

Będziemy mieli podobnie, jak dla iloczynu,

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{\dfrac{f(x^{1+\alpha})}{\psi(x^{1+\alpha})}}{\dfrac{f(x)}{\psi(x)}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} .$$

Przechodząc do granic, możemy napisać

$$\lim y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\lim \left[\dfrac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)} \right]^{\frac{1}{\alpha}}}{\lim \left[\dfrac{\psi(x^{1+\alpha})}{\psi(x)} \right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0}} ,$$

czyli

$$y^{\frac{gy}{gx}} = \frac{u^{\frac{gu}{gx}}}{v^{\frac{gv}{gx}}} .$$

Wziąwszy logarytmy po obu stronach powyższego równania, otrzymamy

$$\frac{gy}{gx} \lg y = \frac{gu}{gx} \,.\, \lg u - \frac{gv}{gx} \,.\, \lg v ,$$

skąd wypada nadpochodna ilorazu

$$\frac{g}{gx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\lg u \,.\, \dfrac{gu}{gx} - \lg v \,.\, \dfrac{gv}{gx}}{\lg\left(\dfrac{u}{v}\right)}$$

oraz wykładniczek

$$g\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\lg u \,.\, gu - \lg v \,.\, gv}{\lg\left(\dfrac{u}{v}\right)} .$$

Dla wyprowadzenia nadpochodnej *sumy algebraicznej* użyjemy metody odmiennej od poprzedzającej. Mówiliśmy na początku rozdziału IV, że

$$x^{1+\alpha} = x + \Delta x, \quad y^{1+\beta} = y + \Delta y\,.$$

Stąd za pomocą logarytmów otrzymujemy

$$\alpha = \frac{\lg (x + \Delta x) - \lg x}{\lg x}\,,$$

$$\beta = \frac{\lg (y + \Delta y) - \lg y}{\lg y}\,,$$

czyli

$$\alpha = \frac{\Delta x}{x \lg x}\,.\,(1 + \varepsilon_1)\,,$$

$$\beta = \frac{\Delta y}{y \lg y}\,.\,(1 + \varepsilon_2)\,.$$

ε_1, ε_2 są to ilości nieskończenie małe, znikające jednocześnie z Δx i Δy. Podzieliwszy odpowiednio oba ostatnie równania, otrzymamy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\beta}{\alpha}\,.\,\frac{y \lg y\,.\,(1 + \varepsilon_1)}{x \lg x\,.\,(1 + \varepsilon_2)}\,.$$

Jeżeli przejdziemy do granic, natenczas z powyższego będziemy mieli

$$\frac{dy}{dx} = \frac{gy}{gx}\,.\,\frac{y \lg y}{x \lg x}\,. \tag{5}$$

Niech będzie dana *suma algebraiczna*

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n\,.$$

gdzie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ są pewne funkcye zmiennej niezależnej x. Różniczkując powyżej napisaną sumę, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{dy_n}{dx}\,; \tag{6}$$

jeżeli zaś do każdego wyrazu w (6) zastosujemy wzór (5), natenczas będzie

$$\frac{y \lg y}{x \lg x} \cdot \frac{gy}{gx} = \frac{y_1 \lg y_1}{x \lg x} \cdot \frac{gy_1}{gx} + \frac{y_2 \lg y_2}{x \lg x} \cdot \frac{gy_2}{gx} + \ldots + \frac{y_n \lg y_n}{x \lg x} \cdot \frac{gy_n}{gx},$$

skąd łatwo wypada nadpochodna sumy

$$\frac{g(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)}{gx}$$

$$= \frac{y_1 \lg y_1 \cdot \frac{gy_1}{gx} + y_2 \lg y_2 \cdot \frac{gy_2}{gx} + \ldots + y_n \lg y_n \frac{gy_n}{gx}}{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \lg (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)},$$

tudzież wykładniczek

$$g(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

$$= \frac{y_1 \lg y_1 \cdot gy_1 + y_2 \lg y_2 \cdot gy_2 + \ldots + y_n \lg y_n \cdot gy_n}{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \lg (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)}.$$

Dalej przypuśćmy, że mamy daną *funkcyę funkcyi*

$$y = f(u),$$
$$u = \varphi(x).$$

Będziemy mieli widocznie

$$y^{1+\beta} = f(u^{1+\gamma}),$$
$$u^{1+\gamma} = \varphi(x^{1+\alpha})$$

Stąd wypada

(7) $$y^{\frac{\beta}{\gamma}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\gamma}},$$

(8) $$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f(\varphi(x^{1+\alpha}))}{f(\varphi(x))}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Jeżeli obie strony równania (7) podniesiemy do potęgi $\frac{\gamma}{\alpha}$, natenczas będzie

$$y^{\frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Jestto równanie takie same, jak (8), wskutek tego mieć będziemy

$$y^{\frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}} = y^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Przechodząc do granic, z ostatniego otrzymamy

$$y^{\frac{gy}{gu} \cdot \frac{gu}{gx}} = y^{\frac{gy}{gx}},$$

więc będzie

$$\frac{gy}{gx} = \frac{gy}{gu} \cdot \frac{gu}{gx}.$$

Jeżeli mamy funkcyę złożoną w kształcie

$$y = f(u),$$

$$u = \varphi(z), \quad z = \psi(x),$$

natenczas podobnie będzie

$$y^{1+\beta} = f(u^{1+\gamma}),$$

$$u^{1+\gamma} = \varphi(z^{1+\delta}),$$

$$z^{1+\delta} = \psi(x^{1+\alpha}).$$

Będzie także

(9) $$y^{\frac{\beta}{\gamma}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

(10) $$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f[\varphi\{\psi(x^{1+\alpha})\}]}{f[\varphi\{\psi(x)\}]}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\frac{f[\varphi(z^{1+\delta})]}{f[\varphi(z)]}\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Podnosząc obie strony równania (9) do potęgi $\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\alpha}$, otrzymamy

$$y^{\frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\alpha}} = \left[\frac{f(u^{1+\gamma})}{f(u)}\right]^{\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\alpha}},$$

równanie takie same, jak (10). Wnioskujemy stąd, że

$$y^{\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\delta}{\alpha}} = y^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

W granicy będziemy mieli

$$y^{\frac{gy}{gu}\cdot\frac{gu}{gz}\cdot\frac{gz}{gx}} = y^{\frac{gy}{gx}},$$

więc będzie

$$\frac{gy}{gx} = \frac{gy}{gu}\cdot\frac{gu}{gz}\cdot\frac{gz}{gx}.$$

Widzimy, że prawidło wykładniczkowania funkcyi złożonej jest zupełnie podobne do prawidła różniczkowania i jest tak samo łatwe do ogólnego dowiedzenia dla wszelkich funkcyj złożonych, jak w rachunku różniczkowym.

Jako definicyę *wykładniczka rzędu 2 go* przyjmujemy związek

$$y^{g^2y} = \lim\left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^2})}{f(x^{1+\alpha})} : \frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)}\right]_{\alpha=0}. \tag{11}$$

Jeżeli obie strony powyższego równania podniesiemy do potęg $\frac{1}{\alpha^2}$, natenczas będzie

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim\left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^2})\,.\,f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0}. \tag{11a}$$

Chociaż α^2 dąży nieskończenie do zera, to jednakże druga strona napisanego równania nie znika, lecz zdąża zawsze do granicy oznaczonej, którą łatwo znaleść za pomocą znanych prawideł. Granicę wzmiankowaną będziemy oznaczali głoską U_2 i nazwiemy *funkcyałem wykładniczkowym rzędu 2-go.*

Tak więc

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = U_2.$$

Logarytmując, z ostatniego równania otrzymamy

$$\frac{g^2y}{gx^2} = \frac{\lg U_2}{\lg y}. \tag{12}$$

Widzimy, że *nadpochodna rzędu 2-go równa się logarytmowi funkcyału rzędu 2-go, podzielonemu przez logarytm zasady.*

Mnożąc obie strony równości (12) przez gx^2, będziemy mieli wykładniczek rzędu 2-go w kształcie

$$g^2y = \frac{\lg U_2}{\lg y} \cdot gx^2 .$$

Zastosujemy powyżej wyłożoną teoryę do funkcyj zasadniczych.

Dajmy m-tą *potęgę*

$$y = x^m .$$

Równanie (11a) będzie

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{x^{m(1+\alpha)^2} \cdot x^m}{x^{2m(1+\alpha)}}\right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^2}} = \lim x^{\frac{m\alpha^2}{\alpha^2}} ,$$

czyli

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = x^m = y.$$

Takim sposobem mamy

$$\frac{g^2y}{gx^2} = 1,$$

czyli

$$\frac{g^2(x^m)}{gx^2} = 1.$$

Dalej, niech będzie dany *logarytm*

$$y = \lg x .$$

Będziemy mieli podobnie, jak powyżej

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{\lg x^{(1+\alpha)^2} \cdot \lg x}{\{\lg x^{1+\alpha}\}^2}\right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^2}} .$$

Ponieważ łatwo zauważyć, że

$$\lim \frac{\lg (1+\alpha)^2 + 2 \lg \lg x - 2 \lg (1+\alpha) - 2 \lg \lg x}{\alpha^2}\Bigg|_{\alpha=0} = 0,$$

będzie więc

$$y^{\frac{g^2 y}{g x^2}} = 1;$$

stąd wypada

$$\frac{g^2 y}{g x^2} = 0,$$

czyli

$$\frac{g^2 (\lg x)}{g x^2} = 0.$$

Dajmy *funkcyę wykładniczą*

$$y = a^x .$$

Będziemy mieli

$$y^{\frac{g^2 y}{g x^2}} = \lim \left[\frac{a^{x^{(1+\alpha)^2}} \, . \, a^x}{\left(a^{x^{1+\alpha}}\right)^2}\right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^2}} = U_2.$$

Według znanego prawidła będzie

$$\lg U_2 = \lim \frac{\lg a^{x^{(1+\alpha)^2} - 2x^{1+\alpha} + x}}{\alpha^2}\Bigg|_{\alpha=0} = (x + x \lg x) \lg x \, . \lg a$$

czyli

$$\lg U_2 = (\lg x + \lg^2 x) \, . \lg a^x$$

i wskutek tego

$$U_2 = (a^x)^{\lg x + \lg^2 x} = y^{\lg x + \lg^2 x}.$$

Widoczna, że

$$\frac{g^2 y}{g x^2} = \lg x + \lg^2 x.$$

Tak więc mamy

$$\frac{g^2(a^x)}{gx^2} = \lg x + \lg^2 x .$$

Dajmy *funkcyę trygonometryczną* w postaci

$$y = \sin x .$$

Równanie (11a) będzie

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{\sin x^{(1+\alpha)^2} . \sin x}{(\sin x^{1+\alpha})^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0} = U_2 ,$$

Postępując podług wiadomego prawidła, będziemy mieli

$$\lg U_2 = \lim \left.\frac{\lg \sin x^{(1+\alpha)^2} + \lg \sin x - 2 \lg \sin x^{1+\alpha}}{\alpha^2}\right|_{\alpha=0}$$

czyli

$$\lg U_2 = \lim \left.\frac{[(1+\alpha)\, x^{(1+\alpha)^2} \operatorname{cotg} x^{(1+\alpha)^2} - x^{1+\alpha} \operatorname{cotg} x^{1+\alpha}] \lg x}{\alpha}\right|_{\alpha=0} ,$$

więc będzie

$$\lg U_2 = \left[- \frac{x^2 \lg x}{\sin^2 x} + x \lg x . \operatorname{cotg} x + x \operatorname{cotg} x\right] \lg x .$$

Wskutek tego łatwo wypada

$$\frac{g^2 (\sin x)}{gx^2} = \frac{x \lg x}{\sin^2 x \lg \sin x} \left[- x \lg x + \frac{1}{2} \lg x . \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 2x\right] .$$

Weźmy dalej

$$y = \cos x .$$

Będziemy mieli

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{\cos x^{(1+\alpha)^2} . \cos x}{(\cos x^{1+\alpha})^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0} = U_2 .$$

Postępując podobnie, jak poprzednio, piszemy

$$\lg U_2 = \lim \left.\frac{\lg \cos^{(1+\alpha)^2} + \lg \cos x - 2 \lg \cos x^{1+\alpha}}{\alpha^2}\right|_{\alpha=0}$$

skąd wypada

$$\lg U_2 = \lim \left.\frac{-\lg x \left[(1+\alpha)\, x^{(1+\alpha)^2} \,.\, \operatorname{tg} x^{(1+\alpha)^2} - x^{1+\alpha} \,.\, \operatorname{tg} x^{1+\alpha}\right]}{\alpha}\right|_{\alpha=0} .$$

Szukaną granicą będzie

$$\lg U_2 = -\frac{x^2 \lg^2 x}{\cos^2 x} - x \lg^2 x \,.\, \operatorname{tg} x - x \lg x \,.\, \operatorname{tg} x$$

i wskutek tego mamy

$$\frac{g^2 (\cos x)}{g x^2} = -\frac{x \lg x}{\cos^2 x \lg \cos x}\left[x \lg x + \frac{1}{2} \lg x \,.\, \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 2x\right] .$$

Dajmy

$$y = \operatorname{tg} x .$$

Równanie (11a) będzie

$$y^{\frac{g^2 y}{g x^2}} = \lim \left[\frac{\operatorname{tg} x^{(1+\alpha)^2} \,.\, \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x^{1+\alpha})^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0} = U_2 ;$$

dalej mamy

$$\lg U_2 = \lim \left.\frac{\lg \operatorname{tg} x^{(1+\alpha)^2} + \lg \operatorname{tg} x - 2 \lg \operatorname{tg} x^{1+\alpha}}{\alpha^2}\right|_{\alpha=0} ,$$

$$\lg U_2 = \lim \left[x^{(1+\alpha)^2} \,.\, (1+\alpha) \operatorname{cosec} 2x^{(1+\alpha)^2} - x^{1+\alpha} \operatorname{cosec} 2x^{1+\alpha}\right] \frac{\lg x}{2\alpha} .$$

Znalazłszy granicę, będziemy mieli z powyższego

$$\lg U_2 = (1 + \lg x - 2x \lg x \,.\, \operatorname{cotg} 2x) \frac{x \lg x \,.\, \operatorname{cosec} 2x}{2} .$$

Wskutek tego otrzymamy

$$\frac{g^2 (\operatorname{tg} x)}{gx^2} = (1 + \lg x - 2x \lg x \,.\, \operatorname{cotg} 2x) \frac{x \lg x \,.\, \operatorname{cosec} 2x}{2 \lg \operatorname{tg} x}.$$

Podobnie mając

$$y = \operatorname{cotg} x,$$

znajdziemy łatwo

$$\frac{g^2 \operatorname{cotg} x}{gx^2} = -(1 + \lg x - 2x \lg x \,.\, \operatorname{cotg} 2x) \frac{x \lg x \,.\, \operatorname{cosec} 2x}{2 \lg \operatorname{cotg} x}.$$

Taką samą, jak powyżej, drogą znaleść można nadpochodne rzędu 2-go wszystkich innych funkcyi zasadniczych, jako to: $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ i t. .

