

SUR UN ANALYSEUR DE MOBILITÉ POUR LES IONS GAZEUX.

I.

SOMMAIRE. — Paul Langevin, maintenu en résidence forcée à Troyes de 1940 à 1944 par les autorités d'occupation, y a poursuivi son travail scientifique. L'absence de tout laboratoire ne lui a permis de mener à bien que des recherches théoriques, comme celle « Sur les chocs entre neutrons rapides et noyaux de masse quelconque » (*Ann. de Physique*, 1942, 17, 303-317) et des projets d'expériences qu'il espérait réaliser après la Libération.

C'est ainsi qu'il a conçu et discuté, en 1942-1943, un analyseur de mobilités pour les ions gazeux. L'appareil devait, en donnant le « spectre » des mobilités, permettre d'étudier la nature des ions et de suivre leur formation et leur évolution. La méthode proposée consiste à soumettre à un champ radial les ions participant, d'autre part, au mouvement de rotation du gaz entraîné par un manchon cylindrique métallique mince qui tourne entre deux armatures cylindriques fixes, l'axe du système étant vertical.

Les ions sont émis par une fente verticale du cylindre fixe intérieur ; le manchon mobile comporte des fentes horizontales qui les laisse passer. Ils sont reçus par une électrode isolée en forme de languette verticale portée par l'armature extérieure fixe. La trajectoire des ions entraînés à la fois par le champ et le mouvement du fluide est calculée, la précision de l'appareil, qui pourrait dépasser 1 pour 100, est discutée, les diverses causes d'erreur étudiées, le manchon tournant étant d'abord considéré comme infiniment mince.

Dans deux Mémoires qui seront publiés à la suite de celui-ci figurent (II) l'étude du champ électrostatique et du mouvement du gaz dans le cas où le manchon mobile est épais, et (III) l'étude générale du champ électrostatique d'une grille conductrice placée entre deux conducteurs plans parallèles.

Un travail expérimental est en cours afin de mettre en œuvre les principes de la méthode d'analyse des mobilités des ions gazeux proposée dans cet article.

La question de savoir si les ions produits dans les gaz par divers rayonnements ont, pour chaque signe, une mobilité unique ou se répartissent, au contraire, entre toute une gamme, plus ou moins continue, de mobilités, ne me paraît pas complètement résolue. Elle a cependant une grande importance en liaison avec les mécanismes de formation de l'agglomération moléculaire qui constitue l'ion et de passage d'une forme stable de cette agglomération à une autre. Existe-t-il dans un même gaz plusieurs de ces formes stables, comme on devra l'admettre si les mobilités sont effectivement multiples pour les ions d'un même signe ? Le passage d'une forme à l'autre est-il possible et quel est en moyenne le temps nécessaire ? Pour répondre à ces questions, il est nécessaire de disposer d'un appareil permettant de séparer des autres, dans un gaz conducteur, les ions de mobilités comprises dans un intervalle suffisamment étroit, soit pour en mesurer le nombre par la charge qu'ils transportent, soit pour les isoler et suivre leur évolution ultérieure.

Le procédé le plus simple, pour effectuer cette séparation, est celui des courants gazeux où le mouvement des ions résulte de la composition d'un mouvement d'entraînement qui est celui du gaz et d'un mouvement relatif des ions par rapport au gaz sous l'action du champ électrique créé dans le volume occupé par ce dernier.

Sous la forme où elle a été appliquée jusqu'ici, soit pour les petits, soit

pour les gros ions, cette méthode n'est guère utilisable que pour l'air parce qu'elle exige l'emploi de volumes considérables de gaz pour entretenir le courant gazeux.

Dans l'appareil étudié ici, je me suis proposé, au contraire, d'utiliser comme mouvement du gaz un régime permanent de circulation à l'intérieur d'un récipient clos, dans des conditions où, la turbulence étant évitée, la distribution de la vitesse avec laquelle le gaz est entraîné puisse être exactement connue, ainsi que, par suite, les trajectoires d'ions de mobilité donnée sous l'action d'un champ électrique de distribution également connue. La forme cylindrique du mouvement permanent de circulation m'a semblé être la plus commode.

