Wielce Szanownemu
Koledze S. Dicksteinowi
na pamiątkę II Zjazdu
Dziwiński

Główne twierdzenia i wzory Analizy wyższej kursu I.

dla użytku słuchaczy szkoły politechnicznej.

Na podstawie swych wykładów w r. n. 1887/8 podał

Prof. Dr. Placyd Dziwiński.

Lwów. 1888.

Autografia nakładem słuchaczy matematyki kursu I.

A. Wstęp do analizy.

I. Teorya działań.

Określeni liczby:

$$a = \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \cdots\cdots + \overset{a}{1}$$

Działania bezpośrednie.

1) Dodawanie:

Określenie sumy: $a + b = s.$

Prawo przemiany (commutatywne):

$$a + b = b + a.$$

Prawo łączenia (associatywne):

$$(a+b)+c = (a+c)+b.$$

2. Mnożenie:

Określenie iloczynu: $\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} \cdots + \overset{b}{a} = b.a$

Prawo przemiany (commutatywne): $ab = b.a$

Prawo łączenia (associatywne):

$$(a.b).c = (a.c).b$$

Prawo rozłączania (distrybutywne):

$$(a+b).c = a.c + b.c$$

3.) <u>Potęgowanie</u>:

Określenie potęgi: $\overset{1}{a}.\overset{2}{a}.\overset{3}{a}.\ldots.\overset{n}{a} = a^n = p$

Praw przemiany i łączenia nie ma tu, bo

$$a^n \gtrless n^a \qquad (a^n)^m \gtrless a^{(n^m)}$$

Prawa rozłączenia:

$$a^{m+n} = a^m . a^n$$

$$a^{m.n} = (a^m)^n = (a^n)^m$$

$$(a.b)^m = a^m . b^m$$

$$(a+b)^m = a^m + m_1 a^{m-1} b + m_2 a^{m-2} b^2 + \ldots\ldots\ldots + m_r a^{m-r} b^r + \ldots + b^m$$

Uwaga: Współczynniki $1, m_1, m_2, \ldots 1$ tworzą trójkąt „Pascala”

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1

Własności działań bezpośrednich.

a.) Działania bezpośrednie są zawsze możliwe.

b.) Dają na wynik tylko jedną liczbę.

c.) Wynik jest tego samego rodzaju co liczby dane, to znaczy liczbą całkowitą.

Liczby całkowite:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

Uzmysłowienie liczb całkowitych:

Układy liczb:

a.) Liczba w układzie (z):

$$L = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0 = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{(z)}$$

$a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0 < z$ cyfry w układzie z.

b.) Liczba w układzie dziesiątkowym $z = 10$.

$$L = a_n . 10^n + a_{n-1} . 10^{n-1} + \ldots a_1 10^1 + a_0 = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{10}$$

$a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0 < 10$ są cyfry w układzie dziesiątkowym.

c.) Zamiana układu z na dziesiątkowy:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots\ldots a_1 z + a_0 =$$

$$= \{ \ldots\ldots [(a_n z + a_{n-1}) z + a_{n-2}] z + \ldots\ldots a_1 \} z + a_0$$

Uwaga: Postępowanie tego rodzaju nazywamy **ewolucyą** liczby, przeciwne zaś **inwolucyą** liczby.

Działania pośrednie.

1.) Odejmowanie.

Określenie różnicy: $b+x=a$ czyli $x=a-b=d$.

Własność różnicy: $(a-b)+b=a$

Określenie zera: $(a+x)=a$ czyli $x=a-a=0$

Własność zera: $0=a-a=b-b$

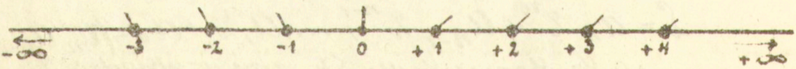
Liczby przeciwne: $a+a'=0$ czyli $a'=0-a=-a$

Liczby dodatnie: $a=+a=\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\overset{3}{1}+\dots+\overset{a}{1}=a.+1$

Liczby ujemne: $a'=-a=\overset{1}{(-1)}+\overset{2}{(-1)}+\overset{3}{(-1)}+\dots+\overset{a}{(-1)}=a.-1$.

Rozszerzony zakres liczb całkowitych.

$-\infty, \dots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots +\infty$



Wartość różnicy.

α) $a>b$; $a-b=+(a-b)=+d$.

β.) $a=b$; $a-b=a-a=0$

γ) $a<b$; $a-b=-(b-a)=-d$.

Symbol nieoznaczony: $\infty-\infty$

Działania liczbami przeciwnymi.

Dodawanie: $a+(-b)=a-b$

Odejmowanie: $a-(-b)=a+b$

Mnożenie: $(+a)\cdot(-b)=-ab$; $(-a)(-b)=+ab$

Potęgowanie: $(+1)^n = +1$; $(-1)^{2n} = +1$; $(-1)^{2n+1} = -1$.

Działania zerem.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dodawanie: } a+0=0+a=a \\ \text{Odejmowanie: } a-0=a\end{array}\right\} 0\pm 0=0$$

Mnożenie: $a.0=0.a=0 \quad 0.0=0$

Potęgowanie: $0^n=0$

Symbole nieoznaczone: $0.\infty$, $\infty.0$

2.) Dzielenie.

Określenie ilorazu: $b.x=a$; $x=a:b=\frac{a}{b}=q$

Własność ilorazu: $\frac{a}{b}\cdot b=a$

Wnioski: $\frac{a\pm b}{m}=\frac{a}{m}\pm\frac{b}{m}$; $\frac{a.b}{b}=a$; $\frac{a^m}{a}=a^{m-1}$.

Obliczanie ilorazu: $\frac{a}{b}$

Tworzę wielokrotności: $b, 2b, 3b, \ldots mb, (m+1)b, \ldots$

a) Jeżeli $a=m.b$ tedy $\frac{a}{b}=m$

b.) Jeżeli $mb<a<(m+1)b$ tedy

$$m<\frac{a}{b}<m+1.$$

Jednostka ułamkowa: $x.b=1$; $x=\frac{1}{b}$

własność: $\frac{1}{b}\cdot b=\overset{1}{\frac{1}{b}}+\overset{2}{\frac{1}{b}}+\overset{3}{\frac{1}{b}}+\cdots+\overset{b}{\frac{1}{b}}=1.$

Liczby całkowite i jednostki ułamkowe.

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots n, \ldots\ldots \infty$

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$

Granice jednostek ułamkowych: $\frac{1}{\infty}=0$; $\frac{1}{0}=\infty$

Liczby ułamkowe.

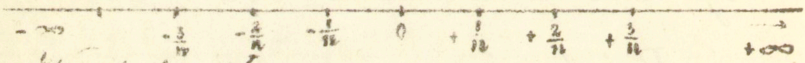
$$a\cdot\frac{1}{b}=\overset{1}{\frac{1}{b}}+\overset{2}{\frac{1}{b}}+\overset{3}{\frac{1}{b}}+\dots\dots+\overset{a}{\frac{1}{b}}$$

Twierdzenie: $a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$ (Ułamek równy ilorazowi)

Rozszerzony zakres liczb:

$$-\infty\dots\dots-\frac{3}{n},-\frac{2}{n},-\frac{1}{n},0,+\frac{1}{n},+\frac{2}{n},+\frac{3}{n},\dots\dots+\infty$$

Uzmysłowienie.



Wartości ilorazu

α.) $a<b$; $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$ ułamek właściwy.

β.) $a=b$; $\frac{a}{b}=\frac{b}{b}=b\cdot\frac{1}{b}=1$. jedność } ułamek

γ) $a=m.b$; $\frac{a}{b}=\frac{m.b}{b}=m$ liczba całkowita } pozorny

δ) $a>b$ i to: $(m+1)b>a>m.b$; wtedy:

$\frac{a}{b}=\frac{mb+r}{b}=m+\frac{r}{b}$ liczba mieszana czyli ułamek niewłaściwy.

Ilorazy liczb przeciwnych.

$$\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b};\quad\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b};\quad\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}$$

Ilorazy z 0 i ∞

$$\frac{a}{0}=\infty;\quad\frac{0}{a}=0;\quad\frac{a}{\infty}=0;\quad\frac{\infty}{a}=\infty$$

Symbole nieoznaczone: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Potęgi o wykładnikach zero i ujemnych.

z równości $a^{m-1}=\frac{a^m}{a}$ otrzymamy:

$a^0=1$; $a^{-1}=\frac{1}{a}$; $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$

Symbole nieoznaczone: 0^0; ∞^0, 1^∞

Działania liczbami ułamkowymi.

a.) Przekształcanie: $\frac{a}{b} = \frac{ma}{m.b} = \frac{a:n}{b:n}$

b.) Dodawanie i odejmowanie: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{b.d}$

c.) Mnożenie: $\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{a.b}{m.n}$

d.) Dzielenie: $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{a}{m} \cdot \frac{n}{b} = \frac{an}{bm}$

e.) Potęgowanie: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Uwaga: Liczby całkowite i ułamkowe dodatne i ujemne zowią się liczbami wymiernymi.

Liczba wymierna całkowita:

$$L = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Liczba wymierna ułamkowa:

$$L = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots\dots a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots\dots b_1 z + b_0}$$

3. Pierwiastkowanie i logarytmowanie.

a.) Określenie pierwiastka: $x^n = a$; $x = \sqrt[n]{a}$

Własność pierwiastka: $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Wnioski: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{a}$; $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$;

$\sqrt[1]{a} = a$; $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$; $\sqrt[n]{1} = 1$.

Obliczanie pierwiastka $\sqrt[n]{a}$

Tworzę nte potęgi liczb porządkowych:

$1^n, 2^n, 3^n \ldots\ldots m^n, (m+1)^n, \ldots\ldots$

α.) Jeżeli $a = m^n$ to $\sqrt[n]{a} = m$

β.) Jeżeli $m^n < a < (m+1)^n$ to $m < \sqrt[n]{a} < m+1$

Wtedy będzie także dla dowolnego q

$$\frac{p}{q} < \sqrt[n]{a} < \frac{p+1}{q}$$

$\sqrt[n]{a}$ jest liczbą niewymierną, da się jednakże z wszelką żądaną dokładnością oznaczyć. –

Liczba niewymierna w układzie z:

$$L = m + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + a_{-3}z^{-3} + \ldots a_{-r}z^{-r} + \ldots \text{bez końca}$$

czyli: $$L = m + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-3}}{z^3} + \ldots \frac{a_{-r}}{z^r} + \ldots\ldots \text{bez końca}$$

Działania liczbami niewymiernymi.

A i B są liczby niewymierne.

Dodawanie:
$$\begin{array}{c} a < A < a + \varepsilon_1 \\ b < B < b + \varepsilon_2 \\ \hline (a+b) < (A+B) < (a+b) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{array}$$

Mnożenie:
$$\begin{array}{c} a < A < a + \varepsilon_1 \\ b < B < b + \varepsilon_2 \\ \hline ab < AB < ab + (a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1) + \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{array}$$

"Wszystkie możliwe liczby wymierne i niewymierne tworzą ciągły szereg liczb, które można uzmysłowić punktami na linji prostej. –

Określenie logarytmu.

$$b^x = a \; ; \quad x = {}^{b}\log a$$

Własność logarytmu: $b^{{}^{b}\log a} = a$

Wnioski: ${}^{b}\log(a_1 a_2) = {}^{b}\log a_1 + {}^{b}\log a_2$;

${}^{b}\log \frac{a_1}{a_2} = {}^{b}\log a_1 - {}^{b}\log a_2$; ${}^{b}\log(a)^m = m\,{}^{b}\log a$;

${}^{b}\log(\sqrt[m]{a}) = \frac{{}^{b}\log a}{m}$

Obliczanie logarytmu: Tworzę kolejno wszystkie potęgi zasady b, jako to:

$b^0, b^1, b^2 \ldots\ldots b^m, b^{m+1}, \ldots\ldots\ldots$

α.) Jeżeli $a = b^m$ to ${}^{b}\log a = m$

β.) Jeżeli $b^m < a < b^{m+1}$ tedy $m < {}^{b}\log a < m+1$

tedy będzie istniała dla dowolnego q nierówność:

$b^{m+\frac{p}{q}} < a < b^{m+\frac{p+1}{q}}$ czyli $m + \frac{p}{q} < {}^{b}\log a < m + \frac{p+1}{q}$

${}^{b}\log a$ jest liczbą niewymierną, da się jednakże z wszelką żądaną dokładnością oznaczyć.

Pierwiastki zowią się liczbami niewymiernymi algebraicznymi. Logarytmy zalicza się do liczb niewymiernych przestępnych.

Logarytmy dla zasady $b = 10$ zowią się logarytmy zwyczajne lub briggowskie

Związki między logarytmami dla dwóch różnych zasad b i B.

$${}^{B}\log a = {}^{b}\log a \cdot \frac{1}{{}^{b}\log B} = M \cdot {}^{b}\log a \; ; \; M = {}^{B}\log b = \frac{1}{{}^{b}\log B}$$

M nazywa się zamiennikiem logarytmów. Jest on równy odwrotnej wartości logarytmu nowej zasady dla danej zasady.–

Uwaga. Liczby (dodatnie) całkowite ułamkowe i niewymierne zowią się liczbami **bezwzględnymi**.

Liczba bezwzględna w układzie z:

$$Z = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \ldots a_{-r} z^{-r} +$$

Liczby dodatnie lub ujemne całkowite wymierne albo niewymierne zowią się liczbami rzetelnymi, dla odróżnienia od nowego rodzaju liczb, które przy pierwiastkowaniu liczb względnych występują i liczbami urojonymi się nazywają.

c. Liczby urojone i zespolone.

Jednostka urojona: $x^2 = -1$; $x = \sqrt{-1} = i$

Jednostka urojona, dodatnia i ujemna:

$+i = \sqrt{-1}$; $-i = -\sqrt{-1}$.

Potęgi jednostki urojonej:

$i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = +1$; $i^5 = +i$;

ogólnie: $i^{4n+1} = +i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$; $i^{4n+4} = +1$.

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots\ldots\ldots)$

Określenie liczby urojonej: $x^2 = -a^2 = a^2 \cdot -1$;

$x = a \cdot \sqrt{-1}$; $= a \cdot i$

Działania liczbami urojonymi
$$\begin{cases} ai + bi = (a+b)i \\ ai \cdot bi = a \cdot b \cdot i^2 = -ab \\ (ai)^n = a^n i^n \text{ zależnie od } n \text{ równe } \pm a^n \text{ albo } \pm a^n i \end{cases}$$

Określenie liczby zespolonej:

$$(x-a)^2 = -b^2 \;;\quad x-a = bi \;;\quad x = a+bi$$

Działania liczbami zespolonymi:

$$(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

$$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$(a+bi)^n = (a^n - n_2 a^{n-2} b^2 + n_4 a^{n-4} b^4 - \ldots) + i(n_1 a^{n-1} b - n_3 a^{n-3} b^3 + \ldots)$$

Liczby zespolone sprzężone.

Określenie: Liczba $(a+bi)$ sprzężona z liczbą $(a-bi)$

Suma: $(a+bi)+(a-bi) = 2a$

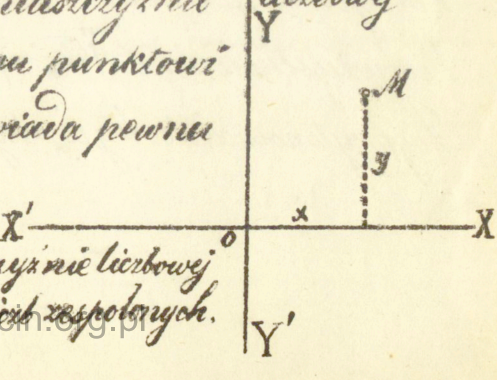
Iloczyn: $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

Różnica: $(a+bi)-(a-bi) = 2bi$

Iloraz: $\dfrac{a+bi}{a-bi} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \dfrac{2ab}{a^2+b^2}\, i$

Uzmysłowienie liczby zespolonej.

Wszelkiej liczbie zespolonej $x+yi$ odpowiada pewien punkt M na płaszczyźnie liczbowej i odwrotnie: Wszelkiemu punktowi na płaszczyźnie odpowiada pewna liczba zespolona.



Wszystkie punkty na płaszczyźnie liczbowej uzmysławiają ciągły obszar liczb zespolonych.

Liczba zespolona zastąpiona liczbą kierunkową.

Określenie: $x + yi = r_\varphi$

Wartość bezwzględna liczby zespolonej:

$$r = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

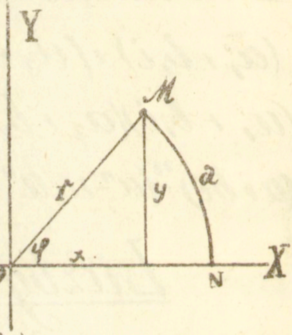
Zboczenie liczby zespolonej $\varphi = \operatorname{arc} \varphi^\circ = \frac{a}{r}$

Uwaga: $\operatorname{arc} 180^\circ = \pi = 3{,}14159265\ldots$

$\operatorname{arc} 1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0{,}0174532925\ldots$

$\operatorname{arc} 1' = \frac{\pi}{180.60} = 0{,}0002908882\ldots$

$\operatorname{arc} 1'' = \frac{\pi}{180.60.60} = 0{,}0000048481\ldots$



Liczby kierunkowe.

Określenie: $r_\varphi = r . 1_\varphi$

Działania liczbami kierunkowymi.

Dodawanie: $a_\alpha + b_\beta + c_\gamma + \ldots = R_\psi$

Odejmowanie: $a_\alpha - b_\beta = a_\alpha + b_{\pi+\beta} = r_\varphi$

Mnożenie: $a_\alpha . b_\beta = (a.b)_{\alpha+\beta}$

Dzielenie: $\frac{a_\alpha}{b_\beta} = \left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta}$

Potęgowanie: $(a_\alpha)^m = (a^m)_{m\alpha}$

Pierwiastkowanie: $\sqrt[m]{a_\alpha} = \left(\sqrt[m]{a}\right)_{\frac{\alpha}{m}}$

Logarytmowanie: $\log a_\alpha = \log(a.1_\alpha) = \log a + \log 1_\alpha$

Wartości bezwzględne wyników działań liczbami zespolonymi:

Sumy i różnicy: $|a \pm b| \leqq |a| + |b|$; $|a \pm b| \geqq |a| - |b|$

Iloczynu: $|a . b| = |a| . |b|$

Ilorazu: $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

Potęgi: $|a^m| = |a|^m$

Pierwiastka: $|\sqrt[n]{a}| = \sqrt[n]{|a|}$

Stosunki kątomiernicze zwane funkcyami goniometrycznymi.

Określenia: $\frac{y}{r} = \sin\varphi$; $\frac{y}{x} = \cos\varphi$; $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\varphi$;

$\frac{r}{y} = \operatorname{cosec}\varphi$; $\frac{x}{y} = \sec\varphi$; $\frac{x}{y} = \operatorname{cotg}\varphi$;

Przedstawienie jednostki kierunkowej w postaci liczby zespolonej:

$$1_\varphi = \cos\varphi + i . \sin\varphi$$

$$1_{-\varphi} = \cos\varphi - i . \sin\varphi$$

Przedstawienie liczby kierunkowej w postaci liczby zespolonej.

$r_\varphi = r . \cos\varphi + i . r . \sin\varphi$; $r_{-\varphi} = r . \cos\varphi - i . r . \sin\varphi$

c.) **Główniejsze wzory goniometryczne.**

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 = \sec^2\varphi - \operatorname{tg}^2\varphi = \operatorname{cosec}^2\varphi - \operatorname{cotg}^2\varphi = 1.$$

$$\sin\varphi . \operatorname{cosec}\varphi = \cos\varphi . \sec\varphi = \operatorname{tg}\varphi . \operatorname{cotg}\varphi = 1.$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1-tg^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+cotg^2\varphi}} = \frac{\sqrt{\sec^2\varphi-1}}{\sec\varphi} = \frac{1}{cosec\varphi}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{cotg\varphi}{\sqrt{1+cotg^2\varphi}} = \frac{1}{\sec\varphi} = \frac{\sqrt{cosec^2\varphi-1}}{cosec\varphi}$$

$$tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{1}{cotg\varphi} = \sqrt{\sec^2\varphi-1} = \frac{1}{\sqrt{cosec^2\varphi-1}}$$

$$\sec\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1+tg^2\varphi} = \frac{\sqrt{1+cotg^2\varphi}}{cotg\varphi} = \frac{cosec\varphi}{\sqrt{cosec^2\varphi-1}}$$

$$cosec\varphi = \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1+tg^2\varphi}}{tg\varphi} = \sqrt{1+cotg^2\varphi} = \frac{\sec\varphi}{\sqrt{\sec^2\varphi-1}}$$

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha . \sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\ ;\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\ ;\quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$cosec\alpha - cotg\alpha = tg\frac{\alpha}{2}\ ;\quad \sec\alpha - tg\alpha = tg\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$$

$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$$

$(\cos\alpha + i.\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i.\sin n\alpha$ Wzór Moivre'a

Funkcye cyklometryczne.

Określenia:

$\sin\varphi = u$; $\varphi = arc \sin u$

$\cos\varphi = u$; $\varphi = arc \cos u$

$tg\varphi = u$; $\varphi = arc\, tg\, u$

$cotg\,\varphi = u$; $\varphi = arc\, cotg\, u$

$\sec\varphi = u$; $\varphi = arc \sec u$

$cosec\,\varphi = u$; $\varphi = arc\, cosec\, u$

f.) Wzory cyklometryczne.

$$\operatorname{arc\,sin} u = \operatorname{arc\,cos}\sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$$

$$\operatorname{arc\,cos} u = \operatorname{arc\,sin}\sqrt{1-u^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\operatorname{arc\,tg} u = \operatorname{arc\,sin}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{1}{u}$$

$$\operatorname{arc\,cotg} u = \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,cos}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{u}$$

$$\operatorname{arc\,sec} u = \operatorname{arc\,cos}\frac{1}{u}\ ;\ \operatorname{arc\,cosec} u = \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{u}$$

$$\operatorname{arc\,sin} u + \operatorname{arc\,cos} u = \frac{\pi}{2}\ ;\ \operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,cotg} u = \frac{\pi}{2}\ ;$$

$$\operatorname{arc\,sec} u + \operatorname{arc\,cosec} u = \frac{\pi}{2}$$

g.) Pierwiastki liczb względnych i zespolonych.

Twierdzenie: Pierwiastek całkowity z liczby zespolonej jest wielowartościowy, a to ma tyle pierwiastków oddzielnych, ile jednostek ma wykładnik pierwiastkowy. Wszystkie n wartości n tego pierwiastka danej liczby zespolonej mają tę samą wartość bezwzględną równą n^{temu} pierwiastkowi z bezwzględnej wartości tej liczby. Pierwiastki zespolone są parami sprzężone.

$$\sqrt[n]{+1} = \sqrt[n]{1_{2k\pi}} = 1_{\frac{2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i.\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$\sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{1_{(2k+1)\pi}} = 1_{\frac{(2k+1)\pi}{n}} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i.\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

$$\sqrt[n]{+i} = \sqrt[n]{1_{\frac{(4k+1)\pi}{2}}} = 1_{\frac{(4k+1)\pi}{2n}} = \cos\frac{(4k+1)\pi}{2n} + i.\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}$$

$$\sqrt[n]{-i} = \sqrt[n]{1_{\frac{(4k+3)\pi}{2}}} = 1_{\frac{(4k+3)\pi}{2n}} = \cos\frac{(4k+3)\pi}{2n} + i.\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n}$$

$$\sqrt[n]{\cos\alpha + i.\sin\alpha} = \sqrt[n]{1_{\alpha+2k\pi}} = 1_{\frac{\alpha+2k\pi}{n}} = \cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}$$

$$\sqrt[n]{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \sqrt[n]{1_{-\alpha+2k\pi}} = 1_{\frac{-\alpha+2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi-\alpha}{n} + i\sin\frac{2k\pi-\alpha}{n}$$

$$\sqrt[n]{x+yi} = \sqrt[n]{r_{\varphi+2k\pi}} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\varphi+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}.\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sqrt[n]{r}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

$$[k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)]$$

Szczególne przypadki:

1.) $n=2$; $\sqrt{+1}$ ma 2 wartości : $+1$; -1;
$\sqrt{-1}$ " " " " : $+i$; $-i$;

2.) $n=3$; $\sqrt[3]{+1}$ " trzy " " : $+1$; $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sqrt[3]{-1}$ " " " " : -1; $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.) $n=4$; $\sqrt[4]{+1}$ " cztery " " : $+1$; -1; $+i$; $-i$
$\sqrt[4]{-1}$ " " " " : $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$;
$-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

h.) Logarytmy liczb względnych i zespolonych.

Jednoska kierunkowa jako potęga:

$$1_\varphi = \cos\varphi + i.\sin\varphi = e^{\varphi i}$$

$$1_{-\varphi} = \cos\varphi - i.\sin\varphi = e^{-\varphi i}$$

gdzie $e = \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots =$

$$e = 2{,}7182818\ldots\ldots$$

Uwaga: Liczba e jest liczbą przestępnie niewymierną, nazywa się zasadą logarytmów naturalnych; oznaczamy ${}^{e}\log a = \log nat\, a = \log a$

Logarytm naturalny jednostki kierunkowej:

$$\log 1_\varphi = \log e^{\varphi i} = \varphi i$$

$$\log 1_{-\varphi} = \log e^{-\varphi i} = -\varphi i$$

Logarytm naturalny liczby zespolonej.

$$\log(\cos\varphi + i.\sin\varphi) = \log 1_{\varphi+2K\pi} = i(\varphi+2K\pi)$$

$$\log(\cos\varphi - i.\sin\varphi) = \log 1_{-(\varphi+2K\pi)} = -i(\varphi+2K\pi)$$

$$\log(a+bi) = \log r_{\varphi+2K\pi} = \log r + i(\varphi+2K\pi)$$

$$(K = 0, \pm1, \pm2; \pm3 \ldots\ldots)$$

Logarytm naturalny liczby zespolonej $(a+bi)$ jest nieskończenie wielowartościowy. Wszystkie jego wartości są liczbami zespolonymi, które mają tą samą część rzetelną równą logarytmowi naturalnemu z wartości bezwzględnej tej liczby zespolonej, a części urojone różniące się o wielokrotność liczby 2π. —

Szczególne przypadki.

$$\log(+1) = 2K\pi i \; ; \; \log(-1) = (2K+1)\pi i$$

$$\log(+i) = \frac{4K+1}{2}\pi i \; ; \; \log(-i) = \frac{4K+3}{2}\pi i \qquad (K = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

Logarytmy zwyczajne (brigowskie) liczb zespolonych: Znakowanie: ${}^{10}\log a = \mathrm{Log}\, a$

Zamiana logarytmów naturalnych na zwyczajne i nawzajem.

$$\log a = \frac{1}{\mathrm{Log}\, e} \cdot \mathrm{Log}\, a = M_e \cdot \mathrm{Log}\, a$$

$$\mathrm{Log}\, a = \frac{1}{\log 10} \cdot \log a = M_{10} \cdot \log a.$$

Zamienniki: $M_e = 2{,}302585\,1\dots$; $M_{10} = 0{,}43429448\dots$

$$\mathrm{Log}(a+bi) = \mathrm{Log}\, r_{\varphi+2K\pi} = \mathrm{Log}\, r + i . M_{10} (\varphi + 2K\pi)$$

$$(K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\dots)$$

i.) Potęgi i pierwiastki liczby zespolonej przy wykładnikach zespolonych.

$$(a+bi)^{m+ni} = P + Qi$$

$$P = e^{m \log r - n(\varphi+2K\pi)} . \cos(n \log r + m[\varphi + 2K\pi])$$

$$Q = e^{m \log r - n(\varphi+2K\pi)} . \sin(n \log r + m[\varphi + 2K\pi])$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \; ; \; \varphi = \mathrm{arctg} \frac{b}{a} \; ; \; (K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\dots)$$

$$\sqrt[p+qi]{a+bi} = (a+bi)^{\frac{1}{p+qi}} = (a+bi)^{\frac{p}{p^2+q^2} - \frac{q}{p^2+q^2} i} = (a+bi)^{m+ni}$$

$$m = \frac{p}{p^2+q^2} \; ; \; n = -\frac{q}{p^2+q^2}$$

Potęgi i pierwiastki liczby zespolonej przy wykładnikach zespolonych są nieskończenie wielowartościowe. Wszystkie wartości są w ogólności liczbami zespolonymi, których część rzetelna i urojona zależne są od liczby k, przyjmującej wszelkie możliwe wartości całkowite dodatnie i ujemne.

Szczególne przykłady:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^i = \frac{1}{e^{\alpha+2k\pi}} \; ; \; (-1)^i = \frac{1}{e^{(2k+1)\pi}}$$

$$i^i = \frac{1}{\sqrt{e^{(4k+1)\pi}}}$$

$$\sqrt[i]{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\alpha+2k\pi} \; ; \; \sqrt[i]{-1} = e^{(2k+1)\pi} \; ; \; \sqrt[i]{i} = \sqrt{e^{(4k+1)\pi}}$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots\ldots)$$

k) Logarytmy liczby zespolonej dla zasady zespolonej.

$${}^{(m+ni)}\log(a+bi) = \frac{\log(a+bi)}{\log(m+ni)} = \frac{\log\sqrt{a^2+b^2} + (\varphi+2k\pi)i}{\log\sqrt{m^2+n^2} + (\psi+2s\pi)i}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \; ; \; \psi = \operatorname{arctg}\frac{n}{m} \; ; \; (k, s = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots)$$

Logarytm liczby zespolonej, dla zasady zespolonej jest nieskończenie wielowartościowy. Wszystkie te wartości zależą od liczb k i s przyjmujących wszelkie możliwe wartości całkowite dodatnie i ujemne.–

Szczególne przykłady:

$${}^{(\cos\psi + i\sin\psi)}\log(\cos\alpha + i.\sin\alpha) = \frac{\alpha+2k\pi}{\psi+2k\pi}$$

$${}^{i}\log(-1) = \frac{2(2k+1)}{4s+1} \; ; \; {}^{i}\log(+1) = \frac{4k}{4s+1}.$$

$${}^{i}\log(-i) = \frac{4k+3}{4s+1} \; ; \; {}^{-1}\log(+1) = \frac{2k}{2s+1}.$$

Własności działań pośrednich.

Działania pośrednie w zakresie liczb całkowitych nie są zawsze możliwe.
Odejmowanie liczb całkowitych, aby było zawsze możliwe, wywołuje liczby względne (dodatnie i ujemne), dzielenie – liczby ułamkowe, – pierwiastkowanie – liczby algebraicznie niewymierne, – logarytmowanie – liczby przestępnie niewymierne.
W zakresie liczb względnych (całkowitych i ułamkowych) są działania odejmowania i dzielenia zawsze możliwe, działania pierwiastkowania i logarytmowania wywołują liczby urojone i zespolone.
W zakresie liczb zespolonych, są wszystkie działania bezpośrednie i pośrednie zawsze możliwe.
Działania dodawania i odejmowania, mnożenia i dzielenia, jakoteż i potęgowania przez wykładnik całkowity dają na wynik zawsze tylko jedną liczbę z tego zakresu czyli są działaniami jednowartościowymi.
Pierwiastkowanie liczb zespolonych przy wykładniku całkowitym n daje na wynik n liczb tego zakresu czyli jest działaniem wielowartościowem.

Logarytmowanie liczb zespolonych przy jakiejkolwiek zasadzie daje na wynik nieskończenie wiele liczb zespolonych, czyli jest działaniem nieskończenie wielowartościowem. — Uwaga: Dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie przez wykładnik całkowity, nazywamy działaniami wymiernymi, pierwiastkowanie przez wykładnik całkowity zaś działaniem niewymiernem. — Tych sześć działań nazywamy „działaniami algebraicznymi", inne zaś działania zowiemy „przestępnymi".

Symbole $n!$ i $\binom{n}{r}$

1.) Symbol n silnia

Określenie: $n! = 1.2.3. \ldots . n$

Własność: $n! = (n-1)!\, n$; $(n-1)! = \frac{n!}{n}$

Wnioski: $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$.

$6! = 720$; $0! = 1$; $(-r)! = \infty$

2.) Symbol n nad r

Określenie: $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots\ldots r}$

Własności: $\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n-r+1}{r}$; $\binom{n}{r-1} = \binom{n}{r} \cdot \frac{r}{n-r+1}$;

$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{-r} = 0$, $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

$$\binom{\alpha+\beta}{r} = \binom{\alpha}{r}\binom{\beta}{0} + \binom{\alpha}{r-1}\binom{\beta}{1} + \dots \binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{r} = \sum_{r=0}^{r=n}\binom{\alpha}{n-r}\binom{\beta}{r}$$

Porządki elementów.

Liczba przestawień bez powtórzenia elementów $P_n = n!$

Liczba przestawień z powtórzeniem elementów $P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\dots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\dots}$

Liczba połączeń bez powtórzenia elementów $r$tej klasy $C_n^r = \binom{n}{r}$

Liczba połączeń z powtórzeniem elementów $r$tej klasy $C_n^{r(p)} = \binom{n+r-1}{r}$

Liczba połączeń przestawionych bez powtórzenia elementów. $V_n^r = \binom{n}{r} r!$

Liczba połączeń przestawionych z powtórzeniem elementów $V_n^{r(p)} = n^r$.

Zastosowaniu:

Tw. dwumianowe: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{r=n} n! \frac{a^{n-r}}{(n-r)!} \cdot \frac{b^r}{r!}$

Tw. wielomianowe: $(a+b+c+\dots)^n = \sum_{\alpha,\beta,\gamma\dots} n! \frac{a^\alpha}{\alpha!} \cdot \frac{b^\beta}{\beta!} \cdot \frac{c^\gamma}{\gamma!} \dots\dots$

gdzie $\alpha+\beta+\gamma+\dots = n$.

II Szeregi i iloczyny nieskończone.

Twierdzenie Weierstrassu: Jeżeli w dowolnym zakresie liczb jest określonych w pewien sposób liczb nieskończenie wiele, wówczas istnieje przynajmniej jedna liczba taka, w otoczeniu której znajduje się nieskończenie wiele liczb powyżej określonych.-

Miejsce, które ta liczba w zakresie liczb zajmuje, nazywamy miejscem skupienia.

Przykłady:

1.) wyrażenie $\frac{1}{k}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \pm3 \dots)$ określa nieskończenie wiele liczb $\pm\infty, \pm1, \pm2; \pm3 \dots$ Liczby te skupiają się w otoczeniu zera w nieskończonej ilości. Miejsce 0 jest więc miejscem skupienia.

2.) Wyrażenie $a+\frac{1}{k}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots)$ przedstawia nieskończenie wiele liczb, które się skupiają ~~około liczby~~ a.

3.) Wyrażenie $\frac{k}{k+a}$ przedstawia dla $(k=0, \pm1, \pm2 \dots)$ nieskończenie wiele liczb zawartych między -1 i $+1$, liczby -1 i $+1$, tworzą dwa miejsca skupienia.

Szeregi nieskończone.

Kształt: $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n$.

a.) Szeregi nieskończone liczb bezwzględnych.

Tworzymy sumy:

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

to mogą zajść dwa wypadki:

1.) $\lim S_n = S$; to znaczy: miejsce skupienia liczb S_n jest jedyną liczbą skończoną, mówimy tedy, że szereg jest <u>zbieżny</u>; <u>S</u> nazywamy <u>sumą szeregu</u>.

2.) $\lim_{n=\infty} S_n = \infty$; to znaczy: miejsce skupienia leży w nieskończoności, mówimy tedy że szereg jest <u>rozbieżny</u>.

Twierdzenie: Jeżeli szereg jest zbieżny, tedy da się przy dowolnie obranem ε oznaczyć n tak aby dla wszelkiego r było:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots u_{n+r} < \varepsilon$$

Ztąd wypływa: 1.) Koniecznym choć niewystarczającym warunkiem zbieżności szeregu jest ten, aby od pewnego miejsca u_n począwszy człony szeregu dążyły do zera czyli aby $\lim u_n = 0$. —

2.) Suma szeregu liczb bezwzględnych nie jest zależną od uporządkowania członów, mówimy przeto, że szereg zbieżny liczb bezwzględnych jest bezwarunkowo zbieżny.

Twierdzenie o dwóch szeregach.

Jeżeli z dwóch szeregów:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$$\Sigma = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

szereg Σ jest zbieżny, a od pewnego n począwszy są liczby v_n stale większe od u_n tedy jest szereg S także zbieżny, jeżeli zaś szereg Σ jest rozbieżny, a liczby v_n od pewnego n począwszy są stale mniejsze od u_n, tedy jest szereg S także rozbieżny.

Szereg geometryczny.

$S = 1 + q + q^2 + \dots q^n + \dots$ ma wzór sumy:

$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$; z którego wypływa, że szereg geometryczny jest 1) zbieżny gdy $q < 1$ i tedy ma sumę $S = \lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$

2.) rozbieżny gdy $q \geqq 1$.

Szeregu geometrycznego używa się do porównania z innymi szeregami dla zbadania ich zbieżności. Wypadają ztąd następujące znamiona zbieżności szeregu:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Jeżeli od pewnego n począwszy jest stale:

1.) $\sqrt[n]{u_n} < q$ $\quad q < 1$ to szereg zbieżny.

$\sqrt[n]{u_n} > q$ $\quad q > 1$ " " rozbieżny.

2.) $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$ $\quad q < 1$ " " zbieżny.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > q$ $\quad q > 1$ " " rozbieżny

Twierdzenie Cauchy'ego.

Szereg $S_1 = u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots$ jest wraz z szeregiem $S_2 = u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \dots$ równocześnie zbieżny i równocześnie rozbieżny.

Na tej podstawie poznamy że szereg:

$S = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots$ jest zbieżny skoro $\alpha > 1$, zaś rozbieżny gdy $\alpha < 1$ lub $\alpha = 1$.

W ostatnim wypadku szereg ma kształt:
$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{n}$ nazywa się
szeregiem harmonicznym i jest rozbieżnym.
Szeregu $\sum\frac{1}{n^{\alpha}}$ używa się do porównania
z innymi szeregami dla zbadania ich
zbieżności. Wypada ztąd nowe
znamię zbieżności szeregu $u_1+u_2+\ldots+u_n\ldots$
Jeżeli od pewnego n począwszy jest stale
$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>r$ a $r>1$. tedy szereg jest zbieżny.
$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)<r$ a $r<1$ " " " rozbieżny.
Na podstawie tego kryteryum dowodzi
się twierdzenia: Szereg, w którym:
$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^k+a_1n^{k-1}+a_2n^{k-2}+\ldots}{n^k+b_1n^{k-1}+b_2n^{k-2}+\ldots}$ jest
zbieżny skoro $b_1-a_1>1$ a rozbieżny
skoro $b_1-a_1<1$.
Znamion ogólnych, któreby rozstrzygały
we wszystkich możliwych wypadkach,
nie posiada analiza.

b.) Szeregi nieskończone liczb względnych (dodatnich i ujemnych)

1.) Twierdzenie. Jeżeli szereg bezwzględnych wartości członów danego szeregu
złożonego z liczb dodatnich i ujemnych
jest zbieżny, tedy jest dany szereg także

zbieżny. Suma szeregu takiego nie jest zależną od uporządkowania członów; mówimy tedy, że taki szereg jest bezwarunkowo zbieżny.

2.) Twierdzenie. Jeżeli szereg bezwzględnych wartości członów danego szeregu złożonego z liczb dodatnich i ujemnych jest rozbieżny a przytém szeregi dodatnich członów i ujemnych z osobna także rozbieżne jednakże obok tego $\lim |u_n| = 0$ tedy jest dany szereg zbieżny.

Suma takiego szeregu zależy od uporządkowania członów i przybrać może przy stósownem uporządkowaniu wszelką możliwą wartość. Taki szereg zbieżny nazywa się warunkowo zbieżny albo półzbieżny.

3. Twierdzenie. Jeżeli szereg bezwzględnych wartości członów danego szeregu, złożonego z liczb dodatnich i ujemnych jest rozbieżny a przytem szeregi członów dodatnich i ujemnych z osobna także rozbieżne, a obok tego $\lim_{n=\infty} |u_n| = r$ jest liczbą skończoną różną od zera, tedy jest dany szereg nieoznaczony czyli oscylacyjny. Suma szeregów oscylacyjnego nie dąży do żadnej

granicy tylko przeskakuji między liczbami od siebie odmiennymi, od jednej do drugiej, gdy n rośnie nieograniczenie.

4. Twierdzenie: Jeżeli szereg bezwzględnych wartości członów danego szeregu, złożonego z liczb dodatnich i ujemnych, jest rozbieżny, a przytem szeregi członów dodatnich i ujemnych zosobna rozbieżne a obok tego $\lim_{n=\infty} |u_n|$ jest także liczbą nieskończenie wielką, tedy dany szereg jest rozbieżny.