Dalej, weźmy *iloczyn* dwóch funkcyj

$$y = u \,.\, v,$$

gdzie

$$u = f(x), \quad v = \varphi(x).$$

Równania (11a) będą miały kształt

$$u^{\frac{g^2 u}{gx^2}} = \lim \left[\frac{f\left(x^{(1+\alpha)^2}\right) . f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2} \right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^2}},$$

$$v^{\frac{g^2 v}{gx^2}} = \lim \left[\frac{\varphi\left(x^{(1+\alpha)^2}\right) . \varphi(x)}{\{\varphi(x^{1+\alpha})\}^2} \right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^2}}.$$

Oprócz tego, mamy także dla danego iloczynu

$$y^{\frac{g^2 y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{f\left(x^{(1+\alpha)^2}\right) . \varphi\left(x^{(1+\alpha)^2}\right) . f(x) . \varphi(x)}{\{f(x^{1+\alpha}) . \varphi(x^{1+\alpha})\}^2} \right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^2}},$$

czyli

$$y^{\frac{g^2 y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{f\left(x^{(1+\alpha)^2}\right) . f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2} \right]^{\frac{1}{\alpha^2}} . \lim \left[\frac{\varphi\left(x^{(1+\alpha)^2}\right) . \varphi(x)}{\{\varphi(x^{1+\alpha})\}^2} \right]^{\frac{1}{\alpha^2}}.$$

Widzimy więc, że

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = u^{\frac{g^2u}{gx^2}} \cdot v^{\frac{g^2v}{gx^2}},$$

skąd przez logarytmowanie otrzymujemy

$$\frac{g^2y}{gx^2} \lg y = \frac{g^2u}{gx^2} \lg u + \frac{g^2v}{gx^2} \lg v.$$

Tym sposobem nadpochodna rzędu 2-go iloczynu będzie

$$\frac{g^2(uv)}{gx^2} = \frac{\lg u \dfrac{g^2u}{gx^2} + \lg v \dfrac{g^2v}{gx^2}}{\lg(uv)}.$$

Mnożąc powyższe równanie przez gx^2 otrzymamy wykładniczek

$$g^2(uv) = \frac{\lg u \cdot g^2u + \lg v \cdot g^2v}{\lg(uv)}.$$

Metoda dowodzenia w niczem nie ulegnie zmianie, jeżeli zamiast dwóch czynników weźmiemy trzy, cztery, lub więcej; podobnie będzie

$$g^2(u\,v\,w\ldots) = \frac{\lg u \cdot g^2u + \lg v \cdot g^2v + \lg w \cdot g^2w + \ldots}{\lg(u\,v\,w\ldots)}.$$

Uiech będzie dany *iloraz* dwóch funkcyj

$$y = \frac{u}{v},$$

gdzie

$$u = f(x), \quad v = \varphi(x).$$

Będziemy mieli podobnie, jak w przypadku poprzedzającym

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{\dfrac{f(x^{(1+\alpha)^2})}{\varphi(x^{(1+\alpha)^2})} \cdot \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}{\left\{\dfrac{f(x^{1+\alpha})}{\varphi(x^{(1+\alpha)})}\right\}^2}\right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^2}},$$

skąd wypada

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^2}) \cdot f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}} : \lim \left[\frac{\varphi(x^{(1+\alpha)^2}) \cdot \varphi(x)}{\{\varphi(x^{1+\alpha})\}^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}},$$

czyli

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = u^{\frac{g^2u}{gx^2}} : v^{\frac{g^2v}{gx^2}}.$$

Logarytmując ostatnie równanie, otrzymamy nadpochodną

$$\frac{g^2}{gx^2}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\lg u \, \frac{g^2u}{gx^2} - \lg v \, \frac{g^2v}{gx^2}}{\lg\left(\frac{u}{v}\right)},$$

oraz wykładniczek rzędu 2-go

$$g^2\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\lg u \,.\, g^2u - \lg v \,.\, g^2v}{\lg\left(\frac{u}{v}\right)}.$$

Nadpochodną rzędu 2-go *sumy algebraicznej* wyprowadzimy przy pomocy zasad rachunku różniczkowego.

Widzieliśmy, że

$$y^{\frac{g^2y}{gx^2}} = \lim \left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^2}) \cdot f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2}\right]^{\frac{1}{\alpha^2}}_{\alpha=0};$$

biorąc logarytmy po obu stronach, będziemy mieli

$$\frac{g^2y}{gx^2} \lg y = \lim \left.\frac{\lg f(x^{(1+\alpha)^2}) + \lg f(x) - 2 \lg f(x^{1+\alpha})}{\alpha^2}\right|_{\alpha=0}.$$

Druga strona powyższego jest wyrażeniem dwukrotnie nieoznaczonem; postępując podług prawideł, o których była mowa w rozdziale II, znajdziemy łatwo

$$\frac{g^2y}{gx^2} = \frac{x^2\lg^2 x.f(x).f''(x) + x\lg^2 x f(x)f'(x) + x\lg x f(x)f'(x) - x^2\lg^2 x[f'(x)]^2}{[f(x)]^2 \lg f(x)},$$

albo krócej

$$(13) \quad \frac{g^2y}{gx^2} = \frac{x^2(\lg^2 x)\, y \frac{d^2y}{dx^2} + x(\lg^2 x)\, y \frac{dy}{dx} + xy \lg x \frac{dy}{dx} - x^2 \lg^2 x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y^2 \lg y};$$

atoli wiemy, że

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \lg y}{x \lg x} \cdot \frac{gy}{gx} .$$

Uwzględniwszy ostatni związek, z poprzedzającego otrzymamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y \lg y \frac{g^2y}{gx^2} - y \lg y \lg x \frac{gy}{gx} - y \lg y \frac{gy}{gx} + y \lg^2 y \left(\frac{gy}{gx}\right)^2}{x^2 \lg^2 x} .$$

Jeżeli więc mamy daną *sumę algebraiczną*

$$y = y_1 + y_2 + \ldots ,$$

gdzie wszystkie ilości y_i są pewne funkcye zmiennej niezależnej, natenczas będzie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx_2} + \frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots$$

Wskutek tego będziemy również mieli:

$$y \lg y \frac{g^2y}{gx^2} - y \lg y \lg x \frac{gy}{gx} - y \lg y \frac{gy}{gx} + y \lg^2 y \left(\frac{gy}{gx}\right)^2$$

$$= y_1 \lg y_1 \frac{g^2y_1}{gx^2} - y_1 \lg y_1 \lg x \frac{gy_1}{gx} - y_1 \lg y_1 \frac{gy_1}{gx} + y_1 \lg^2 y_1 \left(\frac{gy_1}{gx}\right)^2$$

$$+ y_2 \lg y_2 \frac{g^2y_2}{gx^2} - y_2 \lg y_2 \lg x \frac{gy_2}{gx} - y_2 \lg y_2 \frac{gy_2}{gx} + y_2 \lg^2 y_2 \left(\frac{gy_2}{gx}\right)^2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

stąd otrzymać możemy $\frac{g^2(y_1 + y_2 + \ldots)}{gx^2}$, wyrugowawszy przedtem $\frac{g(y_1 + y_2 + \ldots)}{gx}$.

Jednak wzór ostateczny będzie dość złożony i wskutek tego ograniczymy się tylko przypadkiem dwóch składników.

Gdy suma ma postać najprostszą:

$$y = y_1 + y_2 ,$$

natenczas z poprzedzającego wzoru, po dokonaniu wszystkich uproszczeń, otrzymamy nadpochodną rzędu **2**-go danej sumy:

$$\frac{g^2(y_1+y_2)}{gx^2}$$

$$=\frac{(y^2{}_1+y_1y_2)\lg y_1\frac{g^2y_1}{gx^2}+(y^2{}_2+y_1y_2)\lg y_2\frac{g^2y_2}{gx^2}+y_1y_2\left(\lg y_1\frac{gy_1}{gx}-\lg y_2\frac{gy_2}{gx}\right)^2}{(y_1+y_2)^2\lg(y_1+y_2)}.$$

Jako określenie *nadpochodnej rzędu 3-go* mamy równość

$$y^{\frac{g^3y}{gx^3}}=\lim\left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^3}).f(x^{1+\alpha})}{\{f(x^{(1+\alpha)^2})\}^2}:\frac{f(x^{(1+\alpha)^2}).f(x)}{\{f(x^{1+\alpha})\}^2}\right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^3}},$$

czyli

$$y^{\frac{g^3y}{gx^3}}=\lim\left[\frac{f(x^{(1+\alpha)^3}).\{f(x^{1+\alpha})\}^3}{\{f(x^{(1+\alpha)^2})\}^3.f(x)}\right]_{\alpha=0}^{\frac{1}{\alpha^3}}=U_3.$$

Granicę, do której dąży druga strona powyższego równania, nazywamy *funkcyałem wykładniczkowym rzędu 3-go* i oznaczamy głoską U_3. Przechodząc do logarytmów, z ostatniego będziemy mieli

$$\frac{g^3y}{gx^3}=\frac{\lg U_3}{\lg y}.$$

Tak więc, *nadpochodna rzędu 3-go równa się logarytmowi funkcyału rzędu 3-go, podzielonemu przez logarytm zasady.*

Wykładniczek rzędu 3-go będzie

$$g^3y=\frac{\lg U_3}{\lg y}.gx^3.$$

Stosując metodę podobną, jaką wyłożyliśmy na stronicach poprzedzających dla nadpochodnych rzędu 1-go i 2-go, znajdziemy

$$\frac{g^3(x^m)}{gx^3}=1,$$

$$\frac{g^3(\lg x)}{gx^3}=0,$$

$$\frac{g^3(a^x)}{gx^3} = \lg x + 3 \lg^2 x + \lg^3 x,$$

i t. d.

Wogóle, jako definicyę *nadpochodnej rzędu n-go*, będziemy mieli równość :

$$y^{\frac{g^n y}{gx^n}} = \lim f(x^{(1+\alpha)^n}) \,.\, [f(x^{(1+\alpha)^{n-1}}]^{-n} \,.\, [f(x^{(1+\alpha)^{n-2}})]^{\frac{n(n-1)}{1.2}}$$

$$.\, [f(x^{(1+\alpha)^{n-3}})]^{-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}} \; \ldots . \; [f(x)]^{\pm 1} \,.$$

W ostatnim czynniku piszemy wykładnik ± 1, rozumiejąc przez to, że znak $+$ należy brać w przypadku n parzystego i znak $-$ bierzemy, gdy n liczba nieparzysta.

Granicę, do której dąży druga strona napisanej powyżej równości, nazywamy *funkcyałem wykładniczkowym rzędu n-go* i oznaczać będziemy głoską U_n. Takim sposobem mamy

$$\frac{g^n y}{gx^n} = \frac{\lg U_n}{\lg y} \,.$$

Nadpochodna rzędu n-go równa się logarytmowi funkcyału rzędu n-go, podzielonemu przez logarytm zasady.

Wykładniczkiem rzędu n-go będzie

$$g^n y = \frac{\lg U_n}{\lg y} \,.\, gx^n \,.$$

Gdy mamy dany *iloczyn*

$$y = uv,$$

gdzie

$$u = f(x) \quad \text{i} \quad v = \varphi(x),$$

natenczas na zasadzie przyjętej definicyi będzie

$$y^{\frac{g^n y}{gx^n}} = \lim f(x^{(1+\alpha)^n}) \,.\, \varphi(x^{(1+\alpha)^n}) \,.\, [f(x^{(1+\alpha)^{n-1}}) \,.\, \varphi(x^{(1+\alpha)^{n-1}})]^{-n}$$

$$.\, [f(x^{(1+\alpha)^{n-2}}) \,.\, \varphi(x^{(1+\alpha)^{n-2}})]^{\frac{n(n-1)}{1.2}} \; \ldots \; [f(x) \,.\, \varphi(x)]^{\pm 1} \;;$$

podobnie

$$u^{\frac{g^n y}{gx^n}} = \lim f\left(x^{(1+\alpha)^n}\right) . \left[f\left(x^{(1+\alpha)^{n-1}}\right)\right]^{-n} . \left[f\left(x^{(1+\alpha)^{n-2}}\right)\right]^{\frac{n(n-1)}{1.2}} \cdots \left[f(x)\right]^{\pm 1},$$

$$v^{\frac{g^n v}{gx^n}} = \lim \varphi\left(x^{(1+\alpha)^n}\right) . \left[\varphi\left(x^{(1+\alpha)^{n-1}}\right)\right]^{-n} . \left[\varphi\left(x^{(1+\alpha)^{n-2}}\right)\right]^{\frac{n(n-1)}{1.2}} \cdots \left[\varphi(x)\right]^{\pm 1}.$$

Z porównania trzech, wyżej napisanych, równości łatwo zauważyć, że

$$y^{\frac{g^n y}{gx^n}} = u^{\frac{g^n u}{gx^n}} . v^{\frac{g^n v}{gx^n}},$$

skąd wypada

$$\frac{g^n(uv)}{gx^n} = \frac{\frac{g^n u}{gx^n} \lg u + \frac{g^n v}{gx^n} . \lg v}{\lg (uv)}.$$

Jestto nadpochodna rzędu n-go iloczynu.