PRINCIPE DE L'APPAREIL. — Un cylindre fixe $AA'BB'$ porte, suivant une de ses génératrices BB' une fente fine F ; la région I voisine de la fente à l'intérieur du cylindre est ionisée par un procédé quelconque (rayon α , rayons X , etc.).

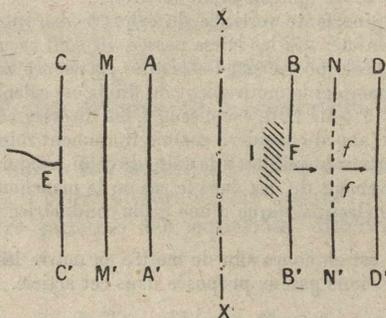


Fig. 48.

A l'extérieur du cylindre existe un champ électrique radial qui fait sortir par la fente F les ions d'un certain signe qui y sont amenés par diffusion et refoule à l'intérieur du cylindre ceux du signe opposé —. Un second cylindre fixe $CDC'D'$ coaxial au premier et qui constitue d'ailleurs l'enveloppe de tout l'appareil porte, suivant une de ses génératrices placée dans un azimuth différent de celui de la fente F et que, pour la commodité de la figure, on a représenté dans la figure 1 à 180° , une électrode étroite E destinée à mesurer le courant d'ions qui lui parviendra, ou une autre fente destinée à laisser sortir ces mêmes ions si l'on veut étudier leur comportement ultérieur.

Entre les deux cylindres fixes se trouve un manchon cylindrique $MNM'N'$ coaxial auquel on imprime autour de l'axe commun XX' un mouvement de rotation uniforme. Ce mouvement crée dans le gaz un régime permanent de circulation qui reste laminaire tant que la rotation est suffisamment lente et dans lequel la vitesse du gaz, nulle au contact des cylindres fixes, est égale à la vitesse de la surface du manchon au contact de celle-ci.

Le manchon porte, à la hauteur de F et de E des fentes fines ff , allongées dans le sens horizontal (XX' étant supposé vertical) pour permettre le passage à travers ce manchon d'une partie des ions qui lui arrivent de la fente F . Ces

ions trouvent, entre le manchon et le cylindre extérieur, un champ électrique radial de même sens que celui qui les a amenés au manchon et continuent, par conséquent, à se déplacer vers le cylindre extérieur.

Des différences de potentiel convenables établies entre les trois cylindres servent à créer ces champs.

Le mouvement relatif des ions par rapport au gaz étant ainsi radial, il résulte de la circulation créée par le mouvement du manchon, que ces ions sont entraînés dans le sens de la rotation, et cela d'autant plus que leur mobilité est plus faible. La lame verticale étroite d'ions qui sort de la fente F reste fine malgré l'entraînement du gaz si les ions ont tous la même mobilité, mais se trouve, au contraire, étalée, dispersée s'il y a des formes stables de mobilités différentes et l'arrivée des ions sur la surface interne du cylindre extérieur se fait alors suivant un véritable spectre de mobilités que l'électrode ou la fente E permettent d'explorer.

La mobilité des ions qui arrivent à E est fonction de l'écart angulaire θ entre les azimuths de E et de F, ainsi que des différences de potentiel établies entre les cylindres et de la vitesse angulaire de rotation ω imposée au manchon. On peut donc explorer le spectre en faisant varier l'un quelconque de ces trois éléments. Nous verrons que la meilleure solution serait de faire varier la vitesse angulaire en laissant fixes l'azimuth θ et les différences de potentiel.

La finesse de cette exploration, ce qu'on peut appeler le pouvoir séparateur de l'appareil, dépend avant tout de la sensibilité du procédé de mesure employé pour le courant qui arrive à E. Plus cette sensibilité est grande et plus la fente F ainsi que la languette électrode E peuvent être fines. On peut, comme nous le verrons, faire en sorte que la diffusion ou la répulsion mutuelle des ions ne produise pas un étalement supérieur à la largeur de E. Une analyse plus précise des autres causes d'erreur nous montrera qu'il est parfaitement possible d'obtenir un pouvoir séparateur de l'ordre du centième, c'est-à-dire de faire en sorte que les ions recueillis simultanément par l'électrode E, ou passant simultanément par la fente qui remplace celle-ci, aient des mobilités ne différant pas de leur valeur moyenne de plus du centième de celle-ci.