5. Twierdzenie. Jeżeli szereg bezwzględnych wartości członów danego szeregu, złożonego z liczb dodatnich i ujemnych jest rozbieżny a przytem z szeregów samych członów dodatnich lub samych członów ujemnych jest jeden zbieżny a drugi rozbieżny, tedy jest dany szereg rozbieżny a jego suma będzie równą $+\infty$ lub $-\infty$ podług tego, czy szereg członów dodatnich czy ujemnych jest rozbieżny.

Szeregi nieskończone liczb zespolonych.

Człony szeregu danego: $u_1 = a_1 + b_1 i$; $u_2 = a_2 + b_2 i$; $\ldots\ldots$ $u_n = a_n + b_n i$; $\ldots\ldots$

Bezwzględne wartości członów: $|u_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$; $|u_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$; $\ldots$ $|u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\ldots\ldots$

I. Twierdzenie: Jeżeli szereg bezwzględnych wartości członów danego szeregu złożonego z liczb zespolonych jest zbieżny, tedy jest dany szereg bezwarunkowo zbieżny.
Suma jego jest tedy pewną liczbą zespoloną $p+iq$, niezależną od uporządkowania członów.
II Twierdzenie. Jeżeli szereg bezwzględnych wartości członów danego szeregu, złożonego z liczb zespolonych jest rozbieżny, tedy może być dany szereg półzbieżny czyli warunkowo zbieżnym, oscylacyjnym lub rozbieżnym, zależnie od tego, czy przy nieograniczenie rosnącym n bezwzględne wartości jego członów dążą do zera, liczby skończonej lub nieskończonej). —

Iloczyny nieskończone.

kształt: $a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \dots . a_n \dots = \prod_{n=1}^{n=\infty} (a_n)$

kładąc: $a_n = 1 + u_n$.. otrzymujemy...

$a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots = (1+u_1)(1+u_2)(1+u_3) \dots (1+u_n) \dots$

czyli $\prod_{n=1}^{n=\infty} (a_n) = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1+u_n)$

I Twierdzenie. Iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{n=\infty} (1+u_n)$ ma pewną oznaczoną wartość, jeżeli szereg $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ jest bezwarunkowo zbieżny. Wartość takiego iloczynu jest niezależną od porządku czynników mówimy tedy, że dany iloczyn Π jest <u>bezwarunkowo zbieżny.</u>

<u>II</u> Twierdzenie: Jeżeli szereg $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ jest warunkowo zbieżny, a przytem szereg $u_1^2+u_2^2+u_3^2+\dots+u_n^2+\dots$ rozbieżny tedy ma iloczyn Π wartość równą zeru.—

<u>III</u>. Twierdzenie. Jeżeli szereg $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ jest warunkowo zbieżny a przytem szereg $u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2+\dots$ także zbieżny, wówczas jest dany iloczyn Π warunkowo zbieżny, dostarczając przy odmiennem uporządkowaniu także odmienne wartości.

<u>IV</u> Twierdzenie. Jeżeli szereg $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ jest rozbieżny, a przy tem szereg $u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2+\dots$ zbieżnym, tedy iloczyn Π rozbieżny, (to znaczy ma wartość nieskończenie wielką).

<u>V</u> Twierdzenie. Jeżeli szereg $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ jakotez szereg $u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2+\dots$ są rozbieżne tedy jest iloczyn Π nieoznaczonym.

Twierdzenia tedy opierają się na równości:

$$\log\Pi=(u_1+u_2+\dots+u_n+\dots)-(\alpha_1 u_1^2+\alpha_2 u_2^2+\dots\alpha_n u_n^2+\dots)$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ oznaczają pewne liczby dodatnie, mniejsze od 1.

Zamiana szeregów na iloczyny nieskończone.

wzór: $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots =$

$$= \frac{u_1}{1} \cdot \frac{u_1+u_2}{u_1} \cdot \frac{u_1+u_2+u_3}{u_1+u_2} \cdots \frac{u_1+u_2+\dots+u_n}{u_1+u_2+\dots u_{n-1}} \cdots$$

$$= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n \cdots$$

Zamiana iloczynów nieskończonych na szeregi.

wzór: $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = a_1 + a_1(a_2 - 1) + a_1 a_2 (a_3 - 1) + \dots$

$$= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

Ułamki ciągłe.

Określenie i znakowanie:

$$\left[\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots \frac{p_n}{q_n}\right] = \cfrac{p_1}{q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \dots + \cfrac{p_n}{q_n}}}$$

Wartości przybliżone czyli redukty ułamka ciągłego.

Pierwszy redukt: $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{p_1}{q_1}$

drugi redukt: $\frac{P_2}{Q_2} = \left[\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right] = \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2 + p}$

$\vdots$

n-ty redukt: $\frac{P_n}{Q_n} = \left[\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots \frac{p_n}{q_n}\right] =$

$$= \frac{P_{n-1} q_n + P_{n-2} p_n}{Q_{n-1} q_n + Q_{n-2} q_n}$$

Różnica między dwoma reduktami po sobie następującymi: $\Delta_n = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{p_1 p_2 p_3 \dots p_n}{Q_{n-1} Q_n}.$

Redukt w postaci sumy:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p_1}{Q_1} - \frac{p_1 p_2}{Q_1 Q_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{Q_2 Q_3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{Q_{n-1} Q_n} \dots$$

Różnica między dwoma dowolnymi reduktami:

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_m}{Q_m} = (-1)^m \frac{p_1 p_2 \dots p_m P_{m+1}}{Q_m . Q_n}$$

Przekształcenie ułamków ciągłych:

$$\left[\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots \frac{p_n}{q_n}\right] = \left[\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots \frac{1}{\alpha_n}\right] \text{ gdzie:}$$

$$\alpha_r = h_r q_r \; ; \; h_{2r} = \frac{p_1 p_3 \dots p_{2r-1}}{p_2 p_4 \dots p_{2r}} \; ; \; h_{2r-1} = \frac{p_2 p_4 \dots p_{2r-2}}{p_1 p_3 \dots p_{2r-1}}$$

Ułamki ciągłe nieskończone.

Ułamek ciągły nieskończony $\left[\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots \frac{1}{\alpha_n} \dots\right]$ jest zbieżny, skoro jeden z szeregów:

$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2r+1} + \dots$ albo

$\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \dots + \alpha_{2r} + \dots$ jest

rozbieżny, zaś nieoznaczony, gdy oba te szeregi są zbieżne.

Ułamki ciągłe peryodyczne.

Kształt:

$$x = \left[\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots \frac{p_m}{q_m}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots \frac{p_m}{q_m}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots \frac{p_m}{q_m} \dots\right]$$

Wartość ułamka peryodycznego:

$$x = \left[\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots \frac{p_m}{q_m + x}\right] \text{ czyli:}$$

$$x = \frac{P_m + x P_{m-1}}{Q_m + x Q_{m-1}}$$

gdzie P_m jest licznikiem a Q_m mianownikiem m-go reduktu danego ułamka ciągłego peryodycznego. —

III
Równania algebraiczne.

a.) Równania Igo stopnia.

Równanie pierwszego stopnia ogólne:

$$a_0 x + a_1 = 0$$

ogólne zredukowane równanie pierwszego stopnia:

$$x - \alpha_1 = 0$$

Rozwiązanie: Równanie pierwszego stopnia ma tylko jeden pierwiastek

$$x = \alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0},$$

Szczególne przypadki równań 1go stopnia.

1.) $a_1 = 0$

Kształt równania; $a_0 x = 0$

Pierwiastek; $x = 0$

2.) $a_0 = 0$,

Kształt równania: $0x + a_1 = 0$

Pierwiastek; $x = \infty$;

3.) $a_0 = a_1 = 0$

kształt równania: $0x + 0 = 0$

Pierwiastek nieoznaczony i dowolny.

b.) Równania IIgo stopnia.

Ogólne równanie drugiego stopnia:

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

Ogólne zredukowane równanie 2go stopnia:

$$x^2 - 2c_1 x + c_2 = 0;\quad c_1 = -\frac{a_1}{2a_0};\quad c_2 = \frac{a_2}{a_1}$$

Rozwiązanie: Równanie drugiego stopnia ma tylko dwa i tylko dwa pierwiastki w postaci:

$$x_1 = c_1 + \sqrt{c_1^2 - c_2} \; ; \; x_2 = c_1 - \sqrt{c_1^2 - c_2} \quad \text{czyli:}$$

$$x_1 = -\frac{a_1}{2a_0} + \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} \; ; \; x_2 = -\frac{a_1}{2a_0} - \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}$$

Związek między współczynnikami i pierwiastkami równania:

$x^2 - 2c_1x + c_2 = (x - x_1)(x - x_2)$	$a_0x^2 + a_1x + a_2 = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots I)$
$2c_1 = x_1 + x_2$; $c_2 = x_1x_2$	$\frac{a_1}{a_0} = -(x_1 + x_2)$; $\frac{a_2}{a_0} = x_1x_2 \ldots II)$
$\sqrt{c_1^2 - c_2} = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$	$\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} = a_0(x_1 - x_2) \ldots III)$

Rodzaje pierwiastków przy rzetelnych współczynnikach.

1.) $c_1^2 > c_2$ czyli $a_1^2 > 4a_0a_2$ oba pierwiastki rzetelne i różne.
2.) $c_1^2 = c_2$ czyli $a_1^2 = 4a_0a_2$ " " " równe
3.) $c_1^2 < c_2$ " $a_1^2 < 4a_0a_2$ " " zespolone i sprzężone.

Uwaga: Równanie drugiego stopnia ze współczynnikami rzetelnymi może mieć albo oba pierwiastki rzetelne albo także oba zespolone ale zarazem sprzężone.

Szczególne przypadki równań IIgo stopnia.

1.) $a_2 = 0$ Kształt równania: $a_0x^2 + a_1x = 0$

Pierwiastki: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{a_1}{a_0}$

2.) $a_1 = 0$ Kształt równania: $a_0x^2 + a_2 = 0$

Pierwiastki: $x_1 = +\sqrt{-\frac{a_2}{a_0}}$; $x_2 = -\sqrt{-\frac{a_2}{a_0}}$

3.) $a_0 = 0$; Kształt równania: $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$

Pierwiastki: $x_1 = \frac{a_2}{a_1}$; $x_2 = \infty$

4.) $a_2 = a_1 = 0$; Kształt równania : $a_0 x^2 = 0$

Pierwiastki: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$

5.) $a_2 = a_0 = 0$; kształt równania: $0x^2 + a_1 x = 0$

Pierwiastki: $x_1 = 0$; $x_2 = +\infty$

6.) $a_1 = a_0 = 0$; kształt równania: $0x^2 + 0x + a_2 = 0$

Pierwiastki: $x_1 = \infty$ $x_2 = \infty$

7.) $a_0 = a_1 = a_2 = 0$; Kształt równania: $0x^2 + 0x + 0 = 0$

Pierwiastki: x_1, x_2, nieoznaczone.

do przypadku 3go; Uwaga: z równania $a^0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$ otrzymamy bowiem kładąc $x = \frac{1}{z}$ równanie $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ zkąd wypada dla $a_0 = 0$ także $z_2 = 0$ przeto $x_2 = \infty$.

Równania III^{ciego} stopnia.

Równanie III^{go} stopnia ogólne:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

Równanie III^{go} stopnia zredukowane:

$$x^3 - 3c_1 x^2 + 3c_2 x - c_3 = 0 \qquad \text{gdzie:}$$

$$c_1 = -\frac{a_1}{3a_0}\,; \quad c_2 = \frac{a_2}{3a_0}\,; \quad c_3 = -\frac{a_3}{a_0}\,;$$

Równanie 3^{go} stopnia przekształcone za pomocą podstawienia $x = z + c_1$ otrzymuje kształt:

$$z^3 + 3pz - 2q = 0 \qquad \text{gdzie:}$$

$$p = c_2 - c_1^2\,; \quad q = c_1^3 - \tfrac{1}{2}c_1 c_2 + \tfrac{1}{2}c_3$$

Równanie 3go stopnia ma trzy i tylko trzy pierwiastki. Do ich obliczenia służy wzór Cardana: $z=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{2}+p^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{2}+p^3}}$; zważywszy, że trzeci pierwiastek z jednostki dodatniej ma trzy wartości $l_0=+1$; $l_{\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=\omega$ $l_{\frac{4\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=\omega^2$; wyznaczywszy bezwzględne wartości pierwiastków: $\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{2}+p^3}}=v_1$; a $\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{2}+p^3}}=v_2$ otrzymamy z wzoru Cardana trzy pierwiastki równania przekształconego w postaci:

$z_1=v_1+v_2$

$z_2=\omega v_1+\omega^2 v_2$ a ztąd pierwiastki

$z_3=\omega^2 v_1+\omega v_2$ równania danego:

$x_1=c_1+v_1+v_2$

$x_2=c_1+\omega v_1+\omega v_2$

$x_3=c_1+\omega^2 v_1+\omega v_2$

Związki pomiędzy współczynnikami a pierwiastkami równania IIIgo stopnia.

$x_3-3c_1x^2+3c_2x-c_3=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ ...... I)

$x_1+x_2+x_3=3c_1$; $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=3c_2$; $x_1x_2x_3=c_3$ ... II)

$3v_1=\omega^2(x_2-x_1)+\omega(x_3-x_1)$; $3v_2=\omega(x_2-x_1)+\omega^2(x_3-x_1)$ .... III)

$\sqrt{\frac{q^2}{2}+p^3}=-\frac{i\sqrt{3}}{18}(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)$ .... IV)

Rodzaje pierwiastków przy współczynnikach rzetelnych.

1.) … $q^2 + p^3 > 0$; w tym wypadku są $v_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}}$ i $v_2 = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}}$ liczbami rzetelnymi przeto:

$z_1 = v_1 + v_2$ jeden pierwiastek rzetelny

$$\left.\begin{aligned} z_2 &= -\frac{v_1+v_2}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(v_1 - v_2) \\ z_3 &= -\frac{v_1+v_2}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(v_1 - v_2) \end{aligned}\right\}$$ drugie dwa pierwiastki zespolone i zarazem sprzężone.

2.) … $q^2 + p^3 = 0$; w tym wypadku $v_1 = v_2 = \sqrt[3]{q}$

a przeto: $z_1 = 2\sqrt[3]{q}$; $z_2 = z_3 = -\sqrt[3]{q}$

wszystkie trzy pierwiastki rzetelne a dwa z nich zarazem równe. —

3.) … $q^2 + p^3 < 0$; w tym wypadku musi p być liczbą ujemną, przeto:

$$q + \sqrt{q^2 + p^3} = m + in = R_\varphi$$
$$q - \sqrt{q^2 + p^3} = m - in = R_{-\varphi}$$

gdzie $R = \sqrt{-p^3}$; $\operatorname{tang}\varphi = \dfrac{\sqrt{-q^2 - p^3}}{q}$

a wskutek tego są:

$v_1 = (\sqrt[3]{R})_{\frac{\varphi}{3}} = \varrho_{\frac{\varphi}{3}}$; $v_2 = (\sqrt[3]{R})_{-\frac{\varphi}{3}} = \varrho_{-\frac{\varphi}{3}}$ liczbami zespolonymi i sprzężonymi, zatem położywszy $\sqrt[3]{R} = \varrho = \sqrt{-p}$ otrzymamy pierwiastki:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= 2\varrho\cos\frac{\varphi}{3} \\ z_2 &= 2\varrho\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} \\ z_3 &= 2\varrho\cos\frac{\varphi - 2\pi}{3} \end{aligned}\right\}$$ wszystkie trzy pierwiastki rzetelne.

Szczególne przypadki równań III^go stopnia.

1.) $a_3=0$; kształt równania $a_0x^3+a_1x^2+a_2x=0$
Pierwiastki: jeden pierwiastek $x_1=0$; dwa inne oba rzetelne lub oba sprzężono-zespolone.

2.) $a_3=a_2=0$; kształt równania: $a_0x^3+a_1x^2=0$
Pierwiastki; Dwa równe zeru $x_1=x_2=0$
trzeci rzetelny $x_3=-\frac{a_1}{a_0}$

3.) $a_1=a_2=0$; kształt równania $a_0x^3+a_3=0$
(równanie dwuimienne). Pierwiastki:
jeden rzetelny: $x_1=\sqrt[3]{-\frac{a_3}{a_0}}$
dwa inne: $x_2=\omega\sqrt[3]{-\frac{a_3}{a_0}}$; $x_3=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{a_3}{a_0}}$ sprzężone i zespolone.—

4.) $a_3=a_2=a_1=0$ Kształt równania $a_0x^3=0$
Pierwiastki wszystkie trzy równe zeru.—

5.) $a_0=0$; Kształt równania: $0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$
Pierwiastki: dwa rzetelne a jeden nieskończenie wielki.

Z równania $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ otrzymamy bowiem kładąc $x=\frac{1}{z}$ równanie:
$a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$ skąd dla $a_0=0$ wypływa: $z_1=0$ przeto $x_1=\infty$

6.) $a_0=a_1=0$. Kształt równania $0x^3+0x^2+a_2x+a_3=0$
Pierwiastki: Dwa nieskończenie wielkie,
trzeci rzetelny $x_3=-\frac{a_3}{a_2}$

7.) $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ Kształt równania $0x^3 + 0x^2 + 0x + a_3 = 0$

Pierwiastki: wszystkie trzy nieskończenie wielkie

8.) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ Kształt równania $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0$

Pierwiastki nieskończone i dowolne.

Równania IV^{tego} stopnia.

Ogólne równanie IV^{tego} stopnia:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

Uproszczone równanie IV^{go} stopnia:

$$x^4 - 4c_1 x^3 + 6c_2 x^2 - 4c_3 x + c_4 = 0$$ gdzie:

$$4c_1 = -\frac{a_1}{a_0}\ ;\ 6c_2 = \frac{a_2}{a_0}\ ;\ 4c_3 = -\frac{a_3}{a_0}\ ;\ c_4 = \frac{a_4}{a_0}.$$

Podstawmy $x = z + c_1$ a otrzymamy równanie przekształcone: $z_4 + 6pz^2 - 4qz + r = 0$ gdzie

$$p = c_2 - c_1^2\ ;\ q = 2c_1^3 - 3c_1c_2 + c_3\ ;\ r = c_4 - 4c_3c_1 + 6c_2c_1^2 - 3c_1^4$$

Rozwiązanie równania 4^{go} stopnia.

Równanie 4go stopnia ma cztery i tylko cztery pierwiastki. Do obliczenia służy:

a.) Metoda Descartesa.

Załóżmy:

$$z^4 + 6pz^3 - 4qz + r = (z^2 + 2uz + v)(z^2 - 2uz + w) = 0$$

zkąd wypływa:

$$v + w - 4u^2 = 6p\ ;\ uv - uw = 2q\ ;\ vw = r$$

a ztąd otrzymamy na oznaczenie u równanie szóstego stopnia: $4u^6 + 12pu^4 + (9p^2 - r)u^2 - q^2 = 0$

czyli podstawiwszy $u^2 = y$ równanie 3^{go} stopnia:

$$4y^3+12py^2+(9p^2-r)y-q^2=0$$

które daje trzy wartości y_1, y_2, y_3; przy pomocy każdego z nich otrzymamy grupę wartości na u, v, w, a ztąd cztery pierwiastki: $z_1=-u+\sqrt{u^2-v}$; $z_2=-u-\sqrt{u^2-v}$; $z_3=u+\sqrt{u^2-w}$; $z_4=u-\sqrt{u^2-w}$

b.) Metoda Eulera.

Połóżmy w równaniu przekształconem

$z=u+v+w$ tedy otrzymamy:

$$u^2+v^2+w^2=-3p;\ u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=\frac{9p^2-r}{4}$$

$$uvw=\frac{q}{2}.$$

Ilości $u^2=y_1$; $v^2=y_2$; $w^2=y_3$ są więc trzema pierwiastkami równania trzeciego stopnia.

$$y^3+3py^2+\frac{9p^2-r}{4}y-\frac{q^2}{4}=0$$

Przy ich pomocy otrzymamy pierwiastki równania 4^{go} stopnia w postaci:

$$\left.\begin{aligned} z_1&=+\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}\\ z_2&=+\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}\\ z_3&=-\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}\\ z_4&=-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}\end{aligned}\right\}\ \text{gdzie } q>0$$

zaś

$$\left.\begin{aligned} z_1&=-\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}\\ z_2&=-\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}\\ z_3&=+\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_3}\\ z_4&=+\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}-\sqrt{y_3}\end{aligned}\right\}\ \text{gdzie } q<0$$

Równania n tego stopnia.

Ogólne równanie n tego stopnia:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Ogólne zredukowane równanie n tego stopnia:

$$x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - + \ldots \ldots + (-1)^n c_n = 0$$

gdzie $c_1 = -\frac{a_1}{a_0}$; $c_2 = \frac{a_2}{a_0}$, $\ldots c_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$.

Twierdzenie zasadnicze. Wszelkie równanie n tego stopnia musi mieć przynajmniej jeden pierwiastek ogólnie w postaci liczby zespolonej

$$x_1 = p + iq$$

Różnicę $x - x_1$ nazywamy czynnikiem pierwiastkowym.

Twierdzenie 1. Wielomian równania n tego stopnia jest podzielny przez swój czynnik pierwiastkowy.

Twierdzenie 2. Wielomian równania n tego stopnia da się zawsze rozłożyć na n czynników pierwszego stopnia.

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_{n-1} x + a_n = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

Twierdzenie 3. Wielomian n^go stopnia staje się na płaszczyźnie liczbowej n razy zerem.

Punkta zerowe $x_1, x_2, \ldots x_n$ wielomianu $f(x)$ są pierwiastkami równania $f(x) = 0$

innymi słowy: Wszelkie równanie n^go stopnia ma zawsze n i to tylko n pierwiastków.

Uwaga. Twierdzenie, że każde równanie n^{go} stopnia musi mieć n pierwiastków, jest prawdziwe, jeżeli się każdy pierwiastek x_1 liczy za tyle pierwiastków, ile razy różnica $x-x_1$ w wielomianie $f(x)$ jako czynnik występuje.
Jeżeli czynnik $(x-x_1)$ pojawia się w wielomianie $f(x)$ r razy, wówczas nazywamy pierwiastek x_1 pierwiastkiem wielokrotnym – r krotnym. –

Wielomian równania n^{go} stopnia, posiadającego pierwiastki wielokrotne, da się przedstawić ogólnie w postaci

$$f(x) = a_0(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\dots(x-x_m)^{\nu_m} \quad \text{gdzie}$$

$$\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_m = n$$

Związek między spółczynnikami a pierwiastkami równania n^{go} stopnia.

$$x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} - \dots + (-1)^n c_n = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \quad \text{I}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= x_1+x_2+\dots+x_n = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} x_\lambda \\ c_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} x_\lambda x_\mu \\ c_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{\lambda,\mu,\nu=1}^{n} x_\lambda x_\mu x_\nu \\ c_n &= x_1x_2x_3\dots\dots x_n \end{aligned}\right\} \text{II}$$

Pierwszy spółczynnik w zredukowanem równaniu n^{go} stopnia równy jest sumie pierwiastków, drugi sumie iloczynów po dwóch pierwiastków, i.t.d. ostatni iloczynowi wszystkich pierwiastków.

Rodzaje pierwiastków przy spółczynnikach rzetelnych.

Twierdzenie. Równanie n^{go} stopnia o spółczynnikach rzetelnych może mieć pierwiastki urojone tylko parami sprzężone.

Wniosek. Wszelki wielomian n^{go} stopnia o współczynnikach rzetelnych da się rozłożyć na czynniki rzetelne pierwszego lub drugiego stopnia.

Szczególne przypadki równań n^{go} stopnia.

Twierdzenie 1. Równanie n^{go} stopnia w którym r ostatnich spółczynniki $u_{n-r+1}, \ldots u_{n-1} u_n$ są zerami, ma r pierwiastków równych zeru.

Twierdzenie 2. Równanie r^{go} stopnia uważane za równanie n^{go} stopnia, gdzie $n > r$ ma r pierwiastków skończonych, zaś $(n-r)$ nieskończenie wielkich.

Szeregi arytmetyczne. —

z szeregu liczb:

$u_0\ u_1\ u_2 \ \ldots\ u_n \ldots$

otrzymamy odejmując każdą liczbę od poprzedzającej i kładąc $u_{r+1} - u_r = \Delta u_r$ nowy szereg: $\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2 \ldots \Delta u_n \ldots$

który nazywamy pierwszym szeregiem różnicowym danego szeregu głównego.

Z tego otrzymamy kładąc $\Delta u_{r+1} - \Delta u_r = \Delta^2 u_r$ tak zwany drugi szereg różnicowy:

$\Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2, \ldots \Delta^2 u_n \ldots$

podobnie postępując dalej otrzymamy r^{ty} szereg różnicowy

$\Delta^r u_0, \Delta^r u_1, \Delta^r u_2, \ldots \Delta^r u_n \ldots$

Wszelki człon któregokolwiek szeregu różnicowego da się wyrazić za pomocą członów szeregu głównego podług wzoru:

$$\Delta^r u_0 = u_r - \binom{r}{1} u_{r-1} + \binom{r}{2} u_{r-2} - \ldots + (-1)^r u_0$$

Nawzajem możemy przedstawić wszelki człon szeregu głównego za pomocą pierwszego członu tegoż szeregu głównego i za pomocą pierwszych członów jego szeregów różnicowych podług wzorów:

$$u_n = u_0 + \binom{n}{1} \Delta u_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 u_0 + \ldots \binom{n}{r} \Delta^r u_0 + \ldots + \Delta^n u_0$$

Szereg liczb w którym r^{te} różnice są stałe nazywa się szeregiem arytmetycznym r^{tego} rzędu.

Ogólny wyraz szeregu arytmetycznego r^{go} rzędu ma kształt:

$$u_n = u_0 + \binom{n}{1} \Delta u_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 u_0 + \ldots \binom{n}{r} \Delta^r u_0.$$

Wniosek. Szereg arytmetyczny r^{go} rzędu jest wyznaczony $(r+1)$ pierwszymi członami.

Wzór sumowy dla sumy n członów szeregu arytmetycznego r^{go} rzędu:

$$S_n = \binom{n}{1}u_0 + \binom{n}{2}\Delta u_0 + \binom{n}{3}\Delta^2 u_0 + \dots \binom{n}{r+1}\Delta^r u_0.$$

Ogólny wyraz szeregu arytmetycznego r^{tego} rzędu jest wielomianem r^{tego} stopnia ze względu na skaźnik n. Nawzajem: Wszelki wielomian r^{go} stopnia dostarcza dla wartości x, w równych odstępach po sobie następujących człony szeregu arytmetycznego r^{go} rzędu.

Wzór interpolacyjny Lagrange'a.

$$u_x = F(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r} u_\lambda \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{\lambda-1})(x-x_{\lambda+1})\dots(x-x_r)}{(x_\lambda-x_0)(x_\lambda-x_1)\dots(x_\lambda-x_{\lambda-1})(x_\lambda-x_{\lambda+1})\dots(x_\lambda-x_r)}$$

dostarcza wartości dla wszelkiego x, jeżeli znamy $(r+1)$ wartości $u_0, u_1, \dots u_r$ odpowiadających $(r+1)$ wartościom x: $x_0, x_1, \dots x_r$.

IV
Wyznaczniki
i
sposoby rugowania.

Wyznaczniki drugiego rzędu:

Wyjdźmy z dwóch równań pierwszego stopnia o jednej niewiadomej x

$$a_1 x + a_2 = 0$$
$$b_1 x + b_2 = 0$$

Aby równania te miały ten sam pierwiastek musi między ich spółczynnikami zachodzić związek kształtu:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

Określenie wyznacznika drugiego rzędu. – Różnicę iloczynów $a_1 b_2 - a_2 b_1$ nazywamy <u>wyznacznikiem</u> drugiego rzędu i oznaczamy szematem kwadratowym w kreski pionowe ujętym w postaci:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Nazywamy rzędy elementów $a_1 a_2$ względnie $b_1 b_2$ wierszami, zaś rzędy $\begin{matrix} a_1 \\ b_1 \end{matrix}$ względnie $\begin{matrix} a_2 \\ b_2 \end{matrix}$ kolumnami wyznacznika. —

Przekątnią szematu kwadratu idącą z góry lewej strony na dół prawej nazywamy przekątnią główną, zaś drugą idącą z góry prawej strony na dół lewej nazywamy przekątnią boczną.

Wyznacznik drugiego rzędu jest równy iloczynowi z elementów głównej przekątni mniej iloczynowi elementów bocznej przekątni.

Główne własności wyznaczników 2^{go} rzędu.

1.) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

2.) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}$

3.) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0$

4.) $m.\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & ma_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & a_2 \\ mb_1 & b_2 \end{vmatrix}$

5.) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ ma_1 & ma_2 \end{vmatrix} = 0$

6.) $\begin{vmatrix} \alpha_1+\alpha_2 , & a_2 \\ \beta_1+\beta_2 , & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & a_2 \\ \beta_2 & b_2 \end{vmatrix}$

7.) $\begin{vmatrix} \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n , & a_2 \\ \beta_1+\beta_2+\dots\beta_n , & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_2 \\ \beta_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & a_2 \\ \beta_2 & b_2 \end{vmatrix} + \dots \begin{vmatrix} \alpha_n & a_2 \\ \beta_n & b_2 \end{vmatrix}$

8.) $\begin{vmatrix} a_1+\lambda a_2 , & a_2 \\ b_1+\lambda b_2 , & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

Dz

Równania pierwszego stopnia o dwóch niewiadomych.

Metoda rugowania.

$$a_1 x + a_2 y = a_3 \quad \left| +b_2 \right| -b_1$$
$$b_1 x + b_2 y = b_3 \quad \left| -a_2 \right| \ \ a_1$$

$$x(a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_3 b_2 - a_2 b_3 \,;\; x = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y(a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 b_3 - a_3 b_1 \,;\; y = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Metoda wyznaczników:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D} \;;\; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}.$$

Dyskusya.

1.) $D \gtrless 0$ wartości x, y, skończone

2.) $D \gtrless 0$; $D_1 = D_2 = 0$ tedy $x = y = 0$.

2.) $D = 0$; $D_1 \gtrless 0$; $D_2 \gtrless 0$ wartości na x i y nieskończenie wielkie — równania sprzeczne.

3.) $D = 0$; $D_1 = 0$, tedy musi być także $D_2 = 0$ czyli $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$. równania od siebie zależne wartości na x i y nieoznaczone.—

4.) $D = 0$ $a_3 = b_3 = 0$ $D_1 = D_2 = 0$; równanie jednorodne tedy $\frac{x}{a_2} = \frac{y}{-a_1}$

Wyznaczniki trzeciego rzędu.

Wyjdźmy z trzech równań:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$$
$$b_1 x + b_2 y + b_3 = 0$$
$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$$

tedy otrzymamy z pierwszych dwóch równań wartości:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \;; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \;;$$ które wstaw

w trzecie dają następujący związek między spółczyn

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 = 0$$

Tę sumę iloczynów nazywamy wyznacznikiem trzeciego rzędu i określamy wzorem:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b$$

Reguła Sarrusa. Wyznacznik trzeciego rzęd równy jest sumie iloczynów z liczb umieszczonych na kierunkach równoległych do przekątni głów mniej sumie iloczynów liczb umieszczonych na kierunkach równoległych do przekątni bocznej we szematu Sarrusa:

$$\begin{array}{ccccc} {}^{+}a_1 & \overset{+}{a_2} & \overset{+}{a_3} & \overset{-}{a_1} & \overset{-}{a_2} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ \underset{-}{c_1} & \underset{-}{c_2} & \underset{-\;\;+}{c_3} & \underset{+}{c_1} & \underset{+}{c_2} \end{array}$$

Główne własności wyznaczników trzeciego rzędu

1) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

3.) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$

4.) $m\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & ma_2 & ma_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & a_2 & a_3 \\ mb_1 & b_2 & b_3 \\ mc_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

5.) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ ma_1 & ma_2 & ma_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \; , \; \begin{vmatrix} a_1 & ma_1 & a_3 \\ b_1 & mb_1 & b_3 \\ c_1 & mc_1 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

6.) $\begin{vmatrix} \alpha_1+\alpha_2 , & a_2 & a_3 \\ \beta_1+\beta_2 , & b_2 & b_3 \\ \gamma_1+\gamma_2 , & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & a_2 & a_3 \\ \beta_2 & b_2 & b_3 \\ \gamma_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

7.) $\begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n , & a_2 & a_3 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n , & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_n , & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & a_2 & a_3 \\ \beta_2 & b_2 & b_3 \\ \gamma_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \dots \begin{vmatrix} \alpha_n & a_2 & a_3 \\ \beta_n & b_2 & b_3 \\ \gamma_n & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

8.) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3 , & a_2 & a_3 \\ b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3 , & b_2 & b_3 \\ c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3 , & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Znakowanie Kroneckera:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |a_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, 3)$

Podwyznaczniki elementów.

Podwyznacznik δ_{ik} przynależny elementowi a_{ik} w wyznaczniku 3go rzędu jest wyznacznikiem

drugiego rzędu powstałym z D przez wypuszczenie
i tego wiersza i K tej kolumny. n.p.

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Minory elementów.

Wyznaczniki 3^{go} rzędu można uporządkować według elementów któregokolwiek wiersza lub kolumny.

$$D = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + a_{i3}\alpha_{i3} = a_{1k}\alpha_{1k} + a_{2k}\alpha_{2k} + a_{3k}\alpha_{3k}$$

Spółczynnik α_{ik} nazywamy minorem przynależnym elementowi.

Związek między minorem a podwyznacznikiem elementu. Wzór: $\alpha_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik}$

Własności minorów:

$$a_{i1}\alpha_{k1} + a_{i2}\alpha_{k2} + a_{i3}\alpha_{k3} = \begin{cases} D & \text{jeżeli } i = k \\ 0 & \text{,, } i \gtrless k \end{cases}$$

$$a_{1k}\alpha_{1i} + a_{2k}\alpha_{2i} + a_{3k}\alpha_{3i} = \begin{cases} D & \text{jeżeli } i = k \\ 0 & \text{,, } i \gtrless k \end{cases}$$

Równania pierwszego stopnia o 3ech niewiadomych.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_3$$

Rozwiązanie: $x_1 = \frac{D_1}{D}$; $x_2 = \frac{D_2}{D}$; $x_3 = \frac{D_3}{D}$;

$D_1 = a_1\alpha_{11} + a_2\alpha_{21} + a_3\alpha_{31}$; $D_2 = a_1\alpha_{12} + a_2\alpha_{22} + a_3\alpha_{32}$

$$D_3 = a_1\alpha_{13} + a_2\alpha_{23} + a_3\alpha_{33}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \end{vmatrix}$$

Dyskusya:

1.) $D \gtrless 0$ wartości x_1, x_2, x_3 skończone

2.) $D \gtrless 0$; $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ tedy $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

3.) $D = 0$ $D_1, D_2, D_3 \lesseqgtr 0$ równania sprzeczne

wartosci x_1, x_2, x_3 nieskończenie wielkie

4.) $D = 0$; $D_1 = 0$ tedy musi być także $D_2 = D_3 = 0$

równania od siebie zależne, wartości x_1, x_2, x_3 nieoznaczone.

5.) $D = 0$ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ przeto $D_1 = D_2 = D_3 = 0$

równania jednorodne, tedy $\frac{x_1}{\alpha_{i1}} = \frac{x_2}{\alpha_{i2}} = \frac{x_3}{\alpha_{i3}}$

Wyznaczniki n^{go} rzędu. —

a.) Określenie:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Znak $\sum \pm$ znaczy, że przy niezmienionych pierwszych wskazówkach robimy wszystkie przemiany drugich wskazówek a otrzymanym iloczynom, których będzie $n!$, nadajemy znak + lub —, podług tego czy przemiana jest dodatnia czy ujemna. Przemiana dodatnia ma parzystą ujemna zaś nieparzystą ilość spadków. n.p. 42531 ma 7 spadków (3+1+2+1) jest więc ujemną.

b. Znakowanie Kroneckera.

$$D = |a_{ik}| \quad (i, k, = 1, 2, 3, \dots n)$$

c.) Zasadnicze własności wyznaczników.

1.) $|a_{ik}| = |a_{ki}| \quad (i, k, = 1, 2, 3 \dots n)$

2.) $\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{ii} \dots a_{kk} \dots a_{nn} = -\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{ki} \dots a_{ik} \dots a_{nn}$

3.) $D = 0$ jeżeli $a_{ir} = a_{kr} \quad (r = 1, 2, \dots n)$

4.) $\sum \pm a_{11} a_{22} \dots m a_{ii} \dots a_{nn} = m \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{ii} \dots a_{nn}$

5.) $D = 0$ jeżeli $a_{kr} = \rho\, a_{ir} \quad (r = 1, 2, \dots n)$

6.) $\sum \pm a_{11} a_{22} \dots (\alpha_{ii} + \beta_{ii}) \dots a_{nn} = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots \alpha_{ii} \dots a_{nn} + \sum \pm a_{11} a_{22} \dots \beta_{ii} \dots a_{nn}$

7.) $\sum \pm a_{11} a_{22} \dots (\alpha_{ii} + \beta_{ii} + \dots + \mu_{ii}) \dots a_{nn} = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots \alpha_{ii} \dots a_{nn} +$
$+ \sum \pm a_{11} a_{22} \dots \beta_{ii} \dots a_{nn} + \dots \sum \pm a_{11} a_{22} \dots \mu_{ii} \dots a_{nn}$

8.)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{nk}, & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1,k-1}, & a_{1k} + \lambda_1 a_{11} + \dots \lambda_{k-1} a_{1,k-1} + \lambda_{k+1} a_{1,k+1} + \dots + \lambda_n a_{1n}, & a_{1,k+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2,k-1}, & a_{2k} + \lambda_2 a_{21} + \dots \lambda_{k-1} a_{2,k-1} + \lambda_{k+1} a_{2,k+1} + \dots + \lambda_n a_{2n}, & a_{2,k+1} \dots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{n,k-1}, & a_{nk} + \lambda_n a_{n1} + \dots + \lambda_{k-1} a_{n,k-1} + \lambda_{k+1} a_{n,k+1} + \dots + \lambda_n a_{nn}, & a_{n,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

[Ro]zwijanie wyznacznika podług elementów jednego [rz]ędu.

$$D = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \dots + a_{in}\alpha_{in}$$

$$D = a_{1k}\alpha_{1k} + a_{2k}\alpha_{2k} + \dots + a_{nk}\alpha_{nk}$$

$$\alpha_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik}$$

[α_{ik}] nazywa się minorem, Δ_{ik} podwyznacznikiem [p]rzynależnym elementowi a_{ik} wyznacznika D.

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,k-1} & a_{ik} & a_{i,k+1} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Własności minorów.

$$\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\alpha_{kr} = a_{i1}\alpha_{k1} + a_{i2}\alpha_{k2} + \dots + a_{in}\alpha_{kn} = \begin{cases} D & \text{dla } i = k \\ 0 & \text{''}\ \ i \gtrless k \end{cases}$$

$$\sum_{r=1}^{n} a_{rk}\alpha_{ri} = a_{1k}\alpha_{1i} + a_{2k}\alpha_{2i} + \dots + a_{nk}\alpha_{ni} = \begin{cases} D & \text{''}\ \ i = k \\ 0 & \text{''}\ \ i \lessgtr k \end{cases}$$

Układ równań pierwszego stopnia o n niewiadomych.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_n$$

$$x_i = \frac{a_1\alpha_{i1} + a_2\alpha_{i2} + \dots + a_n\alpha_{in}}{D} = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

Dyskussya.

1.) $D \gtrless 0$, wartości $x_1\, x_2 \dots x_n$ skończone

2.) $D \gtrless 0$ $D_1 = D_2 = \dots = D_n = 0$; $x_1\, x_2 \dots x_n = 0$

3.) $D = 0$ $D_1\, D_2 \dots D_n \gtrless 0$ równanie sprzeczne

$x_1\, x_2 \dots x_n$ nieskończenie wielkie

4.) $D = 0$ $D_1 = D_2 = \dots = D_n = 0$ równania zależne

5.) $D = 0$ $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ równania jednorodne

mamy tedy: $\dfrac{x_1}{\alpha_{i1}} = \dfrac{x_2}{\alpha_{i2}} = \dots\dots = \dfrac{x_n}{\alpha_{in}}.$

Określenie wyznaczników podług Weierstrassa.—

Wyznacznik $n$go rzędu jest funkcyą utworzoną z n^2 elementów układu kwadratowego (a_{ik}) oznaczoną przez $|a_{ik}|$ która ma następujące własności zasadnicze.