Sposób dowodzenia pozostaje zupełnie taki sam dla *ilorazu*

$$\frac{g^n\left(\frac{u}{v}\right)}{gx^n} = \frac{\frac{g^n u}{gx^n} \lg u - \frac{g^n v}{gx^n} \lg v}{\lg\left(\frac{u}{v}\right)}.$$

Mnożąc przez gx^n, otrzymamy z powyższych wzorów wykładniczki.

W szczególnym przypadku, gdy jeden czynnik iloczynu jest stałym

$$v = a,$$

natenczas będzie wzór prostszy

$$\frac{g^n(au)}{gx^n} = \frac{\frac{g^n u}{gx^n} . \lg u}{\lg (au)}.$$

W rozdziale IV wyprowadziliśmy wzór główny (11) w kształcie

$$\frac{\lg f\left(x^{(1+\Gamma x)^n}\right)}{\lg f(x)} \doteq 1 + n\,\Gamma f + \frac{n(n-1)}{1.2}\Gamma^2 f + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Gamma^3 f + \cdots$$
$$\cdots + \Gamma^n f,$$

gdzie głoską Γ oznaczyliśmy przyrostki wykładnicze skończone.

W rachunku nieskończenie małych zrobimy w powyższym wzorze zamiany widoczne:

$$\Gamma f \text{ przez } \frac{gf}{gx}\gamma x + \varepsilon_1, \qquad \Gamma^2 f \text{ przez } \frac{g^2 f}{gx^2}\gamma x^2 + \varepsilon_2,$$

$$\Gamma^3 f \text{ przez } \frac{g^3 f}{gx^3}\gamma x^3 + \varepsilon_3 \quad \text{i t. d.}$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ dążą do zer jednocześnie z γx.

Będziemy tedy mieli

$$\frac{\lg f\,(x^{(1+\gamma x)^n})}{\lg f\,(x)} = 1 + n\frac{gf}{gx}\gamma x + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{g^2 f}{gx^2}\gamma x^2$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,\frac{g^3 f}{gx^3}\gamma x^3 + \ldots$$

$$+ \left[n\varepsilon_1 + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\varepsilon_2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\varepsilon_3 + \ldots\right].$$

Dając w ostatnim wzorze

$$\gamma x = \frac{h}{n}, \quad n = \infty, \quad \text{wiedząc, że } \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n_{n=\infty} = e^h,$$

i zebrawszy nieograniczenie wielką liczbę składników nieskończenie małych ε_i w jeden wyraz R, otrzymamy wzór, przedstawiający zupełną analogię do twierdzenia Taylora

$$(14) \qquad \frac{\lg f\,(x^{e^h})}{\lg f\,(x)} = 1 + h\frac{gf}{gx} + \frac{h^2}{1\,.\,2}\,\frac{g^2 f}{gx^2} + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{g^3 f}{gx^3} + \ldots + R,$$

gdzie h może być albo ilością stałą lub też jakąkolwiek nową ilością zmienną. R oznacza tutaj resztę powyższego szeregu i może być albo zerem, albo wielkością skończoną, albo też ∞. Dla prawdziwości wzoru (14) koniecznem i wystarczającem jest, ażeby szereg był zbieżny, tudzież $R = 0$. Można jeszcze napisać wzór analogiczny z szeregiem Taylora, w postaci danej przez Maclaurina; należy tylko w (14) x zastąpić przez pewną ilość a, tudzież h przez x, będziemy wówczas mieli

$$\frac{\lg f(a^{e^x})}{\lg f(a)} = 1 + x\left(\frac{gf}{gx}\right)_a + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{g^2f}{gx^2}\right)_a$$

(15)

$$+ \frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{g^3f}{gx^3}\right)_a + \dots + R,$$

gdzie $\left(\frac{g^kf}{gx^k}\right)_a$ oznacza, że nasamprzód trzeba znaleść $\left(\frac{g^kf}{gx^k}\right)$ i potem dopiero zastąpić x przez a; bardzo dogodnem będzie, jeżeli weźmiemy $a=e$, rozumiejąc przez e zasadę logarytmów naturalnych.

Wypada nam tutaj powtórzyć to samo, co i powyżej, że dla prawdziwości wzoru (15) konieczną i wystarczającą cechą będzie zbieżność szeregu nieskończonego, oraz dążenie R do zera.

Widzimy, że rachunek wykładniczkowy wprowadza w analizę matematyczną szeregi potęgowe, odmienne od tych, które napotykamy w rachunku różniczkowym. Gdyby rachunek w pewnem danem zagadnieniu naprowadził nas na szereg zbieżny takiego kształtu, jak napisany po drugiej stronie (15), natenczas z zupełną słusznością możemy szereg zsumować, pisząc zamiast niego granicę w kształcie, który widzimy po pierwszej stronie (15).

Szereg (15) możemy także przedstawić w postaci iloczynu nieskończonego, wiedząc, że

$$\frac{g^kf}{gx^k} = \frac{\lg U_k}{\lg f(x)}$$

i przypuszczając, że stosujemy nasz wzór do funkcyj, dla których wiemy, iż reszta $R = 0$.

W omówionym przypadku wzór (15) można napisać tak:

$$\lg f(a^{e^x}) = 1 + x\lg(U_1)_a + \frac{x^2}{1.2}\lg(U_2)_a + \frac{x^3}{1.2.3}\lg(U_3)_a + \dots$$

czyli

(16) $$f(a^{e^x}) = e\,.\,(U_1)_a^{x}\,.\,(U_2)_a^{\frac{x^2}{1.2}}\,.\,(U_3)_a^{\frac{x^3}{1.2.3}}\,.\,.\,.$$

Przez U_k oznaczamy funkcyały wykładniczkowe rozmaitych rzędów; prawidło znalezienia wspomnianych funkcyałów jest nam wiadome dla wszelkich funkcyj f, na zasadzie teoryi, wyłożonej w niniejszym rozdziale. Jeżeli w funkcyale U_k na miejsce x napiszemy a, natenczas będziemy używać oznaczenia $(U_k)_a$.

Dalej, kładąc w (16)

$$e^x = z,$$

będziemy mieli

$$f(a^z) = e \,.\, (U_1)_a^{\lg z} \,.\, (U_2)_a^{\frac{1}{1.2}\lg^2 z} \,.\, (U_3)_a^{\frac{1}{1.2.3}\lg^3 z} \,\ldots$$

Nakoniec przyjmując w ostatnim związku

$$a^z = y\,,\quad a = e\,,$$

otrzymamy

$$f(y) = e \,.\, (U_1)_e^{\lg \lg y} \,.\, (U_2)_e^{\frac{1}{1.2}\lg^2 (\lg y)} \,.\, (U_3)_e^{\frac{1}{1.2.3}\lg^3 (\lg y)} \,\ldots$$

Jestto rozkład danej funkcyi ciągłej $f(y)$ na *iloczyn nieskończony*; ażeby wzór był prawdziwy trzeba koniecznie, by iloczyn ten był zbieżny.

Tak więc, rachunek wykładniczkowy prowadzi bezpośrednio do rozkładu wszelkiej funkcyi ciągłej jednej zmiennej niezależnej na iloczyn nieskończony, podobnie jak rachunek różniczkowy prowadzi do rozkładu danej funkcyi na sumę nieskończoną.

W celu znalezienia przybliżonej wartości reszty R będziemy rozumowali w następujący sposób. Dajmy na to, że wzór (14) jest prawdziwy i że tym sposobem możemy szereg rozciągnąć na upodobaną liczbę wyrazów; tak naprzykład, po za wyrazem $n+1$-ym napiszemy nową seryę $n+1$ wyrazów. W tym przypadku pod resztą R rozumieć możemy taką część szeregu (14)

$$\text{(16a)}\qquad \begin{aligned} R = &\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\,\frac{g^{n+1}f}{gx^{n+1}} + \frac{h^{n+2}}{1.2\ldots(n+1)(n+2)}\,\frac{g^{n+2}f}{gx^{n+2}} + \ldots \\ &+ \frac{h^{2n+1}}{1.2\ldots(2n-1)\,2n\,(2n+1)}\,\frac{g^{2n+1}f}{gx^{2n+1}}\,, \end{aligned}$$

która jest napisana po za wyrazem, zawierającym n-tą nadpochodną.

Znaleźć wartość R będzie równoznacznem z sumowaniem szeregu (16a) w założeniu, że liczba n rośnie nieograniczenie. Nie znając kształtu funkcyi f, możemy sumować szereg (16a) tylko z pewnem przybliżeniem. W tym celu napiszemy

$$\text{(16b)}\qquad \begin{aligned} R = &\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\left[\frac{g^{n+1}f}{gx^{n+1}} + \frac{h}{n+2}\,\frac{g^{n+2}f}{gx^{n+2}} + \ldots\right. \\ &\left. + \frac{h^{n+1}}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+1)}\,\frac{g^{2n+1}f}{gx^{2n+1}}\right]. \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że n przedstawia liczbę ograniczoną. Wiemy, że suma w nawiasie po prawej stronie równości (16b) nie ulegnie żadnej zgoła zmianie, gdy zamiast każdego ze składników weźmiemy pewną wartość przeciętną czyli średnią G, będzie wówczas

$$R = \frac{h^{n+1}}{1 \, . \, 2 \, . \, . \, . \, (n+1)} \, (n+1) \, G \, .$$

Z drugiej jednak strony, ponieważ szereg ma być prawdziwym dla wszelkich wartości n, widzimy, iż przy n, rosnącem nieograniczenie suma, napisana w nawiasach (16b), będzie zdążała do pierwszego tylko wyrazu $\frac{g^{n+1}f}{gx^{n+1}}$, wszystkie zaś pozostałe składniki przy skończonych wartościach dla h tudzież dla nadpochodnych $\frac{g^i f}{gx^i}$ będą się zmniejszały.

To nas naprowadza na wniosek, że średnia wartość, którą oznaczyliśmy przez G powinna być zależną od $n+1$-ej nadpochodnej dla pewnej pośredniej wartości zmiennej; wskutek tego domniemać możemy, żc

$$G = \frac{g^{n+1} f \, (x^{\theta h})}{g x^{n+1}} \, ,$$

gdzie $+1 > \theta > -1$. Takim sposobem w równości (16b) nadpochodne $\frac{g^{n+1}f}{gx^{n+1}}$, $\frac{g^{n+2}f}{gx^{n+2}}$, . . . mogą rosnąć lub maleć, wszystkie jednak wyrazy zastąpić możemy powyższą wartością pośrednią, nie wychodząc po za granice całej sumy, będzie tedy

$$R = \frac{h^{n+1}}{1 \, . \, 2 \ldots n} \; \frac{g^{n+1} f \, (x^{\theta h})}{g x^{n+1}} \, .$$

Dla objaśnienia weźmy, naprzykład, jakąkolwiek potęgę

$$f\,(y) = y^m \, .$$

Widzieliśmy, że w tym przypadku nadpochodne wszystkich rzędów były równe jednościom, czyli funkcyały były równe znowu tej samej danej potędze. Wskutek tego iloczyn nieskończony będzie miał kształt

$$y^m = e \, . \, e^{m \lg \lg y} \, . \, e^{\frac{m}{1 \, . \, 2} \lg^2 (\lg y)} \, . \, e^{\frac{m}{1 . 2 . 3} \lg^3 (\lg y)} \, . \, e^{\frac{m}{1.2.3.4} \lg^4 (\lg y)} \, . \, . \, . \, .$$

Dla logarytmu iloczyn nieskończony nie istnieje, gdyż w tym przypadku wzór (15) da nam

$$\frac{\lg \lg (a^{e^x})}{\lg \lg a} = 1 + \frac{x}{\lg \lg a},$$

co jest widoczną tożsamością.

Dla funkcyi wykładniczej

$$f(y) = e^y$$

łatwo zauważyć, że

$$(U_k)_e = e, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

na zasadzie wzoru (16), przyjmując $e^x = y$, $a = e$, będzie

$$e^y = e \,.\, e^{\lg y} \,.\, e^{\frac{1}{1.2}\lg^2 y} \,.\, e^{\frac{1}{1.2.3}\lg^3 y} \,.\, e^{\frac{1}{1.2.3.4}\lg^4 y} \ldots.$$

Z ostatniego związku widoczna

$$y = 1 + \lg y + \frac{1}{1.2}\lg^2 y + \frac{1}{1.2.3}\lg^3 y + \frac{1}{1.2.3.4}\lg^4 y + \cdots$$

Szereg ten jest dobrze znany i z rachunku różniczkowego, możnaby więc zrobić zarzut, że te szeregi, które spotykamy w rachunku wykładniczkowym, nic nowego nie przedstawiają i ostatecznie prowadzą do związków skądinąd już znanych. Sądzę, że zarzut taki byłby oparty na szczególnych przypadkach i byłby niesłuszny.