1.) da się wyrazić linjowo t. z. w pierwszym stopniu i jednorodnie przez elementy pierwszego wiersza, czyli innymi słowy jest jednorodną linjową funkcyą elementów pierwszego wiersza a więc ma kształt:

$F = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} + \dots\dots + a_{1n}\alpha_{1n}$

gdzie spółczynniki α są od elementów $a_{11}, a_{12} \dots a_{1n}$ niezależne.—

2.) zmienia swój znak, jeżeli pierwszy wiersz z którymkolwiek innym przestawimy.

3.) ma wartość = 1, jeżeli elementy ^{w} przekątni głównej są równe 1, a wszystkie inne równe 0.
Z tego określenia wynika że taka funkcya
$$F = \sum \pm a_{11}\, a_{22} \dots a_{ii} \dots a_{nn} = D$$
Powyższe określenie może być punktem wyjścia w teorji wyznaczników i prowadzi w sposób prosty do dalszych własności wyznaczników.

Mnożenie wyznaczników.

Twierdzenie: $|a_{ik}| \cdot |b_{ik}| = |c_{ik}|$

Dane dwa wyznaczniki $n$go rzędu
$$A = |a_{ik}| \qquad B = |b_{ik}|$$
ich iloczyn $A.B$ jest tedy nowym wyznacznikiem tego samego rzędu
$$C = |c_{ik}|$$
którego elementy tworzą się podług jednej z następujących reguł:
$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rk} \qquad 1)$$
$$c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{in} b_{kn} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{kr} \qquad 2)$$
$$c_{ik} = a_{1i} b_{k1} + a_{2i} b_{k2} + \dots + a_{ni} b_{kn} = \sum_{r=1}^{n} a_{ri} b_{kr} \qquad 3)$$
$$c_{ik} = a_{1i} b_{1k} + a_{2i} b_{2k} + \dots + a_{ni} b_{nk} = \sum_{r=1}^{n} a_{ri} b_{rk} \qquad 4)$$

Iloczyn dwóch wyznaczników 2go rzędu.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 l_1 + a_2 m_1, & b_1 l_1 + b_2 m_1 \\ a_1 l_2 + a_2 m_2, & b_1 l_2 + b_2 m_2 \end{vmatrix} \qquad 1)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 l_1 + a_2 l_2, & b_1 l_1 + b_2 l_2 \\ a_1 m_1 + a_2 m_2, & b_1 m_1 + b_2 m_2 \end{vmatrix} \qquad 2)$$

3) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 l_1 + b_1 l_2, & a_2 l_1 + b_2 l_2 \\ a_1 m_1 + b_1 m_2, & a_2 m_1 + b_2 m_2 \end{vmatrix}$$

4) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 l_1 + b_1 m_1, & a_2 l_1 + b_2 m_1 \\ a_1 l_2 + b_1 m_2, & a_2 l_2 + b_2 m_2 \end{vmatrix}$$

Iloczyn dwóch wyznaczników trzeciego rzędu.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 l_1 + b_1 l_2 + c_1 l_3, & a_2 l_1 + b_2 l_2 + c_2 l_3, & a_3 l_1 + b_3 l_2 + c_3 l_3 \\ a_1 m_1 + b_1 m_2 + c_1 m_3, & a_2 m_1 + b_2 m_2 + c_2 m_3, & a_3 m_1 + b_3 m_2 + c_3 m_3 \\ a_1 n_1 + b_1 n_2 + c_1 n_3, & a_2 n_1 + b_2 n_2 + c_2 n_3, & a_3 n_1 + b_3 n_2 + c_3 n_3 \end{vmatrix}$$

Kwadrat wyznacznika jakiegokolwiek rzędu. —

$$|a_{ik}|^2 = |c_{ik}| \qquad \text{gdzie}$$

$c_{ik} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{rk}$ 1) albo $c_{ik} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{kr}$ 2)

albo $c_{ik} = \sum_{r=1}^{n} a_{ri} a_{kr}$ 3) albo $c_{ik} = \sum_{r=1}^{n} a_{ri} a_{rk}$ 4)

Mamy tu $c_{ik} = c_{ki}$ to znaczy, w wyznaczniku takim $|c_{ik}|$ są elementy, do przekątni głównej symetrycznie ułożone, zarazem równe. A zatem Kwadrat jakiegokolwiek wyznacznika jest wyznacznikiem symetrycznym tego samego rzędu. —

Kwadrat wyznacznika drugiego rzędu:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x_1^2+x_2^2, & x_1y_1+x_2y_2 \\ x_1y_1+x_2y_2, & y_1^2+y_2^2 \end{vmatrix}$$

Kwadrat wyznacznika trzeciego rzędu:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2, & x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3, & x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3 \\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3, & y_1^2+y_2^2+y_3^2, & y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3 \\ x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3, & y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3, & z_1^2+z_2^2+z_3^2 \end{vmatrix}$$

Wyznaczniki dołączone.

Określenie: Jeżeli z wyznacznika $D=|a_{ik}|$ utworzymy nowy wyznacznik w ten sposób, że w miejsce każdego elementu a_{ik} wstawimy przynależny mu minor α_{ik}, to ten nowy wyznacznik $\Delta=|\alpha_{ik}|$ nazywa się wyznacznikiem dołączonym do wyznacznika D.

Twierdzenie: $\Delta = D^{n-1}$ to znaczy $|\alpha_{ik}| = |a_{ik}|^{n-1}$

czyli słowami:

Wyznacznik dołączony do wyznacznika n-go rzędu jest równy $(n-1)^{szej}$ potędze wyznacznika głównego.

Minory elementów wyznacznika dołączonego.

Oznaczmy przez A_{ik} minor przynależny elementowi α_{ik} wyznacznika $\Delta=|\alpha_{ik}|$ dołączonego do wyznacznika głównego $D=|a_{ik}|$ tedy otrzymamy wzór: $A_{ik} = a_{ik} \cdot D^{n-2}$

Minor przynależny jakiemukolwiek elementowi wyznacznika dołączonego jest równy odpowiedniemu elementowi wyznacznika głównego, pomnożonemu przez $(n-2)$gą potęgę tego głównego wyznacznika. —

Sposoby rugowania.

a. Równania o jednej niewiadomej:

Dane dwa równania, jedno n^{go} drugie m^{go} stopnia:

$$f_1 = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_n = 0$$
$$f_2 = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots\dots + b_m = 0$$

Warunek aby oba równania miały jeden wspólny pierwiastek jest:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & & \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n & 0 & \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_0 & \dots & \dots & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & & \\ 0 & b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_m & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_m \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ wierszy} \\ = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ wierszy} \end{array}$$

Nazywamy wyznacznik R <u>rugownikiem</u> równań $f_1 = 0$ i $f_2 = 0$

Warunek aby oba równania miały $(k+1)$ wspólnych pierwiastków jest:

$$R_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} m-k \text{ wierszy} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} n-k \text{ wierszy} \end{matrix} = 0$$

b.) Równania o dwóch niewiadomych.

Dane dwa równania o dwóch niewiadomych x i y, jedno n^{go} drugie m^{go} stopnia, uporządkowane podług potęg mają tedy kształt:

$$f_1(xy) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots \dots + a_n = 0$$

$$f_2(xy) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} \dots \dots + a_m = 0$$

gdzie spółczynniki a_r, i b_r są r^{go} stopnia ze względu na niewiadomą y.

Aby znaleźć takie układy wartości x i y, które obu równaniom zadość czynią, należy z obu równań niewiadomą x wyrugować.

Rugownik obu równań:

$$R = 0$$

da równanie $m.n^{go}$ stopnia ze względu na niewiadomą y.

Twierdzenie. Każdemu z mn pierwiastków y równania $R=0$ odpowiada tylko jeden pierwiastek x. Otrzymujemy przeto mn układów wartości, x_1, y_1; x_2, y_2; $\dots \dots x_{mn}, y_{mn}$ które zadość czynią dwom danym równaniom.

V
Ilości zmienne i ich funkcye.

a.) Ilości zmienne.

Określenie: Ilość nazywa się zmienną, jeżeli może przybierać rozmaite wartości liczebne.

Ilość nazywa się stałą, jeżeli ma pewną niezmienną wartość liczebną.

Ilości zmienne oznaczamy ostatnimi literami alfabetu: x, y, z ...; ilości stałe pierwszymi literami: $a, b, c, \ldots$.

Ilość zmienną nazywamy zmienną rzetelną lub zmienną urojoną, podług tego, czy rozmaite wartości liczebne, które przybierać może są rzetelne czy urojone.

Wartości zmiennej rzetelnej możemy uzmysłowić punktami na linji prostej rozmieszczonymi. Wartości zmiennej urojonej możemy uzmysłowić punktami na płaszczyźnie rozmieszczonymi.

Ilość zmienna nazywa się nieograniczenie zmienną w pewnym obszarze liczb, jeżeli wszystkie wartości liczebne, jakie przybiera należą do pewnego skończonego obszaru liczb.

Ilość zmienna nazywa się ograniczenie zmienną w pewnym obszarze liczb, jeżeli przybierać może tylko pewne wartości liczbowe z danego obszaru liczb.

Zmienna rzetelna nazywa się zmienną w odstępie (a b) to znaczy między dwiema liczbami a i b jeżeli między dwiema dowolnie blizko w tym odstępie położonymi liczbami x_0 i $x_0+\delta$ nie ma wartości liczebnej, którejby ona przy zmianie od x_0 do $x_0+\delta$ nie przybrała.

Ilość zmienia się ciągle od a do b znaczy, że ilość przebiega wszystkie liczby od a do b bez żadnego skoku. Jej zmianie odpowiadają punkta na odcinku prosto linijnym AB.

Ilość ciągle zmienna zbliża się do pewnej wartości b, jeżeli ~~wielki~~ szereg liczb, który byśmy z jej wartości zmiennych potworzyć mogli, ma w miejscu w b swe miejsce skupienia czyli zdąża do wartości granicznej b.

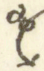
Zmienna nazywa się nieskończenie wielką dodatnią lub ujemną, jeżeli wszelki szereg liczb, jakibyśmy z jej wartości potworzyli posiada własność:

1.) że od pewnego miejsca począwszy jego człony są tylko dodatnie lub tylko ujemne

2.) że dla każdej liczebnie dowolnie wielkiej liczby pomyślanej można znaleźć w utworzonym szeregu miejsce, od którego począwszy wszystkie człony są bezwzględnie większe od liczby pomyślanej.

Zmienna urojona nazywa się zmienną ciągłą, jeżeli wszystkie wartości, jakie przyjmuje należą do złączonego obszaru liczb zespolonych. Jej zmiennom odpowiadają wszystkie punkta na pewnem polu płaszczyzny

Zmienna urojona nazywa się ciągłą nieograniczenie zmienną w pewnym miejscu, jeżeli przybierać może wszystkie wartości należące do dowolnie małego ale skończonego otoczenia tego miejsca.

Zmienna urojona ciągła, nazywa się ciągłą ograniczenie zmienną w pewnem miejscu a, jeżeli wartości jakie zmienna w pobliżu tego miejsca przyjmuje tworzą albo pole płaskie na którego obwodzie leży dane miejsce jak , albo tylko krzywą przez to miejsce przechodzącą 

Jeżeli o zmiennej urojonej wiemy, że zmienia się ciągle od pewnej liczby zespolonej $\underline{a}$ do liczby zespolonej $\underline{b}$, to niewiadomo jeszcze, jakie wartości pośrednie przyjmuje. Sposób zmiany może być nieskończonej rozmaitości.

Zmienna urojona $x+yi$ nazywa się <u>nieskończenie małą</u> jeżeli jej wartość bezwzględna $|x+yi| = \sqrt{x^2+y^2}$ staje się mniejszą od wszelkiej liczby dowolnie małej.

Zmienna urojona $x+yi$ nazywa się <u>nieskończenie wielką</u>, jeżeli jej wartość bezwzględna $|x+yi| = \sqrt{x^2+y^2}$ staje się większą od wszelkiej liczby dowolnie wielkiej.

Nieskończenie wielkim wartościom liczebnym zespolonym odpowiadają na płaszczyźnie punkta nieskończenie odległe.

b) Funkcye jednej zmiennej.

Określenie. Jeżeli dwie wartości zmiennej x i y tak są od siebie zależne, że do każdej wartości jednej zmiennej x należy jedno lub więcej wartości drugiej zmiennej y

tedy mówimy że y jest funkcyą zmiennej x i piszemy $y = f(x)$. Nazywamy też y zmienną zależną, x zaś zmienną niezależną.

Funkcya nazywa się jednowartościowa albo wielowartościowa podług tego czy do każdej wartości zmiennej niezależnej x, należy jedna lub więcej wartości zmiennej zależnej y.

Podział funkcyi.

Funkcye dzielą się na algebraiczne i przestępne.

a.) Funkcye algebraiczne. Zmienna y nazywa się funkcyą algebraiczną zmiennej niezależnej x jeżeli związek między obu zmiennymi określony jest za pomocą równania w którym się pojawiają tylko działania algebraiczne na obu zmiennych w skończonej ilości wskazane; wszystkie inne funkcye nazywają się funkcyami przestępnymi.

Najogólniejszy typ funkcyi algebraicznej n^{go} rzędu jest:

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots\ldots + A_{n-1} y + A_n = 0$$

gdzie spółczynniki A_k są wielomianami dowolnego stopnia ze względu na zmienną niezależną x, to znaczy kształtu:

$$A_k = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1} x + a_m$$

zmienna zależna y jest tu jeszcze funkcyą zmiennej niezależnej x funkcyą n wartościową.

Funkcye algebraiczne pierwszego rzędu nazywają się funkcyami wymiernymi.

Funkcye wymierne są funkcyami jednowartościowymi. —

Funkcye wymierne dzielą się na funkcye całkowite i ułamkowe.

Funkcye całkowite wymierne dzielą się podług stopni.

Funkcya całkowita wymierna n^{go} stopnia:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Nazwę „funkcya" wprowadził Jan Bernoulli (1667–1748)

Funkcya całkowita wymierna pierwszego stopnia: $y = a_0 x + a_1$

nazywa się funkcyą linjową.

Funkcya wymierna ułamkowa:

$$y = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + b_{n-1} x + b_n}$$

jest niewłaściwą, gdy $m \geqq n$

jest właściwą, gdy $m < n$

Funkcya ułamkowa niewłaściwa da się przedstawić jako suma funkcyi całkowitej wymiernej i właściwej funkcyi ułamkowej.

Szczególne funkcye algebraiczne są:

1. funkcye potęgowe $y = x^m$

2. funkcye pierwiastkowe $y = \sqrt[m]{x}$

gdzie m jest dowolną liczbą wymierną.

Funkcye przestępne

Wszystkie inne prócz algebraicznych możliwe funkcye, zalicza się do funkcyi przestępnych. Należą tu przedewszystkiem następujące funkcye proste znane z wstępu do analizy:

1. funkcya potęgowa i pierwiastkowa z wykładnikiem niewymiernym: a

$y = x^a$ względnie $y = \sqrt[a]{x}$

2.) funkcya wykładnicza: $y = a^x$

w szczególności funkcya wykładnicza naturalna $y = e^x$

3.) funkcya logarytmiczna $y = {}^a\log x$

w szczególności logarytm naturalny $y = \log x$

4.) Funkcye goniometryczne

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$

5.) Funkcye cyklometryczne

$y = \operatorname{arc} \sin x$, $y = \operatorname{arc} \cos x$, $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

$y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$, $y = \operatorname{arc} \sec x$, $y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$

prócz tego 1.) funkcya funkcyi: $y = f(u) = f[\varphi(x)]$

2.) funkcya złożona $y = f(u, v, w, \ldots)$

gdzie $u, v, w, \ldots$ są funkcyami prostymi algebraicznymi lub przestępnymi zmiennej niezależnej x.

Funkcye algebraiczne i znanych ze wstępu do analizy sześć rodzajów prostych funkcyi przestępnych: to jest funkcye potęgowe z wykładnikiem niewymiernym, funkcye wykładnicze i funkcye goniometryczne jakoteż ich odwrócenia: funkcye pierwiastkowe z wykładnikiem niewymiernym, funkcye logarytmiczne i funkcye cyklometryczne tworzą wraz z swymi połączeniami pierwszy przedmiot analizy.

Podług sposobu określającego związek między zmienną zależną i niezależną dzielą się jeszcze wszystkie funkcye na

a.) funkcye __uwikłane__ określone danem nierozwiązanem równaniem między zmienną niezależną x i jej funkcyą y w postaci

$$f(xy) = 0$$

b.) funkcye __wyraźne__ określone rozwiązanem równaniem w postaci:

$$y = \varphi(x)$$

Przebieg funkcyi jednej zmiennej niezależnej:

a.) Przebieg funkcyi zmiennej rzeczywistej.

Przebieg funkcyi zmiennej rzeczywistej uwypukla się za pomocą układu osi Descartesa w najprostszy sposób za pomocą układu prostokątnego uważając wartości zmiennej niezależnej x za odcięte a odpowiadające im wartości funkcyi y za rzędne punktów, tym sposobem otrzymuje się pewne następstwo punktów, które z sobą połączone dają przybliżony obraz funkcyi zmiennej rzeczywistej.—

Dla dokładniejszego poznania jaki przebieg ma zmienna zależna, gdy zmienna niezależna x kolejno wszelkie wartości rzeczywiste przybiera, potrzeba zbadać:

1.) czy przebieg funkcyi wszędzie jest <u>ciągły</u> czy nie.

2.) jakie <u>osobliwe wartości</u> pojawiają się między wartościami funkcyi

3.) jakie <u>wartości</u> przybiera funkcya w nieskończoności (t. z. gdy zmienna niezależna staje się nieskończenie wielką).

W badaniu tem ograniczamy się do funkcyi wyraźnej $y = f(x)$ jednowartościowej w pewnem odstępie od $x=a$ do $x=b$.

ad 1.) Funkcya nazywa się ciągłą w pewnem miejscu x jeżeli się da oznaczyć taka liczba h, skończona a różna od zera aby różnica $f(x \pm h) - f(x)$ była bezwzględnie biorąc mniejsza od przyjętej dowolnie małej liczby δ, i mniejszą pozostała gdy h nieograniczenie maleje, czyli gdy zamiast h postawimy θh gdzie θ oznacza liczbę zmieniającą się między granicami 1 i 0, co wyrażamy warunkiem:

$$f(x \pm \theta h) - f(x) < \delta \quad \text{dla} \quad 0 < \theta < 1$$

Wniosek. Wartość funkcyi ciągłej w miejscu x t. z. $f(x)$ musi wystąpić jako wartość graniczna tak wyrażenia $f(x+h)$ jakoteż wyrażenia $f(x-h)$ gdy h staje się zmienną nieskończenie małą t. z. dąży do zera.

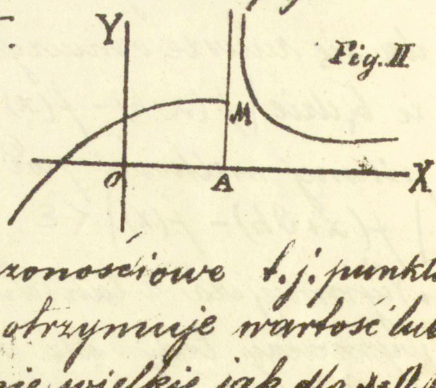
W każdem miejscu x funkcyi ciągłej $f(x)$ da się zawsze oznaczyć taki obszar skończony że będzie $|f(x+h) - f(x)| = \varepsilon$ t. j. pewnej przypisanej wielkości podczas gdy będzie stale $|f(x+\theta h) - f(x)| < \varepsilon$

Najmniejsza z takich wartości h n. p. h' wyznaczy tedy dla każdego miejsca od a do b odstęp w którym bezwzględna różnica między wartościami funkcyi będzie pewnie mniejszą od ε

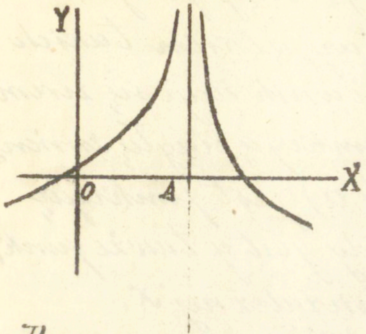
Taka funkcya ciągła, dla której da się wyznaczyć skończoną wartość h tak ażeby dla wszelkich x zawartych w odstępie <u>a</u> do <u>b</u> sprawdzała się nierówność $|f(x+\vartheta h)-f(x)|<\varepsilon$ gdzie $0<\vartheta<1$ a ε jest dowolnie daną liczbą skończoną, nazywa się funkcyą <u>jednostajnie ciągłą</u>

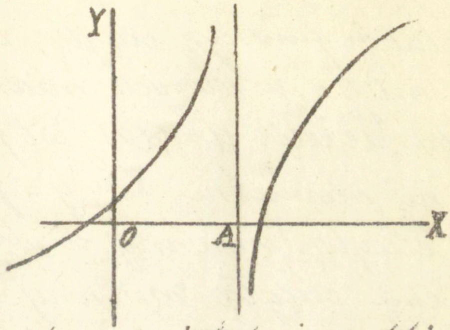
ad 2.) Poszczególne miejsca funkcyi, które nie odpowiadają warunkom ciągłości nazywamy miejscami <u>osobliwymi</u>. Należą tu:

1.) punkta, w których wartości $f(x+h)$ i $(f-h)$ dla h dążącego do 0, do równych dążą granic jak AM' i AM na fig I lub AM' i $A\infty$ na fig II.



2.) punkta nieskończonościowe t. j. punkta w których funkcya otrzymuje wartość lub wartości nieskończenie wielkie jak dla $x=0A$ w fig III i w fig IV.





Pierwsze nazywamy punktami *istotnie osobliwymi*, drugie *nieistotnie osobliwymi*.

Jako punkta *osobliwe* uważa się także te miejsca, na których wartość funkcyi jest nieoznaczoną n.p. $\sin\frac{1}{x}$ dla $x=0$.

ad 3.) Jeżeli funkcya jest ciągłą od $-\infty$ do $+\infty$, tedy należy zbadać jej zachowanie się dla nieskończenie wielkiego x. Wartość funkcyi dla $x=\infty$ może być 1.) skończona n.p.

$$y=\left(a+\frac{b}{x}\right)_{x=\infty}=a$$

2.) nieskończenie wielka n.p. $y=(x^m)_{x=\infty}=+\infty$ $(m>0)$

3.) ograniczenie nieoznaczona t.z. nieoznaczona ale skończona. $y=(\sin x)_{x=\infty}$ nieoznaczona między -1 i $+1$.

4.) nieograniczenie nieoznaczona $y=(x\sin x)_{x=\infty}$ nieoznaczona między $-\infty$ i $+\infty$

Twierdzenia o funkcyach ciągłych.

1.) Suma albo różnica dwóch lub więcej funkcyi ciągłych jest znowu funkcyą ciągłą

2.) Iloczyn dwóch lub więcej funkcyi ciągłych jest także funkcyą ciągłą.

3.) Iloraz dwóch funkcyi ciągłych jest także funkcyą ciągłą, z wyjątkiem takich miejsc, w których mianownik staje się zerem.
4.) Jeżeli $u = \varphi(x)$ jest funkcyą ciągłą zmiennej niezależnej x a $y = f(u)$ jest funkcyą ciągłą zmiennej u, tedy jest y także funkcyą ciągłą zmiennej niezależnej x.

Przebieg funkcyi zmiennej urojonej.

$$y = f(x).$$

Przebieg funkcyi jednowartościowej zmiennej zespolonej X uzmysławia się za pomocą dwóch płaszczyzn. Każdej wartości $x + iy$ zmiennej zespolonej X odpowiada jeden punkt na płaszczyźnie I, którego spółrzędne prostokątne są x i y przynależne wartości funkcyi $y = f(x)$ n. p.
$u + vi$ punkt na płaszczyźnie II, którego spółrzędne są u i v. Jeżeli tedy do każdej wartości X należy pewna wartość Y, to każdemu punktowi lub elementowi płaszczyzny I-ej odpowiadać będzie pewien punkt lub element płaszczyzny II. Zależność zmiennej Y od zmiennej niezależnej X przedstawia się przeto jako odwzorowanie płaszczyzny II na płaszczyźnie I.

Funkcye kilku zmiennych niezależnych.

Jeżeli wartość zmiennej z zależy od wartości dwóch od siebie niezależnych zmiennych x i y w ten sposób, że do każdego układu wartości x, y, należy jedna lub więcej wartości zmiennej zależnej z tedy nazywamy z funkcyą dwóch zmiennych niezależnych x i y.

Funkcye dwóch zmiennych niezależnych dzielą się pod względem analitycznego wyrażenia na algebraiczne i przestępne. 2.) pod względem formy na wyraźne $z = f(x\, y..)$ i uwikłane

$$f(x, y, z..) = 0.$$

Przebieg funkcyi dwóch zmiennych niezależnych uzmysławia się za pomocą układu, stosunków spółrzędnych w przestrzeni w najprostszy sposób za pomocą układu prostokątnego. Przedstawiamy tedy wartości x i y punktem na płaszczyźnie XOY i odcinamy przynależną wartość z na prostej przez ten punkt równolegle do osi OZ przechodzącej. Koniec odcinka przedstawia tedy jeden układ przynależnych wartości x, y, z.

Tym sposobem otrzymujemy zbiór punktów w przestrzeni funkcyą określonych.

Przegląd o rozmieszczeniu punktów uzyskany, skoro jednej ze zmiennych niezależnych n.p. x nadamy wartość stałą $x = a$ a drugiej y różne wartości w jej zakresie zmienności, łącząc lub otrzymane punkta otrzymamy w granicy krzywą w płaszczyźnie równoległej do YOZ. Ze zmianą wartości x otrzymamy coraz inne krzywe w płaszczyznach do YOZ równoległych.

Podobnie otrzymamy dla różnych wartości y szereg krzywych równoległych do płaszczyzny XOZ. Oba rodzaje krzywych tworzą powierzchnię, która jest obrazem funkcyi, a krzywe same są przekrojami tej powierzchni równoległymi do płaszczyzn YOZ i XOZ.

Ciągłość funkcyi dwóch zmiennych niezależnych.

Funkcya dwóch zmiennych niezależnych nazywa się ciągłą w miejscu xy, jeżeli dadzą się oznaczyć takie wartości skończone h i k dla których różnica

$f(x+\theta_1 h, y\pm\theta_2 k)-f(x,y)$ gdzie $0<\theta_1<1$; i $0<\theta_2<1$, jest bezwzględnie biorąc stale mniejszą od danej dowolnie małej liczby δ.

Uwaga.

Badanie ciągłości funkcyi dwóch zmiennych niezależnych da się sprowadzić do badania ciągłości tej funkcyi ze względu na każdą zmienną niezależną z osobna. —

Zasady rachunku różniczkowego.

I. Różniczki i pochodne funkcyi jednej zmiennej niezależnej. –

Ciągłość i różniczkowalność funkcyi.

Określenie. Aby utrwalić miarę na oznaczenie sposobu w jaki funkcya ciągła $y=f(x)$ zmienia swe wartości, gdy zmienna niezależna x rośnie lub maleje, oznaczamy przez Δx, różnicę x to znaczy przyrost zmiennej x, a przez Δy różnicę y czyli odpowiedni przyrost zmiennej y, tedy otrzymamy $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ $(\Delta x \lesseqgtr 0)$

Tę zmianę zmiennej y możemy porównać z zmianą zmiennej x a otrzymamy <u>stosunek różnicowy</u>

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (\Delta x \lesseqgtr 0)$$

który daje <u>miarę przeciętnej zmiany</u> funkcyi w odstępie x do $x+\Delta x$.

Chcąc otrzymać taką miarę nie dla dowolnego odstępu tylko <u>w pewnym miejscu</u> funkcyi musimy różnicę Δx zmniejszać zbliżając ją do zera. Wskutek tego otrzymuje stosunek różnicowy $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

pewne następstwo wartości liczebnych, któ-
re albo dążą do pewnej stałej wartości gra-
nicznej: zeru, skończonej lub nieskończenie
wielkiej, albo nie dążą do żadnej wartości
granicznej. W pierwszym wypadku nazywa-
my funkcyę $y=f(x)$ <u>różniczkowalną</u>
a wartość graniczną stosunku różnicowego
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nazywamy stosunkiem różniczkowym
w miejscu x pisząc

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$$

Podobne następstwo wartości dostarcza sto-
sunek różnicowy wsteczny $\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}$,
Wartości te mogą dążyć do innej wartości
granicznej $\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}$, które nazywa-
my stosunkiem różniczkowym wstecznym.
Oba stosunki różniczkowe, przedni i wsteczny
możemy przy stałem Δx przedstawić jako war-
tości graniczne stosunku $\frac{f(x+\theta\Delta x)-f(x)}{\theta\Delta x}$
gdzie θ jest liczbą która dąży w pierwszym
przypadku od $+1$ do 0, w drugim od -1 do 0.
Przy funkcyach jednostajnie ciągłych, staje
się odróżnianie stosunku różniczkowego przed-
niego od wstecznego zbędnem.

Warunki dla pewnych wartości
granicznych stosunku różnicowego $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

1.) Granicą odpowiadającą stosunku różnicowego
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ będzie w miejscu x zerem, jeżeli dla
każdej dowolnie małej liczby σ da się znaleźć

taki odstęp Δx, że bezwzględna wartość stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ staje się dla wszelkiej wartości $0<1$ mniejszą od δ to znaczy:

$$\frac{f(x+\theta\Delta x)-f(x)}{\theta\Delta x}<\delta \qquad 1>\theta>0$$

2.) Graniczna wartość stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ będzie w miejscu x liczbą skończoną jeżeli dla dla wszelkiej dowolnie małej liczby δ da się znaleźć taki skończony odstęp Δx; że dla wszelkiego θ będzie

$$\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-\frac{f(x+\theta\Delta x)-f(x)}{\theta\Delta x}\right|<\delta \qquad 1>\theta>0$$

Wniosek. W otoczeniu każdego miejsca, w którem funkcya ciągła ma pewną skończoną wartość graniczną stosunku różnicowego, jest stosunek różnicowy ciągłą funkcyą przyrostu Δx nie tylko dla skończonej wartości Δx, lecz także dla $\Delta x=0$.

3. Graniczna wartość stosunku różnicowego $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ będzie w pewnym miejscu nieskończenie wielką, jeżeli da się oznaczyć taki odstęp Δx w którym stosunek różnicowy tylko rośnie i tylko maleje poza wszelką granicą skończoną.

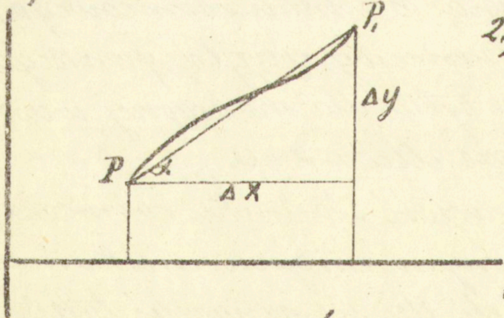
4.) Stosunek różnicowy nie dąży do żadnej oznaczonej granicy, jeżeli w dowolnie małem odstępie Δx doznaje nieskończenie wiele największych i najmniejszych wartości, których różnice nie dadzą się dowolnie zmniejszyć

Powiadamy tedy że funkcya ciągła nie ma w tem miejscu żadnego stosunku różniczkowego. Funkcya ciągła która w żadnym miejscu nie ma pewnej oznaczonej wartości stosunku różniczkowego zowie się funkcyą ciągłą nie różniczkowalną.

Geometryczne znaczenie stosunku różnicowego. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Przedstawiając funkcyę $y=f(x)$ pod postacią wielokąta z dowolnie wielką ilością wierzchołków mamy:

1.) Różnica Δy przedstawia różnicę wysokości dwóch punktów P i P_1 mających odcięte x i $x+\Delta x$.



2.) Stosunek różnicowy $\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\alpha$ to znaczy jest równy tangensowi kąta jaki cięciwa PP_1 tworzą z osią X ów.

3.) Warunek konieczny aby stosunek różnicowy w pewnem miejscu x ze zmniejszeniem się odstępu Δx dążył do pewnej stałej granicy, wyraża się geometrycznie wzorem:

$$tg\alpha' - tg\alpha'' = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - \frac{f(x+\theta\Delta x)-f(x)}{\theta\Delta x} < \delta$$

to znaczy, musi się dać oznaczyć odstęp Δx w którym różnica kątów α' i α'' stają się dowolnie małe.

W takim miejscu da się funkcyę zmiennej ciągłej przedstawić w postaci linji krzywej.

Wniosek. Warunek istnienia pewnej wartości granicznej stosunku różnicowego jest warunkiem przedstawialności funkcyi w postaci krzywej płaskiej.

Graniczna wartość stosunku różnicowego nazwana stosunkiem różniczkowym określona równaniem:

$$\lim_{\Theta=0} \frac{f(x+\Theta\Delta x)-f(x)}{\Theta\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

przedstawia w miejscu x tangens kąta jaki styczna w punkcie P krzywej $f(x)$ tworzy z osią X ów. to znaczy.

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} TPX = \operatorname{tang} \alpha$$

Obliczanie stosunku różniczkowego danej funkcyi jest przedmiotem rachunku różniczkowego. Geometrycznie odpowiada to zadaniu: wykreślić styczną w dowolnym punkcie jakiejkolwiek krzywej, które dało też powód do odkrycia rachunku różniczkowego. –

Zasady rachunku różniczkowego podał pierwszy Leibnitz (1646–1716) i niezależnie od niego Newton (1642–1726). Ciągłość funkcyi określił pierwszy Cauchy (1789–18..)

Riemann zwrócił uwagę na funkcye ciągłe dla których w nieskończenie wielu miejscach nie można oznaczyć stosunku różniczkowego. Weierstrass dał pierwszy przykład funkcyi ciągłej, która w żadnym punkcie nie ma skończonej wartości stosunku różniczkowego. Pokreślił [illegible] różniczkowalność funkcyi. —

Pochodne pierwszego rzędu. —

Określenie: Funkcya, która podaje wartości stosunku różniczkowego w każdem miejscu danej funkcyi $f(x)$ nazywa się funkcyą pochodną pierwszego rzędu albo pierwszą pochodną danej funkcyi i oznacza przez $f'(x)$.

Znakowanie. Jeżeli $y = f(x)$ tedy piszemy:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta = 0} \frac{f(x \pm \Delta x) - f(x)}{\pm \Delta x}$$

Obliczanie pochodnej danej funkcyi nazywamy różniczkowaniem.

Ogólne reguły różniczkowania.

1) Jeżeli $y = a$ tedy $\frac{dy}{dx} = 0$ to znaczy: Pochodna wielkości stałej jest równą zeru.

2) Jeżeli $y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ tedy $\frac{dy}{dx} = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots\dots + f_n'(x)$ to znaczy: Pochodna sumy funkcyi jest równą sumie pochodnych poszczególnych funkcyi.

Wniosek: Jeżeli $y = f(x) + a$ tedy $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

3.) Jeżeli $y = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ tedy $\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi'(x) + \psi(x)\varphi'(x)$

Pochodna iloczynu dwóch funkcyi jest równą pierwszemu czynnikowi przez pochodną drugiego więcej drugiemu pomnożonemu przez pochodną pierwszego.

Ta reguła da się rozszerzyć do ilukolwiek czynników.

Wniosek. Jeżeli $y = a f(x)$ tedy $\frac{dy}{dx} = a f'(x)$ t. z. Pochodna wielokrotności pewnej funkcyi jest równą wielokrotności pochodnej tej funkcyi.

4.) Jeżeli $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; tedy $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi(x) \cdot \varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$

Pochodna ułamka czyli ilorazu dwóch funkcyi jest równą mianownikowi pomnożonemu przez pochodną licznika mniej licznikowi pomnożonemu przez pochodną mianownika, gdy różnica ta podzieloną zostanie przez kwadrat mianownika. —

Wniosek. Jeżeli $y = \frac{1}{\psi(x)}$ tedy $\frac{dy}{dx} = -\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$

5.) Jeżeli $y = f(u)$ a $u = \varphi(x)$ tedy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$ to znaczy:

Pochodna funkcyi f pewnej funkcyi <u>u</u> jest równą iloczynowi z pochodnej funkcyi f wziętej ze względu na zmienną u, uważaną za zmienną niezależną przez pochodną funkcyi u ze względu na zmienną niezależną x. —

Reguła ta da się uogólnić:
Jeżeli $y=f(u)$; $u=\varphi(v)$, $v=\psi(w)$ $w=\chi(x)$
tedy $\frac{dy}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$

Pochodne funkcyi prostych zasadniczych.

1.) Funkcya potęgowa. α.) z wykładnikiem dodatnim.

$$y=x^m$$
$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$$

Funkcya potęgowa β.) z wykładnikiem ujemnym

$$y=x^{-m}$$
$$\frac{dy}{dx}=-mx^{-m-1}$$

2.) Funkcya wykładnicza

$$y=a^x;\quad \frac{dy}{dx}=a^x\log a$$

Wniosek: Jeżeli $y=e^x$ tedy $\frac{dy}{dx}=e^x$

Funkcya wykładnicza o zasadzie e ma własność, że różniczkowaniem sama siebie wywołuje.

3.) Funkcye goniometryczne.

α.) $y=\sin x$, $\frac{dy}{dx}=\cos x$

β.) $y=\cos x$, $\frac{dy}{dx}=-\sin x$

γ.) $y=\operatorname{tang} x$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$

δ.) $y=\operatorname{cotg} x$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x}$

ε.) $y=\sec x$, $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

ζ.) $y=\operatorname{cosec} x$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

4.) Funkcya pierwiastkowa.

$$y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}\,, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$$

5.) Funkcya logarytmiczna.

$$y = {}^{a}\log x\,; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\, {}^{a}\log e = \frac{1}{x \cdot \log a}$$

Wniosek: $y = \log x\,; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

6.) Funkcye cyklometryczne.

α.) $y = \arcsin x\,; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

β.) $y = \arccos x\,; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

γ.) $y = \operatorname{arc\,tang} x\,; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

δ.) $y = \operatorname{arc\,cotg} x\,; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$

ε.) $y = \operatorname{arc\,sec} x\,; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

ζ.) $y = \operatorname{arc\,cosec} x\,; \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Pochodne funkcyi złożonych.

$$y = f(u, v, w,)\,; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{df}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$$

Różniczkowanie logarytmiczne.

$$y = u\,v\,w \ldots$$

$$\log y = \log u + \log v + \log w + \ldots$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dx} + \ldots$$

Wnioski:

1.) $y = u \cdot v \cdot w \ldots\,; \quad \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dx} + \ldots\right]$

2.) $y = u^v\,; \quad \frac{dy}{dx} = v \cdot u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \log u\, \frac{dv}{dx}$

Pochodne wyższych rzędów funkcyi $y=f(x)$.

Określenie: Pierwsza pochodna:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta=0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Druga pochodna $\lim\limits_{\Delta=0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x} = f''(x)$

Trzecia pochodna $\lim\limits_{\Delta=0} \frac{f''(x+\Delta x)-f''(x)}{\Delta x} = f'''(x)$ i.t.d.

Bezpośrednie obliczanie pochodnych wyższego rzędu.

$$f'(x) = \lim_{\Delta=0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f''(x) = \lim_{\Delta=0} \frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{(\Delta x)^2}$$

$$f'''(x) = \lim_{\Delta=0} \frac{f(x+3\Delta x)-3f(x+2\Delta x)+3f(x+\Delta x)-f(x)}{(\Delta x)^3}$$

$$f^{(n)}(x) = \lim \frac{f(x+n\Delta x)-\binom{n}{1}f(x+\overline{n-1}\,\Delta x)+\dots(-1)^r\binom{n}{r}f(x+\overline{n-r}\,\Delta x)+\dots(-1)^n f(x)}{(\Delta x)^n}$$

Różnice wyższych rzędów.

Funkcya dana: $y=f(x)$

Pierwsza różnica: $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$

Druga różnica: $\Delta^2 y = f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)$

Trzecia " " $\Delta^3 y = f(x+3\Delta x)-3f(x+2\Delta x)+3f(x+\Delta x)-f(x)$

. . . .

n^{ta} różnica $\Delta^n y = f(x+n\Delta x)-\binom{n}{1}f(x+\overline{n-1}\,\Delta x)+\dots+$
$+\dots+(-1)^r\binom{n}{r}f(x+\overline{n-r}\,\Delta x)+\dots\dots+(-1)^n f(x)$

Pochodne wyższych rzędów jako granice stosunków różnicowych wyższych rzędów.

Jeżeli $y=f(x)$ tedy

$$f'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' ; \quad f''(x) = \lim \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''$$

$$f'''(x) = \lim \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{d^3 y}{dx^3} = y'''$$

$$f^{(n)}(x) = \lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$$

Różniczki danej funkcyi $y = f(x)$.