Wybraliśmy przykłady najprostsze i otrzymaliśmy związki znane z zasad rachunku różniczkowego, lecz gdyby funkcya była więcej złożona lub gdyby dana była funkcya trygonometryczna, albo kołowa, natenczas iloczyn nieskończony byłby w postaci bardziej złożonej i nieznanej z zasad rachunku różniczkowego. Ta zgodność wyników, otrzymanych powyżej zapomocą rachunku wykładniczkowego z tem, co wiadomem już było z zasad rachunku różniczkowego, przedstawia rzetelny sprawdzian, okazujący, że cała teorya i te określenia, które daliśmy w rachunku wykładniczkowym, są dobre i zupełnie zgodne z istotą rzeczy.

§ 2. *Funkcye wielu zmiennych niezależnych.*

Możemy z łatwością rozszerzyć całkowitą teoryę rachunku wykładniczkowego, stosując ją do funkcyi wielu zmiennych niezależnych.

Niech będzie dana funkcya dwóch zmiennych

$$z = f\,(x, y),$$

piszemy natenczas

$$z^{gz} = \lim \left. \frac{f\,(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})}{f\,(x, y)} \right|_{\alpha=0,\,\beta=0}, \tag{17}$$

oznaczając przez gz *wykładniczok zupełny*.

Oprócz tego, zgodnie z teoryą, wyłożoną w § 1 niniejszego rozdziału, ustanowimy następujące związki dla *wykładniczków częściowych*.

$$z^{\frac{gz}{gx} \cdot gx} = \lim \left. \frac{f\,(x^{1+\alpha}, y)}{f\,(x, y)} \right|_{\alpha=0}, \tag{18}$$

$$z^{\frac{gz}{gy} \cdot gy} = \lim \left. \frac{f\,(x, y^{1+\beta})}{f\,(x, y)} \right|_{\beta=0}. \tag{19}$$

Takim sposobem, $\frac{gz}{gx}$ oznaczać będzie nadpochodną, wziętą tylko względem x tak, jakby y było ilością stałą; $\frac{gz}{gy}$ będzie oznaczało nadpochodną względem samej zmiennej y. Przy pomocy wzmiankowanych oznaczeń wykładniczki częściowe piszemy w kształcie

$$\frac{gz}{gx} \cdot gx\,, \qquad \frac{gz}{gy} \cdot gy\,,$$

lub krócej

$$g_x z\,, \qquad g_y z\,.$$

Wykładniczek częściowy rzędu 2-go, wzięty nasamprzód względem ilości x, a potem względem y, otrzymamy z (18), kładąc po drugiej stronie $y^{1+\beta}$ zamiast y i następnie dzieląc tak otrzymane wyrażenie przez wartość pierwotną. Będzie więc

$$(20) \qquad z^{\frac{g^2 z}{gx\, gy} \cdot gx\, gy} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})}{f(y, x^{1+\beta})} : \frac{f(x^{1+\alpha}, y)}{f(x, y)} \right]_{\alpha=0,\, \beta=0}.$$

Zamiast wykładniczka częściowego w kształcie

$$\frac{g^2 z}{gx\, gy}\, gx\, gy,$$

można krócej pisać

$$g^2{}_{x,y}\, z\, .$$

Będziemy używali obydwóch sposobów pisania. Związek (20) można także otrzymać z (19), kładąc po drugiej stronie $x^{1+\alpha}$ zamiast x i następnie dzieląc przez wartość pierwotną, będzie wówczas

$$z^{\frac{g^2 z}{gy \cdot gx} \cdot gy \cdot gx} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})}{f(x^{1+\alpha}, y)} : \frac{f(x, y^{1+\beta})}{f(x, y)} \right]_{\alpha=0,\, \beta=0}.$$

Wypada więc z tego, że

$$g^2{}_{x,y}\, z = g^2{}_{y,x}\, z\, ,$$

stąd mamy widocznie

$$\frac{g^2 z}{gx\, gy} = \frac{g^2 z}{gy\, gx}\, .$$

Jestto prawo, dotyczące porządku kolejnych wykładniczkowań. Mnożąc odpowiedniemi stronami równości (18), (19) i (20), otrzymamy

$$z^{\frac{gz}{gx} gx + \frac{gz}{gy} gy + \frac{g^2 z}{gx\, gy} \cdot gx\, gy} = \lim \left. \frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})}{f(x, y)} \right|_{\alpha=0,\, \beta=0}.$$

Porównawszy ostatnie równanie z (17), będziemy mieli

$$z^{\frac{gz}{gx} gx + \frac{gz}{gy} gy + \frac{g^2 z}{gx\, gy} gx\, gy} = z^{gz}\, .$$

Ponieważ jednak wyraz $\frac{g^2 z}{gx\ gy}\ gx\ gy$ oznacza nieskończenie małą rzędu 2-go, więc z powyższego będzie niewątpliwie

$$gz = \frac{gz}{gx}\, gx + \frac{gz}{gy}\, gy \tag{21}$$

Wzór ten przedstawia wartość wykładniczka zupełnego rzędu 1-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych i, jak widzimy, ma tutaj miejsce zupełna analogia do wzoru różniczki zupełnej. .

Ten sam wzór moglibyśmy jeszcze otrzymać z wzoru (21, IV), pisząc

$$\Gamma f = \frac{\Gamma_x f}{\Gamma x} \,.\, \Gamma x + \frac{\Gamma_y f}{\Gamma y} \,.\, \Gamma y + \frac{\Gamma^2_{x,y} f}{\Gamma x \,.\, \Gamma y}\, \Gamma x \,.\, \Gamma y \,. \tag{21a}$$

Jeżeli przejdziemy do granic, natenczas z ostatniego będzie

$$gf = \frac{gf}{gx}\, gx + \frac{gf}{gy}\, gy \,.$$

Ostatni wyraz (21a) znika, jako nieskończenie mała rzędu wyższego.

Tą metodą wyprowadzaliśmy wzory różniczek zupełnych; tej samej drogi moglibyśmy trzymać się we wszystkich naszych rozumowaniach, dotyczących zasad rachunku wykładniczkowego.

Z teoryi, wyłożonej na poprzedzającej stronicy, wypadają następujące związki dla *nadpochodnych*:

$$z^{\frac{gz}{gx}} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y)}{f(x, y)} \right]^{\frac{1}{\alpha}}_{\alpha=0} ,$$

$$z^{\frac{gz}{gy}} = \lim \left[\frac{f(x, y^{1+\beta})}{f(x, y)} \right]^{\frac{1}{\beta}}_{\beta=0} ,$$

$$z^{\frac{g^2 z}{gx\ gy}} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}) \,.\, f(x, y)}{f(x^{1+\alpha}, y) \,.\, f(x, y^{1+\beta})} \right]^{\frac{1}{\alpha\beta}}_{\alpha=0\ \beta=0} .$$

W pierwszej granicy, z pomiędzy wyżej napisanych, uważamy y, jako ilość stałą; w drugiej granicy uważamy x, jako stałą, w trzeciej szukamy naasamprzód granicy względem α tak, jak gdyby β było ilością stałą, później dopiero szukamy granicy po raz drugi względem β. Postępowanie takie objaśnimy na przykładzie.

Niech będzie dane

$$z = \sin(x+y),$$

$$z^{\frac{g^2 z}{gx\, gy}} = \lim \left[\frac{\sin(x^{1+\alpha} + y^{1+\beta}) \,.\, \sin(x+y)}{\sin(x^{1+\alpha}+y) \,.\, \sin(x+y^{1+\beta})} \right]^{\frac{1}{\alpha\beta}}_{\alpha=0,\ \beta=0} = U\,.$$

Trzeba znaleźć granicę

$$\lg U$$

$$= \lim \frac{\lg \sin(x^{1+\alpha}+y^{1+\beta}) + \lg \sin(x+y) - \lg \sin(x^{1+\alpha}+y) - \lg \sin(x+y^{1+\beta})}{\alpha\beta}\Bigg|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\,.$$

Uważając β jako stałą, znajdziemy nasamprzód granicę względem α

$$\lg U = \lim \frac{x \lg x \operatorname{cotg}(x+y^{1+\beta}) - x \lg x \operatorname{cotg}(x+y)}{\beta}\Bigg|_{\beta=0}\,.$$

Granica względem β będzie

$$\lg U = -\frac{xy \lg x \lg y}{\sin^2(x+y)}\,,$$

wskutek tego mamy

$$z^{\frac{g^2 z}{gx\, gy}} = e^{-\frac{xy \lg x \lg y}{\sin^2(x+y)}}\,,$$

czyli

$$\frac{g^2 z}{gx\, gy} = -\frac{xy \lg x \lg y}{\sin^2(x+y) \,.\, \lg \sin(x+y)}\,.$$

Wykładniczek zupełny danej funkcyi będzie miał kształt

$$gz = \frac{x \lg x \operatorname{cotg}(x+y)}{\lg \sin(x+y)}\, gx + \frac{y \lg y \operatorname{cotg}(x+y)}{\lg \sin(x+y)}\, gy\,.$$

Ażeby wyprowadzić wzór *wykładniczka zupełnego rzędu 2-go* napiszemy następujące związki

$$(22) \qquad z^{g^2{}_{x,x}z} = \lim \left. \frac{f(x^{(1+\alpha)^2}, y) \, . \, f(x, y)}{\{f(x^{1+\alpha}, y)\}^2} \right|_{\alpha=0},$$

$$(23) \qquad z^{g^2{}_{x,y}z} = \lim \left. \frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}) \, f(x, y)}{f(x^{1+\alpha}, y) \, . \, f(x, y^{1+\beta})} \right|_{\alpha=0, \beta=0},$$

$$(24) \qquad z^{g^2{}_{y,y}z} = \lim \left. \frac{f(x, y^{(1+\beta)^2}) \, . \, f(x, y)}{\{f(x, y^{1+\beta})\}^2} \right|_{\beta=0}.$$

Następnie, kładąc w (22) $y^{1+\beta}$ zamiast y we wszystkich wyrazach po drugiej stronie znaku równości i dzieląc przez wartość pierwotną, otrzymamy wyrażenie, które według przyjętych określeń oznaczymy przez

$$z^{g^3{}_{x,x,y}z},$$

będzie więc

$$(25) \qquad z^{g^3{}_{x,x,y}z} = \lim \frac{f(x^{(1+\alpha)^2}, y^{1+\beta}) \, . \, f(x, y^{1+\beta}) \, . \, \{f(x^{1+\alpha}, y)\}^2}{\{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})\}^2 \, . \, f(x^{(1+\alpha)^2}, y) \, . \, f(x, y)}.$$

Podobnie z (24), pisząc $x^{1+\alpha}$ zamiast x we wszystkich wyrazach po drugiej stronie znaku równości i potem dzieląc przez wartość początkową, będziemy mieli

$$(26) \qquad z^{g^3{}_{y,y,x}z} = \lim \frac{f(x^{1+\alpha}, y^{(1+\beta)^2}) \, . \, f(x^{1+\alpha}, y) \, . \, \{f(x, y^{1+\beta})\}^2}{\{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})\}^2 \, . \, f(x, y^{(1+\beta)^2}) \, . \, f(x, y)}.$$

Nakoniec, kładąc w (25) $y^{1+\beta}$ zamiast y we wszystkich wyrazach z drugiej strony znaku równości i podzieliwszy potem przez wartość początkową, otrzymamy

$$z^{g^4{}_{x,x,y,y}z}$$

$$(27) \qquad = \lim \frac{f(x^{(1+\alpha)^2}, y^{(1+\beta)^2}) . f(x, y^{(1+\beta)^2}) . \{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})\}^4 . f(x^{(1+\alpha)^2}, y) . f(x, y)}{\{f(x^{1+\alpha}, y^{(1+\beta)^2})\}^2 . \{f(x^{(1+\alpha)^2}, y^{1+\beta})\}^2 . \{f(x, y^{1+\beta})\}^2 . \{f(x^{1+\alpha}, y)\}^2}.$$

Drugą stronę równania (27) możnaby było otrzymać z (26), pisząc we wszystkich wyrazach $x^{1+\alpha}$ zamiast x i dzieląc przez wartość pierwotną. Stąd łatwo wyprowadzamy wniosek, że

$$g^4_{x,x,y,y}\, z = g^4_{y,y,x,x}\, z$$

czyli pisząc szczegółowo, będzie

$$\frac{g^4 z}{gx^2\, gy^2}\, gx^2\, gy^2 = \frac{g^4 z}{gy^2\, gx^2}\, gy^2\, gx^2.$$

Stąd widoczna, że

$$\frac{g^4 z}{gx^2\, gy^2} = \frac{g^4 z}{gy^2\, gx^2}\,.$$

Tak samo, drugą stronę w (25) można otrzymać z (23) kładąc we wszystkich wyrazach $x^{1+\alpha}$ zamiast x i następnie dzieląc przez całą wartość początkową; wypada więc z tego

$$g^3_{x,x,y}\, z = g^3_{x,y,x}\, z\,,$$

czyli będzie także

$$\frac{g^3 z}{gx^2\, gy} = \frac{g^3 z}{gx\, gy\, gx}\,.$$

Podobnie, jeżeli w (23) we wszystkich wyrazach po drugiej stronie napiszemy $y^{1+\beta}$ na miejscu y i podzielimy przez wartość początkową, natenczas zauważymy, że

$$g^3_{x,y,y}\, z = g^3_{y,y,x}\, z\,.$$

Stąd wypływa

$$\frac{g^3 z}{gx\, gy^2} = \frac{g^3 z}{gy^2\,.\, gx}$$

i t. p.

Widzimy więc, że prawo o porządku kolejnych wykładniczkowań zgadza się zupełnie z odpowiednim prawem symbolów, które mieliśmy w rachunku różniczkowym. Jednakże pamiętać trzeba bacznie, że znaczenie symbolów g jest całkiem inne, aniżeli d w rachunku różniczkowym, oraz, że nie może mieć miejsca prawo

$$\frac{g^k}{gy^k}\left(\frac{g^i f}{gx^i}\right) = \frac{g^{k+i} f}{gx^i\, gy^k},$$

którce jest zawsze prawdziwem dla symbolów d, w rachunku różniczkowym.

Podniósłszy do kwadratów równania (23), (25) i (26) i dodawszy otrzymane wypadki do odpowiednich stron równań (22), (24) i (27), spostrzeżemy łatwo, że

$$z^{g^2{}_{x,x}z + 2g^3{}_{x,y}z + g^2{}_{y,y}z + 2g^3{}_{x,x,y}z + 2g^3{}_{y,y,x}z + g^4{}_{x,x,y,y}z}$$
$$= \lim \frac{f\,(x^{(1+\alpha)^2}, y^{(1+\beta)^2})\,.\,f\,(x, y)}{\{f\,(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})\}^2}\Bigg|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}.$$

Jeżeli przyjmiemy, jako definicyę *wykładniczka zupełnego* rzędu 2-go, związek:

$$z^{g^2 z} = \lim \frac{f\,(x^{(1+\alpha)^2}, y^{(1+\beta)^2})\,.\,f\,(x, y)}{\{f\,(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta})\}^2}\Bigg|_{\alpha=0,\ \beta=0},$$

natenczas z porównania dwóch ostatnich związków wypadnie

$$g^2 z = g^2{}_{x,x}\, z + 2g^2{}_{x,y}\, z + g^2{}_{y,y}\, z\,;$$

nieskończenie małe rzędu wyższego ponad 2-gi muszą być opuszczane, zgodnie z teoryą ilości nieskończenie małych, wyłożoną na początku rozdziału II.

Pisząc bardziej szczegółowo, z ostatniego otrzymamy

$$g^2 z = \frac{g^2 z}{gx^2}\cdot gx^2 + 2\,\frac{g^2 z}{gx\, gy}\cdot gx\,.\,gy + \frac{g^2 z}{gy^2}\cdot gy^2. \tag{28}$$

Jestto wartość wykładniczka zupełnego rzędu 2-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych. Taki sam wzór, jak powyższy, można otrzymać wprost z (28, IV), przypuszczając, że głoski Γ oznaczają nieskończenie małe i przechodząc do granic, będzie wówczas widocznie

$$g^2 f = g^2{}_{x,x} f + 2g^2{}_{x,y} f + g^2{}_{y,y} f\,.$$

Podobnym sposobem, z wzoru (29, IV), przeszedłszy do granic, będziemy mieli

$$g^3 f = g^3{}_{x^{(3)}}\, f + 3g^3{}_{x^{(2)},y} f + 3g^3{}_{x,y^{(2)}}\, f + g^3{}_{y^{(3)}}\, f,$$

lub bardziej szczegółowo

$$(29)\qquad g^3f = \frac{g^3 f}{gx^3} \cdot gx^3 + 3\,\frac{g^3 f}{gx^2 \cdot gy}\, gx^2 gy + 3\,\frac{g^3 f}{gx\, gy^2}\, gx\, gy^2 + \frac{g^3 f}{gy^3}\, gy^3.$$

Wzór powyższy przedstawia wartość wykładniczka zupełnego rzędu 3-go funkcyi dwóch zmiennych niezależnych. Wyprowadzenie wzorów, odpowiadających wykładniczkom zupełnym rzędów wyższych, nie przedstawia żadnych trudności.

W szczególnym przypadku, gdy będzie jedna zmienna niezależna, związana układem równań:

$$z = f(x, y),$$

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

natenczas wzory wykładniczków zupełnych przechodzą we wzory nadpochodnych za pomocą dzielenia przez wykładniczek zmiennej niezależnej.

W rzeczy samej, z wzoru (21), który wyprowadziliśmy w rozdziale niniejszym, będziemy mieli w przypadku jednej zmiennej niezależnej

$$\frac{gz}{gt} = \frac{gz}{gx} \cdot \frac{gx}{gt} + \frac{gz}{gy} \cdot \frac{gy}{gt}.$$

Równanie to otrzymaliśmy z (21), dzieląc wszystkie wyrazy przez gt, stosunki nieskończenie małych $\frac{gz}{gx}$, $\frac{gz}{gy}$, $\frac{gz}{gt}$ są ilości skończone.

Właściwie związek ostatni pisać należy tak

$$(30)\qquad \frac{gz}{gt} = \left(\frac{gz}{gx}\right) \cdot \frac{gx}{gt} + \left(\frac{gz}{gy}\right) \cdot \frac{gy}{gt},$$

gdzie $\left(\frac{gz}{gx}\right)$ oznacza nadpochodną, wziętą tak, jak gdyby y było ilością stałą i podobnie $\left(\frac{gz}{gy}\right)$ oznacza nadpochodną, wziętą tylko względem y tak, jakby x było stałą. Dla odróżnienia od rzeczywistych nadpochodnych można pisać powyższe w nawiasach, chociaż nie jest to rzeczą konieczną.

W rozdziale IV wyprowadziliśmy wzór (17), który możemy napisać w kształcie:

$$\frac{\lg f\left(x^{(1+\gamma x)^n}, y^{(1+\gamma y)^n}\right)}{\lg f(x, y)} = 1 + n\left(\frac{\gamma f}{\gamma x} \cdot \gamma x + \frac{\gamma f}{\gamma y}\gamma y + \frac{\gamma^2 f}{\gamma x \cdot \gamma y} \cdot \gamma x\, \gamma y\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{\gamma^2 f}{\gamma x^2}\gamma x^2 + 2\frac{\gamma^2 f}{\gamma x \cdot \gamma y} \cdot \gamma x \cdot \gamma y + \frac{\gamma^2 f}{\gamma y^2}\gamma y^2 + 2\frac{\gamma^3 f}{\gamma x^2 \cdot \gamma y} \cdot \gamma x^2 \cdot \gamma y\right.$$

$$\left. + 2\frac{\gamma^3 f}{\gamma x \cdot \gamma y^2} \cdot \gamma x \cdot \gamma y^2 + \frac{\gamma^4 f}{\gamma x^2 \cdot \gamma y^2}\gamma x^2 \cdot \gamma y^2\right) + \ldots,$$

gdzie głoski γ oznaczają ilości nieskończenie małe.

Przypuszczając, że

$$n \cdot \gamma x = h, \quad n \cdot \gamma y = k,$$

$$n = \infty,$$

i wiedząc, że

$$\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n_{n=\infty} = e^h, \text{ tudzież } \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n_{n=\infty} = e^k,$$

$$\frac{\gamma f}{\gamma x} = \frac{gf}{gx} + \varepsilon_1, \quad \frac{\gamma f}{\gamma y} = \frac{gf}{gy} + \varepsilon_2, \quad \frac{\gamma^2 f}{\gamma x\, \gamma y} = \frac{g^2 f}{gx\, gy} + \varepsilon_3, \text{ i t. } d.$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ oznaczają nieskończenie małe, z poprzedzającego szeregu łatwo otrzymamy w granicy:

$$\frac{\lg f(x^{e^h}, y^{e^k})}{\lg f(x, y)}$$

$$= 1 + \left(h \cdot \frac{gf}{gx} + k \cdot \frac{gf}{gy}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(h^2 \cdot \frac{g^2 f}{gx^2} + 2hk \cdot \frac{g^2 f}{gx\, gy} + k^2 \cdot \frac{g^2 f}{gy^2}\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + R.$$

Wzór ten wyraża związek pomiędzy samemi wielkościami skończonemi i z powodu tego po przejściu do granic ilości nieskończenie małe w nieograniczonej liczbie składników oznaczyliśmy przez resztę R, która może być albo zerem, albo wielkością skończoną, albo też równą ∞.

Wszystkie wyrazy ostatniego szeregu po kolei pisać łatwo, gdyż prawo tworzenia ich jest zupełnie takie same, jak w szeregu Taylora dla funkcyi dwóch zmiennych. Wskutek tego, symboliczna postać szeregu będzie podobna do tej, jaką ma szereg Taylora

$$\frac{\lg f(x^{e^h}, y^{e^k})}{\lg f(x, y)}$$

$$= 1 + \left(h\frac{gf}{gx} + k\frac{gf}{gy}\right) + \frac{1}{1.2}\left(h\frac{gf}{gx} + k\frac{gf}{gy}\right)^{(2)} + \frac{1}{1.2.3}\left(h\frac{gf}{gx} + k\frac{gf}{gy}\right)^{(3)}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + R.$$

Dla prawdziwości tego wzoru koniecznem i wystarczającem będzie, gdy napisany szereg jest zbieżnym, oraz gdy R zdąża do zera nieograniczenie.

Widzimy, że rachunek wykładniczkowy dla funkcyj dwóch zmiennych niezależnych wprowadza szeregi nioskończone, należące do typu innego, aniżeli w rachunku różniczkowym. Jednakże postać zewnętrzna szeregów w obu rachunkach pozostaje podobną. W napisanym wyżej wzorze możemy zrobić zamiany głosek h na x, k na y i odwrotnie, będzie wówczas:

$$\frac{\lg f(h^{e^x}, k^{e^y})}{\lg f(h, k)} = 1 + \left[x\left(\frac{gf}{gx}\right)_h + y\left(\frac{gf}{gy}\right)_k\right]$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left[x\left(\frac{gf}{gx}\right)_h + y\left(\frac{gf}{gy}\right)_k\right]^{(2)} + \frac{1}{1.2.3}\left[x\left(\frac{gf}{gx}\right)_h + y\left(\frac{gf}{gy}\right)_k\right]^{(3)} + \ldots + R.$$

Jestto zmieniona postać poprzedniego szeregu: ilości h i k oznaczają pewne stałe, x i y zmienne; $\left(\frac{gf}{gx}\right)_h$, $\left(\frac{gf}{gy}\right)_k$ znaczy to, że nasamprzód trzeba znaleść nadpochodne $\frac{gf}{gx}$, tudzież $\frac{gf}{gy}$, a dopiero potem podstawić h na miejsce x, oraz k na miejsce y.

Podobnie, jak dla funkcyi jednej zmiennej niezależnej, moglibyśmy napisać ostatni szereg w postaci iloczynu nieskończonego; rzecz tę, jako mniej ważną i łatwą do wykonania, w wykładzie niniejszym pomijamy.

Przejdziemy teraz do funkcyj trzech zmiennych niezależnych.

Niech będzie dana funkcya

$$u = f(x, y, z).$$

Jako definicyę wykładniczka zupełnego rzędu 1-go przyjmujemy związek następujący:

$$u^{gu} = \lim \frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})}{f(x, y, z)}\Bigg|_{\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0}. \tag{31}$$

Oprócz tego, zgodnie z całą teoryą, na poprzedzających stronicach wyłożoną, będziemy mieli dla wykładniczków częściowych rzędu 1-go:

$$(32)\qquad u^{\frac{gu}{gx}gx} = \lim \left.\frac{f(x^{1+\alpha}, y, z)}{f(x, y, z)}\right|_{\alpha=0},$$

$$(33)\qquad u^{\frac{gu}{gy}gy} = \lim \left.\frac{f(x, y^{1+\beta}, z)}{f(x, y, z)}\right|_{\beta=0},$$

$$(34)\qquad u^{\frac{gu}{gz}gz} = \lim \left.\frac{f(x, y, z^{1+\gamma})}{f(x, y, z)}\right|_{\gamma=0},$$

oraz dla wykładniczków częściowych rzędu 2-go będzie:

$$(35)\qquad u^{\frac{g^2u}{gx\,gy}gx\,gy} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z)}{f(x, y^{1+\beta}, z)} : \frac{f(x^{1+\alpha}, y, z)}{f(x, y, z)}\right]_{\alpha=0,\ \beta=0},$$

$$(36)\qquad u^{\frac{g^2u}{gx\,gz}gx\,gz} = \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y, z^{1+\gamma})}{f(x, y, z^{1+\gamma})} : \frac{f(x^{1+\alpha}, y, z)}{f(x, y, z)}\right]_{\alpha=0,\ \gamma=0},$$

$$(37)\qquad u^{\frac{g^2u}{gygz}gy\,gz} = \lim \left[\frac{f(x, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})}{f(x, y, z^{1+\gamma})} : \frac{f(x, y^{1+\beta}, z)}{f(x, y, z)}\right]_{\beta=0,\ \gamma=0}.$$

Z powyższych równań wypadają takie związki dla nadpochodnych:

$$(38)\qquad \begin{cases} u^{\frac{g^2u}{gx\,gy}} = \lim \left[\dfrac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z)\,.\,f(x, y, z)}{f(x, y^{1+\beta}, z)\,.\,f(x^{1+\alpha}, y, z)}\right]^{\frac{1}{\alpha\beta}}_{\alpha=0,\ \beta=0}, \\[2ex] u^{\frac{g^2u}{gx\,gz}} = \lim \left[\dfrac{f(x^{1+\alpha}, y, z^{1+\gamma})\,.\,f(x, y, z)}{f(x, y, z^{1+\gamma})\,.\,f(x^{1+\alpha}, y, z)}\right]^{\frac{1}{\alpha\gamma}}_{\alpha=0,\ \gamma=0}, \\[2ex] u^{\frac{g^2u}{gy\,gz}} = \lim \left[\dfrac{f(x, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})\,.\,f(x, y, z)}{f(x, y, z^{1+\gamma})\,.\,f(x, y^{1+\beta}, z)}\right]^{\frac{1}{\beta\gamma}}_{\beta=0,\ \gamma=0}, \end{cases}$$

Z symetrycznego kształtu wyżej napisanych związków, jako też ze sposobów tworzenia się, łatwo zauważyć, że

$$\frac{g^2 u}{gx\, gy} = \frac{g^2 u}{gy\, gx}, \quad \frac{g^2 u}{gx\, gz} = \frac{g^2 u}{gz\, gx}, \quad \frac{g^2 u}{gy\, gz} = \frac{g^2 u}{gz\, gy}.$$

Jakim sposobem znajdują się wartości granic (38), o tem mówiliśmy już szczegółowo, mając funkcye dwóch zmiennych niezależnych. Sposób postępowania był objaśniony na przykładzie; w przypadku trzech zmiennych niezależnych metoda pozostanie bez zmiany.