Różniczka pierwszego rzędu:

$$dy = f'(x)\,dx$$

Różniczka drugiego rzędu:

$$d^2 y = f''(x)\,dx^2$$

Różniczka trzeciego rzędu:

$$d^3 y = f'''(x)\,dx^3$$

Różniczka n^{go} rzędu:

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n$$

Ilości nieskończenie małe.

Dwie ilości zmienne nazywamy ilościami nieskończenie małymi tego samego rzędu, jeżeli ich iloraz ma wartość skończoną.

Nazwijmy dx ilością nieskończenie małą pierwszego rzędu, tedy jest dx^2 ilością nieskończenie małą drugiego, dx^3 trzeciego... dx^n n^{go} rzędu. Iloraz dwóch ilości nieskończenie małych n^{go} i m^{go} rzędu $(n > m)$ jest sam ilością nieskończenie małą $(n-m)$ rzędu.
Różniczki $dy, d^2y, d^3y, \ldots d^ny$ jakoteż odpowiednie potęgi różniczki dx, jako to: $dx, dx^2, dx^3, \ldots dx^n$ są ilościami nieskończenie małymi 1go, 2go, 3go, ... n^{go} rzędu.

Dwie drogi postępowania w rachunku różniczkowym.

W zastosowaniach rachunku różniczkowego do geometryi i mechaniki można zawsze postępować dwiema drogami:

albo 1.) wyjść z równań między stosunkami różnicowymi a z nich przejść do stosunków różniczkowych.

albo 2.) wyjść z równań między różnicami a z nich przejść do różniczek.

Ostatnia droga odpowiada bardziej bezpośredniemu poglądowi. Tą drogą znajdziemy

1.) Ogólne reguły różniczkowania.

α.) $da = 0$

β.) $d(u+v+w) = du + dv + dw$

γ.) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

δ.) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

ε.) $d(u^v) = v\,u^{v-1}\,du + u^v \log u\,dv$

ζ.) $d\left[f(u)\right] = f'(u)\,du$

2.) Różniczki funkcyi zasadniczych

α.) $dx^m = m x^{m-1}\,dx$

β.) $d(a^x) = a^x \log a\,dx$; $d(e^x) = e^x\,dx$

γ.) $d(\sin x) = \cos x\,dx$; $d(\cos x) = -\sin x\,dx$

$d(tg\,x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$; $d(ctg\,x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$

$d(\sec x) = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$; $d(\operatorname{cosec} x) = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$

δ.) $d\left(\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}\,dx$

ε.) $d\left({}^{a}\log x\right) = \frac{dx}{x \log a} = \frac{dx}{x}\,{}^{a}\log e$; $d(\log x) = \frac{dx}{x}$

3) $d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$d(\operatorname{arc\,tang} x) = \frac{dx}{1+x^2}$; $d(\operatorname{arc\,cotg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$

$d(\operatorname{arc\,sec} x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; $d(\operatorname{arc\,cosec} x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Pochodne i różniczki wyższego rzędu sumy i iloczynu funkcyj.

1.) Pochodne i różniczki sumy $y = u + v + w$

α.) $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n u}{dx^n} + \frac{d^n v}{dx^n} + \frac{d^n w}{dx^n}$

β.) $d^n y = d^n u + d^n v + d^n w$

2.) Pochodne i różniczki iloczynu $y = u.v.$

Wzór Leibnitzu:

α.) $(u.v)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \dots + \binom{n}{r}u^{(n-r)}v^{(r)} + \dots uv^{(n)}$

czyli: $\frac{d^n(uv)}{dx^n} = \frac{d^n u}{dx^n}v + \binom{n}{1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dv}{dx} \dots + \binom{n}{r}\frac{d^{n-r}u}{dx^{n-r}}\frac{d^r v}{dx^r} + \dots u\frac{d^n v}{dx^n}$

β.) $d^n(uv) = d^n u.v + \binom{n}{1}d^{n-1}u.dv + \dots \binom{n}{r}d^{n-r}u.d^r v + \dots u\,d^n v.$

Pochodne funkcyj zasadniczych.

1.) $y = x^m$; $y' = mx^{m-1}$; $y'' = m(m-1)x^{m-2}$

$y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$

2.) $y = a^x$; $y' = a^x \log a$; $y'' = a^x(\log a)^2$

$y^{(n)} = a^x(\log a)^n$

wniosek $y = e^x$; $y' = e^x$; $y'' = e^x$; $y^{(n)} = e^x$

3.) $y = \sin x$; $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

4.) $y = \cos x$; $y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

5.) $y = \operatorname{tang} x$ daje $y \cos x = \sin x$ zkąd otrzymujemy wzory zwrotne:

$$y' \cos x + y \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' \cos x + 2y' \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + y \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

. . . .

$$y^{(n)} \cos x + \binom{n}{1} y^{(n-1)} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \ldots \binom{n}{r} y^{(n-r)} \cos\left(x + \frac{r\pi}{2}\right) + \ldots$$
$$+ y \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

6.) $y = \operatorname{cotg} x$ daje $y . \sin x = \cos x$ skąd wypada wzór zwrotny:

$$y^{(n)} \sin x + \binom{n}{1} y^{(n-1)} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \ldots \binom{n}{r} y^{(n-r)} \sin\left(x + \frac{r\pi}{2}\right) + \ldots$$
$$+ \ldots + y \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

7.) $y = {}^a\log x$, $y' = \frac{1}{x}\, {}^a\log e$, $y'' = -\frac{1}{x^2}\, {}^a\log e$,

$$y''' = \frac{1.2}{x^3}\, {}^a\log e, \ldots\; y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}\, {}^a\log e$$

8.) $y = \operatorname{arc.} \sin x$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ czyli $y' \sqrt{1-x^2} = 1$

zkąd wypada $y'' \sqrt{1-x^2} - \frac{y' x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ czyli

$$y''(1-x^2) - y' x = 0$$

a po n krotnem różniczkowaniu wzór zwrotny:

$$y^{(n+2)}(1-x^2) - 2\binom{n}{1} y^{(n+1)} . x - 2\binom{n}{2} y^{(n)} - y^{(n+1)} x - \binom{n}{1} y^{(n)} = 0$$

czyli: $(1-x^2) y^{(n+2)} = (2n+1) y^{(n+1)} . x + n^2 y^{(n)}$

9.) $y = \operatorname{arc.} \cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \sin x$; $y^{(n)} = -\frac{d^n(\operatorname{arc.} \sin x)}{dx^n}$

10.) $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$; $y' = \frac{1}{1+x^2}$ czyli $y'(1+x^2) = 1$

zkąd wypada wzór zwrotny:

$$y^{(n+1)}(1+x^2) = -2nx y^{(n)} - n(n-1) y^{(n-1)}$$

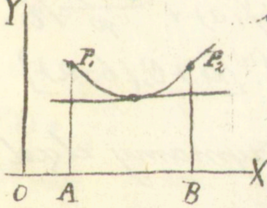
11.) $y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc.} \operatorname{tg} x$

$$y^{(n)} = -\frac{d^n(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)}{dx^n}.$$

II. Wzór Taylora i Maclaurina.

Twierdzenie pomocnicze: Jeżeli funkcya jedno, wartościowa, której pochodna w każdem miejscu w odstępie $x=a$ do $x=b$ jest także tylko jedno, wartościowa, ma w końcach tego odstępu równe wartości, tedy musi w tym odstępie istnieć przynajmniej jedno miejsce takie, w którem pochodna ma wartość równą zeru.-

Znaczenie geometryczne tego twierdzenia: Jeżeli krzywa ciągła ma w dwóch miejscach końcowych równe rzędne, tedy istnieje we, wnątrz przynajmniej jedno miejsce, w którem styczna do krzywej jest poziomą to znaczy do osi X ów równoległą.

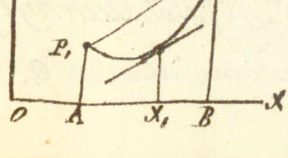


Twierdzenie o średniej wartości.

Jeżeli $y=f(x)$ jest funkcyą jednowartościową której pochodna w odstępie od $x=a$ do $x=b$ także jednowartościową tedy da się zawsze między a i b znaleźć takie miejsce x_1, że będzie

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_1)$$

Znaczenie geometryczne tego twierdzenia: Na krzywej ciągłej istnieje zawsze jedno miejsce takie w którem styczna jest równoległą do prostej łączącej punkta końcowe tej krzywej.



Wartość x_1 położoną między a i b możemy wyrazić w postaci:

$$x_1 = a + \vartheta(b-a) \quad \text{gdzie } \vartheta<1.$$

Twierdzenie powyższe otrzymuje tedy kształt:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'[a+\theta(b-a)] \qquad 0<\theta<1.$$

zkąd otrzymujemy: <u>Twierdzenie o skończonym przyroście funkcyi</u>:

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'[a+\theta(b-a)] \qquad 0<\theta<1.$$

czyli $f(b) = f(a) + (b-a)f'[a+\theta(b-a)]$

Twierdzenie to da się przy użyciu następnych pochodnych funkcyi $y=f(x)$ ciągłej i jednowartościowej przedstawić w postaci:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''[a+\theta(b-a)],$$

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f'''[a+\theta(b-a)]$$

Ogólnie:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^p}{p}\mathcal{K}$$

gdzie $\mathcal{K} = \frac{(b-a)^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!}f^{(n)}[a+\theta(b-a)]$

Kładąc $p=n$ lub $p=1$ otrzymamy zkąd

I.) wzór z resztą Lagrange'a:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}[a+\theta(b-a)]$$

II wzór z resztą Cauchy'ego.

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}[a+\theta(b-a)]$$

Wzory te dozwalają obliczyć wartości funkcyi dla pewnej wartości zmiennej niezależnej x znając wartość funkcyi i wszystkich jej pochodnych w miejscu <u>a</u>, otrzymamy wartość funkcyi w miejscu x w postaci:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R$$

gdzie $R = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$ wedle Lagrange'a

albo $R = \frac{(x-a)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}[a+\theta(x-a)]$ wedle Cauchy'ego.

W tych wzorach mamy tylko niewiadomy ułamek θ.

Wzór Taylora.

Jeżeli dla pewnej funkcyi da się wykazać, że reszta R, utworzona dla dowolnie rosnących wartości n tworzy szereg liczb dążących do zera, tedy otrzymamy wartość funkcyi $f(x)$ z dowolnem przybliżeniem, za dodaniem dowolnej ilości członów szeregu nieskończonego zwanego szeregiem Taylora:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots \text{ in inf.}$$

Taylor ustawił ten szereg w r. 1715 bez uwzględnienia reszty R. –

Wzór Maclaurina

Kładąc $a=0$ otrzymamy ze szeregu Taylora szereg Maclaurina:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots \text{ in inf.}$$

Wzory na resztę szeregu Maclaurina są:

$$R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x) \quad \text{wedle Lagrange'a}$$

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x) \quad \text{wedle Cauchy'ego.}$$

Niektóre szeregi szczególne.

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \dots + \binom{m}{n}x^n + \dots \qquad \begin{matrix} m>0 & -1 \le x \le +1 \\ m<0 & -1 < x \le +1 \end{matrix}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ in inf.} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$a^x = 1 + \frac{x\log a}{1!} + \frac{(x\log a)^2}{2!} + \frac{(x\log a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x\log a)^n}{n!} \text{ in inf.} \qquad -\infty < x <$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ in inf.} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ in inf.} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\operatorname{tg} x = x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \frac{272x^7}{7!} + \dots \text{ in inf.} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{53x^6}{6!} + \dots \text{ in inf.} \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \text{in inf.} \quad -1 < x \leqq +1.$$

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \quad 0 < x < 1.$$

$$\log(x+a) = \log x + 2\left[\frac{a}{2x+a} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2x+a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{2x+a}\right)^5 + \dots \quad 0 < x < \infty\right.$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7} + \dots \text{in inf.} \quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \text{in inf.} \quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

$$x \operatorname{cotg} x = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + \dots$$

$$\operatorname{tg} x = a_1(1-2^2)x + a_2(1-2^4)x^3 + a_3(1-2^6)x^5 + \dots$$

$$\log\frac{\sin x}{x} = -a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^4}{4} - a_3\frac{x^6}{6} + a_4\frac{x^8}{8} - \dots$$

$$y = \frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 - \frac{a_1}{2^2}x^2 + \frac{a_2}{2^4}x^4 - \frac{a_3}{2^6}x^6 + \dots$$

$$= 1 + B_1\frac{x^2}{2!} - B_2\frac{x^4}{4!} + B_3\frac{x^6}{6!} - $$

$$B_n = -a_n\frac{(2n)!}{2^{2n}} = (-1)^n\left(\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}\right)_{x=0}$$

Spółczynniki $B_0, B_1, B_2 \dots B_n$ nazywają się liczbami Bernouille'go.

III Zastosowania szeregu Taylora.

Zastosowania analityczne.

A. Symbole nieoznaczone.

1.) Forma nieoznaczona ułamka: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Mamy $$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \lim_{h=0}\frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \lim_{h=0}\frac{\varphi(a)+h\varphi'(a+\theta_1 h)}{\psi(a)+h\psi'(a+\theta_2 h)}$$

Jeżeli $\varphi(a)=0$ i $\psi(a)=0$ tedy

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{0}{0} = \lim_{h=0}\frac{\varphi'(a+\theta_1 h)}{\psi'(a+\theta_2 h)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$ to znaczy

Wartość ułamka $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ w miejscu $x=a$, dla którego licznik i mianownik stają się zerami, jest równą stosunkowi z wartości pochodnych funkcyi φ i ψ w tem miejscu.

Jeżeli także $\varphi'(a)=0$ i $\psi'(a)=0$ tedy będzie

$$\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}=\frac{0}{0}=\lim_{h=0}\frac{\varphi'(a+h)}{\psi'(a+h)}=\lim_{h=0}\frac{\varphi''(a+\theta_1 h)}{\psi''(a+\theta_2 h)}=\frac{\varphi''(a)}{\psi''(a)} \text{ i.t.d.}$$

Jeżeli $\varphi(a)=\infty$ i $\psi(a)=\infty$ tedy

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{\frac{1}{\psi(a)}}{\frac{1}{\varphi(a)}}=\frac{0}{0}=\frac{\frac{\psi'(a)}{\psi^2(a)}}{\frac{\varphi'(a)}{\varphi^2(a)}}=\frac{\varphi^2(a)}{\psi^2(a)}\cdot\frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)};$$

$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$ t. j. Wartość ułamka $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ w miejscu $x=a$, dla którego licznik i mianownik stają się nieskończenie wielkimi, jest równą stosunkowi z wartości pochodnych funkcyi φ i ψ w tem miejscu.

2.) Forma nieoznaczona iloczynu $\infty.0$ i $0.\infty$ sprowadza się do ilorazu $\frac{0}{0}$. Jest tedy

$$\varphi(a).\psi(a)=0.\infty=\frac{\varphi(a)}{\frac{1}{\psi(a)}}=\frac{0}{0}=A.$$

3.) Forma nieoznaczona potęgi: $0^0, \infty^0, 1^{+\infty}, 1^{-\infty}$.

Oznaczenie wartości potęgi $\left[f(x)\right]^{\psi(x)}$ sprowadza się w tym razie do oznaczenia wartości iloczynu lub ułamka. Będzie bowiem:

$$\log\left[f(a)\right]^{\psi(a)}=\psi(a)\log f(a)=0.\infty=\frac{0}{0}=A$$

$$\text{zkąd } \left[f(a)\right]^{\psi(a)}=e^{\log A}.$$

4.) Forma nieoznaczona różnicy: $\infty-\infty$

Oznaczenie różnicy $\varphi(x)-f(x)$ sprowadzi się w tym razie do oznaczenia wartości iloczynu lub ilorazu. Będzie bowiem: $e^{\varphi(a)-\psi(a)}=\frac{e^{\varphi(a)}}{e^{\psi(a)}}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{0}{0}=e^{A}$.

ztąd $\varphi(a)-\psi(a)=A.$

B. Maxima i minima funkcyi jednej zmiennej niezależnej.

Określenie: Wartość, jaką funkcya $y = f(x)$ osiąga, zanim ze stanu wzrostu przejdzie w stan malenia zowiemy największość albo <u>maximum</u> funkcyi.

<u>Podobnie</u>, wartość, jaką funkcya osiąga, zanim z stanu malenia przejdzie w stan wzrostu zowiemy najmniejszością <u>minimum</u> funkcyi. —

Jeżeli $f(a)$ jest taką wartością tedy musi być w wypadku maximum:

$$f(a+h) < f(a) \text{ jakoteż } f(a-h) < f(a)$$

w wypadku minimum zaś:

$$f(a+h) > f(a) \text{ jakoteż } f(a-h) > f(a)$$

dla wszelkiego h mniejszego od dowolnie małej liczby ε.

Warunki maximum lub minimum funkcyi wypadają z wzoru:

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots$$

warunek konieczny $f'(a) = 0$ w takim razie będzie: $f(a)$ maximum skoro $f''(a) < 0$

będzie zaś $f(a)$ minimum " $f''(a) > 0$

Jeżeli $f''(a) = 0$ tedy należy dochodzić wartości $f'''(a)$.

Jeżeli $f'''(a) \gtrless 0$ tedy nie jest $f(a)$ ani maximum ani minimum.

Ogólnie: Jeżeli przy $f'(a) = 0$ jest $f^{(n)}(a)$ pierwszą pochodną, która nie jest równą zeru, tedy dla nieparzystego n nie będzie $f(a)$ ani maximum ani minimum, dla parzystego n zaś będzie $f(a)$ maximum, jeżeli $f^{(n)}(a)<0$ a minimum jeżeli $f^{(n)}(a)>0$

Zastosowanie geometryczne.

Styczność i krzywizna krzywych płaskich. —

1.) Bieg krzywej $y=f(x)$ w pewnem miejscu.

Funkcya ciągła różniczkowalna $y=f(x)$ przedstawia krzywą na płaszczyźnie.

Wszelkiemu x odpowiada pewne $y=f(x)$ a więc pewien punkt krzywej.

Jeżeli przy dodatniem $f(x)$ jest $f'(x)>0$ $(\alpha<90°)$ to krzywa rośnie w miejscu x wraz z x. (fig 1 i 2)

jeżeli zaś $f'(x)<0$ $(180>\alpha>90°)$ to krzywa maleje w miejscu x z wzrostem x. (fig. 3 i 4)

Wartość $f'(x)$ w miejscu x przedstawia tangens kąta jaki styczna w M tworzy z osią X-ów.

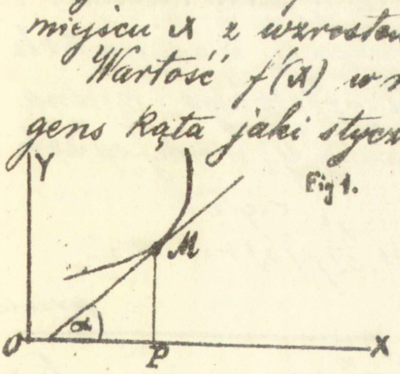


Fig 1.

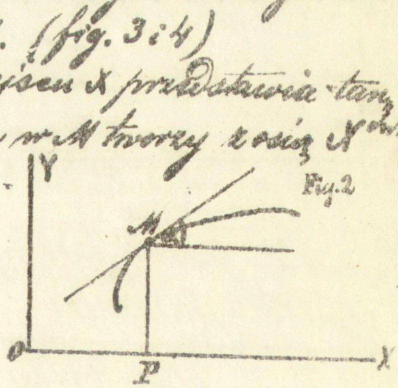


Fig. 2

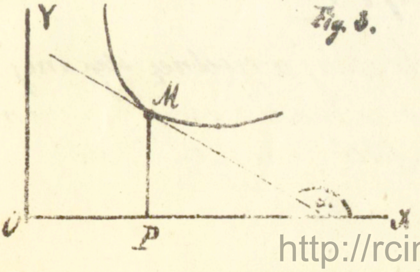
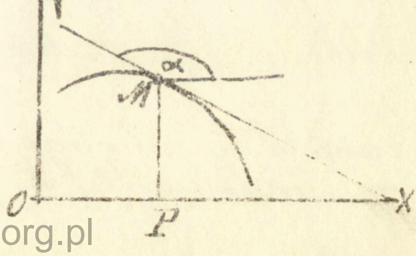
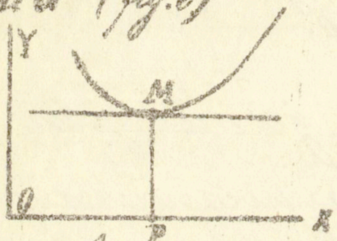
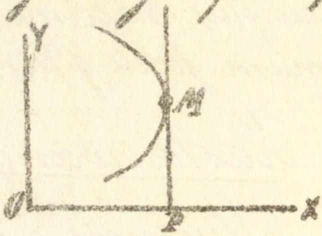


Fig. 3.



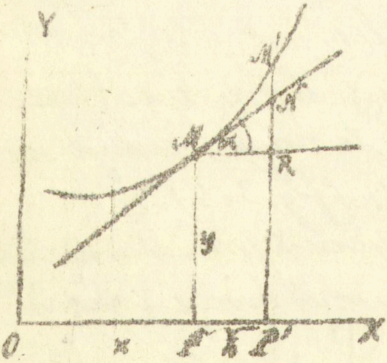
Jeżeli $f'(x)=0$ to styczna do krzywej w miejscu x jest równoległa do osi X-ów (fig.5).
Jeżeli zaś $f'(x)=\infty$, to styczna jest prostopadłą do osi X-ów (fig.6)





2/ Styczność linji krzywej z linją prostą.

Porównując rzędne krzywej z rzędnymi prostej stycznej w punkcie M otrzymujemy:



$MP = y = f(x)$ rzędna wspólna w miejscu x.
$M'P' = f(x+h)$ rzędna krzywej y_k w miejscu $x+h$
$NP' = f(x)+hf'(x)$ rzędna stycznej y_s w miejscu $x+h$
czyli:

$$y_k = M'P' = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots\dots$$

$$y_s = NP' = f(x) + hf'(x)$$ przeto:

$$y_k - y_s = M'N = \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots\dots\dots\dots \text{ t. z.}$$

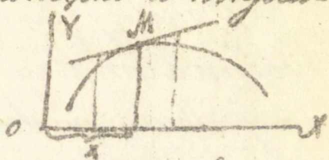
Różnica między rzędną krzywej a rzędną stycznej w okolicy styczności jest wielkością nieskończenie małą drugiego rzędu ze względu na przyrost h odciętej x.

Wnioski:

1) $f''(x) > 0$ $y_x > y_s$ krzywa wypukła w miejscu x

2) $f''(x) < 0$ $y_x < y_s$ " wklęsła w miejscu x

1.) 

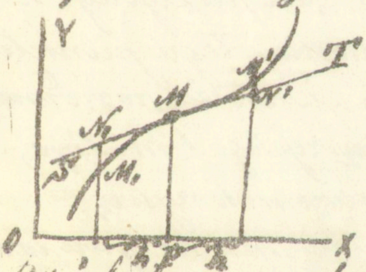
2.) 

Jeżeli w miejscu x jest $f''(x) = 0$ tedy będzie

$$y_x - y_s = \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots\dots$$

Krzywa jest tedy po jednej stronie punktu M wypukłą po drugiej wklęsłą.

Taki punkt nazywa się punktem przegięcia (Inflexionspunkt.)



Równanie

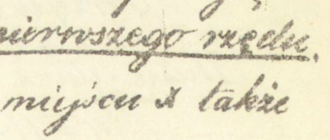
$$f''(x) = 0$$

cechuje punkt przegięcia.

W okolicy punktu przegięcia jest różnica między rzędną krzywej a rzędną stycznej ilością nieskończenie małą trzeciego rzędu ze względu na przyrost h odciętej x tegu punktu. Styczną ST w punkcie przegięcia nazywamy ścisłą styczną pierwszego rzędu.

Jeżeli oprócz $f''(x) = 0$ jest w miejscu x także $f'''(x) = 0$ tedy jest

$$y_x - y_s = \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots$$



Krzywa jest tedy w miejscu x wypukłą gdy $f^{(4)}(x) > 0$ zaś wklęsłą gdy $f^{(4)}(x) < 0$.

Punkt taki nazywa się **punktem undulacyjnym.**

W okolicy punktu undulacyjnego jest różnica między rzędną krzywej a rzędną stycznej ilością nieskończenie małą czwartego rzędu ze względu na przyrost h odciętej x tego punktu. Styczna w punkcie undulacyjnym zowie się **ściśle styczną 2go rzędu.**

Ogólnie: Jeżeli w miejscu x krzywej $y = f(x)$ po $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ pierwsza pochodna, która nie jest równą zeru, jest rzędu parzystego $2n^{go}$ tedy krzywa leży w okolicy tego punktu po jednej stronie stycznej; jeżeli zaś pochodna taka jest rzędu nieparzystego $(2n+1)$go, tedy styczna przecina zarazem krzywą.

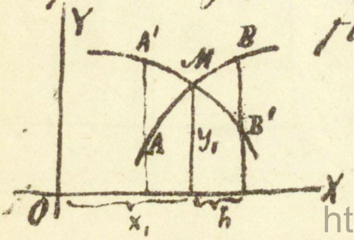
W pierwszym wypadku ma krzywa w miejscu x punkt undulacyjny, w drugim punkt przegięcia, w obu wypadkach nazywamy styczne **ściśle stycznymi.**

3. Styczność krzywych między sobą. Krzywe ściśle styczne. —

Dane dwie krzywe

$$y = f(x) \qquad y = \varphi(x)$$

przecinające się w punkcie x, y. tedy jest:



$$f(x_1) = \varphi(x_1)$$

Aby zbadać jak się te krzywe w okolicy punktu wspólnego $M(x_1\, y_1)$ zachowują, otrzymujemy wedle szeregu Taylora:

$$y_f = f(x_1+h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{2!}f''(x_1) + \dots$$

$$y_\varphi = \varphi(x_1+h) = \varphi(x_1) + h\varphi'(x_1) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_1) + \dots$$

a ztąd różnica między rzędnymi w okolicy punktu $(x_1 y_1)$:

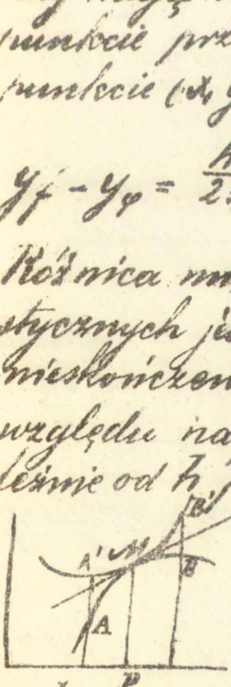
$$y_f - y_\varphi = h\{f'(x_1) - \varphi'(x_1)\} + \frac{h^2}{2!}\{f''(x_1) - \varphi''(x_1)\} + \dots \quad \text{t. z.}$$

Różnica między rzędnymi krzywych przecinających się, jest w okolicy punktu przecięcia ilością nieskończenie małą tego samego rzędu co przyrost h odciętej x_1 i to po jednej stronie dodatnią po drugiej ujemną.

Jeżeli obok $f(x_1) = \varphi(x_1)$ jest także $f'(x_1) = \varphi'(x_1)$, tedy mają obie krzywe wspólną styczną w punkcie przecięcia są więc stycznymi w punkcie $(x_1 y_1)$. Mamy tedy:

$$y_f - y_\varphi = \frac{h^2}{2!}\{f''(x_1) - \varphi''(x_1)\} + \frac{h^3}{3!}\{f'''(x_1) - \varphi'''(x_1)\} + \dots$$

Różnica między rzędnymi dwóch krzywych stycznych jest w okolicy styczności ilością nieskończenie małą drugiego rzędu ze względu na przyrost h odciętej x_1 i niezależnie od h, po obu stronach punktu styczności M tego samego znaku.



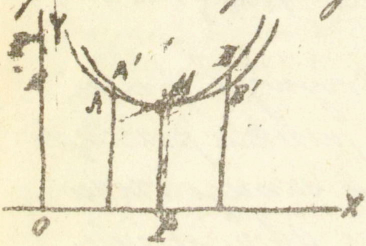
Jeżeli wreszcie obok $f(x_1) = \varphi(x_1)$ i $f'(x_1) = \varphi'(x_1)$ jest także:

$$f''(x_1) = \varphi''(x_1)$$

tedy będzie różnica rzędnych:

$$y_f - y_\varphi = \frac{h^3}{3!}\left\{f'''(x_1) - \varphi'''(x_1)\right\} + \frac{h^4}{4!}\left\{f^{(IV)}(x_1) - \varphi^{(IV)}(x_1)\right\} + \dots$$

ilością nieskończenie małą trzeciego rzędu ze względu na przyrost h, i to po jednej stronie punktu wspólnego dodatnią, po drugiej odjemną. Krzywe są styczne w punkcie M i przecinają się zarazem.



Ogólnie: Jeżeli w punkcie przecięcia $M(x_1, y_1)$ dwóch krzywych $y = f(x)$ i $y = \varphi(x)$ są wszystkie pochodne aż do n^{go} rzędu włącznie sobie równe tedy będzie różnica między rzędnymi:

$$y_f - y_\varphi = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left\{f^{(n+1)}(x_1) - \varphi^{(n+1)}(x_1)\right\} + \dots$$

w otoczeniu punktu (x_1, y_1) ilością nieskończenie małą $(n+1)^{go}$ rzędu ze względu na przyrost h odciętej x_1.

Powiedziano tedy, że krzywe mają w punkcie wspólnym styczność n^{go} rzędu albo że są ściśle styczne $(n-1)^{go}$ rzędu. —

Krzywa ściśle styczna z daną krzywą.

Niech będzie $y = f(x)$ krzywą daną, zaś: $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots c_n)$ równaniem krzywej szukanej, do pierwszej ściśle stycznej, która posiada n stałych $c_1, c_2, \dots c_n$ bliżej oznaczyć się mających.

Jeżeli szukana krzywa ma mieć w punkcie (x_1, y_1)

z daną krzywą styczność $(n-1)$go rzędu tedy otrzymujemy n równań warunkowych:

$$f_0 = \varphi_0 \qquad\qquad f(x_0) = \varphi(x_0)$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0 = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 \qquad\qquad f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 \quad \text{czyli} \quad f''(x_0) = \varphi''(x_0)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)_0 = \left(\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}\right)_0 \qquad\qquad f^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0)$$

które posłużą do obliczenia n stałych $c_1, c_2 \ldots c_n$. Tym sposobem otrzymujemy pewną krzywą $y = \varphi(x)$ z rodzaju krzywych ogólnem równaniem określonych, która będzie miała z krzywą daną w punkcie danym $(x_0\, y_0)$ styczność $(n-1)$go rzędu.

Przykłady:

a.) Prosta ma w swem ogólnym równaniu $y = ax + b$ dwie stałe dowolne a i b może mieć więc w danym punkcie $(x_0\, y_0)$ krzywej $y = f(x)$ tylko styczność 1go rzędu.

Na oznaczenie stałych a i b otrzymujemy równania:

$$f(x_0) = ax_0 + b$$

$$f'(x_0) = a$$

skąd wypada $a = f'(x_0)$; $b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$

przeto równanie stycznej w punkcie x_0 krzywej $y = f(x)$ ma kształt: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

czyli: $y - y_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0)$

b) Koło ma w swem ogólnym równaniu:

$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2$ trzy stałe dowolne α, β, ϱ, może więc mieć w punkcie $(x\,y)$ danej krzywej $y=f(x)$ styczność drugiego rzędu. Takie koło nazywa się kołem ściśle stycznem w punkcie $x\,y$. Oznaczywszy pochodne funkcyi $y=f(x)$ w punkcie xy przez $y'=\frac{dy}{dx}$, $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$ otrzymamy:

$$x-\alpha=\frac{y'(1+y'^2)}{y''};\quad y-\beta=-\frac{1+y'^2}{y''}$$

$$\varrho=\frac{\left[1+y'^2\right]^{3/2}}{y''}\quad \text{czyli:}$$

$$x-\alpha=\frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}};\quad y-\beta=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\varrho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

wzory dozwalające oznaczyć (α, β) środek i promień ϱ koła ściśle stycznego w jakimkolwiek punkcie.

Koło ściśle styczne w pewnym punkcie krzywej ma z krzywą styczność drugiego rzędu a więc jest stycznem do krzywej i przecina ją zarazem w tym punkcie. —

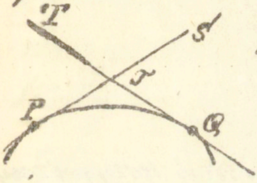
Aby koło ściśle styczne miało z krzywą styczność rzędu trzeciego, muszą spółrzędne punktu styczności sprawdzać równanie:

$$3y'y''^2-y'''(1+y'^2)=0$$

które określa zarazem punkta na krzywej, w których promień koła ściśle stycznego jest największym albo najmniejszym. —

5. Krzywizna krzywych płaskich.

Określenie. Kąt zawarty między stycznymi w punktach końcowych P i Q danego łuku



pewnej linji krzywej nazywamy kątem krzywizny tego łuku.

$\measuredangle (PS, QT) = \tau$

Stosunek między wielkością tego kąta τ, a długością łuku PQ równą s nazywa się **średnią krzywizną łuku.**

Wartość graniczną tego stosunku $\frac{d\tau}{ds}$, w chwili gdy punkt Q wpada na punkt P nazywamy krzywizną linji krzywej w punkcie P

$$K = \frac{d\tau}{ds}$$

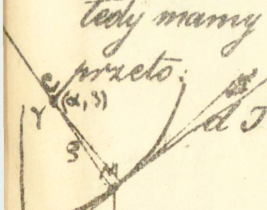
Jeżeli krzywa jest kołem o promieniu ϱ tedy mamy $s = \tau\varrho$ przeto będzie $K = \frac{\tau}{s} = \frac{1}{\varrho}$ miarą krzywizny w każdym punkcie koła.

Koło które ma tę samą krzywiznę, jaką ma krzywa w danym punkcie nazywamy **kołem krzywizny** a jego promień, **promieniem krzywizny** w danym punkcie krzywej.

Obliczanie promienia krzywizny.

Niech będzie $y = f(x)$ daną krzywą tedy mamy: $\tan\tau = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d\tau}{\cos^2\tau} = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot dx$

przeto:



$$d\tau = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}dx$$ kąt krzywizny w punkcie xy

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

element łuku w punkcie xy.

ztąd:
$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

krzywizna w punkcie xy.

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

promień krzywizny w punkcie xy krzywej $y=f(x)$

Wniosek. W punkcie przegięcia jest $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ promień krzywizny w punkcie przegięcia jest więc nieskończenie wielkim. —

Środek krzywizny.

Koło ściśle styczne jest zarazem kołem krzywizny. Środek koła ściśle stycznego jest zarazem środkiem krzywizny.

Spółrzędne (α, β) środka krzywizny w punkcie xy danej krzywej $y = f(x)$ są:

$$\alpha = x - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx};$$

$$\beta = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

czyli:

$$\alpha = x - \frac{1+y'^2}{y''}y';$$

$$\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

Ewoluta danej krzywej.

Miejsce geometryczne środków krzywizny odpowiadających punktom danej krzywej nazywamy ewolutą (odwiniętą) a daną krzywą ewolwentą (odwijającą).

Twierdzenia.

Normalna do ewolwenty jest styczną do ewoluty.

Łuk ewoluty jest równy różnicy między promieniami krzywizny w punktach ewolwenty, którym odpowiadają końce tego łuku.

Równanie ewoluty odpowiadającej danej krzywej $y=f(x)$ otrzymamy z trzech równań:

$$\xi - x = -\frac{1+y'^2}{y''}y'$$

$$\eta - y = \frac{1+y'^2}{y''}$$

$$y = f(x)$$

po wyrugowaniu zmiennych spółrzędnych $x\,y$ punktu ewolwenty w postaci:

$$F(\xi\,\eta) = 0$$

gdzie ξ η wyrażają spółrzędne zmienne punktów ewoluty. —

Zasady rachunku całkowego.

Całki funkcyi jednej zmiennej niezależnej.

I. Całka określona i nieokreślona.

Główne zadanie rachunku całkowego polega na odwróceniu zadania rachunku różniczkowego. W rachunku różniczkowym daną jest funkcya, a oznaczyć mamy jej pochodną i jej różniczkę. Odwrotne zadanie będzie przeto dwojakie: albo
1.) Do danej funkcyi pochodnej znaleźć funkcyę pierwotną, albo
2.) mając różniczkę funkcyi znaleźć funkcyę samą.

Oba zagadnienia są w najściślejszym związku. Jeżeli daną jest funkcyja pochodna $f(x)$ dla której $F(x)$ jest funkcyą pierwotną tedy musi być:

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x)+\varepsilon$$

gdzie ε jest ilością nieskończenie małą która wraz z Δx dąży do zera, czyli

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\Delta x\, f(x)+\varepsilon\,\Delta x$$

Przyjmujemy, że dana funkcya $f(x)$ jest w odstępie od $x=a$ do $x=b$ skończona ciągła i jednowartościowa, i podzielimy odstęp $b-a$ na n równych części i oznaczymy $\frac{b-a}{n}=\Delta x$, tedy musi szukana funkcya $F(x)$ sprawdzać równanie:

$$F(a+\Delta x) - F(a) = f(a).\Delta x + \varepsilon_1.\Delta x$$

$$F(a+2\Delta x) - F(a+\Delta x) = f(a+\Delta x).\Delta x + \varepsilon_2.\Delta x.$$

. . . .

$$F(a+n\Delta x) - F(a+\overline{n-1}.\Delta x) = f(a+\overline{n-1}.\Delta x)\Delta x + \varepsilon_n.\Delta x$$

zkąd wypada:

$$F(b) - F(a) = f(a)\Delta x + f(a+\Delta x).\Delta x + \dots + f(a+\overline{n-1}.\Delta x)\Delta x + \Delta$$

gdzie Δ dąży razem z Δx do zera.

czyli:

$$F(b) - F(a) = \lim \sum_{x=a}^{x=b} f(x).\Delta x$$

Używając znaku różniczkowego $dx = \lim \Delta x$ oznaczamy podług Leibnitza granicę sumy składników kształtu $f(x)\Delta x$

$\lim\limits_{\Delta x=0} \sum\limits_{x=a}^{x=b} f(x).\Delta x$ symbolem $\int_a^b f(x).dx$ a więc,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x=0} \left[f(a).\Delta x + f(a+\Delta x).\Delta x + \dots + f(b-\Delta x).\Delta x \right]$$

i nazywamy ją <u>całką określoną</u> funkcyi $f(x)$ wziętą od dolnej granicy <u>a</u> do górnej granicy b.

Mamy tedy:

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$

t.z. Wartość całki określonej między granicami a i b równa się różnicy wartości funkcyi F obliczonych dla tych granic.

Ztąd wypada dowolnie:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx$$

czyli $$F(x) = \int_a^x f(x)dx + C$$

t.z. Szukana funkcya pierwotna $F(x)$, która posiada własność, że jej pochodne w danym odstępie, równe są wartościom funkcyi ciągłej $f(x)$, jest równą całce określonej $\int_a^x f(x).dx$ powiększonej o dowolną stałą.

Funkcya pierwotna $F(x)$ nazywa się całką nieokreśloną funkcyi $f(x)$ i oznacza się krótko symbolem

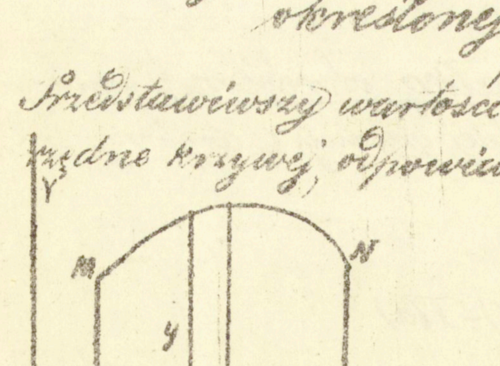
$$F(x) = \int f(x).dx + C$$

Jeżeli funkcya $F(x)$ jest całką funkcyi $f(x)$ tedy musi być:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Geometryczne przedstawienie całki określonej.

Przedstawiwszy wartości funkcyi $y = f(x)$ jako rzędne krzywej, odpowiadające odciętym x



między granicami a i b zawartymi, połączmy ze sobą następnie punkta końcowe tych rzędnych a otrzymamy powierzchnię A ograniczoną krzywą MN, osią X i rzędnemi MA i NB.