Dalej, dla wykładniczka częściowego rzędu 3-go mamy

$$(39) \qquad u^{\frac{g^3 u}{gx\, gy\, gz}\, gx\, gy\, gz}$$

$$= \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma}) \,.\, f(x, y, z^{1+\gamma})}{f(x, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma}) \,.\, f(x^{1+\alpha}, y, z^{1+\gamma})} : \frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z) \,.\, f(x, y, z)}{f(x, y^{1+\beta}, z) \,.\, f(x^{1+\alpha}, y, z)} \right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0}}.$$

Drugą stronę powyższego otrzymaliśmy z (35), kładąc we wszystkich wyrazach $z^{1+\gamma}$ zamiast z i następnie dzieląc przez wartość początkową całego ułamku.

Dla nadpochodnej rzędu 3-go z równania (39) otrzymamy

$$u^{\frac{g^3 u}{gx\, gy\, gz}}$$

$$= \lim \left[\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma}) \,.\, f(x, y, z^{1+\gamma}) \,.\, f(x, y^{1+\beta}, z)\, f(x^{1+\alpha}, y, z)}{f(x, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma}) \,.\, f(x^{1+\alpha}, y, z^{1+\gamma}) \,.\, f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z) \,.\, f(x, y, z)} \right]^{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0}}.$$

Z symetrycznego kształtu ostatniego równania łatwo wywnioskować, że

$$\frac{g^3 u}{gx\, gy\, gz} = \frac{g^3 u}{gy\, gx\, gz} = \frac{g^3 u}{gy\, gz\, gx} = \frac{g^3 u}{gz\, gx\, gy} = \text{etc.}$$

Ażeby znaleźć wartość granicy, która odpowiada nadpochodnej $\frac{g^3 u}{gx\, gy\, gz}$, należy nasamprzód szukać granicy względem α tak, jakby β i γ były ilości stałe; następnie szukać trzeba granicy, po raz drugi, względem β, uważając jeszcze γ za stałą, nakoniec po raz trzeci znajdujemy granicę względem γ. Postępowanie takie w praktyce nie nasuwa żadnych trudności.

Mnożąc odpowiedniemi stronami równania (32), (33), (34), (35), (36), (37) i (39), będziemy mieli następujący związek

$$u^{\frac{gu}{gx}gx+\frac{gu}{gy}gy+\frac{gu}{gz}gz+\frac{g^2u}{gx\,gy}gx\,gy+\frac{g^2u}{gx\,gz}gx\,gz+\frac{g^2u}{gy\,gz}gy\,gz+\frac{g^3u}{gx\,gy\,gz}gx\,gy\,gz}$$

$$=\lim\frac{f(x^{1+\alpha}, y^{1+\beta}, z^{1+\gamma})}{f(x, y, z)}.$$

Porównawszy ostatnie równanie z (31) i uwzględniając nieskończenie małe jednakowego rzędu, widzimy, że

$$gu=\frac{gu}{gx}gx+\frac{gu}{gy}gy+\frac{gu}{gz}gz. \tag{40}$$

Nieskończenie małe rzędu wyższego ponad 1-szy opuszczamy.

Jestto wartość wykładniczka zupełnego rzędu 1-go funkcyi trzech zmiennych niezależnych. Ten sam wzór można także otrzymać wprost z (41, IV), przechodząc do granic, będzie w tym przypadku

$$gF=g_x F+g_y F+g_z F,$$

lub, pisząc bardziej szczegółowo, będziemy mieli

$$gF=\frac{gF}{gx}gx+\frac{gF}{gy}gy+\frac{gF}{gz}gz.$$

Wzór ten przedstawia zupełnie to samo, co wzór (40), otrzymaliśmy go jednak z odpowiedniego wzoru teoryi przyrostków wykładniczych, przy pomocy granic.

Podobnie, z wzoru (42, IV) w granicy otrzymamy niewątpliwie

$$g^2F=g^2_{x(2)}F+2g^2_{x,y}F+g^2_{y(2)}F+2g^2_{x,z}F+2g^2_{y,z}F+g^2_{z(2)}F,$$

lub bardziej szczegółowo

$$\begin{aligned} g^2F=&\frac{g^2F}{gx^2}gx^2+2\frac{g^2F}{gx\,gy}gx\,gy+\frac{g^2F}{gy^2}gy^2\\ &+2\frac{g^2F}{gx\,gz}gx\,gz+2\frac{g^2F}{gy\,gz}gy\,gz+\frac{g^2F}{gz^2}gz^2. \end{aligned} \tag{41}$$

Tym sposobem otrzymaliśmy wartość wykładniczka zupełnego rzędu 2-go funkcyi trzech zmiennych niezależnych. Wykładniczki zupełne rzędów wyższych mają postać więcej zawiłą i przedstawiają zupełną analogię do odpowiednich wzorów różniczek, ze zmianą symbolów d na g.

Jeżeli będzie jedna tylko zmienna niezależna t

$$u = F(x, y, z),$$

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

natenczas wszystkie wyrazy równania (40) będziemy mogli podzielić przez γt

$$\frac{\gamma u}{\gamma t} = \frac{\gamma u}{\gamma x}\,\frac{\gamma x}{\gamma t} + \frac{\gamma u}{\gamma y}\,\frac{\gamma y}{\gamma t} + \frac{\gamma u}{\gamma z}\,\frac{\gamma z}{\gamma t}.$$

W tym szczególnym przypadku wzór powyższy wyraża związek pomiędzy samemi ilościami skończonemi i może być napisany tak:

$$\frac{\gamma u}{\gamma t} = \left(\frac{\gamma u}{\gamma x}\right).\frac{\gamma x}{\gamma t} + \left(\frac{\gamma u}{\gamma y}\right).\frac{\gamma y}{\gamma t} + \left(\frac{\gamma u}{\gamma z}\right).\frac{\gamma z}{\gamma t}.$$

Dla odróżnienia od rzeczywistych nadpochodnych piszemy powyższe w nawiasach, pamiętając, że w tym przypadku mamy tylko jednę zmienną niezależną, pod pozorem trzech zmiennych.

Dalej, wzór (33, IV) możemy napisać w kształcie

$$\frac{\lg F\left(x^{(1+\gamma x)^n},\, y^{(1+\gamma y)^n},\, z^{(1+\gamma z)^n}\right)}{\lg F(x, y, z)}$$

$$= 1 + n\left(\frac{\gamma F}{\gamma x}\,\gamma x + \frac{\gamma F}{\gamma y}\,\gamma y + \frac{\gamma F}{\gamma z}\,\gamma z + \frac{\gamma^2 F}{\gamma x\,\gamma y}\,\gamma x\,\gamma y + \ldots\right)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{\gamma^2 F}{\gamma x^2}\,\gamma x^2 + 2\,\frac{\gamma^2 F}{\gamma x\,\gamma y}\,\gamma x\,\gamma y + \frac{\gamma^2 F}{\gamma y^2}\,\gamma y^2 + 2\,\frac{\gamma^2 F}{\gamma x\,\gamma z}\,\gamma x\,\gamma z\right.$$

$$\left. + 2\,\frac{\gamma^2 F}{\gamma y\,\gamma z}\,\gamma y\,\gamma z + \frac{\gamma^2 F}{\gamma z^2}\,\gamma z^2 + \ldots\right) + \ldots$$

Zakładamy następnie:

$$n\,.\,\gamma x = h, \quad n\,.\,\gamma y = k, \quad n\,.\,\gamma z = l,$$

$$n = \infty; \quad \gamma x, \gamma y, \gamma z \text{ są ilości nieskończenie małe,}$$

dalej wiemy, że

$$\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n_{n=\infty} = e^h, \quad \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n_{n=\infty} = e^k, \quad \left(1 + \frac{l}{n}\right)^n_{n=\infty} = e^l.$$

$$\frac{\gamma F}{\gamma x} = \frac{gF}{gx} + \varepsilon_1, \quad \frac{\gamma F}{\gamma y} = \frac{gF}{gy} + \varepsilon_2, \quad \frac{\gamma F}{\gamma z} = \frac{gF}{gz} + \varepsilon_3 \quad \text{i t. d.}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ dążą do zer.

Wskutek tego, gdy przejdziemy do granic, z ostatniego wzoru wypadnie

$$\frac{\lg F(x^{e^h}, y^{e^k}, z^{e^l})}{\lg F(x, y, z)}$$

$$= 1 + \left(h\frac{gF}{gx} + k\frac{gF}{gy} + l\frac{gF}{gz}\right) + \frac{1}{1.2}\left(h^2\frac{g^2F}{gx^2} + 2hk\frac{g^2F}{gx\,gy}\right.$$

$$\left. + k^2\frac{g^2F}{gy^2} + 2hl\frac{g^2F}{gx\,gz} + 2kl\frac{g^2F}{gy\,gz} + l^2\frac{g^2F}{gz^2}\right) + \ldots + R.$$

Nieskończenie małe w nieograniczonej liczbie zebrane są w jeden wyraz R, oznaczający resztę.

Postać symboliczna wyżej napisanego szeregu będzie taka:

$$\frac{\lg F(x^{e^h}, y^{e^k}, z^{e^l})}{\lg F(x, y, z)}$$

$$= 1 + \left(h\frac{gF}{gx} + k\frac{gF}{gy} + l\frac{gF}{gz}\right) + \frac{1}{1.2}\left(h\frac{gF}{gx} + k\frac{gF}{gy} + l\frac{gF}{gz}\right)^{(2)}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(h\frac{gF}{gx} + k\frac{gF}{gy} + l\frac{gF}{gz}\right)^{(3)} + \ldots + R.$$

Jeżeli zrobimy zamianę głosek h na x i odwrotnie, k na y i odwrotnie, tudzież l na z i naodwrót, natenczas otrzymamy nową postać szeregu:

$$\frac{\lg F(h^{e^x}, k^{e^y}, l^{e^z})}{\lg F(h, k, l)}$$

$$= 1 + \left[x\left(\frac{gF}{gx}\right)_h + y\left(\frac{gF}{gy}\right)_k + z\left(\frac{gF}{gz}\right)_l\right] + \frac{1}{1.2}\left[x\left(\frac{gF}{gx}\right)_h + y\left(\frac{gF}{gy}\right)_k + z\left(\frac{gF}{gz}\right)_l\right]^{(2)}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\left[x\left(\frac{gF}{gx}\right)_h + y\left(\frac{gF}{gy}\right)_k + z\left(\frac{gF}{gz}\right)_l\right]^{(3)} + \ldots + R.$$

x, y, z oznaczają wielkości zmienne, h, k, l pewne stałe.

§ 3. *Objaśnienie geometryczne nadpochodnej.*

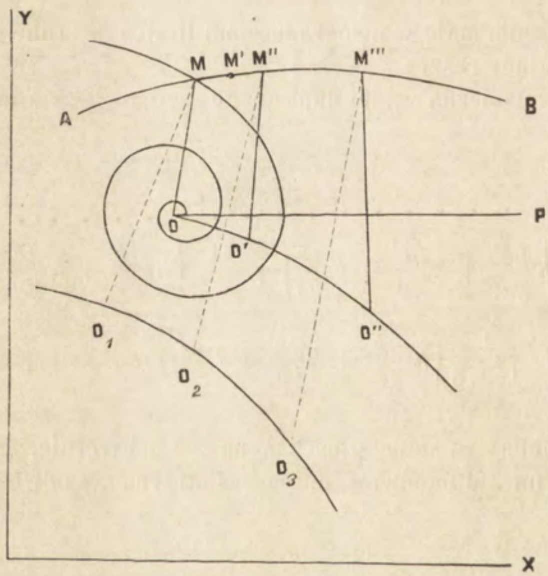
Rachunek wykładniczkowy przedstawia zmienność innego rodzaju, aniżeli rachunek różniczkowy. Wiemy, że równanie

$$y = f(x) \quad \text{lub} \quad x = \varphi(y) \tag{1}$$

geometrycznie wyobraża krzywą, której rzędną jest y, a odciętą x. Dajmy na to, że krzywa powyższa jest wykreślona na figurze w kształcie linii AB i niech będzie punkt $M(x, y)$ wzięty na krzywej AB.

Oznaczmy jeszcze drugi punkt M' nieskończenie bliski względem M.

Dla punktu M' współrzędne x i y ulegną pewnej zmianie czyli otrzymają odpowiednie przyrostki Δx i Δy.



Jednak zamiast zwiększać y o przyrostek Δy, możemy y mnożyć przez y^β; tak samo zamiast nadawania przyrostka Δx, można pomnożyć x przez x^α, byleby tylko α i β były ilości nieskończenie małe, znikające razem z Δx i Δy.