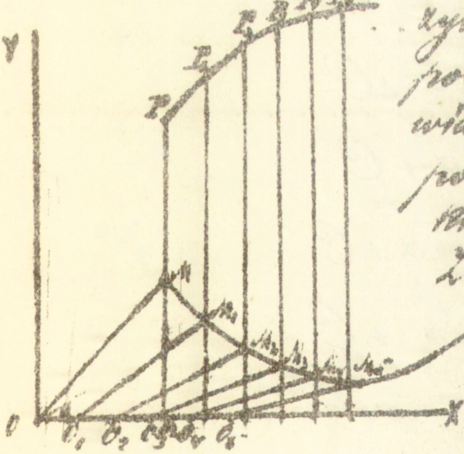
która, jako suma trapezów przedstawi się wzorem:

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx.$$

Całka określona daje więc miarę powierzchni ograniczonej krzywą i osią $X^{ów}$ i rzędnymi punktów końcowych.

Uwaga. Z zagadnienia: Obliczyć powierzchnię danej linji krzywej powstał rachunek całkowy równocześnie z rachunkiem różniczkowym, który wywołało zagadnienie o prostych styczn[y]ch do danej krzywej. Rachunek całkowy odkryli Leibnitz i Newton.

Funkcyę pierwotną czyli całkę danej funkcyi można także przedstawić krzywą, którą nazywamy krzywą całkową, podczas gdy krzywą odpowiadającą danej funkcyi pochodnej nazywamy krzywą różniczkową.



Z wzoru:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

wypada proporcya:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{f(x)}{1},$$

za pomocą której możemy dla danej krzywej różniczkowej otrzymać w przybliżeniu krzywą całkową, przyjmując za dx [illegible] odcinek $OA = 1$. Punkt P jako [illegible] krzywej całkowej określa: $P P_1 A O M$; $P_1 P_2 A_1 O_1 M_1$; $P_2 P_3 A O_2 M_2$ i t. d.

Przyrządy kreślące krzywe całkowe do danych krzywych różniczkowych nazywają się __integratory__.

II Zasadnicze wzory całkowania.

Jeżeli: $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ czyli $dF(x) = f(x).dx$

tedy $F(x) = \int f(x)dx + C$

Na tej podstawie otrzymujemy z zasadniczych wzorów różniczkowania zasadnicze wzory całkowania.

1.) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

2.) $\int a^x . dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

3.) $\int e^x dx = e^x + C$

4.) $\int \sin x . dx = -\cos x + C$

5.) $\int \cos x . dx = \sin x + C$

6.) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C$

7.) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

8.) $\int \frac{\sin . dx}{\cos^2 x} = \sec x + C$

9.) $\int \frac{\cos x . dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x + C$

10.) $\int \frac{dx}{x} = \log x + C$

11.) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12.) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\,tg\,x + C$

13.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sec x + C$

Z tych wzorów możemy otrzymać wzory na obliczanie wartości całek określonych, ważne jeżeli funkcya przedstawiona całką nieokreśloną jest w granicach całkowania rzetelną ciągłą i skończoną. Mianowicie będzie między innymi:

$\int_a^b x^m\,dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$; wzór ważny gdy: $(0<a<\infty, 0<b<\infty, m \gtrless -1)$

2.) $\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a \quad (-\infty < a < +\infty, -\infty < b < \infty)$

3.) $\int_a^b \sin x\,dx = -(\cos b - \cos a)$

4.) $\int_a^b \cos x\,dx = (\sin b - \sin a)$

$\left.\right\} \begin{pmatrix} -\infty < a < +\infty \\ -\infty < b < +\infty \end{pmatrix}$

5.) $\int_a^b \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,b - tg\,a$ {ważne dla każdego odstępu nie zawierającego odciętej $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$}

6.) $\int_a^b \frac{dx}{\sin^2 x} = \cot g\,b - \cot g\,a$ {ważne w odstępie, który nie zawiera $x = k.\pi$}

7.) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \log\frac{b}{a} \quad (0<a<\infty \;, 0<b<\infty)$

8.) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin b - \text{arc}\sin a = -\text{arc}\cos b + \text{arc}\cos a$

$(-1 \leqq a \leqq +1), (-1 \leqq b \leqq +1.)$

9.) $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\,tg\,b - \text{arc}\,tg\,a = -\text{arc}\cot g\,b + \text{arc}\cot g\,a$

$-\infty < a < +\infty \;, \quad -\infty < b < +\infty$

III. Sposoby całkowania. —

1. Całkowanie bezpośrednie, polega na bezpośred-niem sprowadzeniu szukanych całek do całek wzorniczych.

Wzory.

$$1.)\int[\varphi(x)]^n.\varphi'(x).dx=\int[\varphi(x)]^n d[\varphi(x)]=\frac{[\varphi(x)]^{n+1}}{n+1}+C$$

$$2.)\int e^{\varphi(x)}.d[\varphi(x)]=e^{\varphi(x)}+C$$

$$3.)\int \sin\varphi(x).\varphi'(x).dx=\int \sin\varphi(x) d[\varphi(x)]=-\cos\varphi(x)+C$$

$$4.)\int \cos\varphi(x).\varphi(x).dx=\int \cos\varphi(x).d[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)+C$$

$$5.)\int\frac{\varphi'(x)dx}{\cos^2\varphi(x)}=\int\frac{d[\varphi(x)]}{\cos^2\varphi(x)}=\operatorname{tang}\varphi(x)+C$$

$$6.)\int\frac{\varphi'(x)dx}{\sin^2\varphi(x)}=\int\frac{d[\varphi(x)]}{\sin^2\varphi(x)}=-\operatorname{cotg}\varphi(x)+C$$

$$7.)\int\frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}=\int\frac{d[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=\log\varphi(x)+C.$$

$$8.)\int\frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}}=\int\frac{d[\varphi(x)]}{\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}}=\arcsin\varphi(x)+C$$

$$9.)\int\frac{\varphi'(x)dx}{1+[\varphi(x)]^2}=\int\frac{d[\varphi(x)]}{1+[\varphi(x)]}=\operatorname{arc}\operatorname{tg}\varphi(x)+C$$

2.) Całkowanie sumy funkcyi.

Polega na twierdzeniu:

Jeżeli $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\dots\dots+f_n(x)$

tedy $\int f(x)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\int f_3(x)dx+\dots+\int f_n(x)dx$

t. z. Całka sumy funkcyi jest równa sumie całek poszczególnych funkcyi. —

3.) Całkowanie częściowe.

Polega na rozłożeniu funkcyi na dwa czynniki.
Z wzoru:

$$d(uv) = u.dv + v.du$$

czyli $uv = \int u.dv + \int v.du$

otrzymuje się wzór tak zwanego całkowania częściowego:

$$\int u dv = uv - \int v.du$$

czyli:

$$\int \varphi(x).d[\psi(x)] = \varphi(x).\psi(x) - \int \psi(x).d[\varphi(x)]$$

Wzór uczy, jak całkę funkcyi, składającej się z dwóch czynników, których całkę jednego znamy, na inną całkę sprowadzić.

Szczególny przypadek.

$$\int a.\varphi(x) dx = a \int \varphi(x) dx$$

t.z. Stałą można zawsze wyłączyć przed znak całkowania.

4.) Całkowanie przez podstawienie.

Polega na wprowadzeniu nowej zmiennej pod znak całkowania.

Jeżeli w całce $\int f(x) dx$ podstawimy $x = \varphi(u)$, tedy będzie $dx = \varphi'(u) du$,

$f(x) = f[\varphi(u)] = \psi(u)$ przeto:

$$\int f(x) dx = \int \psi(u) \varphi'(u) du.$$

Za pomocą podstawienia $x = \varphi(u)$ sprowadzamy więc oznaczenie całki funkcyi $f(x)$ na oznaczenie całki $\int \Psi(u)\varphi'(u)du$. Przy stosownym doborze podstawienia czyli wzoru substytucyjnego może być nowa całka łatwiejszą do oznaczenia od danej całki.

Jeżeli dana całka jest określona a ma być wziętą między granicami a i b, tedy nowa całka określona musi być wziętą między granicami u_a i u_b gdzie:

$$a = \varphi(u_a) \quad , \quad b = \varphi(u_b) \qquad \text{więc:}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u_a}^{u_b} \Psi(u)\varphi'(u)du$$

IV Całki funkcyi algebraicznie wymiernych.

1.) Funkcya wymierna całkowita.

Całka funkcyi wymiernej całkowitej n^{go} stopnia:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$$

przedstawia się w postaci:

$$F(x) = \int f(x)dx = a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \ldots\ldots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + C$$

t.z. jest całkowitą wymierną funkcyą $(n+1)^{go}$ stopnia.

2.) Funkcya wymierna ułamkowa.

Funkcya wymierna ułamkowa:

$$f(x) = \frac{\Psi(x)}{\varphi(x)}$$

w której funkcya $\Psi(x)$ jest m^{go}, funkcya

$\varphi(x)$ zaś n^{go} stopnia nazywa się właściwą jeżeli $m<n$ zaś niewłaściwą jeżeli $m \geqq n$.

Funkcya ułamkowa niewłaściwa da się zawsze rozłożyć na funkcyę całkowitą i funkcyę właściwą ułamkową. W tym celu musimy dzielenie funkcyi $\psi(x)$ przez $\varphi(x)$ wykonać i dzielenie to tak długo powtarzać, dopóki nie będzie stopień reszty mniejszy od n.*

Będzie tedy:

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = g(x) + \frac{\psi'(x)}{\varphi(x)}$$

przeto:

$$\int f(x)\,dx = \int g(x).dx + \int \frac{\psi'(x)}{\varphi(x)}.dx =$$

$$= g(x) + \int \frac{\psi'(x)}{\varphi(x)}.dx.$$

Potrzeba tedy oznaczyć jeszcze całkę funkcyi właściwej ułamkowej. t. j. całki kształtu

$$\int \frac{\psi'(x)}{\varphi(x)}.dx,$$ gdzie ψ' jest m^{go}, φ zaś n^{go} stopnia a $m<n$.

Twierdzenie. Funkcya ułamkowa właściwa $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ da się rozłożyć na sumę <u>ułamków prostych</u> t. z. ułamków, w których liczniki są stałe, mianowniki zaś są funkcyami linjowymi albo potęgami funkcyi linjowych.

1.) Mianownik ma pierwiastki między sobą różne.

Przyjmijmy że funkcya mianownika

$$\varphi(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0$$

ma różne pierwiastki $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$

tedy będzie:

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$$

W tym wypadku otrzymamy jedyny możebny rozkład funkcyi ułamkowej $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ na ułamki proste kształtu:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

gdzie spółczynniki $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$ są liczbami stałymi, które możemy obliczyć na zasadzie, że obie strony równania mają być tożsamościowo równe dla wszelkiej wartości zmiennej niezależnej x;

Bezpośrednio zaś otrzymamy

$$\psi(x) = A_1 \cdot \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_1} + A_2 \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_2} + \ldots + A_n \cdot \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_n}$$

przeto

$$\psi(\alpha_i) = A_i \lim_{x=\alpha_i} \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_i} = A_i \varphi'(\alpha_i)$$

a więc:
$$A_i = \frac{\psi(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)},$$

gdzie $\varphi'(\alpha_i) = \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)_{x=\alpha_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$

Uwaga. Jeżeli $\varphi(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_n)$

tedy $\varphi'(x) = (x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n) +$
$+ \ldots\ldots + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_{n-1})$

czyli
$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_1} + \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_2} + \ldots\ldots + \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_n}$$

$$\varphi'(\alpha_i) = (\alpha_i-\alpha_1)\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots(\alpha_i-\alpha_n) = \left(\frac{\varphi(x)}{x-\alpha_i}\right)$$

Widać tu, że $\varphi'(\alpha_i)$ nie może być równe zeru, gdy $\varphi(x)=0$ ma same różne pierwiastki, spółczynniki A_i będą więc wszystkie skończone.
Rozkład właściwej funkcyi ułamkowej o mianowniku $\varphi(x) = \prod\limits_{i=1}^{i=n}(x-\alpha_i)$ możemy więc napisać w postaci:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(\alpha_i)} \cdot \frac{1}{x-x_i}$$

2.) Mianownik ma pierwiastki wielokrotne.

Przypuśćmy, że funkcya $\varphi(x)$ ma pierwiastki wielokrotne, czyli, że

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^{\lambda_1}(x-\beta)^{\lambda_2} \cdots\cdots (x-\mu)^{\lambda_m}$$

gdzie $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_m = n.$

W tym wypadku nie jest powyżej zastosowany rozkład funkcyi ułamkowej na ułamki proste możliwy. Natomiast mamy następujący jedynie możebny rozkład:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0}{(x-\alpha)^{\lambda_1}} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda_1-1}} + \cdots\cdots + \frac{A_{\lambda_1-1}}{x-\alpha} +$$

$$+ \frac{B_0}{(x-\beta)^{\lambda_2}} + \frac{B_1}{(x-\beta)^{\lambda_2-1}} + \cdots\cdots\cdots + \frac{B_{\lambda_2-1}}{x-\beta} +$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{M_0}{(x-\mu)^{\lambda_m}} + \frac{M_1}{(x-\mu)^{\lambda_m-1}} + \cdots\cdots\cdots + \frac{M_{\lambda_m-1}}{x-\mu}$$

gdzie spółczynniki stałe $A, B, \ldots M$, obliczyć się dają na zasadzie, że obie strony równania mają być tożsamościowo równe.

Obliczanie spółczynników A da się także w ten sposób uskutecznić.

Kładąc $\varphi(x) = (x-\alpha)^{\lambda_1}\varphi_1(x)$

otrzymamy:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0}{(x-\alpha)^{\lambda_1}} + \frac{\psi_1(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_1-1}\varphi_1(x)}$$

a ztąd $A_0 = \frac{\psi(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}$, gdzie ani $\psi(\alpha)$ ani $\varphi_1(\alpha)$ nie może być równe zeru.—

Stosując to postępowanie do nowego ułamka, otrzymamy:

$$\frac{\psi_1(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_1-1}\varphi_1(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda_1-1}} + \frac{\psi_2(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_1-2}\varphi_1(x)}$$

a ztąd $A_1 = \frac{\psi_1(\alpha)}{\varphi_1(\alpha)}$ gdzie $\psi_1(\alpha)$ może być także równe zeru.

Tym sposobem dalej postępując otrzymamy:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^{\lambda_1}\varphi_1(x)} = \frac{A_0}{(x-\alpha)^{\lambda_1}} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\lambda_1-1}} + \dots + \frac{A_{\lambda_1-1}}{x-\alpha} + \frac{X_1(x)}{\varphi_1(x)} \quad \mathrm{I)}$$

gdzie $\frac{X_1(x)}{\varphi_1(x)}$ jest nową funkcyą ułamkową, którą ze względu na wielokrotne czynniki funkcyi $\varphi_1(x)$ podobnie rozłożyć możemy a tym sposobem dalsze spółczynniki B....M obliczyć.

Możemy też wyprowadzić bezpośrednie wzory na obliczanie spółczynników A, B, ... M. Kładąc $x = \alpha + h$ otrzymamy mianowicie z I)

$$\frac{\psi(\alpha+h)}{\varphi(\alpha+h)} = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \dots + A_{\lambda_1-1} h^{\lambda_1-1} + \frac{X_1(\alpha+h)}{\varphi_1(\alpha+h)} h^{\lambda_1}$$

który porównamy z rozwinięciem funkcyi:

$\Phi_1(\alpha+h) = \dfrac{\Phi(\alpha+h)}{\varphi_1(\alpha+h)}$ podług szeregu Taylora dowodzi, że:

$$A_0 = \Phi_1(\alpha)\ ,\ A_1 = \Phi_1'(\alpha)\ ,\ A_2 = \frac{1}{2!}\Phi_1''(\alpha), \dots$$

$$\dots A_{\lambda_1-1} = \frac{1}{(\lambda_1-1)!}\cdot \Phi_1^{(\lambda_1-1)}(\alpha)$$

Podobne wzory wypadają na dalsze spółczynniki.

2.) Mianownik ma pierwiastki urojone.

Jeżeli funkcya $\varphi(x)$ ma pierwiastki urojone, tedy możemy co dwa ułamki proste przynależne pierwiastkom sprzężonym $\alpha_1 = \alpha+\beta i$, $\alpha_2 = \alpha-\beta i$ złączyć w jedną sumę a otrzymamy:

$$\frac{A_1}{x-\alpha-\beta i} + \frac{A_2}{x-\alpha+\beta i} = \frac{\psi(\alpha+\beta i)}{\varphi'(\alpha+\beta i)}\cdot\frac{1}{x-\alpha-\beta i} + \frac{\psi(\alpha-\beta i)}{\varphi'(\alpha-\beta i)}\cdot\frac{1}{x-\alpha+\beta i} =$$

$$= \frac{M+iN}{x-\alpha-\beta i} + \frac{M-iN}{x-\alpha+\beta i} = \frac{2M(x-\alpha)-2N\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{2Mx-2(M\alpha+N\beta)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

czyli:

$$\frac{A_1}{x-\alpha-\beta i} + \frac{A_2}{x-\alpha+\beta i} = \frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{Px+Q}{x^2+px+q}$$

gdzie P i Q, p i q, są stałe liczby rzetelne. Każdej pojedynczej parze urojonych pierwiastków sprzężonych odpowiada przeto ułamek prosty, którego licznik jest stopnia pierwszego a mianownik stopnia drugiego, oba z rzetelnymi spółczynnikami.

Stałe spółczynniki P i Q w licznikach możemy także bezpośrednio oznaczyć. Wychodząc z tożsamości:

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)} \quad \text{gdzie:}$$

$\varphi(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]\varphi_1(x)$ otrzymamy bowiem

$\psi(x)=(Px+Q)\varphi_1(x)+\psi_1(x)[(x-\alpha)^2+\beta^2]$

a ztąd $\psi(\alpha+\beta i)=[P(\alpha+\beta i)+Q]\varphi_1(\alpha+\beta i)$

czyli równanie:

$$P(\alpha+\beta i)+Q=\frac{\psi(\alpha+\beta i)}{\varphi_1(\alpha+\beta i)}$$

w którym porównawszy części rzetelne i urojone otrzymujemy dwa równania do oznaczenia stałych P i Q

4.) Pierwiastki sprzężone urojone są wielokrotne: Jeżeli funkcya $\varphi(x)$ ma wielokrotnie pierwiastki sprzężone urojone n. p. λ krotne pierwiastki sprzężone $\alpha+\beta i$ i $\alpha-\beta i$, tedy należy znowu ułamki proste przynależne pierwiastkom sprzężonym złączyć w jedną sumę.

Otrzymamy tedy:

$$\frac{A_0}{(x-\alpha-\beta i)^\lambda}+\frac{A_1}{(x-\alpha-\beta i)^{\lambda-1}}+\frac{A_2}{(x-\alpha-\beta i)^{\lambda-2}}+\dots+\frac{A_{\lambda-1}}{x-\alpha-\beta i}+$$

$$+\frac{B_0}{(x-\alpha+\beta i)^\lambda}+\frac{B_1}{(x-\alpha+\beta i)^{\lambda-1}}+\frac{B_2}{(x-\alpha+\beta i)^{\lambda-2}}+\dots+\frac{B_{\lambda-1}}{x-\alpha+\beta i}=$$

$$=\frac{P_0x+Q_0}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\lambda}+\frac{P_1x+Q_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{\lambda-1}}+\frac{P_2x+Q_2}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{\lambda-2}}+\dots+\frac{P_{\lambda-1}x+Q_{\lambda-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

gdzie P i Q będą stałymi liczbami rzetelnymi.

Każdej parze λ krotnych pierwiastków sprzężonych funkcyi $\varphi(x)$ przynależy więc λ ułamków prostych, których liczniki są dwumianami stopnia 1$^{\text{go}}$ ze stałymi spółczynnikami rzetelnymi, mianowniki zaś potęgami trójmian.

drugiego stopnia kolejno o wykładnikach $\lambda, \lambda-1, \dots 2, 1$.
Stałe spółczynniki P i Q otrzymać możemy
także na podstawie rozkładu jedynie możliwe
go:
$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{P_0 x + Q_0}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\lambda} + \frac{\psi_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{\lambda-1}\cdot\varphi_1(x)}$$
z którego otrzymujemy:
$$\psi(x) = (P_0 x + Q_0)\varphi_1(x) + \psi_1(x)\cdot[(x-\alpha)^2+\beta^2]$$
przeto:
$$P_0(\alpha+\beta i) + Q_0 = \frac{\psi(\alpha+\beta i)}{\varphi_1(\alpha+\beta i)}$$
zkąd wypadają spółczynniki P_0 i Q_0 a
podobnie następujące.

Całkowanie funkcyi wymiernych ułamkowych.

Na podstawie możliwego rozkładu funkcyi
ułamkowej na ułamki proste sprowadzają
się całki funkcyi właściwych ułamkowych
do całek następujących:

1.) $$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \log(x-\alpha)$$

2.) $$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^r} = \frac{1}{r-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{r-1}} \quad \text{jeżeli } r>1.$$

3.) $$\int \frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\cdot dx = P\int\frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + (P\alpha+Q)\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} =$$
$$= \frac{P}{2}\cdot\log[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{P\alpha+Q}{\beta}\cdot\text{arc tg}\,\frac{x-\alpha}{\beta}$$

4.) $$\int\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r} = P\int\frac{(x-\alpha)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r} + (P\alpha+Q)\int\frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r} =$$
$$= -\frac{P}{2r-2}\cdot\frac{1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{r-1}} + (P\alpha+Q)\int\frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r}.$$

gdzie na oznaczenie drugiej całki:

$$\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^r} = \int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^r} = J_r \qquad (x-\alpha)=y$$

uzyskujemy wzór redukcyjny:

$$J_r = \frac{1}{\beta^2(2r-2)} \cdot \frac{y}{(y^2+\beta^2)^{r-1}} + \frac{2r-3}{\beta^2(2r-2)} J_{r-1}.$$

którego kolejne zastosowanie prowadzi w końcu do całki:

$$J_1 = \int \frac{dy}{y^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{\beta} + C. \qquad \text{czyli:}$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\alpha}{\beta} + C$$

Na tej podstawie dochodzimy do twierdzenia:

Całka wszelkiej funkcyi wymiernej algebraicznej $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ da się przedstawić przez funkcye wymierne algebraiczne i funkcye logarytmiczne względnie cyklometryczne. Przedstawienie samo wymaga oznaczenia pierwiastków funkcyi $\varphi(x)$.

Uwaga. W miejscu funkcyj logarytmicznych mogą być wprowadzone funkcye cyklometryczne, jedne z nich dają tedy przedstawienia rzetelne n. p.

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x + C;$$ wedle prawidła rozkładu funkcyi na ułamki proste, będzie atoli:

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{i}{2}\int \frac{dx}{x-i} = +\frac{i}{2}\int \frac{dx}{x+i} = -\frac{i}{2}\log\frac{x-i}{x+i} + C$$

zkąd poznajemy, że:

$$\operatorname{arc.\,tg} x = -\frac{i}{2}\log\frac{x-i}{x+i} + C$$

co wskazuje na związek między funkcyami logarytmicznymi a cyklometrycznymi:

Przykłady:

1.) $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = 4c \int \frac{dx}{(2cx+b)^2+(4ac-b^2)}$ więc

$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$ jeżeli $4ac > b^2$

$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \log \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}} + C$ jeżeli: $4ac < b^2$

2.) $\int \frac{5x^3+1}{x^2-3x+2} dx = \frac{5x^2}{2} + 15x - 6\log(x-1) + 41\log(x-2) + C$

3.) $\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{6}\log \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

4.) $\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\log \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

5.) $\int \frac{2x^4-3x^3-x+21}{(x+1)^3(x-2)^2} dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + 2\log(x+1) - \frac{1}{x-2} + C$

6.) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$

7.) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + C$

V. Całki wyraźnych funkcyj algebraicznych niewymiernych.

Funkcya nazywa się wyraźną algebraicznie niewymierną, jeżeli zawiera w swym składzie oprócz całkowitych potęg zmiennej niezależnej, także ułamkowe potęgi tej zmiennej lub ułamkowe potęgi wielomianów z tej zmiennej zbudowanych.

Szczególne rodzaje wyraźnych funkcyj niewymiernych.-

1.) Funkcye, które zawierają wymiernie ułamkowe potęgi zmiennej niezależnej:

$y = f(x^a, x^b, \ldots\ldots x^l)$

gdzie wykładniki $a, b \ldots . l$ są ułamkami wymiernymi.
Całki takich funkcyi dadzą się sprowadzić do całek funkcyi wymiernych podstawieniem:

$x = z^m$; $dx = m z^{m-1} dz$ gdzie **m** jest najmniejszym wspólnym mianownikiem ułamków $a, b, \ldots l$ otrzymamy bowiem tedy:

$$\int f(x^a, x^b, \ldots x^l)\,dx = m\int f(z^{am}, z^{bm}, z \ldots z^{lm})\,z^{m-1}dz,$$

a więc całkę funkcyi wymiernej, z czego wypływa, że:
Całki funkcyj niewymiernych, zawierających ułamkowe potęgi zmiennej niezależnej w wymiernych połączeniach, dadzą się wyrazić przez funkcye algebraiczne niewymierne i logarytmiczne względnie cyklometryczne.
Przykład:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = -\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + x - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt[6]{x} + C$$

2.) Funkcye, które zawierają oprócz całkowitych potęg zmiennej x także ułamkowe potęgi dwumianu pierwszego stopnia:
Kształt: $y = f\left[(bx+a)^p, (bx+a)^q, \ldots (bx+a)^t\right]$
gdzie $p, q, \ldots t$, są ułamkami wymiernymi.
Kładziemy:

$a + bx = z^m$ więc $x = \frac{z^m - a}{b}$; $dx = \frac{m}{b} z^{m-1} dz$

gdzie m jest najmniejszym wspólnym mianownikiem ułamków $p, q, \ldots t$, otrzymamy:

$$\int f\left[(bx+a)^p, (bx+a)^q, \ldots\ldots (bx+a)^t\right] dx =$$
$$= \frac{m}{b}\int f(z^{mp}, z^{mq}, \ldots\ldots z^{mt})\, z^{m-1} dz$$

a więc także całkę funkcyi wymiernej.
Całki funkcyi niewymiernych zawierających wymierne ułamkowe potęgi jednego dwumianu pierwszego stopnia dadzą się wyrazić przez funkcye algebraiczne i logarytmiczne czyli cyklometryczne.

Przykład.

$$\int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}\, dx = \frac{\sqrt[3]{1+x}}{2} - \sqrt[6]{1+x} - \frac{1}{2}\log(1+\sqrt[3]{1+x}) +$$
$$+ \operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{1+x} + C$$

3.) Funkcye, które zawierają wymierne ułamkowe potęgi dwumianu jakiegokolwiek stopnia

$$a + bx^n$$

Całki funkcyi takich zowiemy całkami dwumianowymi (binomische Integrale)
Kształt ogólnej całki dwumianowej:

$$I_{m,p} = \int x^m (a+bx^n)^p dx$$

gdzie m, n, p, są liczby wymierne całkowite lub ułamkowe. —

Liczby m i n możemy nie zmniejszając ogólności przyjąć za całkowite, w przeciwnym razie bowiem kładąc $x = z^r$ gdzie r jest najmniejszym wspólnym mianownikiem, otrzymamy: $dx = r z^{r-1}$ przeto:

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = r\int z^{mr+r-1}(a+bz^{nr})^p dz \quad \text{II)}$$

gdzie już oba wykładniki przy x będą całkowite.

Liczbę n możemy przyjąć całkowitą dodatnią, w przeciwnym razie możemy bowiem napisać:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p dx \qquad \overline{\underline{II}}$$

Wykładnik p jest ułamkiem gdyż inaczej mielibyśmy całkę funkcyi wymiernej.

Ogólną całkę dwumianową możemy w pewnych wypadkach sprowadzić do całki funkcyi wymiernej:

Podstawmy bowiem: $a+bx^n = u$; $x = \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$,

$dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} . du$, tedy otrzymamy:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{nb}\int u^p\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} . du$$

albo także wedle $\overline{\underline{II}}$

$$\int x^m(a+bx^n)^p . dx = \frac{1}{nb}\int u^p\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{m+np+1}{n}-2} . du$$

a zatem ogólna całka dwumianowa sprowadza się do całki funkcyi wymiernej, skoro $\frac{m+1}{n}$ albo $\frac{m+np+1}{n}$ jest liczbą całkowitą.

W tych wypadkach da się zatem ogólna całka dwumianowa przedstawić przez funkcye niewymierne algebraiczne i logarytmiczne czyli cyklometryczne. (Pr. z. $\int x^3(1+x^8)^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^{-1}(x^{-8}+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4}\log(x^4+\sqrt{1+x^8})+C$; Wskaźników mamy tu $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2}$ natomiast $\frac{m+np+1}{n} = 0$)

W innych wypadkach możemy ogólną całkę dwumianową sprowadzić do kształtów możliwie najprostszych zapomocą całkowania częściowego.

Otrzymamy w tym celu:

Wzory redukcyjne dla całki dwumianowej $J_{m,p} = \int x^m (a+bx^n)^p dx$.

$$J_{m,p} = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)} J_{m-n,\,p+1} \qquad 1)$$

$$J_{m,p} = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p}}{m+1} - \frac{bnp}{m+1} J_{m+n,\,p-1} \qquad 2)$$

$$J_{m,p} = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+np+1)b} - \frac{a(m-n+1)}{b(m+np+1)} J_{m-n,\,p} \qquad 3)$$

$$J_{m,p} = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p}}{m+np+1} + \frac{anp}{m+np+1} J_{m,\,p-1} \qquad 4)$$

$$J_{m,p} = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)a} - \frac{m+np+n+1}{(m+1)a} J_{m+n,\,p} \qquad 5)$$

$$J_{m,p} = \frac{-x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{na(p+1)} + \frac{m+np+n+1}{na(p+1)} J_{m,\,p+1} \qquad 6)$$

Te wzory redukcyjne są nieprzydatne, jeżeli mianowniki stają się zerami, ale w tych wypadkach sprowadza się całka dwumianowa do całki funkcyi wymiernej. Wykluczając te wypadki możemy za pomocą powyższych wzorów redukcyjnych sprowadzić ogólną całkę dwumianową do takiej całki w której będzie $0 < m < n$ czyli $0 < \frac{m}{n} < 1$ i $0 < p < 1$.

Możemy przytem zawsze zrobić wykładnik n równym 1, gdyż kładąc

$$x^n = u\,; \quad x = u^{\frac{1}{n}}\,; \quad dx = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1}$$

otrzymamy:

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int u^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bu)^p du = \frac{1}{n}\int u^q (a+bu)^p du$$

gdzie $\frac{m+1}{n} - 1$ jest ułamkiem < 1.

Jark.

Kładąc wreszcie $u = -\frac{a}{b} z$; $du = -\frac{a}{b} dz$

otrzymamy:

$$J_{m,n} = \frac{1}{n}\int u^q (a+bu)^p du = \frac{a^{p+q+1}}{n.b^{q+1}}\int z^q(1-z)^p dz$$

Całka $E_{q,p} = \int z^p(-1-z)^q dz$, $(0<p<1\,;\,0<q<1)$ nie da się wyrazić przez funkcye znane i tworzy nowy rodzaj funkcyj, zwanych funkcyjé Eulera, które możemy przedstawić w postaci szeregów, roz_ wijając dwumian $(1-z)^q$ w szereg potęgowy i cał_ kując człony otrzymanego szeregu przez z^p pomno_ żonego.

Będzie tedy:

$$E_{p,q} = \int z^q(1-z)^p dz = \frac{z^{q+1}}{q+1} - \binom{p}{1}\frac{z^{q+2}}{q+2} - \binom{p}{2}\frac{z^{q+3}}{q+3} - \binom{p}{3}\frac{z^{q+4}}{q+4} + \dots$$

W związku z całką dwumianową pozostaje całka funkcyi goniometrycznej kształtu:

$$J_{s,k} = \int \sin^s x \cos^k x\, dx$$

którą za pomocą podstawienia:

$$\sin x = z^{\frac{1}{2}},\ \cos x = (1-z)^{\frac{1}{2}}\ ;\ dx = \frac{\frac{1}{2}dz}{z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{1}{2}}}$$

sprowadza się do postaci:

$$J_{s,k} = \frac{1}{2}\int z^{\frac{s-1}{2}}(1-z)^{\frac{k-1}{2}} dz$$

Ta całka da się sprowadzić do całki funkcyi wy_ miernej, skoro jedna z liczb $\frac{s-1}{2}$, $\frac{k-1}{2}$, $\frac{s+k}{2}$, jest liczbą całkowitą. Jeden z tych warunków spełni się zawsze, skoro oba wykładniki s i k są liczbami całkowitymi.

W tych wypadkach okazuje się praktycznem jedno z następujących podstawień:

1.) $\sin x = u$; $\cos x = \sqrt{1-u^2}$, $dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

2.) $\cos x = u$, $\sin x = \sqrt{1-u^2}$; $dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

3.) $\tan x = u$; $\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$; $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$; $dx = \frac{du}{1+u^2}$

4.) $\tan \frac{1}{2} x = u$; $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$; $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$; $dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$

5.) $\tan \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = u$, $\sin x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$; $\cos x = \frac{2u}{1+u^2}$; $dx = -\frac{2\,du}{1+u^2}$,

które sprowadzają całkę $J_{k,s} = \int \cos^k x \sin^s x \, dx$, do następujących kształtów:

1.) $J_{ks} = \int u^s (1-u^2)^{\frac{k-1}{2}} du$, jeżeli $\sin x = u$

2.) $J_{ks} = \int u^k (1-u^2)^{\frac{s-1}{2}} du$, jeżeli $\cos x = u$

3.) $J_{ks} = \int \frac{u^s du}{(1+u^2)^{\frac{s+k}{2}+1}}$ " $\tan x = u$

4.) $J_{ks} = 2^{s+1} \int \frac{u^s (1+u^2)^k}{(1+u^2)^{s+k+1}} du$ " $\tan \frac{1}{2} x = u$

5.) $J_{ks} = -2^{k+1} \int \frac{u^k (1+u^2)^s}{(1+u^2)^{s+k+1}} du$; " $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = u$

Z których wypływają następujące prawidła znane u nas pod nazwą: „prawideł Żmurkowskich”.

1.) Jeżeli wykładnik przy $\cos x$ jest nieparzysty użyjemy podstawienia $\sin x = u$

2.) Jeżeli wykładnik przy $\sin x$ jest nieparzysty użyjemy podstawienia $\cos x = u$

3.) Jeżeli suma wykładników przy $\sin x$ i $\cos x$ jest liczbą ujemną parzystą, użyjemy podstawienia $\tan x = u$.

4.) Jeżeli suma wykładników $s+k$ jest całkowitą odjemną a wykładnik przy $\cos x$ jest całkowity dodatni użyjemy podstawienia:

$$\tan \tfrac{1}{2} x = u$$

5.) Jeżeli suma wykładników $s+k$ jest całkowitą odjemną a wykładnik przy $\sin x$ jest całkowity dodatni użyjemy podstawienia:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = u$$

Tym sposobem sprowadza się całka $J_{k,s}$ do całki funkcyi wymiernej całkowitej.

Aby wyczerpać wszystkie możliwe wypadki przy całkowitych wykładnikach s i k pozostają jeszcze dwa następujące

6.) Oba wykładniki s i k są odjemne a ich suma wykładników jest odjemna i nieparzysta. W tym wypadku dość pomnożyć funkcyę przez

$$1 = (\cos^2 x + \sin^2 x)^r$$

skoro $s+k = -(2r+1)$, będzie bowiem tedy:

$$J_{s,k} = \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{2r+1-m} x} = \int \frac{dx\,(\cos^2 x + \sin^2 x)^r}{\sin^m x \cos^{2r+1-m} x} =$$

$$= \int \sum_{n=0}^{n=r} \binom{r}{n} \frac{\cos^{2r-2n} x \sin^{2n} x}{\sin^m x . \cos^{2r+1-m} x}\, dx = \int \sum_{n=0}^{n=r} \binom{r}{n} \cos^{m-2n-1} x . \sin^{2n-m} x . dx$$

Całka przedstawia się jako suma $(r+1)$ całek z których każda musi mieć jeden z wykładników przy $\cos x$ albo przy $\sin x$ dodatni (gdyż suma tych wykładników jest równą -1) przeto da się oznaczyć za pomocą podstawienia $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = u$ lub $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = u$

7.) Oba wykładniki są dodatnie. W tym wypadku możemy iloczyn $\cos^k x . \sin^s x$ przekształcić na sumę funkcyi łuków wielokrotnych.

Kładąc: $\cos x + i\sin x = 1_x = u^1$, $\cos x - i\sin x = 1_{-x} = u^{-1}$ } przeto:

$\cos rx + i\sin rx = u^r$, $\cos rx - i\sin rx = u^{-r}$ } otrzymujemy:

$$\cos x = \frac{u^1+u^{-1}}{2}\ ;\quad \sin x = \frac{u^1-u^{-1}}{2i}\ ;$$ jako też

$$\cos rx = \frac{u^r+u^{-r}}{2}\ ;\quad \sin rx = \frac{u^r-u^{-r}}{2i}$$

skutkiem tego będzie:

$$\cos^k x.\sin^s x = \frac{(u^1+u^{-1})^k(u^1-u^{-1})^s}{2^{s+k}i^s} = \frac{P}{2^{s+k}i^s}$$

Wykonawszy naznaczone mnożenie otrzymamy:

$$P = A_1 u^{\alpha_1} + A_2 u^{\alpha_2} + \ldots + B_1 u^{-\beta_1} + B_2 u^{-\beta_2} + \ldots$$

a że zastępując w wyrażeniu P ilość u przez u^{-1} otrzymamy: $(u^{-1}+u^{+1})^k(u^{-1}-u^{+1})^s = (-1)^s P$

przeto musi być:

$$(-1)^s P = A_1 u^{-\alpha_1} + A_2 u^{-\alpha_2} + \ldots + B_1 u^{\beta_1} + B_2 u^{\beta_2} + \ldots$$

czyli także:

$$P = (-1)^s \left\{ B_1 u^{+\beta_1} + B_2 u^{\beta_2} + \ldots + A_1 u^{-\alpha_1} + A_2 u^{-\alpha_2} + \ldots \right\}$$

skąd wypadają koniecznie równości:

$$A_r = (-1)^s B_r\ ;\quad \alpha_r = \beta_r$$

a zatem:

$$P = \sum_r A_r\left(u^{\alpha_r} + (-1)^s u^{-\alpha_r}\right)$$

czyli $P = \sum_r 2A_r \cos\alpha_r x$ jest s jest liczbą parzystą

zaś $P = i\sum_r 2A_r \sin\alpha_r x$ " " " " nieparzystą.

Będzie zatem:

$$\cos^k x.\sin^s x = \frac{\sum_r 2A_r\cos\alpha_r x}{2^{s+k}(-1)^{\frac{s}{2}}}$$ jeżeli $s = 2r$

zaś $$\cos^k x\sin^s x = \frac{\sum_r 2A_r\sin\alpha_r x}{2^{s+k}.(-1)^{\frac{s-1}{2}}}$$ jeżeli $s = 2r+1$.