Takim sposobem zmienność y przedstawi równanie

$$y^\beta = \frac{f(x^{1+\alpha})}{f(x)},$$

oraz zmienność wielkości x wyrazi się równaniem

$$x^{\alpha} = \frac{\varphi\,(y^{1+\beta})}{\varphi\,(y)}\,.$$

Równania powyższe możemy także pisać w kształcie

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left[\frac{f\,(x^{1+\alpha})}{f\,(x)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

tudzież (2)

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}} = \left[\frac{\varphi\,(y^{1+\beta})}{\varphi\,(y)}\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Są to dwa odmienne stany jednego i tego samego równania. Oba otrzymać możemy z danego związku (1); wskutek tego możemy rozważać tylko pierwsze z równań (2), pisząc krócej

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} = U$$

lub

(3) $$e^{\frac{\beta}{\alpha}\,.\,\lg y} = U\,.$$

Równanie ostatnie jest szczególnym przypadkiem równia ogólnego

(4) $$e^{\omega \lg y} = R,$$

w którem ω i R są ilości zmienne, a $\lg y$ pewien stały parametr. Wiadomo, że równanie (4) przedstawia *spiralnę logarytmową* w spółrzędnych biegunowych; ω jest wielkość kąta czyli łuk, zaś R jestto promień wodzący punktu bieżącego. Jeżeli zatrzymamy uwagę na dwóch punktach M i M', nieskończenie zbliżających się, natenczas, przeszedłszy do granicy, zauważymy, że ilości α i β znikają, lecz pomimo to ich wzajemny stosunek nie zniknie. Równanie (3) staje się wówczas takiem:

$$e^{\frac{gy}{gx}\,.\,\lg y} = W,$$

albowiem granicą stosunku $\frac{\beta}{\alpha}$ jest zawsze $\frac{gy}{gx}$; głoską W oznaczyliśmy granicę ilości U. Widzimy więc, że dla punktu wspólnego pomiędzy spiralną i krzywą AB mamy:

$$\text{łuk} \quad \omega = \frac{gy}{gx},$$

$$\text{promień } R = W,$$

$$\text{parametr równa się} \quad \lg y.$$

Mówiąc innemi słowy nadpochodna $\frac{gy}{gx}$ geometrycznie oznacza łuk, odpowiadający kątowi MOP, funkcyał wykładniczkowy W ma znaczenie promienia MO. Logarytm zasady czyli rzędnej y oznacza stały parametr lub pewne znamię spiralnej, zapomocą którego dana spiralna odróżnia się od innych tym podobnych linij.

Asymptotyczny punkt 0 jest biegunem spiralnej. Tym sposobem, jakikolwiek punkt, dowolnie wzięty na krzywej AB, posiadać będzie odpowiedni sobie biegun, który łatwo wykreślić, znajdując dla każdego punktu zosobna wartość nadpochodnej $\frac{gy}{gx}$ tudzież wartość funkcyału $e^{\frac{gy}{gx} \lg y}$. Dla punktu M znajdziemy biegun O, dla punktu M'' będzie O'', dla M''' będzie O''' i t. d.

Miejsce geometryczne wszystkich punktów $O, O'', O''', \ldots$ będzie pewna krzywa, którą nazywać możemy *przebiegunową rzędu 1-go*. Punktowi M będzie odpowiadać jeszcze druga spiralna, podobna do pierwszej, lecz posiada inny punkt asymptotyczny. Dla tej drugiej spiralnej będzie

$$\text{łuk} \quad \omega = \frac{g^2y}{gx^2},$$

$$\text{promień} \quad W_2 = e^{\frac{g^2y}{gx^2} \lg y},$$

$$\text{parametr pozostaje bez zmiany} \quad \lg y.$$

Dla punktu M będzie drugi biegun O_1, dla M'' biegun O_2 dla M''' biegun O_3 i t. d. Miejsce geometryczne wszystkich biegunów $O_1, O_2, O_3, \ldots$ znowu przedstawia pewną krzywą, którą nazywać możemy *przebiegunową rzędu 2-go*. Podobnie, biorąc dla danych punktów wartości nadpochodnej rzędu 3-go, będziemy w możności wykreślić *przebiegunową rzędu 3-go*, i t. d.

Tak więc, rachunek wykładniczkowy ze sposobu widzenia geometrycznego daje środek kreślenia pewnych linij, które pochodzą z danej krzywej. Gdybyśmy jednak pragnęli otrzymać równania przebiegunowych, to zadanie takie wogóle należeć będzie do bardzo trudnych. Nie możemy także powiedzieć, jakie praktyczne zastosowania będą miały linie przebiegunowe, lecz wiemy, że nauka rozumowa nie liczy się z zastosowaniami do praktyki i nie zwraca uwagi na tę ostatnią.

VI. Rachunki odwrotne.

§ 1. *Rachunek podzasadowy.*

Zadaniem rachunku odwrotnego względem rachunku przyrostków wykładniczych skończonych będzie znalezienie funkcyi pierwotnej, której przyrost wykładniczy jest wiadomy. Rachunek ten będziemy nazywali *podzasadowym* *).

Jako symbol wspomnianego rachunku możemy wziąć głoskę Π. Takim sposobem, mając

$$\Gamma f = \varphi(x),$$

będziemy mieli

$$\Pi \varphi(x) = f(x, \Gamma x). \tag{1}$$

Wielkość $\Pi\varphi(x)$ będziemy nazywali *podzasadą* **).

Podobnie, dla funkcyj wielu zmiennych, jeżeli mamy dane

$$\Gamma f = \psi(x, y, z, \ldots),$$

natenczas w rachunku odwrotnym będziemy pisali

$$\Pi\psi(x, y, z, \ldots) = F(x, y, z, \ldots, \Gamma x, \Gamma y, \Gamma z, \ldots).$$

*) *le calcul des sous-bases.*

**) *la sous-base.*

Najogólniejszem zadaniem będzie ten przypadek, gdy przyrostki wykładnicze związane są między sobą równaniem. Tak naprzykład, może być dane równanie z jedną zmienną niezależną:

$$f(x, y, \Gamma x, \Gamma y) = 0$$

i trzeba znaleźć funkcyę y taką, ażeby równanie zamieniło się na tożsamość.

Może być także dane równanie rzędu n-go z jedną zmienną niezależną w kształcie:

$$\psi(x, y, \Gamma x, \Gamma y, \Gamma^2 y, \Gamma^3 y, \ldots, \Gamma^n y) = 0;$$

zagadnienie będzie zasadzać się na tem, ażeby znaleźć funkcyę y, która zamienia równanie, napisane wyżej, na tożsamość.

W przypadku wielu zmiennych niezależnych ogólny kształt równania jest taki:

$$\Phi(x, y, z, \ldots, f, \Gamma x, \Gamma y, \Gamma z, \ldots, \Gamma f, \Gamma^2 f, \Gamma^3 f, \ldots, \Gamma^n f) = 0,$$

gdzie f oznacza funkcyę wszystkich zmiennych $x, y, z, \ldots$ Należy znaleźć f w takim kształcie, ażeby powyższe równanie zamieniło się na tożsamość. Zamiast jednego równania może być także dany cały układ równań.

W myśl określenia *podzasady* (1) dla funkcyi jednej zmiennej niezależnej będziemy mieli

$$\Gamma f = \frac{\lg f(x^{1+\Gamma x}, \Gamma x) - \lg f(x, \Gamma x)}{\lg f(x, \Gamma x)}. \tag{2}$$

Niech będzie

$$f(x, \Gamma x) = e^{\psi(x, \Gamma x)},$$

gdzie e oznacza zasadę logarytmów naturalnych, natenczas z równania (2) otrzymamy związek prostszy

$$\Gamma f = \frac{\psi(x^{1+\Gamma x}, \Gamma x)}{\psi(x, \Gamma x)} - 1 = \varphi(x). \tag{3}$$

W rachunku odwrotnym funkcya φ jest dana i całe zagadnienie polegać będzie na tem, ażeby odnaleźć $\psi(x, \Gamma x)$ jako taką fnnkcyę zmiennej niezależnej x oraz jej przyrostka wykładniczego Γx, aby wyrażenie

$$\frac{\psi(x^{1+\Gamma x}, \Gamma x)}{\psi(x, \Gamma x)}, \tag{4}$$

było zupełnie niezależne od Γx; mówiąc inaczej, trzeba, aby w powyższym ułamku wielkość Γx znikła i wskutek tego równość (3) stanie się tożsamością bezwzględną. Wypowiedziana wyżej uwaga da nam możność znalezienia kilka wzorów rachunku podzasadowego drogą elementarną. Nasamprzód zauważyć można, że

$$\Pi(0) = c\,;$$

to znaczy, że, *gdy przyrost wykładniczy jest zerem, natenczas podzasada równa się ilości stałej lub dowolnej funkcyi wykładniczo-peryodycznej.*

Co do pierwszej części tego twierdzenia nie możemy mieć wątpliwości, gdyż ilość stała jest niezależną od zmiennej x i wskutek tego przyrost wykładniczy ilości stałej równa się zawsze zeru. Co się zaś tycze funkcyi wykładniczo-peryodycznej, to analityczny jej kształt jest taki

$$\Phi\left[\sin\left\{\frac{2\pi}{\lg(1+\Gamma x)}\lg\lg x\right\},\ \cos\left\{\frac{2\pi}{\lg(1+\Gamma x)}\lg\lg x\right\}\right],$$

gdzie Φ oznacza funkcyę zupełnie dowolną. Łatwo zauważyć, że gdy w powyższem zamiast x położyć $x^{1+\Gamma x}$, natenczas nastąpi tylko taka zmiana, że łuk *wstawy* oraz *dostawy* zwiększy się o 2π, co, jak wiemy, nie może wpłynąć na zmianę wielkości wstawy, ani dostawy. Przyrostek Γx oznacza, jak zawsze, wielkość stałą. Podobnie jak na funkcyach trygonometrycznych zwyczajnych opiera się nauka trygonometryi, tak samo z własności funkcyj wykładniczo-okresowych możnaby było wysnuć nową trygonometryę wykładniczą.

W dalszym ciągu znajdziemy podzasadę dla wszelkiej ilości stałej a, przytem dla udogodnienia zamiast Γx będziemy pisali głoskę h. Dajmy w równaniu (3)

$$\psi(x, h) = (\lg x)^t,$$

rozumiejąc pod t nieznaną funkcyę h; będziemy w tym przypadku mieli

$$\frac{(\lg x^{1+h})^t}{(\lg x)^t} - 1 = a,$$

czyli

$$(1+h)^t - 1 = a,$$

skąd mamy widocznie

$$t = \frac{\lg(1+a)}{\lg(1+h)},$$

a więc w danym przykładzie będzie

$$f(x, h) = e^{(\lg x)^{\frac{\lg(1+a)}{\lg(1+h)}}}.$$

Będziemy tedy mieli wzór ogólny

$$\Pi(a) = \left[e^{(\lg x)^{\frac{\lg(1+a)}{\lg(1+h)}}}\right]^c,$$

gdzie c oznacza stałą dowolną lub dowolną funkcyę wykładniczo-peryodyczną. Ponieważ zawsze można przyjąć

$$e^c = c_1, \tag{5}$$

można więc będzie pisać wzór ostatni w kształcie prostszym

$$\Pi(a) = c_1^{(\lg x)^{\frac{\lg(1+a)}{\lg(1+h)}}},$$

gdzie c_1 podobnie, jak poprzednio, oznacza stałą dowolną lub dowolną funkcyę wykładniczo-peryodyczną; a może być jakakolwiek liczba rzeczywista lub urojona, z wyjątkiem $a = -1$, gdyż dla tej wartości funkcya $\Pi(a)$ ma ciągłość zerwaną.

Dajmy następnie w równaniu (3)

$$\psi(x, h) = x^{\frac{a}{h}},$$

gdzie a oznacza jakąkolwiek ilość stałą i $h = \Gamma x$, natenczas będzie

$$\varphi(x) = \frac{x^{\frac{a(1+h)}{h}}}{x^{\frac{a}{h}}} - 1 = x^a - 1.$$

Wskutek tego otrzymujemy wzór

$$\Pi(x^a - 1) = \left(e^{x^{\frac{a}{h}}}\right)^c.$$

Mając na uwadze (5), możemy jeszcze wzór powyższy napisać tak

$$\Pi(x^a - 1) = c_1^{x^{\frac{a}{h}}}.$$

Dalej przyjmijmy w równaniu (3)

$$\psi(x, h) = a^{\frac{(\lg x)^m}{(1+h)^m - 1}},$$

natenczas zauważymy łatwo, że

$$\varphi(x) = a^{(\lg x)^m} - 1,$$

więc będziemy mieli wzór

$$\Pi\left(a^{(\lg x)^m} - 1\right) = \left[e^{a^{\frac{(\lg x)^m}{(1+h)^m - 1}}}\right]^c,$$

czyli, ze względu na (5), będzie prościej

$$\Pi\left(a^{(\lg x)^m} - 1\right) = c_1^{a^{\frac{(\lg x)^m}{(1+h)^m - 1}}},$$

a i m oznaczają jakiekolwiek stałe.

Weźmy nakoniec w (3)

$$\psi(x, h) = x^{\frac{(\lg x)^m}{(1+h)^{m+1} - 1}},$$

natenczas znajdziemy bez trudności

$$\varphi(x) = x^{(\lg x)^m} - 1,$$

wskutek tego mamy wzór

$$\Pi\left(x^{(\lg x)^m} - 1\right) = \left[e^{x^{\frac{(\lg x)^m}{(1+h)^{m+1} - 1}}}\right]^c,$$

lub

$$\Pi\left(x^{(\lg x)^m} - 1\right) = c_1^{x^{\frac{(\lg x)^m}{(1+h)^{m+1} - 1}}}$$

Takim sposobem drogą elementarną wyprowadziliśmy kilka wzorów w rachunku podzasadowym. Nie należy jednak stąd wnioskować, że od rachunku podzasadowego do zasadowego można przechodzić zapomocą metody granic tak, jak przechodzi się od rachunku sum całkowych do całek. Podobnej własności dla rachunku podzasadowego dowieść wcale nie można. Nie wiemy także, jak stosować symbole Π do sum algebraicznych i do iloczynów.