Tym sposobem sprowadza się całka $J_{k,s}$ do całek kształtu $\int \cos ax . dx = \frac{\sin ax}{a}$ lub kształtu:

$\int \sin ax . dx = -\frac{\cos ax}{a}$

Przykłady:

1.) $\int \cos^7 x \sin^2 x . dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C$

2.) $\int \cos^4 x . \sin^5 x . dx = C - \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9}$

3.) $\int \frac{dx}{\cos^6 x} = tg\, x + \frac{2}{3} tang^3 x + \frac{1}{5} tg^5 x$

4.) $\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \frac{1}{16}\left\{ -\frac{1}{4 tg^4 \frac{x}{2}} - \frac{2}{tg^2 \frac{x}{2}} + 6 \log tg \frac{x}{2} + 2 tg^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} tg^4 \frac{x}{2} \right\} + C$

5.) $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = -\frac{1}{4}\left\{ -\frac{1}{2 tg^2 \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x)} + 2 \log tg \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x) + \frac{tg^2 \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x)}{2} \right\} + C$

Można tu wynik przekształcić na podstawie wzorów:

$tg \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x) = \sec x - tg\, x$; $\frac{1}{tg \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x)} = \sec x + tg\, x$

6.) $\int \frac{dx}{\sin^2 x . \cos^3 x} = \frac{1}{8} . \frac{1}{tg^2 \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x)} - \frac{1}{8} . tg^2 \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x) - \frac{3}{2} \log tg \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x) - cosec\, x$

7.) $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = -\frac{1}{32}\int (\cos 6x + 2\cos 4x - \cos 2x - 6) dx =$

$= -\frac{1}{32}\left\{ \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} - 6x \right\}$

Wszystkich innych wypadkach możemy do całki J_{ks} zastosować wzory redukcyjne:

1.) $J_{k,s} = \frac{\sin^{s+1} x \cos^{k-1} x}{s+1} + \frac{k-1}{s+1} J_{k-2,s+2}$

2.) $J_{k,s} = -\frac{\sin^{s-1} x \cos^{k+1} x}{k+1} + \frac{s-1}{k+1} . J_{k+2,s-2}$

3.) $J_{k,s} = \frac{\sin^{s+1} x . \cos^{k-1} x}{s+k} + \frac{k-1}{s+k} J_{k-2,s}$

4. $J_{k,s} = -\frac{\sin^{s-1} x \cos^{k+1} x}{s+k} + \frac{s-1}{s+k} J_{k,s-2}$

5.) $J_{k,s} = -\frac{\sin^{s+1} x . \cos^{k+1} x}{k+1} + \frac{s+k+2}{k+1} J_{k+2,s}$

$$\text{1)}\ J_{k,s} = \frac{\sin^{s+1}x \cos^{k+1}x}{s+1} + \frac{s+k+2}{s+1} J_{s+2,k}$$

Wzory 1.) i 6.) są nieprzydatne gdy $s+1=0$
" 2.) i 5.) " " " $k+1=0$
" 3.) i 4.) " " " $s+k=0$

Przy całkowitych s i k prowadzą powyższe wzory redukcyjne ostatecznie do jednej z całek: –

1.) $J_{0,0} = \int dx = x + C$

2.) $J_{1,0} = \int \cos x . dx = \sin x + C$

3.) $J_{0,1} = \int \sin x . dx = -\cos x + C$

4.) $J_{1,1} = \int \sin x . \cos x . dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$

5.) $J_{0,-1} = \int \frac{dx}{\sin x} = \log tg \frac{x}{2} + C$

6.) $J_{-1,0} = \int \frac{dx}{\cos x} = \log tg \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + C$

7.) $J_{-1,-1} = \int \frac{dx}{\sin x . \cos x} = \log tg x + C$

8.) $J_{1,-1} = \int \frac{\cos x . dx}{\sin x} = \log \sin x + C$

9. $J_{-1,1} = \int \frac{\sin x . dx}{\cos x} = -\log \cos x + C$

Przy ułamkowych wykładnikach s i k możemy za pomocą wzorów redukcyjnych dojść do kształtu $J_{k,s}$, gdzie będzie:

$0 < k < 2$; $0 < s < 2$; lub $-1 < k < +1$; $-1 < s < +1$.

a takie całki prowadzą ostatecznie do całek Eulera

$E_{p,q} = \int z^p (1-z)^q . dz$.

4.) Funkcye niewymierne, które zawierają kwadratowy pierwiastek z trójmianu drugiego stopnia. –

Kształt: $\int F(x, \sqrt{X})\,dx$; $\sqrt{X} = \sqrt{a+bx+cx^2}$

Podstawienia:

α.) $c \geqq 0$

Kładziemy: $\sqrt{a+bx+cx^2} = u - x\sqrt{c}$

tedy $x = \dfrac{u^2-a}{b+2u\sqrt{c}}$, $\sqrt{X} = \dfrac{(u^2+a)\sqrt{c}+bu}{b+2u\sqrt{c}}$

$$dx = 2\,\frac{(u^2+a)\sqrt{c}+bu}{(b+2u\sqrt{c})^2}\cdot du$$

β.) $a \geqq 0$

Kładziemy: $\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{a} + x.u$

tedy $x = \dfrac{2u\sqrt{a}-b}{c-u^2}$, $\sqrt{X} = \dfrac{(c+u^2)\sqrt{a}-bu}{c-u^2}$

$$dx = 2\,\frac{(c+u^2)\sqrt{a}-bu}{(c-u^2)^2}\cdot du$$

γ.) $\sqrt{a+bx+cx^2} = A\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}$

Kładziemy $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)u$

tedy $x = \dfrac{\beta-\alpha u^2}{1+u^2}$, $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} = \dfrac{(\beta-\alpha)u}{1+u^2}$

$$dx = 2\,\frac{(\beta-\alpha)u}{(1+u^2)^2}\cdot du$$

Za pomocą jednego z tych podstawień, możemy całkę funkcyi niewymiernej, w której występuje kwadratowy pierwiastek z trójmianu drugiego stopnia sprowadzić do całki funkcyi wymiernej z $\underline{u}$.

Ztąd wniosek:

Całki funkcyj niewymiernych, zawierających jako niewymierność kwadratowy pierwiastek z trójmianu drugiego stopnia, dadzą się wyrazić przez funkcye algebraiczne niewymierne i logarytmiczne względnie cyklometryczne.

Redukcya.

Można zawsze wymierną funkcyę z x i $\sqrt{X} = \sqrt{a+bx+cx^2}$ przedstawić w postaci:

$$F(x\sqrt{X}) = \frac{g(x) + H(x)\sqrt{X}}{g_1(x) + H_1(x)\sqrt{X}} = \varphi(x) + \psi(x)\sqrt{X} =$$

$$= \varphi(x) + \frac{f(x)}{\sqrt{X}}$$ przeto będzie:

$$\int F(x,\sqrt{X})dx = \int \varphi(x)dx + \int \frac{f(x)}{\sqrt{X}}.dx$$

gdzie $\varphi(x)$ i $f(x)$ są funkcyami wymiernymi. Całka pierwsza w postaci $\int \varphi(x)dx$ jest całką funkcyi wymiernej. Całka druga w postaci $\int \frac{f(x)}{\sqrt{X}}dx$ rozpada się przez rozłożenie funkcyi wymiernej na funkcyę całkowitą i ułamki proste na szereg całek kształtu:

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{X}} \quad \text{i} \quad \int \frac{dx}{(x-\lambda)^n\sqrt{X}}$$

Dla całek kształtu $J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{X}}$ otrzymamy wzór redukcyjny:

$$J_n = \frac{x^{n-1}\sqrt{X}}{n.c} - \frac{(n-1)a}{nc} J_{n-2} - \frac{(2n-1)b}{2nc} J_{n-1}$$

za pomocą którego dojdziemy w końcu do całki: $J_0 = \int \frac{1.dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

która oznaczona przy pomocy podstawień str. 136. α.) β.) γ.) przedstawia się w postaci:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log\left[b+2cx+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}\right] + C$$ jeżeli $c>0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{-c}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}-\sqrt{a}}{x\sqrt{-c}} + C$$ jeżeli $c<0$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=-\frac{2}{\sqrt{-c}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{(x-\alpha)\sqrt{-c}}+C$$

jeżeli $a+bx+cx^2=c(x-\alpha)(x-\beta)$

Całki kształtu $\int\frac{dx}{(x-\lambda)^n\sqrt{X}}$ możemy zawsze zamienić podstawieniem $x-\lambda=z$ na całki kształtu: $\mathcal{J}_n=\int\frac{dx}{x^n\sqrt{X}}$ dla których otrzymamy wzór redukcyjny:

$$\mathcal{J}_n=-\frac{1}{(n-1)a}\cdot\frac{\sqrt{X}}{x^{n-1}}-\frac{(2n-3)b}{2(n-1)a}\mathcal{J}_{n-1}-\frac{(n-2)c}{(n-1)a}\mathcal{J}_{n-2},$$

za pomocą którego dojdziemy w końcu do całki:

$$\mathcal{J}_1=\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}=\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

która przy pomocy podstawień α), β), γ) str. 132. przedstawia się w postaci:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left(\frac{2\sqrt{a}.\sqrt{a+bx+cx^2}+2a+bx}{2x}\right)+C$$

jeżeli $a>0$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}+x\sqrt{c}}{\sqrt{-a}}+C \quad \text{jeżeli } a<0$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}=-\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{-c}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{(x-\alpha)\sqrt{-c}}+C$$

jeżeli $a+bx+cx^2=c(x-\alpha)(x-\beta)$

Podstawienia goniometryczne.

Przy całkowaniu funkcyj niewymiernych zawierających kwadratowy pierwiastek z trójmianu drugiego stopnia korzystne są częstokroć podstawienia goniometryczne.

Trójmian: $a+bx+cx^2$ możemy, kładąc $x+\frac{b}{2c}=y$, przekształcić na dwumian. Mianowicie będzie:

$$a+bx+cx^2=a+b\left(y-\frac{b}{2c}\right)+c\left(y-\frac{b}{2c}\right)^2=cy^2+\frac{4ac-b^2}{4c}=$$

$$=\frac{(2cx+b)^2+(4ac-b^2)}{4c}$$ czyli:

$$X = a + bx + cx^2 = \frac{1}{4c}\left[(2cx+b)^2 + (4ac - b^2)\right]$$

Podstawimy tedy jeżeli:

1.) $4ac - b^2 > 0$

$(2cx+b)^2 = (4ac - b^2)\,tg^2\varphi$ a zatem

$$x = \frac{\sqrt{4ac-b^2}\cdot tg\varphi - b}{2c}\ ;\ dx = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}$$

a otrzymamy

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{c}}\log tg\,\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\log\left[\sec\varphi + tg\varphi\right] = \frac{1}{\sqrt{c}}\log(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{X}) + C$$

jeżeli zaś

2.) $4ac - b^2 < 0$ tedy podstawimy:

$(2cx+b)^2 = (b^2 - 4ac)\sec^2\varphi$. a zatem:

$$x = \frac{\sqrt{b^2-4ac}\,\sec\varphi - b}{2c}\ ,\ dx = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2c}\ \frac{\sin\varphi . d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$X = \frac{b^2-4ac}{4c}\cdot tg^2\varphi \qquad \sqrt{X} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{c}}\cdot tg\varphi$$

a otrzymamy znowu:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}} = \int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{c}}\log tg\,\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

Za pomocą powyższych podstawień możemy ogólnie całki kształtu $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{X}}$ sprowadzić do całek goniometrycznych $J_{k,s} = \int\cos^k\varphi\sin^s\varphi\,d\varphi$.

W szczególności dla całek kształtu:

$$J = \int F(x, \sqrt{a+bx^2})\,dx$$

użyjemy z korzyścią następujących podstawień:

1.) $a > 0 \quad b > 0$

$bx^2 = a\,tg^2\varphi$ a zatem

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}}\,tg\varphi\ ,\ dx = \sqrt{\frac{a}{b}}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$a + bx^2 = a\sec^2\varphi$, $\sqrt{a+bx^2} = \sqrt{a}.\sec\varphi$.

2.) $a>0 \quad b<0$

$bx^2 = a.\sin^2\varphi$ a zatem:

$x = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sin\varphi \; ; \; dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \cos\varphi \, d\varphi$

$a - bx^2 = a\cos^2\varphi \; ; \; \sqrt{a-bx^2} = \sqrt{a} \cdot \cos\varphi$

3.) $a<0 \quad b<0$

$bx^2 = a.\sec^2\varphi$ a zatem:

$x = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sec\varphi \; ; \; dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{\sin\varphi . d\varphi}{\cos^2\varphi}$

$-a + bx^2 = a.\operatorname{tg}^2\varphi \; ; \; \sqrt{-a+bx^2} = \sqrt{a} \cdot \operatorname{tg}\varphi$

Przykłady:

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2} . dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin \frac{x}{a}$

2.) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$

3.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)$

4.) $\int \sqrt{x^2+a^2} . dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \log\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$

5.) $\int \sqrt{x^2-a^2} . dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \log\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)$

6.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x}$

7.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{a} \log \frac{x}{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}$

8.) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x - x^2}} = \operatorname{arc.sin} x \, \frac{3+2x}{\sqrt{13}}$

9.) $\int \sqrt{2ax - x^2} . dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{a}$

5.) Funkcye niewymierne zawierające wymiernie zmienną x i kwadratowy pierwiastek z wielomianu trzeciego albo czwartego stopnia:

Kształt całki $J = \int F(x, \sqrt{X})$; $X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

a.) Można zawsze przekształcić całkę z wielomia-nem czwartego stopnia na całkę z wielomianem trzeciego stopnia gdyż kładąc $x = k + \frac{e}{z+m}$, a obierając k tak, aby było $a + bk + ck^2 + dk^3 + ek^4 = 0$ otrzymamy:

$$\sqrt{X} = \frac{1}{(z+m)^2}\sqrt{Az^3 + Bz^2 + Cz + D} = \frac{1}{(z+m)^2}\sqrt{Z}$$

przeto całka $\int F(x, \sqrt{X})\,dx$ przejdzie na całkę

$$\int \Phi(z, \sqrt{Z})\,dz$$

b.) Przyjmijmy kształt całki:

$$J = \int F(x, \sqrt{X})\,dx, \text{ gdzie } X = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (e = 0)$$

Funkcya $F(x, \sqrt{X})$, uporządkowana wedle części wymiernej i niewymiernej przedstawi się w postaci:

$$F(x, \sqrt{X}) = \frac{g(x) + H(x)\sqrt{X}}{g_1(x) + H_1(x)\sqrt{X}} = \varphi(x) + \psi(x)\sqrt{X}$$

czyli $F(x, \sqrt{X}) = \varphi(x) + \frac{f(x)}{\sqrt{X}}$, gdzie $\varphi(x)$ i $f(x)$ są funkcyami wymiernymi, przeto będzie

$$\int F(x, \sqrt{X})\,dx = \int \varphi(x)\,dx + \int \frac{f(x)}{\sqrt{X}}\,dx.$$

Pierwsza całka daje funkcye algebraiczne i logarytmiczne, druga, sprowadza się do całek kształtu: $J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{X}}$ i $J'_n = \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{X}}$

Dla całek kształtu $J_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{X}}$ otrzymujemy z równania

$$d\left[x^{n-2}\sqrt{X}\right] = \frac{(n-2)x^{n-3} X}{\sqrt{X}}\,dx + \frac{x^{n-2}(b + 2cx + 3dx^2)}{2\sqrt{X}}\,dx$$

po scałkowaniu i uporządkowaniu wzór

redukcyjny:

$$J_n = \frac{2x^{n-2}\sqrt{X}}{d(2n-1)} - \frac{2a(n-2)}{d(2n-1)}J_{n-3} - \frac{b(2n-3)}{d(2n-1)}J_{n-2} - \frac{2c(n-1)}{d(2n-1)}J_{n-1} \qquad \mathrm{I)}$$

dozwalający wykładnik n zmniejszać, a więc przydatny dla dodatniego n. Zkąd zastępując n przez $n+3$ otrzymamy drugi wzór redukcyjny

$$J_n = \frac{x^{n+1}\sqrt{X}}{a(n+1)} - \frac{b(2n+3)}{2a(n+1)}J_{n+1} - \frac{c(n+2)}{a(n+1)}J_{n+2} - \frac{d(2n+5)}{2a(n+1)}J_{n+3} \qquad \mathrm{II)}$$

dozwalający wykładnik n zmniejszać, a więc przydatny dla ujemnego n.

Na podstawie pierwszego wzoru redukcyjnego da się sprowadzić całka $J_n = \int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{X}}$ ostatecznie do dwóch całek zasadniczych:

$$J_0 = \int\frac{dx}{\sqrt{X}} \quad \text{i} \quad J_1 = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}$$

Na podstawie drugiego wzoru redukcyjnego da się całka $J_n = \int\frac{dx}{x^n\sqrt{X}}$ przedstawić przez obie poprzednie całki zasadnicze:

$$J_0 = \int\frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad J_1 = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}$$

i oprócz tego przez całkę trzecią

$$J_1 = \int\frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

Tym sposobem sprowadzi się także całka $J'_n = \int\frac{dx}{(x-\lambda)^n\sqrt{X}}$ ostatecznie do 3ech całek zasadniczych:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}}, \quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \quad \int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{X}}$$

a zatem:
Całka kształtu $\int F(x, \sqrt{X})\,dx$ gdzie $X = a + bx + cx^2 + dx^3$, da się wyrazić przez funkcye algebraiczne, logarytmiczne (względnie cyklometryczne) i przez trzy całki zasadnicze:

$$J_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}\,;\quad J_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}\,;\quad J_{-1} = \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}$$

które tworzą nowy rodzaj funkcyj przestępnych i nazywają się całkami elliptycznymi, pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju.

Przekształciwszy te całki zapomocą podstawienia, które służyło aby wielomian czwartego stopnia pod pierwiastkiem kwadratowym zamienić na wielomian trzeciego stopnia, na odwrót otrzymamy twierdzenie:
t. z.
Wszelka całka kształtu $\int F(x, \sqrt{X})\,dx$ gdzie $X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ da się wyrazić przez funkcye algebraiczne, logarytmiczne i i trzy całki elliptyczne pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}\,,\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}\,,\quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{X}}$$

Te trzy nowe funkcye przestępne sprowadzają się do trzech form normalnych, zwanych:
„Całkami normalnymi Legendre'a.

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x)}}\,,\quad v = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$w = \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

gdzie $0 < K^2 < 1$; $n = -\frac{1}{2}$

Ilość stała K nazywa się modułem całek elliptycznych. Spółczynnik $\underline{n}$ zaś parametrem trzeciej całki elliptycznej.

Podstawiając podług Legendr'a

$x = \sin\varphi$ zatem $dx = \cos\varphi\, d\varphi$

otrzymamy normalne całki elliptyczne w formie:

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi)$$

$$v = \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}} = \mathcal{L}(\varphi)$$

$$w = \int \frac{d\varphi}{(1+n.\sin^2\varphi)\sqrt{1-K^2\sin^2\varphi}} = \Pi(\varphi)$$

Odwrócenia tych całek nazywają się funkcyami elliptycznymi w szczególności i oznacza się:

$\varphi = am.u$ $x = \sin am\, u = sn.u$

$\sqrt{1-x^2} = \cos am\, u = cn.u$

$\sqrt{1-K^2x^2} = \sqrt{1-K^2\sin^2\varphi} = \Delta\varphi = \Delta am\, u = dn.u$

Funkcye $sn.u$, $cn.u$, i $dn.u$, zowią się głównymi prostymi funkcyami elliptycznymi, są one względem całek elliptycznych tem, czem funkcye goniometryczne względem cyklometrycznych.

Dla granicznych wartości modułu K t.j. $K=0$ i $K=1$ sprowadzają się całki elliptyczne do funkcyi logarytmicznych, względnie cyklometrycznych. —

1.) $k=0$

$$u_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x.$$

$$v_0 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \text{arc sin } x$$

$$w_0 = \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \text{arc tg } \frac{x\sqrt{1+n}}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.) $k=1.$

$$u_1 = \int \frac{dx}{1-x^2} = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$v_1 = \int \frac{x^2 dx}{1-x^2} = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - x$$

$$w_1 = \int \frac{dx}{(1+nx^2)(1-x^2)} = \frac{\sqrt{n}}{1+n} \cdot \text{arc tg } x\sqrt{n} + \frac{1}{1+n} \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Uwaga. Jeżeli stopień wielomianu stojącego pod pierwiastkiem w całce $\int F(x, \sqrt{X})dx$ przewyższa stopień czwarty, dochodzi się do nowego rodzaju funkcyj przestępnych przezwanych <u>całkami hyperelliptycznymi</u>.

Jeżeli wreszcie całka ma kształt $J = \int F(x,y)dx$ a związek między x i y określony jest równaniem algebraicznem $f(x,y)=0$ tedy wchodzi się w obszerny zakres nowych funkcyj zwanych całkami Abelowymi. —

Uwaga. Całki elliptyczne, hyperelliptyczne i Abelowe oznaczamy za pomocą szeregów, rozwijając funkcyę pod znakiem całkowania w szereg i tworząc całki członów tego szeregu. —

VI Całki funkcyj przestępnych.

1.) Całki funkcyj wykładniczych:

a. Kształt $J = \int f(e^x)dx$

gdzie $f(e^x)$ jest wymierną funkcyą z e^x.

Kładąc $e^x = z$ $\quad dx = \frac{dz}{z}$ otrzymamy:

$$J = \int f(e^x)dx = \int \frac{f(z)}{z} \cdot dz$$

t. z. całkę funkcyi wymiernej

b.) Kształt: $J_n = \int x^n \cdot e^{ax} \cdot dx$

Kładąc:

$$\begin{array}{l|l} x^n = u & du = n \cdot x^{n-1} \\ e^{ax} \cdot dx = dv & v = \frac{e^{ax}}{a} \end{array}$$

otrzymamy wzór redukcyjny pierwszy:

$$J_n = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} J_{n-1} \qquad I)$$

który przy dodatniem $\underline{n}$ prowadzi w końcu do całki: $J_0 = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$

Kładąc zaś:

$$\begin{array}{l|l} e^{ax} = u & du = a e^{ax} dx \\ x^n dx = dv & v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}$$

Otrzymamy wzór redukcyjny drugi:

$$J_n = \frac{x^{n+1} \cdot e^{ax}}{n+1} - \frac{a}{n+1} \cdot J_{n+1} \qquad II)$$

który przy ujemnem $\underline{n}$ prowadzi w końcu do całki: $J_{-1} = \int \frac{e^{ax}}{x} dx = \int \frac{e^z}{z} dz = \int \frac{dy}{\log y}$

która tworzy nową funkcyę przestępną zwaną logarytmem całkowym. —

(Integrallogarithmus) $Il(x)$

Ze względu że

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2!} x + \frac{1}{3!} x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} x^{n-1} + \ldots$$

otrzymujemy:

$$Il(x) = \int \frac{e^x}{x} \cdot dx = \log x + x + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \ldots + \frac{x^n}{n.n!} + \ldots$$

2.) Funkcye logarytmiczne.

a.) Kształt $J = \int f(\log x)\,dx$

gdzie $f(\log x)$ jest funkcyą wymierną z $(\log x)$ [illegible]
Podstawiając $\log x = z$, $dx = e^z dz$
otrzymujemy:

$$J = \int f(\log x)\,dx = \int f(z)\,e^z dz$$

całkę funkcyj wykładniczych.

b.) $J_{m,n} = \int x^m . (\log x)^n . dx.$

Kładąc $\log x = z$, $x = e^z$; $dx = e^z dz$
otrzymujemy całkę

$$J_{m,n} = \int z^n e^{(m+1)z} . dz$$

do której zastosować możemy wzory redukcyjne I) i II) poprzedzającego ustępu.

Dla $m = -1$ otrzymamy:

$$J_{-1,n} = \int (\log x)^n \frac{dx}{x} = \log(\log x)$$

Dla $m = 0$ otrzymamy całkę:

$$J_{0,n} = \int (\log x)^n . dx = J_n$$

dla której dostajemy wzory redukcyjne:

$$J_n = x(\log x)^n - n J_{n-1} \quad 1.)\ \text{ważny dla } n > 0$$

$$J_n = \frac{x.(\log x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} J_{n+1} \quad 2.)\ \text{ważny dla } n < 0$$

które prowadzą ostatecznie do dwóch całek:

1.) $J_0 = \int dx = x + C$

2.) $J_{-1} = \int \frac{dx}{\log x} = \int \frac{e^z}{z} . dz = li(x)$ zatem

$$\int \frac{dx}{\log x} = \log(\log x) + \log x + \frac{(\log x)^2}{2.2!} + \frac{(\log x)^3}{3.3!} + \ldots\ldots$$

3.) Całki funkcyj goniometryjcznych.

a.) Kształt: $J = \int f(\cos x, \sin x,) dx$

Kładąc $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

zamienimy J na całkę funkcyi wymiernej z e^{ix} przeto skorzystamy z wskazówek podanych na str. 131.

b.) Całki kształtu:

$J_m = \int x^m \cos x\, dx$; $J'_m = \int x^m \sin x \cdot dx$

sprowadzają się za pomocą wzorów reduk, cyjnych

$$\left.\begin{aligned} J_m &= x^m \sin x - m \cdot J'_{m-1} \\ J'_m &= x^m \cos x + m \cdot J_{m-1} \end{aligned}\right\} \quad I)$$

dla dodatniego $\underline{m}$ do całek

$J_0 = \int \cos x\, dx = -\sin x + C$; $J'_0 = \int \sin x \cdot dx = \cos x + C$

a za pomocą wzorów redukcyjnych:

$$\left.\begin{aligned} J_m &= \frac{x^{m+1} \cos x}{m+1} + \frac{1}{m+1} \cdot J'_{m+1} \\ J'_m &= \frac{x^{m+1} \sin x}{m+1} - \frac{1}{m+1} \cdot J_{m+1} \end{aligned}\right\} \quad II)$$

dla ujemnego $\underline{m}$ do całek:

$J_{-1} = \int \frac{\cos x}{x} \cdot dx$, $J'_{-1} = \int \frac{\sin x}{x} \cdot dx$:

które tylko za pomocą szeregów oznaczyć się dadzą. mianowicie otrzymujemy:

$$\int \frac{\cos x}{x} \cdot dx = \log x - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^4}{4.4!} - \frac{x^6}{6.6!} + \dots$$

$$\int \frac{\sin x}{x} \cdot dx = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \frac{x^7}{7.7!} + \dots$$

Ogólniejsze kształty całek tego rodzaju:

$J = \int x^m \cos ax \cdot dx$, $J' = \int x^m \sin ax \cdot dx$

odpowiadają im wzory redukcyjne:

1.) $\int x^m \cos ax \, dx = \frac{x^m \sin ax}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} \sin ax \, dx$

2.) $\int x^m \sin ax \, dx = -\frac{x^m \cos ax}{a} + \frac{m}{a} \int x^{m-1} \cos ax \, dx$

3.) $\int x^m \cos ax \, dx = \frac{x^{m+1} \cos ax}{m+1} + \frac{a}{m+1} \int x^{m+1} \sin ax \, dx$

4.) $\int x^m \sin ax \, dx = \frac{x^{m+1} \sin ax}{m+1} - \frac{a}{m+1} \int x^{m+1} \cos ax \, dx$

c.) Całki kształtu:

$J_n = \int e^{ax} \cos x^n \, dx \; ; \; J_n' = \int e^{ax} \sin x^n \, dx$

Wzory redukcyjne:

1.) $\int e^{ax} \cos x^n \, dx = \frac{e^{ax} \cos x^{n-1} (a \cos x + n \sin x)}{a^2 + n^2} +$

$+ \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos x^{n-2} \, dx$

2.) $\int e^{ax} \sin x^n \, dx = \frac{e^{ax} \sin x^{n-1} (a \sin x - n \cos x)}{a^2 + n^2} +$

$+ \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin x^{n-2} \, dx$

prowadzą do całek:

$\int e^{ax} \cos x \, dx = \frac{e^{ax} (a \cos x + \sin x)}{a^2 + 1}$

$\int e^{ax} \sin x \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin x - \cos x)}{a^2 + 1}$

Przykłady:

$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C$

$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$

4.) Całki cyklometryczne.

a.) Kształt: $J = \int f(\arcsin x) \, dx$

gdzie f jest znakiem funkcyi wymiernej.

Kładąc: $\arcsin x = u$, $x = \sin u$; $dx = \cos u \, du$

otrzymamy całkę:

$$\int f(\arcsin x)\,dx = \int f(u) \cos u \, du$$

z której dojdziemy do całek na str 148 traktowanych.

b.) Całka: $J_n = x^n \arcsin x . dx$

Kładąc: $x^n dx = du \quad \Big| \quad u = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\arcsin x = v \quad \Big| \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

otrzymamy:

$$J_n = \frac{x^{n+1} \arcsin x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nowa całka dwumianowa $\int \frac{x^{n+1} . dx}{\sqrt{1-x^2}} =$
$= \int x^{n+1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} . dx$ da się wyrazić w formie zamkniętej jeżeli n jest liczbą całkowitą w przeciwnym razie sprowadza się do całek Eulera.–

VII. Całki i różniczki szeregów nieskończonych.

a.) Szereg nieskończony funkcyi ciągłejch w odstępie od a do b niech będzie:

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

jest zbieżny w pewnym miejscu x jeżeli do dowolnie małej liczby δ da się znaleźć takie miejsce n od którego począwszy wszystkie reszty $R_n = f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots$ są bezwzględnie biorąc mniejsze od δ.

Szereg nieskończony nazywa się jednostajnie zbieżnym w pewnym odstępie, jeżeli dla pewnej dowolnie małej liczby δ dla wszystkich wartości x w odstępie a do b zawartych od tego samego n począwszy wszystkie reszty R_n są bezwzględnie biorąc mniejsze od δ (niezależnie od wartości x)

Wystarczające ale nie konieczne kryterium jednostajnej zbieżności:

Jeżeli szereg utworzony z liczebnie największych wartości, jakie człony szeregu nieskończonego w odstępie od a do b otrzymują, jest zbieżny tedy jest szereg x dla wszystkich wartości x w tym odstępie jednostajnie zbieżny.

Twierdzenie. Jeżeli szereg funkcyj w otoczeniu pewnego miejsca swego zakresu zbieżności jest jednostajnie zbieżny, tedy przedstawia szereg nieskończony w tem miejscu funkcyę ciągłą.

Wniosek. Jeżeli szereg jest w swym zakresie zbieżności wszędzie bez wyjątku jednostajnie zbieżny, tedy przedstawia ten szereg w całym zakresie funkcyę ciągłą.

Pochodna szeregu nieskończonego.

Szereg: $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$

gdzie $f(x)$ są funkcye różniczkowalne

szereg pochodnych

$$f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \dots + f_n'(x) + \dots$$

Twierdzenie. Jeżeli reszta szeregu pochodnych dla danej wartości x, staje się od pewnego n

począwszy dowolnie małą, tedy jest szereg pochodnych zbieżnym i przedstawia w tem miejscu wartość pochodnej funkcyi $F(x)$ szeregiem określonej.

t. z. $F'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \dots + f_n'(x) + \dots$

Kryteryum wystarczające aby szereg pochodnych był pochodną szeregu:

Jeżeli szereg pochodnych jest w pewnym odstępie jednostajnie zbieżny, tedy przedstawia w tym odstępie pochodną danego szeregu.

Całka szeregu nieskończonego.

Szereg utworzony z całek poszczególnych członów $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots f_n(x) + \dots$ przedstawia całkę pierwotnego szeregu, jeżeli ten szereg jest funkcyą ciągłą zmiennej x a jego pochodna dla każdej wartości w odstępie x_0 do X, jest równa szeregowi $F(x)$.

Przytem musi mieć szereg całek:
$\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx + \dots$
własność, że dla wszelkiej dowolnie małej liczby δ, da się oznaczyć miejsce n od którego począwszy pochodna reszty $R_n(x)$ pozostaje mniejszą od δ.

Kryteryum konieczne aby szereg całek przedstawiał całkę szeregu:—

Jeżeli dany szereg jest jednostajnie zbieżny tedy przedstawia szereg całek poszczególnych członów tego szeregu, całkę danego szeregu.

Szeregi postępujące podług potęg całkowitych pewnej funkcyi ciągłej. —

Szereg postępujący podług potęg pewnej ciągłej funkcyi $f(x)$ kształtu:

$$a_0 + a_1 f(x) + a_2 \left[f(x)\right]^2 + a_3 \left[f(x)\right]^3 + \dots + a_n \left[f(x)\right]^n + \dots$$

ma następujące własności:

1.) Jest wewnątrz swego zakresu zbieżności funkcyą ciągłą zmiennej niezależnej x.

2.) Szereg pochodnych poszczególnych czło-nów danego szeregu, t. j. szereg:

$$f'(x)\left[a_1 + 2a_2 f(x) + 3a_3 \left[f(x)\right]^2 + \dots + n a_n \left[f(x)\right]^{n-1} + \dots\right]$$

jest w swym zakresie zbieżności ciągłą funkcyą zmiennej x i przedstawia pochodną danego szeregu, jego zakres zbieżności leży atoli pewnie wewnątrz zakresu zbieżności pierwotnego szeregu.

3.) Jeżeli szereg całek poszczególnych czło-nów danego szeregu t. j. szereg:

$$a_0 \int dx + a_1 \int f(x) dx + \dots + a_n \int \left[f(x)\right]^n dx + \dots$$

jest w granicach całkowania jednostajnie zbieżnym tedy przedstawia szereg całek całkę danego szeregu.

Szeregi potęgowe.

Szeregiem potęgowym nazywamy szereg kształtu: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

Twierdzenie: Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny dla pewnej wartości x, tedy jest on także zbieżnym dla wszelkich wartości bezwzględnie mniejszych od ϱ.

2.) Szereg potęgowy jest w miejscu x <u>bezwarunkowo zbieżny</u>, jeżeli szereg bezwzględnych wartości jego członów jest dla tej wartości x zbieżny. W przeciwnym razie może być szereg potęgowy w miejscu x tylko warunkowo zbieżnym.

3.) Wszelki szereg potęgowy jest wewnątrz odstępu, w którym jest bezwarunkowo zbieżnym, funkcyą ciągłą zmiennej niezależnej.

4.) Szereg potęgowy jest w zakresie swej zbieżności zarazem jednostajnie zbieżnym.

5.) Szereg potęgowy różniczkuje się, tworząc szereg pochodnych z poszczególnych członów jego szeregu.

6.) Szereg potęgowy całkuje się, tworząc szereg całek z poszczególnych jego członów.

Przykład:

Dany szereg potęgowy:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \dots \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots 2n}$$

Jego całka $\qquad x^2 < 1$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5.}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1.3.(2n-1)}{2.4\dots 2n}$$

Jego pochodna:

$$\frac{x}{(1-x)^{3/2}} = x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3.5}{2.4}x^5 + \dots + \frac{3.5\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n-2)}x^{2n-1} + \dots$$

Uwaga.

$$\text{arc.sin}(1) = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \dots$$

VIII Całki określone.

Określenie:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim\left[(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\dots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1})\right]$$

Twierdzenia zasadnicze:

1.) $\int_a^b c.f(x)dx = c\int f(x)dx$

t. z. Stałą w całce określonej można wyłączyć zawsze przed znak całkowania.

2.) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

t. z. Wskutek przemiany górnej granicy z dolną, zmienia całka swój znak.

3.) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

t. z. Suma dwóch całek określonych, z których jedna wzięta jest między granicami a i c druga między c i b daje wartość całki określonej między granicami a i b.

4.) $\int_a^b\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x) \pm\right]dx =$

$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \dots \pm \int_a^b f_n(x)dx \pm \dots$

t. z. Całka określona sumy funkcyi wzięta między pewnymi granicami, jest równa sumie całek określonych poszczególnych funkcyi, wziętych między tymi samymi granicami.

5.) $\int_a^b \varphi(x)\,d\psi(x) = \left[\varphi(x).\psi(x)\right]_a^b - \int_a^b \psi(x).d\varphi(x)$

t. z. Wzór całkowania częściowego ważny jest także dla całek określonych.

Twierdzenie o średniej wartości:

6.) $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f[a+\theta(b-a)]$ $(0<\theta<1)$

t. z. Całka określona między pewnymi granicami jest zawsze równa różnicy granic pomnożonej przez wartość danej funkcyi dla pewnej wartości zmiennej x między granicami a i b położonej.

7.) Całka określona funkcyi ciągłej kształtu

$$\int_a^x \varphi(x)dx$$

jest ciągłą funkcyą górnej granicy x.

Przykłady niektórych całek określonych.

1.) $\int_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a}$ $(a>0)$

2.) $\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$ $(a>0)$

3.) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$; $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$

$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}$; $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}$;

$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pi$

4.) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{4}$; $\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}.dx = \frac{\pi a^2}{2}$;

$\int_0^{2a} x\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{\pi a^3}{2}$; $\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax-x^2}.dx = \frac{5a^4\pi}{8}$

$\int_0^{2a} x^2\sqrt{2ax-x^2}.dx = \pi a.$

5.) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x.dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\ldots}{2.4.6\ldots 2n\ldots} \cdot \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x.dx = \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}$

Wzór Wallisa: $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{2m}{2m+1}\cdots$ in inf.

6.) $\int_0^\infty e^{-ax}.\sin bx.dx = \frac{b}{a^2+b^2}$ $(a>0)$

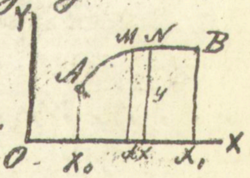
$\int_0^\infty e^{-ax}.\cos bx.dx = \frac{a}{a^2+b^2}$ $(a>0)$

7.) $\int_0^\pi \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2.\sin^2 x} = \frac{\pi}{ab}$

IX Zastosowania geometryczne zasad rachunku całkowego.

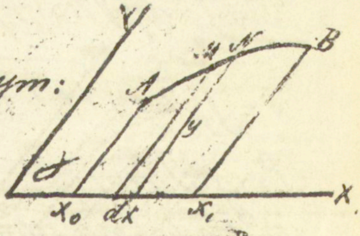
Kwadratura i rektyfikacya krzywych płaskich.

1.) Wzory kwadratury krzywej $y=f(x)$ ciągłej od x_0 do x_1. — Powierzchnię krzywej oznaczamy przez A, tedy będzie:



a.) w układzie prostokątnym: element powierzchni $dA = y.dx$ przeto:

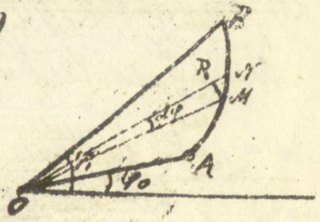
$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$$



b.) w układzie ukośnokątnym:

$$dA = \sin\delta.\,y.dx$$

$$A = \sin\delta\int_{x_0}^{x_1} f(x).dx$$



c.) w układzie biegunowym (r,φ)

$r=f(\varphi)$ równanie krzywej

$dA = \frac{r^2}{2}.d\varphi$ przeto:

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{r^2}{2}d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}[f(\varphi)]^2.d\varphi$$

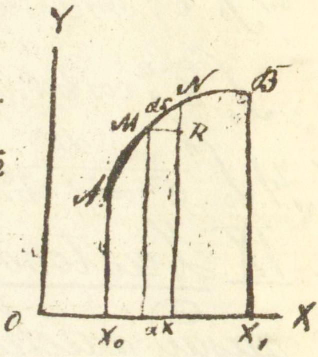
2.) Wzory rektyfikacyi krzywej $y=f(x)$

długość łuku krzywej oznaczamy przez S

Otrzymamy tedy:

a.) w układzie prostokątnym:

element łuku $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, przeto:



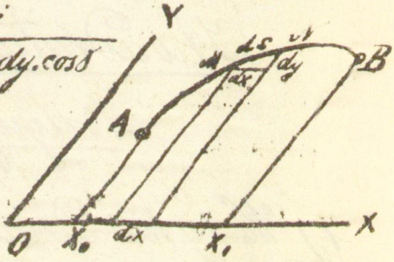
$$S=\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1+y'^2}$$

albo

$$S=\int_{y_0}^{y_1} dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

b.) w układzie ukośnokątnym:

element łuku $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+2dx.dy.\cos\delta}$



$$S=\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{dy}{dx}\cos\delta}$$

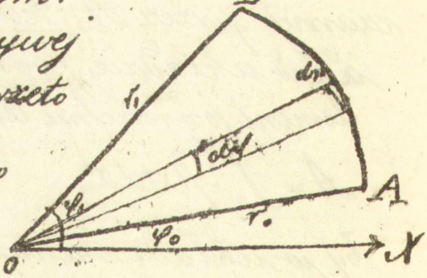
albo

$$S=\int_{y_0}^{y_1} dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+2\left(\frac{dx}{dy}\right).\cos\delta}$$

c.) w układzie biegunowym:

$r=f(\varphi)$ równanie krzywej

$ds=\sqrt{(r.d\varphi)^2+dr^2}$, przeto

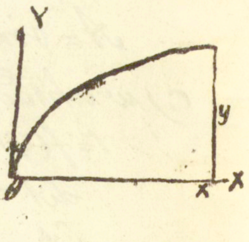


$$S=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$$ albo

$$S=\int_{r_0}^{r_1} dr\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}$$

Przykłady:

1.) Parabola: $y^2=2px$ daje $y=\sqrt{2px}$



$$A=\int_0^x y.dx=\sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x.y$$

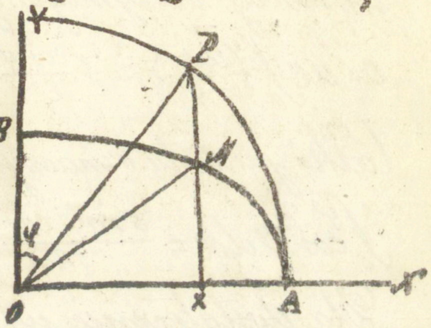
$$S=\int_0^y dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\frac{1}{p}\int_0^y\sqrt{y^2+p^2}.dy=$$

$$=\frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p}+\frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$$

2.) Ellipsa. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ daje $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$$A=\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2-x^2}=\frac{b}{a}\left\{\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right\}=$$

$$=\frac{xy}{2}+\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$



dla $x=a$ będzie

$$A=\frac{ab\pi}{4}$$

przeto cała powierzchnia ellipsy $= a.b.\pi$

$$s=\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2x^2}{a^2-x^2}}=a\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\quad \text{gdzie } \varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1.$$

$x=a.\sin\varphi$

Po rozwinięciu w szereg otrzymujemy:

$$s=a\int_0^\varphi d\varphi\left\{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi-\frac{1.1}{2.4}\varepsilon^4\sin^4\varphi-\dots-\frac{1.1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6.8\dots 2n}\varepsilon^{2n}\sin^{2n}\varphi-\dots\right\}$$

zkąd dla $\varphi=\frac{\pi}{2}$ czyli $x=a$ otrzymujemy jako ćwierć obwodu ellipsy:

$$s=\frac{a\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5}-\dots in\ inf\right\}$$

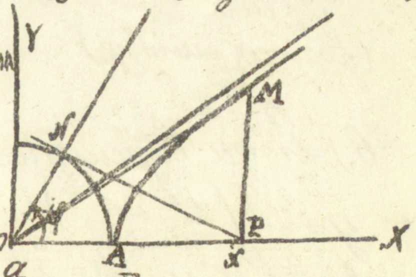
przeto cały obwód ellipsy:

$$O=2a\pi\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}-\dots\dots\right\}$$

3.) Hiperbola: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, czyli $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

$$A=\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left\{\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right\}=$$

$$=\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\log\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=OMP-OMA$$



$$s=\int_0^x dx\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}=$$

$$=a\varepsilon\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^2}}$$

gdzie $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$, $x=\frac{a}{\cos\varphi}$ Po rozwinięciu w szereg otrzymujemy:

$$s = a\varepsilon\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\left\{1-\frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^2}-\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{\varepsilon^4}-\dots-\frac{1.1.3\dots(2n-3)}{2.4.6\dots 2n}\frac{\cos^{2n}\varphi}{\varepsilon^{2n}}-\dots\right\}$$

Całki jakie tu oznaczyć mamy, mają kształt:

$$\int_0^\varphi \cos^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{\sin\varphi.\cos^{2n-1}\varphi}{2n}+\frac{2n-1}{2n}\int_0^\varphi \cos^{2n-2}\varphi\, d\varphi.$$

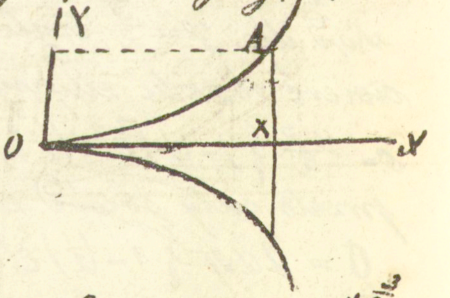
Dla dostatecznie wielkiego ε otrzymamy przybliżoną długość łuku hiperbolicznego

$$s = a\varepsilon\int_0^\varphi\left\{\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{d\varphi}{2\varepsilon^2}\right\} = a\varepsilon\left[tg\varphi-\frac{\varphi}{2\varepsilon^2}\right]$$

gdzie $\varphi = arc\cos\frac{x}{a}$

4.) Parabola Neila. $y^2=2px^3$ czyli $y=\sqrt{2p}.x^{\frac{3}{2}}$

$$A=\sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}dx =$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{2p}\,x^{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}xy$$
$$s=\int_0^x dx\sqrt{1+\frac{9p}{2}x}=$$
$$s=\frac{\sqrt{2}}{27p}\left[(9px+2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right]$$



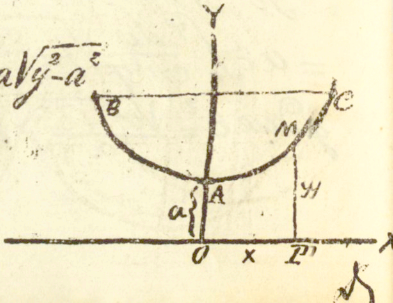
5.) Cissoida $y^2=\frac{x^3}{a-x}$ czyli $y=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}}$

$$A=\int_0^a\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a-x}}\cdot dx = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\, d\varphi=\frac{3}{8}a^2\pi$$

(gdzie $x=a\sin^2\varphi$)

6.) Linja łańcuszkowa.

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$
$$A=\frac{a}{2}\int_0^x\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\sqrt{y^2-a^2}$$
$$s=\frac{1}{2}\int_0^x\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$$



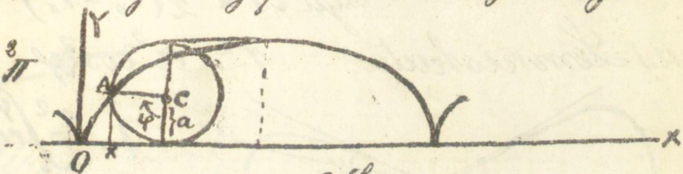
7. Cykloida $x = a(\varphi - \sin\varphi)$

$y = a(1 - \cos\varphi)$

$$A = a^2\int_0^\varphi \left(\frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(3\varphi - 4\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)$$

Dla $\varphi = 2\pi$ otrzymamy powierzchnię cykloidy:

$A = 3a^2\pi$



$$s = 2a\int_0^\varphi \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin^2\frac{\varphi}{4}$$

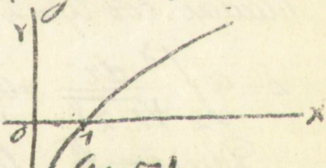
Dla $\varphi = 2\pi$ otrzymamy długość jednej gałęzi cykloidy $s = 8a$.

8.) Logarytmika $y = \log x$

$$A = \int_{x_0}^x \log x . dx = x(\log x - 1) - x_0(\log x_0 - 1)$$

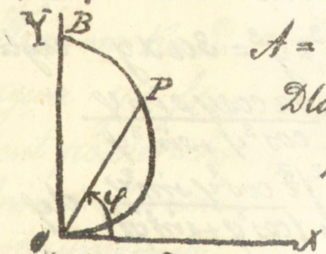
Dla $x_0 = 0$, $x = 1$, otrzymamy:

$$A = \int_0^1 \log x . dx = -1$$



$$s = \int_1^x \frac{dx\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2} + \log\frac{(1+\sqrt{2})x}{1+\sqrt{1+x^2}}.$$

9.) Spiralna Archimedesa. $r = a\varphi$



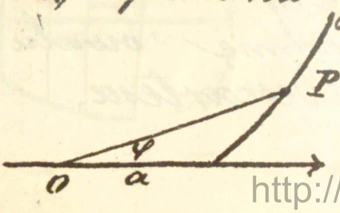
$$A = \frac{1}{2}a^2\int_0^\varphi \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{6}a^2\varphi^3$$

Dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$ będzie powierzchnia pierwszej ćwiartki:

$$A = \frac{\pi^3}{48}a^2$$

$$s = a\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1+\varphi^2} = \frac{a}{2}\left[\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \log\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right].$$

10.) Spiralna logarytmiczna $r = a.e^\varphi$

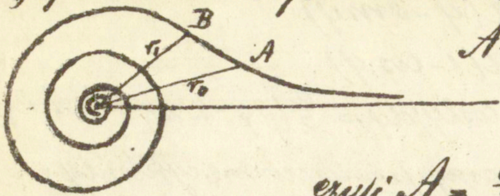


$$A = \frac{1}{2}a^2\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} e^{2\varphi}d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(e^{2\varphi_1} - e^{2\varphi_0}\right) = \frac{1}{4}\left(r_1^2 - r_0^2\right)$$

$$s = a\sqrt{2}\int_0^\varphi e^\varphi d\varphi = a\sqrt{2}\left(e^\varphi - 1\right)$$

11 arkusz.—

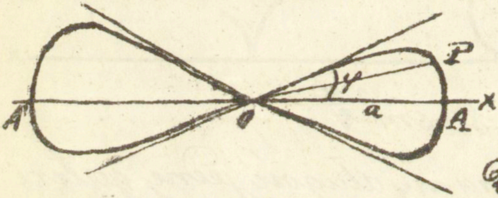
11.) Spiralna hiperboliczna. $r = \frac{a}{\varphi}$



$$A = \frac{1}{2} a^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\varphi^2} = \frac{a^2}{2}\left\{\frac{1}{\varphi_0} - \frac{1}{\varphi_1}\right\} =$$

czyli $A = \frac{a}{2}(r_0 - r_1)$

12.) Lemniskata. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$



$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{\varphi} \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{4} \sin 2\varphi$$

Dla $\varphi = \frac{\pi}{4}$ będzie $A = \frac{a^2}{4}$

przeto powierzchnia całej lemniskaty $= a^2$

$$s = \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + \frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} = a \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

kładąc $\cos 2\varphi = z^2$, $d\varphi = -\frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^4}}$ otrzymamy

$$s = a \int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = a \int_z^1 \left(1 + \frac{1}{2} z^4 + \frac{1.3}{2.4} z^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6} z^{12} + \ldots\right) dz$$

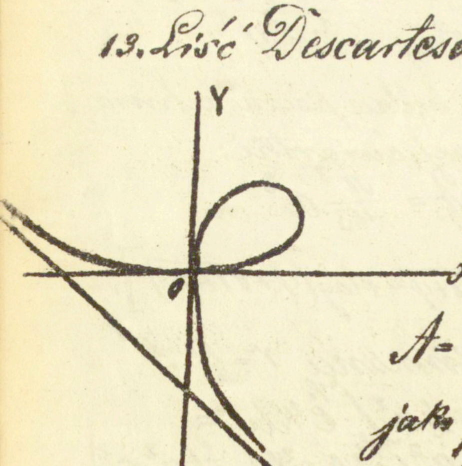
Dla $\varphi = \frac{\pi}{4}$ będzie $z = 0$

przeto otrzymamy długość ćwiartki lemniskaty:

$$s = a\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{13} + \ldots\right]$$

13. Liść Descartesa. $x^3 + y^3 = 3axy$ czyli

$$r = \frac{3a \cos\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$$



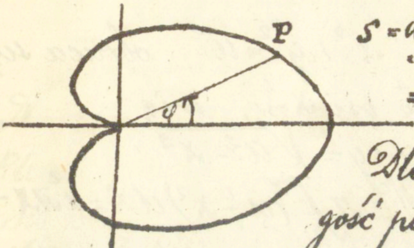
$$A = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2} \cdot d\varphi$$

kładąc $\operatorname{tg} \varphi = u$ otrzymamy:

$$A = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{u^2 du}{(u^3+1)^2} = \frac{9a^2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{2} a^2$$

jako powierzchnię owalu w liściu Descartesa.

14.) Cardioida. $r = a(1+\cos\varphi)$



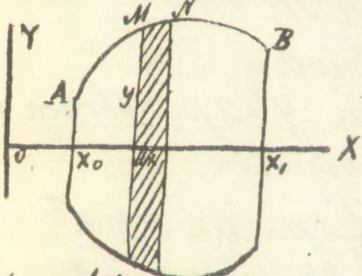
$$s = a\int_0^{\varphi}\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\,.d\varphi$$

$$= 2a\int_0^{\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}$$

Dla $\varphi=\pi$ otrzymamy dłu„gość połowy Cardioidy $= 2a$.

II Kubatura i kwadratura powierzchni obrotowych. –

a. Wzór na kubaturę powierzchni obrotowych.



Krzywa $y=f(x)$ obraca się około osi Xów.

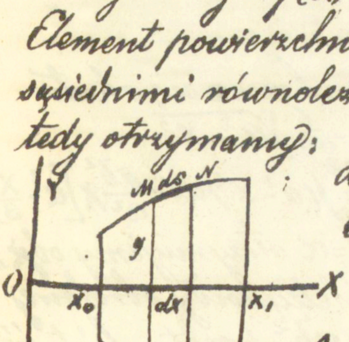
Objętość powstałej powierzchni oznaczmy przez V; element ograniczony dwoma równoleżnikami przez dV, mamy tedy:

$$dV = y^2\pi\,dx$$

$$V = \pi\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx = \pi\int_{x_0}^{x_1}[f(x)]^2 dx$$

b.) Wzór na kwadraturę powierzchni obrotowej

Krzywa $y=f(x)$ obraca się około osi Xów. Element powierzchni obrotowej ograniczony dwoma sąsiednimi równoleżnikami oznaczmy przez dA tedy otrzymamy:



$$dA = 2\pi y.ds$$ czyli

$$dA = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,.dx$$ przeto

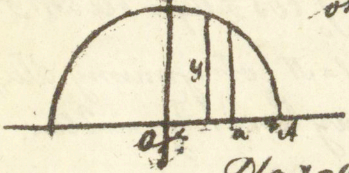
$$A = 2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,.dx =$$

$$A = 2\pi\int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,.dx.$$

Przykłady.

1.) Kula.

Koło $x^2+y^2=a^2$ obraca się około osi X-ów. więc



$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

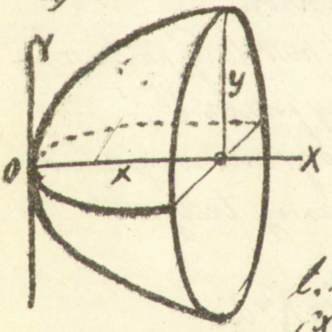
$$V=\pi\int_0^x (a^2-x^2)\,dx = a^2\pi x-\frac{\pi x^3}{3}$$

Dla $x=a$ dostajemy objętość półkuli $=\frac{2a^2\pi}{3}$ zaś:

$$A=2\pi\int_0^x a\,dx = 2a\pi x$$

Dla $x=a$ otrzymujemy powierzchnię półkuli $=2a^2\pi$.

2.) Paraboloida obrotowa.



Parabola $y^2=2px$ obraca się około osi X-ów

$$V=\pi\int_0^x 2px\,dx=\pi p x^2$$

czyli $V=y^2\pi\cdot\frac{x}{2}$

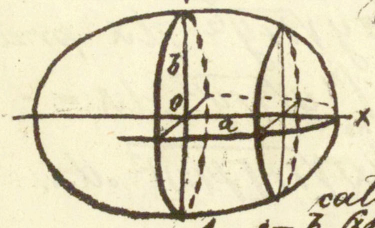
t.z. połowie objętości walca.

$$A=2\pi\sqrt{p}\int_0^x\sqrt{2x+p}\,.\,dx=\frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\left\{(2x+p)^{\frac{3}{2}}-p^{3/2}\right\}$$

czyli $A=\frac{2\pi}{3p}\left\{(y^2+p^2)^{3/2}-p^3\right\}$

3.) Ellipsoida obrotowa.

Ellipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ obraca się około osi X-ów. Mamy tu $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$



$$V=\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\int(a^2-x^2)\,dx=\frac{\pi b^2}{a^2}x\left[a^2-\frac{x^2}{3}\right]$$

Dla $x=a$ otrzymujemy objętość półellipsoidy obrotowej $=\frac{2}{3}\pi ab^2$ przeto objętość całej ellipsoidy $=\frac{4}{3}ab^2\pi$

$$A=2\pi\frac{b}{a^2}\int_0^x\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,.\,dx$$

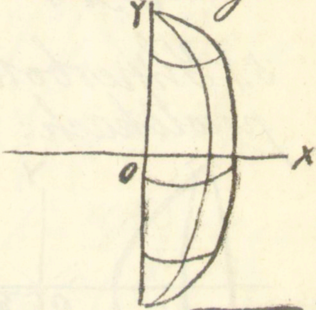
a.) jeżeli $a > b$ ellipsoida obrotowa nazywa się wydłużoną.

$$a^2 - b^2 = e^2 \; ; \; \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{e}{a} = \varepsilon < 1 \text{ przeto:}$$

$$A_1 = 2\pi \frac{b}{a} \int_0^x dx \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} = \pi a \frac{b}{\varepsilon} \left[\varepsilon x \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} + a^2 \arcsin \frac{\varepsilon x}{a} \right]$$

kładąc $x = a$ i mnożąc wynik przez 2, otrzymamy całą powierzchnię ellipsoidy obrotowej wydłużonej: $= 2ab\pi \left[\sqrt{1-\varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \right]$

b.) jeżeli $a < b$ ellipsoida obrotowa nazywa się spłaszczoną:



kładąc $b^2 - a^2 = e_1^2$;

$$\frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} = \frac{e_1}{a} = \varepsilon_1 < 1.$$

otrzymamy:

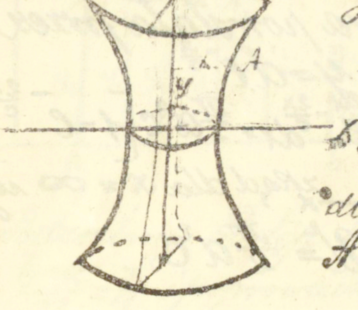
$$A = 2\pi \frac{b}{a} \int_0^x dx \sqrt{a^2 + \varepsilon^2 x^2} =$$

$$A = \pi a b \left[\frac{x}{a} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2}} + \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{\varepsilon x + \sqrt{a^2 + \varepsilon^2 x^2}}{a} \right]$$

zkąd dla $x = a$ i pomnożywszy wynik przez 2 dostajemy całą powierzchnię ellipsoidy obrotowej spłaszczonej:

$$A_e = 2ab\pi \left[\sqrt{1+\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \log \left(\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2} \right) \right]$$

4.) Hiperboloida obrotowa o jednej powłoce:



Hiperbola $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ obraca się około osi urojonej Y 'ów. Mamy tu $x = \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}$ dla powierzchni zaś:

$$A = 2\pi \int_0^s x \, . \, ds =$$

$$A = \frac{2a\pi}{b}\int_0^y \sqrt{b^2 + \frac{(a^2+b^2)y^2}{b^2}}\,.dy$$

czyli kładąc $\frac{a^2+b^2}{b^2} = \frac{e^2}{b^2} = \varepsilon^2$; $\varepsilon > 1$

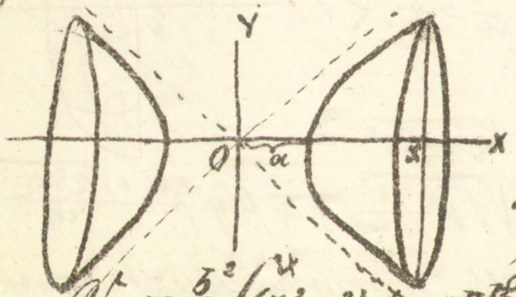
$$A = \frac{2a\pi}{b}\int_0^y \sqrt{b^2+\varepsilon^2 y^2}\,dy = 2a\pi\int_0^y \sqrt{1+\left(\frac{\varepsilon y}{b}\right)^2}\,.dy$$

a zatem $A = ab\pi\left[\frac{y}{b}\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2 y^2}{b^2}} + \frac{1}{\varepsilon}\log\left(\frac{\varepsilon y}{b} + \sqrt{1+\frac{\varepsilon^2y^2}{b^2}}\right)\right]$

Wzór dla objętości zaś:

$$V = \frac{\pi a^2}{b^2}\int_0^y (y^2+b^2)\,dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\left[\frac{y^3}{3} + b^2 y\right]$$

5.) Hiperboloida obrotowa o dwóch powłokach:



Hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ obraca się około osi X ów. Mamy tu: $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

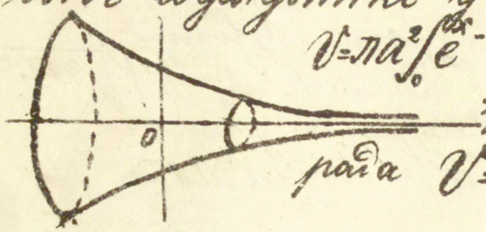
$$V = \pi\frac{b^2}{a^2}\int_a^x (x^2-a^2)\,dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(\frac{x^3}{3} - a^2x + a^3\right)$$

czyli $V = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{b^2}{a^2}\left[x^2+ax-2a^2\right](x-a)$

zaś $A = 2\pi\int_a^x y\,ds = \frac{2b\pi}{a}\int_a^x \sqrt{\varepsilon^2x^2-a^2}\,dx$, gdzie $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$

czyli $A = b\pi\left[\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}-1} - \sqrt{\varepsilon^2-1} + \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{\frac{\varepsilon x}{a} - \sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2}{a^2}-1}}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2-1}}\right]$

6. Powierzchnia obrotowa powstała przez obrót logarytmiki $y = a.e^{-\frac{x}{c}}$



$$V = \pi a^2\int_0^x e^{-\frac{2x}{c}}dx = \frac{\pi}{2}a^2c\left[1-e^{-\frac{2x}{c}}\right]$$

zkąd dla $x = \infty$ wypada $V = \frac{\pi}{2}a^2c$

$$A = 2\pi \int_0^x a e^{-\frac{x}{c}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2} e^{-\frac{2x}{c}}}\, dx = 2\pi c^2 \int_{\frac{a}{c} e^{-\frac{x}{c}}}^{\frac{a}{c}} \sqrt{1+z^2}\, dz$$

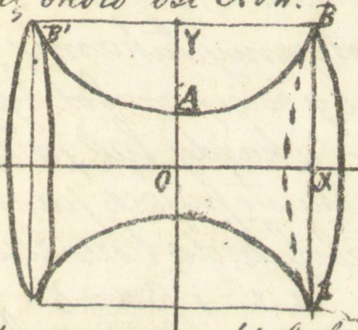
gdzie $z = \frac{a}{c} e^{-\frac{x}{c}}$

Dla $x = \infty$ otrzymamy:

$$A = \pi c \left\{ \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{c^2} + \log \frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c} \right\}$$

7. Katenoida obrotowa:

Linia łańcuszkowa $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ obraca się około osi Xów.



$$V = \frac{\pi a^2}{4} \int_0^x \left[e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2 \right] dx =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \left\{ \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} \right) + 2x \right\}$$

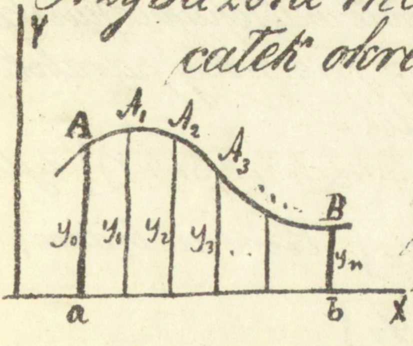
czyli $V = \frac{a\pi}{2} \left\{ ys + ax \right\}$

gdzie $s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right)$ przedstawia długość łuku AB linii łańcuszkowej.

$$A = 2\pi \int_0^s y\, ds = \frac{a\pi}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} \right) dx =$$

$$= \frac{a\pi}{2} \left\{ \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}} \right) + 2x \right\}$$

Przybliżone metody obliczania całek określonych.



Dana do obliczania całka określona $\int_a^b f(x)dx$ t. z. powierzchnia A krzywej $y = f(x)$ od $x = a$ do $x = b$.

Podzielmy odstęp $b-a$ na n równych części $\frac{b-a}{n} = h$ i poprowadźmy rzędne $y_0; y_1; y_2 \ldots\ldots y_n$

tedy otrzymamy szereg trapezów, przeto będzie w przybliżeniu:

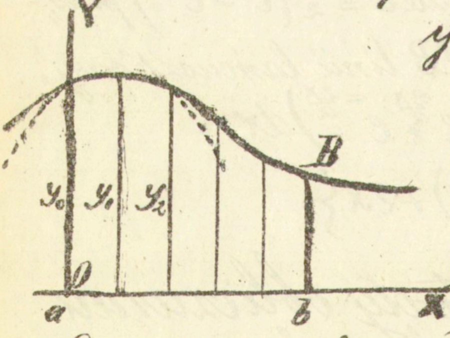
$$A = h\left[\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right] \text{ czyli:}$$

$$A = h\left[\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right]$$

zatem wartość przybliżona całki:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(n-1)h)\right]$$

b.) Zamiast łączyć punkta $A_1, A_2 \dots A_n$ cięciwami prostymi, połączmy je łukami parabolicznymi, tak aby osie parabol były równoległe do osi Yów, a każdy łuk przechodził przez 3 po sobie następujące punkta A_i. Równania takich parabol będą kształtu:



$$y = \alpha x^2 + \beta x + \delta$$

gdzie spółczynniki α, β, δ, oznaczymy na zasadzie, że parabola ma przechodzić przez trzy po sobie następujące punkta.

Część powierzchni takiej pierwszej paraboli $(y_0 y_2)$ będzie $\int_0^{2h} (\alpha x^2 + \beta x + \delta)\,dx =$

$$\frac{h}{3}\left[\delta + 4(\alpha h^2 + \beta h + \delta) + (4\alpha h^2 + 2\beta h + \delta)\right] \text{ czyli}$$

$$(y_0 y_2) = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]; \text{ Podobnie będzie:}$$

$$(y_2 y_4) = \frac{h}{3}\left[y_2 + 4y_3 + y_4\right]$$

$$\dots\dots$$

$$(y_{2m-2}\, y_{2m}) = \frac{h}{3}\left[y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right] \text{ przeto}$$

otrzymamy przybliżony wzór na całą powierzchnię krzywej: t. z. wzór Simpsona:

$$A = \frac{h}{3}\left[(y_0+y_{2m}) + 4\left[y_1+y_3+\dots+y_{2m-1}\right]+2(y_2+y_4+\dots y_{2m-2})\right]$$

Obliczanie powierzchni podług wzoru Simpsona nazywamy kwadraturą mechaniczną.
Wzoru tego używa się w praktyce przy obliczaniu wartości całek określonych w postaci:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\Big\{\left[f(a)+f(b)\right]+4\left[f(a+h)+f(a+3h)+\dots\right.$$

$$\left.+\dots f(a+\overline{2m-1}\,h)\right]+2\left[f(a+2h)+f(a+4h)+\dots+f(a+\overline{2m-2}\,h)\right]\Big\}$$

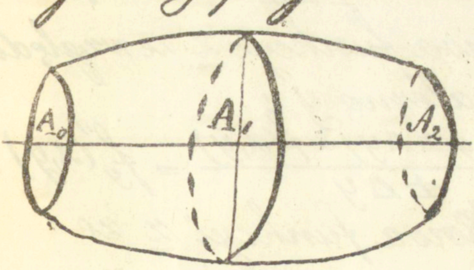
gdzie $h = \frac{b-a}{2m}$

Wzór Simpsona w zastosowaniu do kubatury powierzchni krzywych.

Oznaczając powierzchnię przekroju początkowego przez A_0, końcowego przez A_2, środkowego przez A_1 otrzymujemy wzór przybliżony

$$V = \frac{h}{3}\left[A_0 + 4A_1 + A_2\right]$$

używany przy kubaturze beczek.



D. Rachunek różniczkowy i całkowy funkcyj wielu zmiennych.

I. Pochodne i różniczki funkcyi kilku zmiennych niezależnych.

Dana funkcya dwóch zmiennych niezależnych:

$$z = f(x,y)$$

Stosunek różnicowy ze względu na zmienną niezależną x

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x \pm \Delta x, y) - f(x,y)}{\pm \Delta x}$$

Stosunek różnicowy, ze względu na zmienną niezależną y:

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{f(x, y \pm \Delta y) - f(x,y)}{\pm \Delta y}$$

Pochodna cząstkowa funkcyi $\underline{z}$ ze względu na zmienną niezależną x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x \pm \Delta x, y) - f(x,y)}{\pm \Delta x} = f'_x(x,y)$$

Pochodna cząstkowa funkcyi $\underline{z}$ ze względu na zmienną niezależną y:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y \pm \Delta y) - f(x,y)}{\pm \Delta y} = f'_y(x,y)$$

Różniczka cząstkowa funkcyi $\underline{z}$ ze względu na zmienną niezależną x:

$$d_x z = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx = f'_x(x,y)\,dx.$$

Różniczka cząstkowa funkcyi $\underline{z}$ ze względu na zmienną niezależną y:

$$d_y z = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dx = f'_y(x, y) \cdot dy$$

Różniczka zupełna funkcyi $\underline{z}$ jest równą sumie różniczek cząstkowych:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$

Ogólnie jeżeli:

$$z = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

II Różniczki i pochodne funkcyj uwikłanych.

a. Jeżeli $f(x, y) = 0$ tedy nazywamy zmienną y uwikłaną funkcyą zmiennej niezależnej x. Mamy tedy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = 0$$

przeto pochodna funkcyi y. t. j. $y' = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

różniczka funkcyi t. j. $dy = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \cdot dx$

b.) Jeżeli $F(x, y, z) = 0$ tedy nazywamy zmienną $\underline{z}$ uwikłaną funkcyą zmiennych niezależnych x i y. Mamy tedy:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

przeto pochodne cząstkowe funkcyi z

t. j. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

a różniczka zupełna funkcyi $\underline{z}$ t. j.

$$dz = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dx - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}dy.$$

c.) Jeżeli $F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, u) = 0$ tedy nazywamy zmienną $\underline{u}$ uwikłaną funkcyą n zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots x_n$. Mamy tedy:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F}{\partial u}du = 0$$

przeto będzie zupełna różniczka:

$$du = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}}dx_1 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial u}}dx_2 - \cdots\cdots - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial u}}dx_n$$

a ztąd pochodne cząstkowe funkcyi u:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}} ; \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial u}} ; \cdots \frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial u}}$$

d.) Jeżeli zmienne zależne u i v związane są z dwiema zmiennymi niezależnymi x i y dwoma równaniami:

$$f(x, y, u, v) = 0 \qquad \varphi(x, y, u, v) = 0$$

tedy mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv = 0$$

przeto otrzymamy różniczki zupełne funkcyi u i v:

$$du = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\cdot dx + \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial u}}\, dy$$

$$dv = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\, dx + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\cdot dy$$

a zatem pochodne cząstkowe funkcyi uwikłanych u i v w postaci:

$$\frac{du}{dx} = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix}} ; \quad \frac{du}{dy} = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix}} ; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{-\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

III. Pochodne cząstkowe i różniczki zupełne wyższych rzędów funkcyi wielu zmiennych niezależnych.

a.) Pochodne cząstkowe wyższych rzędów tworzą się podług prawideł dla funkcyi z jedną zmienną.

Dana funkcya $z = f(x, y)$

Oznaczmy przez $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ funkcyę, która powstaje jeżeli weźmiemy pochodną funkcyi $\frac{\partial f}{\partial x}$ podług x.
jest zatem: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}$; podobnie $\frac{\partial^2 f}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y}$;

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)}{\partial x}, \text{ i. t. d.}$$

wreszcie oznaczamy przez $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ funkcyę, która powstaje, jeżeli weźmiemy pochodną funkcyi $\frac{\partial f}{\partial y}$ podług x, jest zatem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} \text{ podobnie } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}.$$

Twierdzenie: $\frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

t. z. Mając daną funkcyę ciągłą dwóch zmiennych niezależnych x i y różniczkować wedle x i y, możemy te działania w dowolnym wykonać porządku.

Ogólnie mamy:

$$\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m . \partial y^n} = \frac{\partial^{m+n} z}{\partial y^n \partial x^m}.$$

b. Różniczki zupełne wyższych rzędów funkcyi $z = f(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} . dx + \frac{\partial z}{\partial y} . dy$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx . dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

albo symbolicznie:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 z$$

Ogólnie:

$$d^n x = \frac{\partial^n z}{\partial x^n} dx^n + \binom{n}{1} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{r} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-r} \partial y^r} dx^{n-r} . dy^r + \ldots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n} dy^n$$

albo symbolicznie:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z$$

c.) Różniczki zupełne wyższych rzędów funkcyi złożonych.

Dana funkcya $z = f(u\,v)$ gdzie:

$$u = \varphi(x\,y)\ ;\quad v = \psi(x\,y)$$

Różniczki zupełne funkcyi $\underline{z}$ obliczają się z uwzględnieniem że zmienne u i v są zmienne zależne, przeto:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot dv$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v$$

t. z. Aby otrzymać drugą różniczkę d. z. różniczka różniczki $\left(dz = \frac{\partial f}{\partial x}du + \frac{\partial f}{\partial y}dv\right.$ tworzy się zupełną różniczkę członów po prawej stronie, przyczem uwzględnia się także różniczkę d^2u i d^2v.

Jeżeli u jest zmienną niezależną, tedy jest $d^2u = 0$, jeżeli także v jest zmienną niezależną, tedy jest także $d^2v = 0$

W tej regule jest zawarte prawidło tworzenia dalszych różniczek zupełnych:

$$d^3z = \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}du^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial u^2 \partial v}du^2dv + 3\frac{\partial^3 f}{\partial u \partial v^2}du\,dv^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial v^3}dv^3 + 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du\,d^2u + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(d^2u\,dv + d^2v\,du) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv\,d^2v\right] + \frac{\partial f}{\partial u}d^3u + \frac{\partial f}{\partial v}d^3v.$$

Jeżeli u i v są zmienne niezależne, tedy kończy się oczywiście wyrażenie na pierwszych czterech członach.

IV. Pochodne wyższych rzędów funkcyj uwikłanych.

Jeżeli $f(xy)=0$ tedy: mamy $\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$ zkąd

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Druga różniczka zupełna funkcyi $f(xy)$ położona równa zeru, dostarcza obliczenia pochodnej drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

zkąd $$\frac{d^2y}{dx}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

czyli po wstawieniu wartości na $\frac{dy}{dx}$ wzór:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

Podobnie obliczymy trzecią pochodną $\frac{d^3y}{dx^3}$ z trzeciej różniczki zupełnej d^3f uważając jako równą zeru:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{dy}{dx}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$
$$+3\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3}=0$$

i. t. d.

V. Wzór Taylora dla funkcyi wielu zmiennych.

Znajomość pochodnych cząstkowych funkcyi o kilku zmiennych niezależnych prowadzi także do obliczania funkcyi zapomocą szeregu potęgowego. Niech będzie $z=f(x\,y)$, utwórzmy funkcyę $F(t)=f(x+th,\,y+tk)$, i uważajmy ją jako ciągłą funkcyę zmiennej t, tedy będzie wedle wzoru Maclaurina

$$F(t)=F(0)+\frac{t}{1!}F'(0)+\frac{t^2}{2!}f''(0)+\dots+\frac{t^n}{n!}f^{(n)}(\theta t)$$

zkąd kładąc $t=1$ otrzymamy:

$$F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}F'(0)+\frac{1}{2!}F''(0)+\dots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta)$$

gdzie $F(0)=f(x,y)$ i $F'(0)=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}$

$$F''(0)=h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2kh\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \dots$$

$$F^{(n)}(0)=\sum_{r=0}^{r=n}\binom{n}{r}h^{n-r}k^r\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-r}\partial y^r}$$

Otrzymujemy zatem wzór Taylora dla funkcyi dwóch zmiennych niezależnych w postaci:

$$f(x+h,y+k)=f(x\,y)+\left[h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right]+\frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]+\dots+\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n=r}\binom{n}{r}h^{n-r}k^r\frac{\partial^n f(x+\theta h,y+\theta k)}{\partial x^{n-r}\partial y^r}$$

Wzór ten prowadzi do rozwinięcia funkcyi $f(x+h,\,y+k)$ w szereg nieskończony postępujący podług potęg przyrostów h i k zbieżny, jeżeli dla dowolnie rosnącego $\underline{n}$ wyrażenie reszty dąży do zera, co się zawsze stanie, skoro pochodne cząstkowe funkcyi w danym zakresie dla nieskończonego $\underline{n}$

pozostają skończone.

Zastąpmy w powyższym wzorze $x+h$ przez x, $y+k$ przez y, x i y przez 0, zaś h, k przez x, y, tedy otrzymujemy wzór Maclaurina dla funkcyi dwóch zmiennych niezależnych w formie:

$$f(x\,y) = f(0,0) + \left[x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\right] + \frac{1}{2!}\left[x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + \right.$$
$$\left. + 2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 + y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right] + \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n=r}\binom{n}{r} x^{n-r} y^r \frac{\partial^n f(\theta x, \theta y)}{\partial x^{n-r}\partial y^r}$$

gdzie $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ oznaczają wartości pochodnych cząstkowych w miejscu $x=0$, $y=0$.

Podobne wzory istnieją dla funkcyi ilukolwiek zmiennych niezależnych. –

VI Maxima i minima funkcyi wielu zmiennych.

a.) Maxima i minima funkcyi zmiennych niezależnych.

Funkcyja $z=f(x,y)$ ma w miejscu $x=a$, $y=b$ maximum $f(a,b)$ jeżeli dla wszelkich układów wartości h i k mniejszych od dowolnie małej liczby ε będzie $f(a+h, b+k) < f(a,b)$ zaś minimum jeżeli $f(a+h, b+k) > f(a,b)$

Z rozwinięcia funkcyi $f(x+h, y+k)$ w szereg

$$f(x+h, y+k) = f(x\,y) + \left[h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right] + \frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \right.$$
$$\left. + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] + \cdots \&$$

otrzymujemy następujące kryterya maximów i minimów:

1.) Konieczny warunek maximum albo minimum:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Z rozwiązania tych dwóch równań ze względu na x i y wypadają te grupy wartości, które mają wywołać maximum albo minimum funkcyi $f(x\,y)$.

Jeżeli dla tak wynalezionych wartości, jest:

2.) α.) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$ tedy nie ma ani maximum ani minimum.

3.) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ a zarazem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ tedy maximum.

γ.) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ a zarazem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, tedy minimum.

δ.) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = 0$ tedy zachodzi wypadek wątpliwy.

b.) Maxima i minima względne.–

Dana funkcya $f(x, y, z, u)$, której maxima i minima mamy oznaczyć, jeżeli zmienne związane są równaniami

$$\varphi(x, y, z, u) = 0 \qquad \psi(x, y, z, u) = 0$$

Dotączmy do tych dwóch równań następujące:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0\,; \quad \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0$$

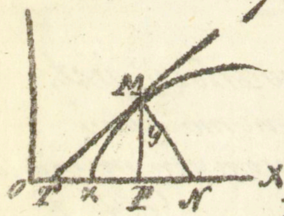
tedy otrzymujemy 6 równań na oznaczenie 6 niewiadomych x, y, z, u, λ, μ wywołujących maxima albo minima funkcyi $f(x, y, z, u)$

VIII. Zastosowania geometryczne rachunku różniczkowego do funkcyi wielu zmiennych. —

1.) Styczność i krzywizna krzywych płaskich określonych równaniem: $f(x\,y)=0$

Równanie krzywej: $f(x,y)=0$

Kierunek stycznej $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$



wielkość stycznej $MT = T = \dfrac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}$

Podstyczna $TP = T' = \dfrac{y}{y'}$

Wielkość normalnej $MN = N = y\sqrt{1+y'^2}$

Podnormalna $PN = N' = yy'$

Równanie stycznej w punkcie $x\,y$:

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Równanie normalnej w punkcie $x\,y$:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Punkt pojedynczy: Jedna styczna określona $\dfrac{dy}{dx} = a$

Punkt podwójny: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{0}{0}$

Warunek: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ a to:

Węzeł jeżeli: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 < 0$

Punkt zwrotu jeżeli:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

punkt odosobniony jeżeli:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0$$

Punkt wielokrotny: p krotny:
Warunki:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=0\ ,\ \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-1}}=\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-2}\,\partial y}=\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-3}\,\partial y^2}=\ldots\ldots=\frac{\partial^{p-1} f}{\partial y^{p-1}}=0$$

Promień krzywizny:

$$\varrho=\frac{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}$$

Krzywe obwijające: Jeżeli w równaniu $f(xy\alpha)=0$ nadamy ilości α szereg rozmaitych wartości otrzymamy szereg oddzielnych krzywych. Krzywa styczna do wszystkich krzywych tak otrzymanych nazywa się obwijającą. Równanie krzywej obwijającej określone jest dwoma równaniami:

$$f(xy\alpha)=0\ ;\ \frac{\partial f(xy\alpha)}{\partial \alpha}=0$$

z których po wyrugowaniu α otrzymamy równanie w postaci $F(xy)=0$.
albo czterema równaniami kształtu:

$$f(xy\alpha\beta)=0\ ;\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}=0$$

$$\varphi(xy\alpha\beta)=0\ ;\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}+\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}=0$$

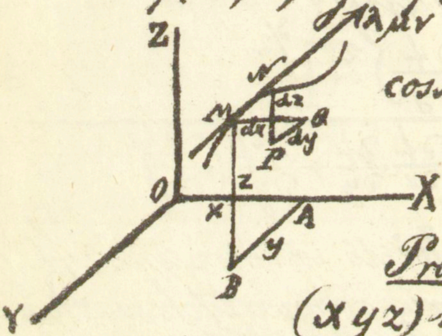
z których po wyrugowaniu zmiennych α, β, i $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$ otrzymujemy równanie obwijającej:

$$F(xy)=0$$

2.) Styczność i krzywizna krzywych przestrzennych.—

Krzywa przestrzenna może być określona dwoma równaniami: $F(x,y,z)=0$; $\Phi(xyz)=0$ albo trzema równaniami kształtu:

$$x=f(t)\;;\; y=\varphi(t)\;;\; z=\psi(t)$$



Kierunek stycznej:

$$\cos\lambda=\frac{dx}{ds}\;;\;\cos\mu=\frac{dy}{ds}\;;\;\cos\nu=\frac{dz}{ds}$$

Element krzywej:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

Prosta styczna w punkcie (xyz) krzywej ma równanie:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz} \qquad 1)$$

Płaszczyzna normalna w punkcie (xyz) t.z. płaszczyzna prostopadła do stycznej 1):

$$(X-x)dx+(Y-y)dy+(Z-z)dz=0$$

Płaszczyzna ściśle styczna t.j. płaszczyzna przechodząca przez dwie linje styczne po sobie następujące — ma równanie:

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ dx, & dy & dz \\ d^2x, & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0 \qquad \text{czyli:}$$

$$P(X-x)+Q(Y-y)+R(Z-z)=0$$

gdzie $P=dy\,d^2z-dz\,d^2y$, $Q=dz\,d^2x-dx\,d^2z$

$R=dx\,d^2y-dy\,d^2z$.