§ 2. *Rachunek zasad.*

Przejdziemy w dalszym ciągu do rachunku nieskończenie małych. Rachunek odwrotny względem wykładniczkowego nazywać będziemy *rachunkiem zasad* lub *rachunkiem zasadowym*. Zagadnienie tego rachunku będzie polegać na tem, ażeby znaleść funkcyę pierwotną czyli *zasadę**), mając dany *wykładniczek*. Symbolem rachunku zasadowego będzie $\Big\vert$; znak ten utworzyliśmy z początkowej litery słowa „*zasada*".

Przy pomocy umówionego wyżej znaku piszemy

$$y = \Big\vert f(x)\, gx\,,$$

wyrażając tym sposobem, że zasadą dla wykładniczka

$$f(x)\,.\,gx$$

jest wielkość y. Funkcya $f(x)$ oznacza nadpochodną.

Możemy nasamprzód dowieść, że jakikolwiek byłby kształt funkcyi $f(x)$, zasada zawsze istnieć będzie.

W rzeczy samej, widzieliśmy na poprzedzających stronicach, że

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \lg y}{x \lg x}\,.\,\frac{gy}{gx}\,,$$

będzie więc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \lg y}{x \lg x}\,.\,f(x)$$

*) *la base*.

czyli

$$\frac{dy}{y \lg y} = \frac{f(x)}{x \lg x} dx .$$

Całkując ostatnie równanie, otrzymamy

$$\lg \lg y = \int \frac{f(x)}{x \lg x} dx$$

czyli

(1) $$y = e^{e^{\int \frac{f(x)}{x \lg x} dx}} .$$

Ponieważ wiemy z wykładu rachunku całkowego, że całka

$$\int \frac{f(x)}{x \lg x} dx$$

istnieje zawsze, chociażbyśmy nawet nie umieli znaleźć jej pod postacią skończoną, wnioskujemy stąd, że zasada y zawsze istnieć musi.

Pierwsze wzory rachunku zasadowego otrzymamy, odwracając odpowiednie wzory, wzięte z rachunku wykładniczkowego. Tak więc będzie

$$ga = 0, \qquad a = \text{const.},$$

$$g(a+x) = \frac{x \lg x \, gx}{(a+x) \lg (a+x)} , \qquad \int \frac{x \lg x \, gx}{(a+x) \lg (a+x)} = (a+x)^c ,$$

$$g(ax) = \frac{\lg x}{\lg ax} gx , \qquad \int \frac{\lg x}{\lg ax} gx = (ax)^c .$$

$$g(x^m) = gx , \qquad \int gx = x^c .$$

$$g(\lg x) = \frac{gx}{\lg \lg x} , \qquad \int \frac{gx}{\lg \lg x} = (\lg x)^c .$$

$$g(a^x) = \lg x \, gx , \qquad \int \lg x \, gx = c^x .$$

$$g(\sin x) = \frac{x \operatorname{cotg} x \lg x}{\lg \sin x} gx , \qquad \int \frac{x \operatorname{cotg} x \lg x}{\lg \sin x} gx = (\sin x)^c .$$

$$g(\cos x) = -\frac{x \operatorname{tg} x \lg x}{\lg \cos x}\, gx, \qquad \int -\frac{x \operatorname{tg} x \lg x}{\lg \cos x}\, gx = (\cos x)^c.$$

$$g(\operatorname{tg} x) = \frac{2x \lg x}{\sin 2x \lg \operatorname{tg} x}\, gx, \qquad \int \frac{2x \lg x}{\sin 2x \lg \operatorname{tg} x}\, gx = (\operatorname{tg} x)^c.$$

$$g(\operatorname{cotg} x) = -\frac{2x \lg x}{\sin 2x \lg \operatorname{cotg} x}\, gx, \qquad \int \frac{-2x \lg x}{\sin 2x \lg \operatorname{cotg} x}\, gx = (\operatorname{cotg} x)^c$$

$$g(\sec x) = \frac{x \lg x \operatorname{tg} x}{\lg \sec x}\, gx, \qquad \int \frac{x \lg x \operatorname{tg} x}{\lg \sec x}\, gx = (\sec x)^c.$$

$$g(\operatorname{cosec} x) = -\frac{x \lg x \operatorname{cotg} x}{\lg \operatorname{cosec} x}\, gx, \qquad \int -\frac{x \lg x \operatorname{cotg} x}{\lg \operatorname{cosec} x}\, gx = (\operatorname{cosec} x)^c.$$

$$g(\operatorname{arc} \sin x) = \frac{x \lg x \,.\, gx}{\sqrt{1-x^2}\,.\operatorname{arc}\sin x \lg \operatorname{arc} \sin x}, \qquad \int \frac{x \lg x \,.\, gx}{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc}\sin x \lg \operatorname{arc} \sin x}$$

$$= (\operatorname{arc} \sin x)^c.$$

$$g(\operatorname{arc} \cos x) = \frac{-x \lg x\, gx}{\sqrt{1-x^2}\,.\operatorname{arc}\cos x \lg \operatorname{arc} \cos x}, \qquad \int \frac{-x \lg x\, gx}{\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc}\cos x \lg \operatorname{arc} \cos x}$$

$$= (\operatorname{arc} \cos x)^c.$$

$$g(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{x \lg x \,.\, gx}{(1+x^2) \operatorname{arc}\operatorname{tg} x \lg \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}, \qquad \int \frac{x \lg x \,.\, gx}{(1+x^2) \operatorname{arc}\operatorname{tg} x \lg \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$$

$$= (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^c.$$

We wszystkich wzorach powyższych c oznacza stałą dowolną. Oprócz tego, stosując wzór (1) możemy jeszcze łatwo znaleźć

$$\int (\lg x)^a \,.\, gx = e^{ce^{\frac{1}{a}(\lg x)^a}}, \qquad \int xe^{ax} \lg x \,.\, gx = e^{ce^{\frac{1}{a} e^{ax}}},$$

$$\int x \lg^2 x \,.\, gx = e^{ce^{x \lg x \;\; x}}, \qquad \int x \sin x \lg x \,.\, gx = e^{ce^{-\cos x}},$$

$$\int x \cos x \lg x \,.\, gx = e^{ce^{\sin x}}, \qquad \int a\, gx = e^{c(\lg x)^a}, \qquad \int x^a \lg x \,.\, gx = e^{ce^{\frac{x^a}{a}}}.$$

Tak prosty związek rachunku zasadowego z rachunkiem całkowym istnieje tylko w tym przypadku, gdy pod znakiem $\int$ mamy napisaną funkcyę nadpochodną rzędu 1-go. Jeżeli zaś zasada będzie dana w kształcie

$$y = \int \varphi(x) \,.\, gx^m,$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza nadpochodną rzędu m-go ($m > 1$), natenczas związek zasady z rachunkiem całkowym będzie bardzo zawiły i wyrazi się równaniem różniczkowem, którego całkować nie umiemy. Tak naprzykład, gdy $m=2$, wówczas $\varphi(x)$ przedstawiać będzie nadpochodną rzędu 2-go. Widzieliśmy w rozdziale V (wzór 13), że w tym przypadku będzie:

$$(2) \qquad \varphi(x) = \frac{x^2 y \lg^2 x \dfrac{d^2 y}{dx^2} + xy \lg^2 x \dfrac{dy}{dx} + xy \lg x \dfrac{dy}{dx} - x^2 \lg^2 x \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{y^2 \lg y}.$$

Ażeby znaleźć zasadę y, trzeba całkować powyższe równanie różniczkowe; niestety, sposoby całkowania są nam tutaj zupełnie nieznane. Odwrotnie, gdybyśmy umieli znaleźć zasadę

$$y = \int \varphi(x) \,.\, gx^2$$

niezależnie od rachunku całkowego, natenczas wiadomym nam będzie sposób całkowania równań różniczkowych, napisanych w kształcie (2).

Podobnie, gdy będziemy mieli daną zasadę, odpowiadającą nadpochodnej rzędu 3-go

$$y = \int \psi(x)\, gx^3,$$

natenczas będzie

$$\frac{g^3 y}{gx^3} = \psi(x).$$

Oznaczywszy

$$y = f(x),$$

będziemy szukali prawdziwej wartości wyrażenia trzykrotnie nieoznaczonego

$$(3) \qquad \frac{g^3 y}{gx^3} \lg y = \lim \left[\frac{\lg f(x^{(1+\alpha)^3}) - 3 \lg f(x^{(1+\alpha)^2}) + 3 \lg f(x^{1+\alpha}) - \lg f(x)}{\alpha^3}\right]_{\alpha=0}.$$

Różniczkując trzykrotnie względem a licznik i mianownik po prawej stronie znaku równości (3), otrzymamy jako ostateczny wypadek równanie

$$\frac{g^3 y}{g x^3} = \frac{1}{y^3 \lg y} \Big[x^3 y^2 \lg^3 x\, y''' - 3x^3 y \lg^3 x\, y' y'' + 3x^2 y^2 \lg^2 x\, y''$$

$$(4) \qquad + 3x^2 y^2 \lg^3 x\, y'' + 2x^3 \lg^3 x (y')^3 - 3x^2 y \lg^3 x (y')^2 - 3x^2 y \lg^2 x (y')^2$$

$$+ x y^2 \lg^3 x\, y' + 3x y^2 \lg^2 x\, y' + x y^2 \lg x\, y' \Big],$$

gdzie dla krótkości użyliśmy oznaczeń

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Jeżeli w ostatniem równaniu zamiast $\frac{g^3 y}{g x^3}$ położymy daną funkcyę $\psi(x)$, natenczas będziemy mieli równanie rożniczkowe rzędu 3-go. Zagadnienie nasze byłoby rozwiązane zupełnie, gdybyśmy umieli całkować takie równania różniczkowe, jak powyżej napisane. Ponieważ teorya równań różniczkowych nie posiada wcale sposobów całkowania tak zawiłych równań, jak (4), więc od rachunku zasadowego oczekiwać możemy odkrycia dróg do całkowania takich równań. Będzie to jednocześnie znaczny krok naprzód i w nauce równań różniczkowych.

Ogólniejszem zadaniem rachunku odwrotnego będzie to, gdy mamy dane *równanie wykładniczkowe*.

$$(5) \qquad F\left(x, y, \frac{gy}{gx}\right) = 0.$$

Napisane wyżej równanie jest rzędu 1-go, gdyż zawiera nadpochodną rzędu 1-go. Kształt prostszy otrzymamy, rozwiązując (5) względem $\frac{gy}{gx}$, będzie wówczas

$$\frac{gy}{gx} = -\frac{M}{N},$$

czyli

$$M\, gx + N\, gy = 0,$$

M i N oznaczają pewne funkcye zmiennych x i y.

Rozwiązanie równania zawsze przedstawiać się będzie w postaci

$$y = [f(x)]^c,$$

gdzie c stała dowolna.

Może być także równanie rzędu 2-go

$$\Phi\left(x, y, \frac{gy}{gx}, \frac{g^2y}{gx^2}\right) = 0$$

lub wogóle rzędu n-go

$$\Psi\left(x, y, \frac{gy}{gx}, \frac{g^2y}{gx^2}, \frac{g^3y}{gx^3}, \ldots, \frac{g^ny}{gx^n}\right) = 0.$$

Równania o wykładniczkach zupełnych mają kształt podobny do równań o różniczkach zupełnych:

$$X\,gx + \sum_i^{1,\ldots,n} X_i\,gx_i = 0\,.$$

x jest zmienna zależna, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zmienne niezależne. $X, X_i, \ldots$ oznaczają pewne funkcye wszystkich zmiennych.

Równania, zawierające nadpochodne częściowe, będą miały kształt

$$F\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{gx}{gx_1}, \frac{gx}{gx_2}, \ldots, \frac{gx}{gx_n}, \frac{g^2x}{gx_1\,gx_2}, \frac{g^2x}{gx_1\,gx_3}, \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, \frac{g^i\,x}{gx_i\,gx_k\ldots}, \ldots, \frac{g^n\,x}{gx_i\,gx_k\ldots}\right) = 0.$$

Zamiast jednego równania może być także dany cały układ równań.

TREŚĆ.

ERRATA.

Str. 69 wiersz 9 z dołu. Zamiast: $f(x) = A\Sigma\, x^m + B\Sigma\, x^{m-1} + C\Sigma\, x^{m-2} + \ldots.$

powinno być: $f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots$

„ 72 „ 8 z góry. Zamiast: $\Sigma\Sigma x = \frac{x^3}{6(\Delta x)^2} - \frac{x^2}{3\,\Delta x} + \ldots$

powinno być: $\Sigma\Sigma x = \frac{x^3}{6(\Delta x)^2} - \frac{x^2}{2\,\Delta x} + \ldots$

„ 93 „ 7 z góry. Zamiast: *rozważemy*

powinno być: *rozwiążemy*

„ 100 oraz 110 w nagłówkach § 6 i § 7. Zamiast: *z wielu zmiennemi*

powinno być: *z wieloma zmiennemi.*

„ 122 wiersz 15 z góry. Zamiast: *w tym przypadka*

powinno być: *w tym przypadku.*

„ 133 „ 8 z góry. Zamiast: *Poostawiając*

powinno być: *Podstawiając.*

„ 145 „ 11 z góry. Zamiast: *abstrakcyę*

powinno być: *abstrakcyą*

„ 149 „ ostatni. Zamiast: $\Gamma^2{}_{y,x}\, F$

powinno być: $\Gamma^2{}_{y,z}\, F$

„ 155 „ 3 z góry. Zamiast: *oą*

powinno być: *od*

„ 174 „ 12 z góry. Zamiast: *Uiech*

powinno być: *Niech*

Str. 150 na początku wierszy 1-go oraz 2-go brakuje trzech słów:

Oznaczając.....

będziemy mieli

STODÓŁKIEWICZ

ZASADY
ACHUNKÓW
WYŻSZYCH