<u>Główna normalna</u> w punkcie $(x\,y\,z)$ krzywej t.j. przekrój płaszczyzny normalnej z płaszczyzną ściśle styczną w tym punkcie:

$$\frac{X-x}{Qdz-Rdz}=\frac{Y-y}{Rdx-Pdz}=\frac{Z-z}{Pdy-Qdx}$$

<u>Binormalna</u> w punkcie $(x\,y\,z)$ krzywej t.j. prosta prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej w tym punkcie:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R}$$

<u>Płaszczyzna prostująca</u> (rektyfikacyjna) t.j. płaszczyzna przechodząca przez linję styczną i binormalną ma równanie:

$$(Qdz-Rdy)(X-x)+(Rdx-Pdz)(Y-y)+(Pdy-Qdx)(Z-z)=0$$

Płaszczyzna ściśle styczna, normalna i rektyfikacyjna tworzą układ płaszczyzn prostokątnych w danym punkcie krzywej, ich linjami przecięcia są linia styczna, główna normalna i binormalna.

<u>Koło ściśle styczne</u> w punkcie $(x\,y\,z)$ t.j. koło przechodzące przez trzy po sobie następujące punkta krzywej jest określone równaniami:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=\varrho^2$$

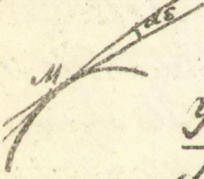
$$P(x-\xi)+Q(y-\eta)+R(z-\zeta)=0$$

z których, uwzględniając równanie krzywej, otrzymujemy z wzoru trapezów, przeto będzie

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x - \frac{R\,dy - Q\,dz}{P^2+Q^2+R^2}\,ds^2\\ \eta &= y - \frac{P\,dz - R\,dx}{P^2+Q^2+R^2}\,ds^2\\ \zeta &= z - \frac{Q\,dx - P\,dy}{P^2+Q^2+R^2}\,ds^2\end{aligned}\right\}$$ spółrzędne środka koła ściśle stycznego. —

$$\varrho = \frac{ds^3}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}$$ promień koła ściśle stycznego.

<u>Kąt styczności</u> w punkcie (xyz) t. j. kąt zawarty między dwiema stycznymi po sobie następującymi:



$$d\varepsilon = \frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{ds^2}$$

<u>Krzywizna w punkcie (xyz) t. j.</u>

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}{ds^3} = \frac{1}{\varrho}$$

nazywa się także krzywizną pierwszą krzywej przestrzennej, jej odwrotna wartość ϱ promieniem pierwszej krzywizny.

<u>Kąt skręcenia</u>, t. j. kąt zawarty między dwiema płaszczyznami ściśle stycznymi po sobie następującymi:

$$d\eta = \frac{P\,d^3x + Q\,d^3y + R\,d^3z}{P^2+Q^2+R^2}\cdot ds$$

<u>Skręcenie w punkcie (xyz)</u> t. j. stosunek między kątem skręcenia a elementem krzywej:

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z}{P^2+Q^2+R^2} = \frac{1}{\rho_1}$$

nazywa się także drugą krzywizną krzywej przestrzennej. Jej odwrotna wartość:

$$\rho_1 = \frac{P^2+Q^2+R^2}{Pd^3x+Qd^3y+Rd^3z}$$

nazywa się <u>promieniem skręcenia</u> albo promieniem drugiej krzywizny.

Krzywe płaskie nie mają w żadnym punkcie skręcenia (drugiej krzywizny), mają ją tylko krzywe skośne.

Warunek, aby równania $\left\{\begin{matrix} f(xyz)=0 \\ \varphi(xyz)=0 \end{matrix}\right\}$ przedstawiały krzywą płaską, przedstawia się w postaci: $\left(\frac{1}{\rho_1}=0\right)$ czyli $\rho_1=\infty$ czyli:

$$Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z = 0$$

t.z

$$\begin{vmatrix} dx, & dy, & dz, \\ d^2x, & d^2y, & d^2z, \\ d^3x, & d^3y, & d^3z \end{vmatrix} = 0$$

<u>Kula ściśle styczna</u> jest kulą która przechodzi przez cztery po sobie następujące punkta krzywej skośnej t.z. ma z krzywą skośną w danym punkcie (xyz) styczność rzędu trzeciego.

<u>Promień kuli ściśle stycznej</u>:

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}$$

Twierdzenie Meusniera.

Promień koła ściśle stycznego jest rzutem promienia kuli ściśle stycznej na płaszczyznę

ściśle styczną
$$\varrho = r . \cos w$$
Przykład krzywej skośnej:
Linia śrubowa: $x = a . \cos t$, $y = a \sin t$; $z = bt$
czyli: $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{y}{x} = tg \frac{z}{b} \end{cases}$

Mamy tu:

$dx = -a \sin t . dt$; $d^2x = -a \cos t . dt^2$; $d^3x = a . \sin t \, dt^3$
$dy = a . \cos t . dt$; $d^2y = -a . \sin t . dt^2$; $d^3y = -a \cos t . dt^3$
$dz = b dt$; $d^2z = 0$; $d^3z = 0$
$ds = \sqrt{a^2 + b^2} . dt$; $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} = a \sqrt{a^2 + b^2} . dt^3$
$P = ab . \sin t \, dt^3$; $\varrho = \frac{a^2 + b^2}{a}$
$Q = -ab \cos t \, dt^3$; $\varrho_1 = \frac{a^2 + b^2}{a}$
$R = a^2 dt^3$; $r = \frac{a^2 + b^2}{a}$
Środek koła i kuli ściśle stycznych:
$\xi = -\frac{b^2}{a} \cos t$; $\eta = -\frac{b^2}{a} \sin t$; $\zeta = bt$
Miejsce tych środków tworzy nową linię śrubową.

3.) Styczność powierzchni.

a.) Równanie powierzchni zwyczajne: $z = f(x y)$
b.) nierozwinięte: $F(x, y, z) = 0$
c.) z dwoma parametrami zmiennymi u, v, $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = \varphi(u, v) \\ z = \psi(u, v) \end{cases}$

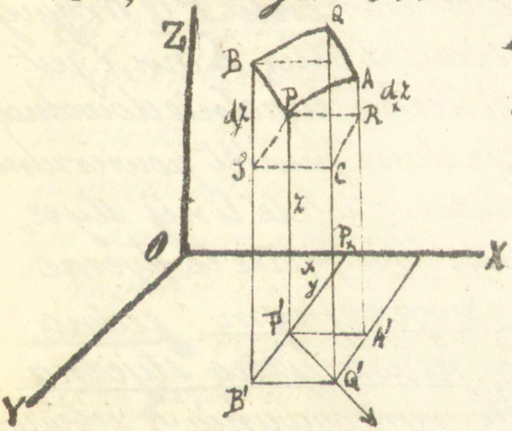
Różniczka zupełna zmiennej zależnej:
Uważając x i y za zmienne niezależne otrzymamy:
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \text{albo}$$
$$dz = p \, dx + q \, dy, \quad \text{gdzie:}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}}$$

przedstawiają pochodne cząstkowe zmiennej zależnej z.

Znaczenie geometryczne pochodnych cząstkowych i różniczki zupełnej.



Pochodna cząstkowa $p = \frac{dz}{dx}$ względnie $q = \frac{dz}{dy}$ przedstawia tangens kąta, jaki styczna w punkcie $P(x, y, z)$ przekroju równoległego do płaszczyzny XOZ względnie YOZ tworzy z osią Xów względnie z osią Yów.

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tang}(APR)$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tang}(BPS)$$

Różniczka częściowa $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = AR$ przedstawia zmianę wysokości $\underline{z}$ punktu P, wywołaną zmianą dx odciętej x tego punktu.

Różniczka cząstkowa $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = BS$ przedstawia zmianę wysokości $\underline{z}$ punktu P, wywołaną zmianą dy, rzędnej y tego punktu.

Różniczka zupełna $d_x z + d_y z = RA + SB =$ $= CD + DQ = AQ$ przedstawia zmianę dz wysokości z punktu P, wywołaną jednoczesną zmianą dx odciętej x i dy rzędnej y tego punktu.

Równanie linii stycznej w punkcie (xyz) powierzchni:

$$X - x = \frac{\lambda}{p + q\lambda}(Z - z)\ ;\ Y - y = \frac{\lambda}{p + q\lambda}(Z - z)$$

gdzie $\lambda = \frac{dy}{dx}$ przedstawia tangens kąta, jaki rzut $P'Q'$ elementu PQ krzywej na powierzchni tworzy z osią X ów, i jest dla punktu $P(xyz)$ liczbą zupełnie dowolną, dowodzący, że przez dany punkt powierzchni przechodzi nieskończenie wiele linij stycznych do powierzchni. Wszystkie te styczne tworzą w punkcie zwyczajnym jedną płaszczyznę zwaną płaszczyzną styczną do powierzchni. Po wyrugowaniu λ z obydwu równań otrzymamy:

Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie (xyz) powierzchni $z = f(xy)$ w postaci:

$$p(X - x) + q(Y - y) = Z - z$$

która dla powierzchni $F(xyz) = 0$ otrzymuje kształt:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0$$

Prosta prostopadła do płaszczyzny stycznej nazywa się linją normalną powierzchni.—

Równanie linji normalnej dla powierzchni $z=f(xy)$ w punkcie (x,y,z) jest:

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z_1-z}{-1}$$ czyli:

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z_1-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$ dla powierzchni $F(x\,y\,z)=0$

Punkta osobliwe powierzchni.

Punktami osobliwymi powierzchni nazywamy punkta, przez które da się przeciągnąć nieskończenie wiele płaszczyzn stycznych.
Warunki konieczne: $\frac{\partial F}{\partial x}=0$; $\frac{\partial F}{\partial y}=0$; $\frac{\partial F}{\partial z}=0$ którym spółrzędne $(x\,y\,z)$ punktu osobliwego zadosyć czynią.

Wszystkie linie styczne w takim punkcie tworzą w ogólności stożek drugiego stopnia, z tego powodu nazywa się taki punkt punktem konicznym.
Równanie stożka stycznego w takim punkcie (x,y,z) ma kształt:

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}(X-x)^2+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}(Y-y)^2+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}(Z_1-z)^2+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}(X-x)(Y-y)+$$
$$+2\frac{\partial^2F}{\partial y\partial z}(Y-y)(Z_1-z)+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial z}(Z_1-z)(X-x)=0$$

Szczególne rodzaje punktów konicznych.

1.) Punkt odosobniony, stożek styczny jest urojony.
2.) Punkt biplanarny, stożek styczny przechodzi tu w dwie płaszczyzny styczne, przecinające się w jednej krawędzi stycznej do powierzchni.

3.) Punkt uniplanarny; stożek styczny przechodzi tu w dwie płaszczyzny na siebie wpadające czyli w płaszczyznę podwójną. 

4.) Punkt konieczny drugiego rzędu; stożek styczny jest tu rzeczywistym stożkiem drugiego stopnia. 

5.) Punkt konieczny wyższego rzędu; stożek styczny jest tu stożkiem stopnia wyższego nad drugi.

VIII. Całki podwójne i wielokrotne.

Całki podwójne nieokreślone.

Określenie. Dana funkcya dwóch zmiennych niezależnych $z = \varphi(x y)$. Znaleźć taką funkcyę, któraby różniczkowana po kolei podług obu zmiennych niezależnych dała na wynik funkcyę $\varphi(x y)$.

Nazwijmy szukaną funkcyę przez <u>u</u>, tedy mamy na jej określenie warunek:

$$\frac{d^2u}{dx.dy} = \varphi(x,y) \qquad \text{czyli:}$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{dv}{dy} = \varphi(xy)$$

zkąd otrzymujemy:

$$v = \frac{du}{dx} = \int \varphi(xy)\,dy \qquad \text{przeto}$$

$$u = \int\left[\int \varphi(xy)\,dy\right]dx$$

Szukaną funkcyę u znajdziemy zatem

całkując daną funkcyę $\varphi(xy)$ najpierw podług y a następnie otrzymany wynik podług x. Działanie to nazywamy całkowaniem podwójnem a wynik oznaczony symbolem:

$$u = \iint \varphi(xy)\, dy\, dx$$

całką podwójną nieokreśloną. —

Twierdzenie 1.) Dwie funkcye u, które czynią zadość warunkowi: $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy} = \varphi(xy)$ mogą się różnić między sobą tylko sumą dwóch dowolnych funkcyj, z której jedna jest wyłącznie funkcyą zmiennej x, druga wyłącznie funkcyą zmiennej y.

Twierdzenie 2.) W jakimkolwiek porządku wykonamy całkowanie funkcyi $\varphi(xy)$ ze względu na jedną i na drugą zmienną niezależną, otrzymamy zawsze na wynik tę samą funkcyę dwóch zmiennych niezależnych $u = f(xy)$. Ażeby jednak wynikowi nadać kształt najogólniejszy należy do otrzymanej funkcyi dołączyć jeszcze sumę dwóch dowolnych funkcyj, z których jedna tylko zmienną x, druga tylko zmienną y zawiera. t. z.

$$u = \iint \varphi(xy)\, dy\, dx = F(xy) + \psi(x) + \chi(y)$$

Uwaga. Przy obliczaniu całki podwójnej zachowujemy ten porządek, w którym całkowanie da się łatwiej wykonać. —

Przykład.

$$\iint\left(ax+by+\frac{c}{x+y}\right)dy\,dx=\frac{1}{2}(ax+by)xy+$$
$$+c(x+y)\log(x+y)+\psi(x)+X(y)$$

Całki podwójne określone.—

Niech będzie $\varphi(xy)$ funkcya dwóch zmiennych skończoną i ciągłą w pewnym obszarze płaszczyzny xy, ograniczonym dowolną krzywą $f(xy)=0$ lub prostokątem o bokach równoległych do osi współrzędnych. W ostatnim wypadku niech przyjmuje x wszystkie wartości od a do b, y wszystkie zaś od α do β.

Połóżmy:

$$x_1-a=h_1\,,\quad x_2-x_1=h_2\,,\ \dots\quad b-x_{n-1}=h_n$$
$$y_1-\alpha=k_1\,,\quad y_2-y_1=k_2\,,\ \dots\ \beta-y_{m-1}=k_m$$

potwórzmy iloczyny kształtu $h_r k_s\varphi(x_{r-1}y_{s-1})$ i zbierzmy w sumę wszystkie iloczyny odpowiadające odstępowi h_{r+1} tedy otrzymamy sumę:

$$h_{r+1}\left\{k_1\varphi(x_r,\alpha)+k_2\varphi(x_r,y_1)+\dots+k_m\varphi(x_r,y_{m-1})\right\}=$$
$$=h_{r+1}\sum_{s=1}^{s=m}k_s\varphi(x_r,y_{s-1})$$

W miarę jak różnice $k_1, k_2\dots k_m$ maleją dąży suma $\sum_{s=1}^{s=m}k_s\varphi(x_r y_{s-1})$ do granicy:

$$\int_\alpha^\beta\varphi(x_r y)dy\quad t.z.$$

$$\lim_{k_s=0}\sum_{s=1}^{s=m}k_s\varphi(x_r y_{s-1})=\int_\alpha^\beta\varphi(x_r y)dy=\psi(x_r).$$

Dodajmy teraz wszystkie iloczyny kształtu $h_{r+1}\psi(x_r)$ tedy otrzymamy sumę:

$$h_1\psi(a)+h_2\psi(x_1)+\ldots\ldots+h_n\psi(x_{n-1})=\sum_{r=1}^{r=n}h_r\psi(x_{r-1})$$

która dla nieskończenie malejących h dąży do granicy $\int_a^b\psi(x)dx$. Zatem jest granica sumy podwójnej

$$\lim_{h=0,\,k=0}\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=m}h_r k_s\psi(x_{r-1},y_{s-1})=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta\varphi(xy)dy\right]dx$$

co oznaczamy symbolem $\int_a^b\int_\alpha^\beta\varphi(xy)dy\,dx$

Gdybyśmy porządek sumowania iloczynów zmienili, tedy otrzymalibyśmy w granicy sumę:

$\int_\alpha^\beta\left\{\int_a^b\varphi(xy)dx\right\}dy$. którą oznaczamy symbolem

$$\int_\alpha^\beta\int_a^b\varphi(x,y)dx\,dy$$

Całka podwójna określona jest tedy granicą sum, które otrzymamy mnożąc iloczyn $dx\,dy$ przez wszystkie wartości, jakie dana funkcya dwóch zmiennych przybiera, jeżeli obie zmienne zmieniają się w danych granicach.

Twierdzenie.

$$\int_a^b\left\{\int_\alpha^\beta\varphi(xy)dy\right\}dx=\int_\alpha^\beta\left\{\int_a^b\varphi(xy)dx\right\}dy$$

czyli symbolicznie

$$\int_a^b\int_\alpha^\beta\varphi(xy)dy\,dx=\int_\alpha^\beta\int_a^b\varphi(xy)\,dx\,dy \quad \text{t. z.}$$

Mając daną funkcyę dwóch zmiennych niezależnych całkować kolejno podług każdej zmiennej między <u>stałymi granicami</u>

od siebie niezależnymi, możemy te działania wykonać w dowolnym porządku.

Uwaga. Porządek całkowania w granicach określonych nie jest obojętny, skoro granice pierwszego całkowania są funkcyami drugiej zmiennej.

Całki wielokrotne określone i nieokreślone.

Jeżeli: $\frac{d^n u}{dx_1 dx_2 \ldots dx_n} = \varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$

tedy przedstawia się szukana funkcya w postaci:

$$u = \int dx_1 \int dx_2 \ldots \int dx_n \varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

którą oznaczamy symbolem:

$$u = \int\int\int \ldots \int \varphi(x_1 x_2 \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

i nazywamy całką wielokrotną nieokreśloną.

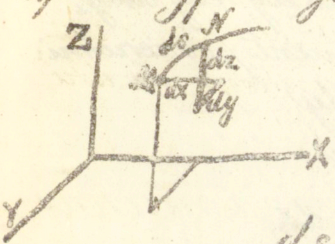
Rozdzielmy pole zmienności poszczególnych zmiennych na ilości nieskończenie małe i potwórzmy iloczyny kształtu: $\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ tedy przedstawia się w granicy suma tych iloczynów w postaci:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} dx_2 \ldots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dx_n \varphi(x_1 x_2 \ldots x_n) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \ldots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} dx_1 dx_2 \ldots dx_n \varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

Porządek całkowania jest dla stałych granic zupełnie dowolny.

Zastosowanie geometryczne całek dla funkcyi wielu zmiennych.

1.) Rektyfikacya krzywych przestrzennych.



a.) Równania krzywej:

$$\begin{cases} F(x\, y\, z) = 0 \\ \Phi(x\, y\, z) = 0 \end{cases}$$

Element łuku:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

przeto otrzymamy na oznaczenie długości łuku wzór:

$$s = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

albo
$$s = \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}.$$

albo
$$s = \int_{z_0}^{z_1} dz \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}$$

b.) Równania krzywej:
$$x = f(t) \qquad y = \varphi(t) \qquad z = \psi(t)$$

tedy mamy wzór:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

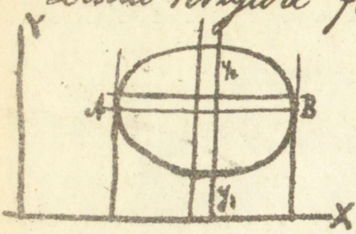
Przykład: Linia śrubowa:
$$\left.\begin{aligned} x &= a.\cos t \\ y &= a.\sin t \\ z &= b.t \end{aligned}\right\}$$

$$s = \int_0^t dt \sqrt{a^2 + b^2} = t\sqrt{a^2+b^2} = \frac{z}{b}\sqrt{a^2+b^2}$$

2.) Kwadratura krzywych płaskich za pomocą całek podwójnych.

a) w układzie prostokątnym:

Dana Krzywa $f(xy)=0$



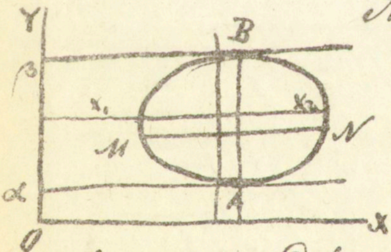
Rozłóżmy pole ograniczone krzywą na prostokąty o powierzchni $dx\,dy$ tedy otrzymamy element powierzchni:

$$dA = dx.dy$$

całkowitą powierzchnię w postaci:

$$A=\int_a^b\left(\int_{y_1}^{y_2}dy\right)dx=\int_a^b\int_{y_1}^{y_2}dy.dx.$$

między granicami zmiennymi y_1 i y_2, jeżeli całkujemy najpierw podług y, zależnymi od zmiennej x na podstawie równania $f(xy)=0$ a potem podług x między stałymi granicami a i b, lub w postaci:



$$A=\int_\alpha^\beta\int_{x_1}^{x_2}dx.dy$$

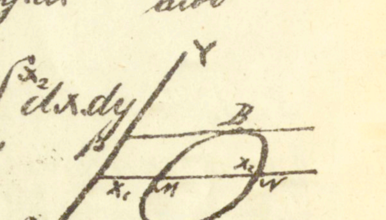
jeżeli całkujemy najpierw podług x między zmiennymi granicami x_1 i x_2 zależnymi od drugiej zmiennej y na podstawie równania krzywej $f(xy)=0$ a potem podług y między stałymi granicami α i β.

b.) w układzie ukośnokątnym otrzymamy całkowitą powierzchnię:

$$A=\sin\delta\int_a^b\int_{y_1}^{y_2}dy.dx$$

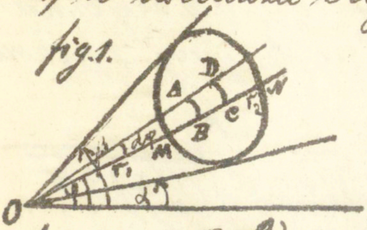
albo

$$A=\sin\delta\int_\alpha^\beta\int_{x_1}^{x_2}dx.dy$$



c.) w układzie biegunowym:

fig.1.



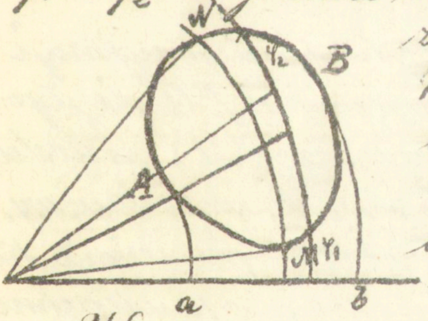
Przyjmujemy element ABCD powierzchni A jako ograniczony dwoma promieniami nachylonymi pod kątami φ i $\varphi + d\varphi$ i dwoma kątami współśrodkowymi o promieniach r i $r+dr$ zatem będzie:

$$dA = r\, d\varphi \,.\, dr. \quad \text{przeto}$$

$$A = \int_\alpha^\beta \int_{r_1}^{r_2} r . dr . d\varphi$$

gdzie r_1 i r_2 są granice zmienne od φ zależne, zaś α i β stałe.

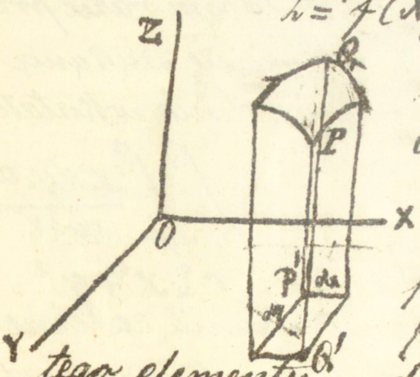
albo $A = \int_a^b \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r . d\varphi . dr.$ gdzie granice φ_1 i φ_2 są granice zmienne od r zależne zaś a i b granice stałe.



W pierwszym wypadku (fig.1) sumujemy elementa kolejno wycinkami, w drugim (fig.2) pierścieniami M N.

3. Kwadratura powierzchni krzywych.

$$z = f(xy)$$



Za element powierzchni przyjmujemy czworokąt PQ którego rzut (P'Q') na płaszczyznę XOY jest prostokątem $= dx . dy$ przeto jest powierzchnia tego elementu

$$dA = \frac{dx . dy}{\cos\gamma}$$

gdzie ν jest kątem, jaki tworzy płaszczyzna elementu, to znaczy płaszczyzna styczna w punkcie P powierzchni krzywej z płaszczyzną XOY przeto:

$$\cos\nu = \frac{t}{\sqrt{p^2+q^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}$$

a zatem

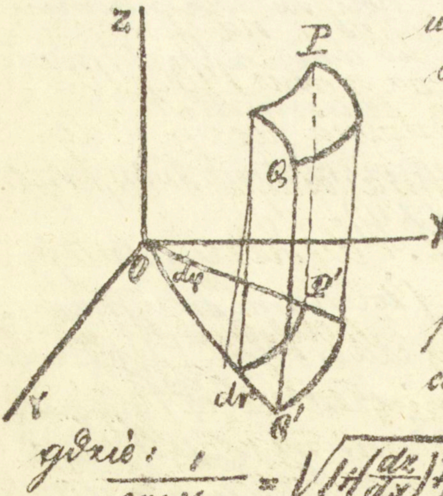
$$dA = dx.dy\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}$$

a więc całkowita powierzchnia

$$A = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_0}^{y_2}\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}\;dy.dx$$

gdzie granice całkowania zależą od ograniczenia rzutu powierzchni krzywej na płaszczyznę XOY.

Jako element powierzchni przyjmuje się częstokroć taki czworokąt PQ, że jego rzut $(P'Q')$ na płaszczyznę XOY przedstawia się w postaci wycinka z pierścienia kołowego o powierzchni $r.d\varphi.dr$.



W takim razie przedstawia się szukana powierzchnia w kształcie całki:

$$A = \int_{r_1}^{r_2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_2}\frac{r.d\varphi.dr}{\cos\nu}$$

gdzie:

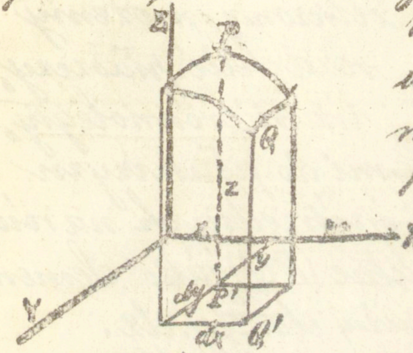
$$\frac{1}{\cos\nu} = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\;;\quad r^2 = x^2+y^2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

a granice całkowania zależne od ograniczenia rzutu powierzchni;

obliczyć się mającej, na płaszczyznę XOY.

4) Kubatura powierzchni krzywych za pomocą całek podwójnych.



Za element objętości powierzchni $z = f(x\,y)$ przyjmujemy graniastosłup którego podstawą jest prostokąt $P'Q'$ o powierzchni $dx.dy$ a wysokością $PP' = z$

przeto będzie $dV = z.dy.dx$ a zatem

$$V = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_0}^{y_2} z\,dy.dx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x\,y)\,dy.dx$$

gdzie granice całkowania są zależne od ograniczenia rzutu powierzchni na płaszczyznę XOY.

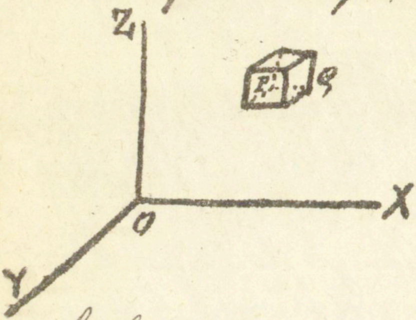
Jako element objętości przyjmuje się często kroć graniastosłup oparty na elemencie biegunowym (fig. na stronie 198.), którego powierzchnię przedstawia iloczyn $r.d\varphi.dr$, objętość takiego graniastosłupa będzie tedy

$$dV = z.r\,d\varphi.dr$$ przeto

$$V = \int_{r_1}^{r_2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_2} z.r.d\varphi.dr$$ gdzie

granice całkowania zależą od ograniczenia rzutu powierzchni na płaszczyznę XOY

5) Kubatura powierzchni krzywych za pomocą całek potrójnych.



Objętość, która ma być obliczoną możemy rozdzielić płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn spółrzędnych na równoległościany prostokątne (PQ) jako elementa, których objętość wyraża $dx.dy.dz$.

Tym sposobem otrzymamy objętość w postaci całki potrójnej

$$V = \int\int\int dx.dy.dz$$

przyczem granice trzech całek kolejnych muszmy wyznaczyć stosownie do ~~własności~~ powierzchni ograniczających daną przestrzeń. Całkując najpierw ze względu na z między granicami z_0 i z_1, potem ze względu na y między granicami y_0 i y_1, wreszcie ze względu na x między granicami x_0 i x_1 otrzymamy:

$$V = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} dz.dy.dx$$

Przy tym porządku całkowania mogą być granice z_0 i z_1 funkcyami obu zmiennych x i y, granice y_0 y_1 funkcyami zmiennej x; x_0 i x_1 muszą już być stałe.

Przykłady z Kwadratury i Kubatury powierzchni Krzywych.

1) Kula. $x^2+y^2+z^2=a^2$: Mamy tu:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z} \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z}.$$

Powierzchnia jednej ósemki kuli

$$A=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{a.dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\int_0^a a.dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{dx}{\sqrt{(a^2-y^2)-x^2}}=$$

$$=\int_0^a a\,dy\Big|_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{a^2-y^2}}=\frac{a\pi}{2}\int_0^a dy=\frac{a^2\pi}{2}$$

Objętość jednej ósemki kuli będzie zaś:

$$V=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-y^2-x^2}\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}\int_0^a(a^2-y^2)dy=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{\pi a^3}{6}$$

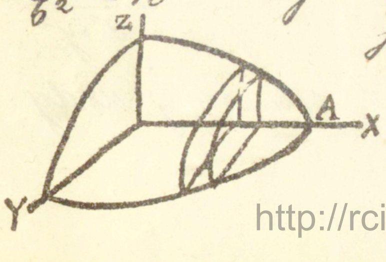
2) Ellipsoida trójosiowa: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Mamy tu $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{-cx}{a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{cy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

$$dA=dx.dy\sqrt{\frac{1-\frac{a^2-c^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2}-\frac{b^2-c^2}{b^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

Przypuśćmy że $a>b>c$ i połóżmy $\frac{a^2-c^2}{a^2}=m^2$, $\frac{b^2-c^2}{b^2}=n^2$ tedy otrzymamy powierzchnię jednej ósemki ellipsoidy trójosiowej w postaci całki podwójnej:



$$A=\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx.dy \sqrt{\frac{1-m^2\frac{x^2}{a^2}-n^2\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$$

która prowadzi do całek elliptycznych.

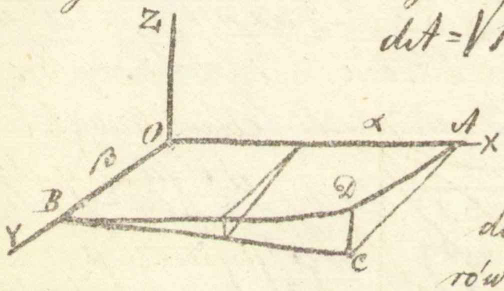
Objętość ósemki ellipsoidy będzie natomiast:

$$V=\int_0^a\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy.dx=\frac{\pi bc}{4}\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi abc}{6}$$ zatem objętość całej ellipsoidy $=\frac{4}{3}abc\pi$.

3) Paraboloida hiperboliczna $xy=az$

Mamy tu: $\frac{dz}{dx}=\frac{y}{a}$, $\frac{dz}{dy}=\frac{x}{a}$



$$dA=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dx.dy$$

$$dV=\frac{xy}{a}dx\,dy$$

Ograniczmy ją dwiema płaszczyznami równoległymi do XOZ i YOZ, tedy będzie powierzchnia:

$$A=\frac{1}{a}\int_0^\alpha\int_0^\beta\sqrt{x^2+y^2+a^2}\,dy.dx$$

gdzie $\alpha=OA$; $\beta=OB$

objętość zaś:

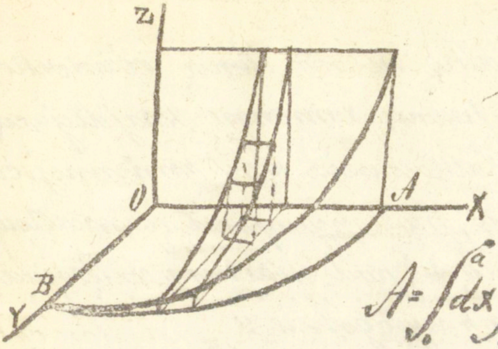
$$V=\int_0^\alpha\int_0^\beta\frac{xy}{a}dx\,dy=\frac{\beta^2}{2a}\int_0^\alpha x\,dx=\frac{\alpha^2\beta^2}{4a}=\frac{1}{4}\alpha\beta\gamma$$

gdzie $\gamma=\frac{\alpha\beta}{a}=CD$

4) Powierzchnia śrubowa $z=k.\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$

Mamy tu: $\frac{dz}{dx}=\frac{ky}{x^2+y^2}$, $\frac{dz}{dy}=-\frac{kx}{x^2+y^2}$

$dA=dx\,dy\sqrt{1+\frac{k^2}{x^2+y^2}}$; $dV=k.\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx\,dy$



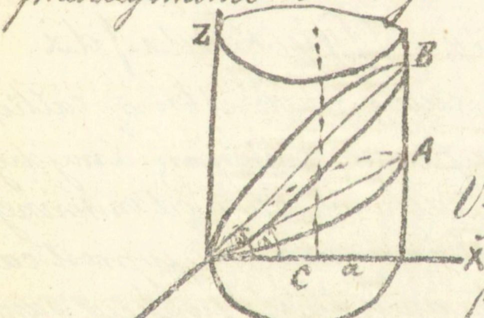
Ograniczmy powierzchnię walcem kołowym o promieniu $OA=OB=a$ tedy otrzymamy:

$$A=\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\sqrt{1+\frac{K^2}{x^2+y^2}} =$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[a\sqrt{K^2+a^2}+K^2\log\frac{a+\sqrt{K^2+a^2}}{K}\right]$$

$$V=K\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{y}$$

5.) Objętość walca $x^2+y^2-2ax=0$ zawartą między płaszczyznami $z=x.\,tg\alpha$ i $z=x.\,tg\beta$. —



Element objętości $dV=dx.dy.dz$

Objętość:

$$V=\int_0^{2a}\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}}\int_{x\,tg\alpha}^{x\,tg\beta} dz.dy.dx =$$

$$=\int_0^{2a}\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} x(tg\beta-tg\alpha)\,dy.dx =$$

$$=2(tg\beta-tg\alpha)\int_0^{2a}x\sqrt{2ax-x^2}\,dx=(tg\beta-tg\alpha)\,a^3\pi$$

Różniczkowanie i całkowanie pod znakiem całkowania.

a.) Różniczkowanie i całkowanie całek nieokreślonych.

Twierdzenie 1. Jeżeli $u=\int\varphi(x\alpha)dx$ gdzie α jest dowolną ilością od x niezależną tedy jest:

$$\frac{du}{d\alpha}=\int\frac{d\varphi(x\alpha)}{d\alpha}dx;\quad \text{zatem}\quad \frac{d\int\varphi(x\alpha)dx}{d\alpha}=\int\frac{d\varphi(x\alpha)}{d\alpha}dx$$

t. z. Mając da..., całkę nieokreśloną różniczkować ze względu na pewną zmienną znajdującą się pod znakiem całkowania a od zmiennej całkowania niezależną, możemy wprost różniczkować funkcyą znajdującą się pod znakiem całkowania.

Na tej podstawie mamy ogólnie:

$$\frac{d^n\left[\int \varphi(x\alpha)\,dx\right]}{d\alpha^n} = \int \frac{d^n\varphi(x\alpha)}{d\alpha^n}\,dx$$

Twierdzenie 2.) Jeżeli $u = \int \varphi(x\alpha)\,dx$, gdzie α jest zmienną od x niezależną tedy jest:

$$\int u\,d\alpha = \int\left[\int \varphi(x\alpha)\,dx\right]dx \quad \text{czyli:}$$

$$\int\left[\int \varphi(x\alpha)\,dx\right]d\alpha = \int\left[\int \varphi(x\alpha)\,dx\right]dx$$

t. z. Mając daną całkę nieokreśloną całkować ze względu na pewną zmienną znajdującą się pod znakiem całkowania a od zmiennej całkowania niezależną, możemy wprost całkować ze względu na tę ilość funkcyę samą znajdującą się pod znakiem całkowania:

Na tej podstawie mamy ogólnie:

$$\int\int\cdots\int\left[\int \varphi(x\alpha)\,dx\right]d\alpha^n = \int\left[\int\int\cdots\int \varphi(x\alpha)\,d\alpha^n\right]dx$$

b. Różniczkowanie i całkowanie całek określonych.

Twierdzenie 1. Jeżeli $u = \int_a^b \varphi(x\alpha)\,dx$ gdzie granice a i b są stałe a ilość α zmienna od x niezależna, tedy jest:

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d\varphi(x\alpha)}{d\alpha}\,dx \quad \text{czyli:}$$

$$\frac{d\left[\int_a^b \varphi(x\alpha)\,dx\right]}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d\varphi(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx$$

Całkę określoną między stałymi granicami różniczkuje się ze względu na ilość od zmiennej całkowania nie, zależną, różniczkując ze względu na tę ilość wprost funkcyę znajdującą się pod znakiem całkowania. Na tej podstawie otrzymujemy ogólnie:

$$\frac{d^n\left[\int_a^b \varphi(x\alpha)\,dx\right]}{d\alpha^n} = \int_a^b \frac{d^n\varphi(x\alpha)}{d\alpha^n}\,dx$$

Uwaga. Jeżeli granice całkowania a i b są zmienne, od α zależne, tedy pochodna całki określonej $u = \int_a^b \varphi(x\alpha)\,dx$ ze względu na α oznacza się wzorem:

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\,dx + \varphi(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - \varphi(a\alpha)\,\frac{da}{d\alpha}$$

Twierdzenie 2.) Jeżeli $u = \int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx$, gdzie granice a i b są stałe od α niezależne, tedy jest:

$$\int u\,d\alpha = \int_a^b \left\{\int \varphi(x\alpha)\,d\alpha\right\} dx \qquad \text{czyli:}$$

$$\int\left[\int_a^b \varphi(x\alpha)\,dx\right]d\alpha = \int_a^b\left[\int \varphi(x\alpha)\,d\alpha\right]dx$$

t.z. Całkę określoną między stałymi granicami całkuje się ze względu na parametr α, znajdujący się pod znakiem całkowania, całkując wprost funkcyę pod znakiem całkowania ze względu na tenże parameter.

Oznaczmy przez α_0 i α_1 granice całkowania ze względu na α tedy otrzymamy wzór:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left[\int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx\right]d\alpha = \int_a^b\left[\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \varphi(x,\alpha)\,d\alpha\right]dx$$

cechujący znaną własność całek podwójnych określonych między stałymi granicami. —

Zastosowanie.

1.) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_a^b \frac{d\alpha}{\alpha} = \log\frac{b}{a}$ otrzymuje się całkowaniem,

zaś: 2.) $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx = n!$ różniczkowaniem $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}$ podług α

Uwaga. Częstokroć ułatwia się obliczanie całki określonej sprowadzając ją do całki podwójnej.

Przykład: Obliczyć całkę $u = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

Rozwiązanie:

Będzie także $u = \int_0^\infty e^{-y^2} dy$ przeto:

$$u^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$ zkąd kładąc

$y = tx$ otrzymujemy:

$$u^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2(1+t^2)} x.dt.dx = \int_0^\infty dt \Big| _\infty ^0 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$ więc:

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

ogólniej: $$\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$$

zkąd różniczkowaniem lub całkowaniem ze względu na a możemy wyprowadzić wartości nowej grupy całek określonych. —

Treść.

A. Wstęp do analizy.

B. Zasady rachunku różniczkowego.

C. Zasady rachunku całkowego

Całki funkcyj jednej zmiennej niezależnej.

D. Rachunek różniczkowy i całkowy funkcyj wielu zmiennych.

Dr

Dziwiński