CALCUL DES TRAJECTOIRES. — Les deux composantes de la vitesse de l'ion étant horizontales, sa trajectoire sera contenue tout entière dans la section droite des cylindres menée par le point F où il sort de la fente (fig. 49). Si l'on suppose dans la figure 49 comme on l'a fait dans la figure 48 que l'azimuth de l'électrode E est à 180° de celui de la fente F, ce qui n'a rien d'essentiel, la trajectoire sera la courbe FPQE, si le manchon tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette trajectoire traversera le manchon en Q toutes les fois que ce point tombera à l'intérieur d'une des fentes f . Celles-ci sont supposées assez fines pour que leur présence ne trouble pas appréciablement le mouvement d'entraînement du gaz tel que le produirait le manchon plein. Nous évaluerons plus loin l'ordre de grandeur de l'erreur correspondante. Le manchon sera supposé ici infiniment mince et on le rendra, pratiquement, aussi mince que possible. Là aussi l'erreur commise est d'un ordre de grandeur facile à évaluer.

Le gaz étant immobile en F au contact du cylindre fixe, la trajectoire part tangentiellement à OF pour s'incurver ensuite dans le sens de la rotation.

Soit P un point quelconque de coordonnées polaires r et θ par rapport au centre O et à l'axe OF.

Si le régime permanent du mouvement du gaz est bien laminaire, la vitesse d'entraînement v au point P est tangentielle, c'est-à-dire perpendiculaire au rayon OP; si, d'autre part, le champ électrique en P, h est radial, l'équation différentielle de la trajectoire s'écrit :

$$(1) \quad \frac{r \, d\theta}{dr} = \frac{v}{kh},$$

k étant la mobilité de l'ion considéré et kh la vitesse qu'il prend par rapport au gaz sous l'action du champ h .

Cherchons d'abord la distribution de la vitesse d'entraînement v dans le

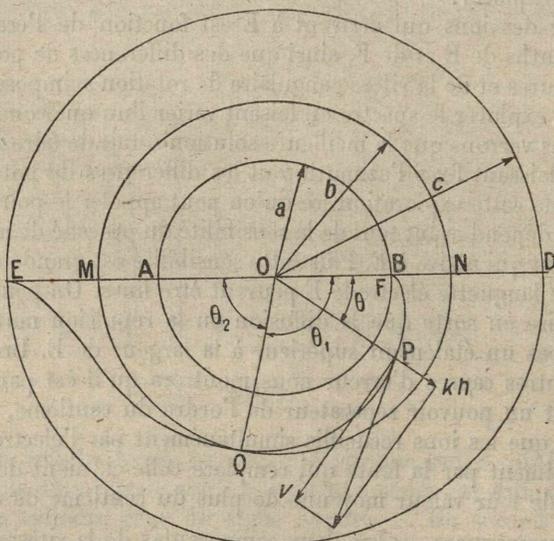


Fig. 49.

régime permanent laminaire où la viscosité du gaz joue le rôle essentiel. Si ρ représente la densité du gaz, μ son coefficient de viscosité et p la pression, variable avec r en vertu des effets centrifuges, les équations du régime permanent laminaire prennent une forme particulièrement simple où les effets de viscosité et d'inertie se séparent :

$$(2) \quad \mu \Delta v = 0, \quad \rho \frac{v^2}{r} = \frac{dp}{dr},$$

Δ étant l'opérateur laplacien qui s'écrit ici où v ne dépend que de r :

$$(3) \quad \Delta v = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v^2}{r} = 0.$$

On peut facilement retrouver cette équation en écrivant la condition de régime permanent pour une couche cylindrique de hauteur égale à l'unité comprise entre les cylindres de rayons r et $r + dr$. Il faut écrire que le moment total de quantité de mouvement transmis à cette couche à travers ses faces cylindriques est nul en régime permanent. Seules interviennent les actions tangentielles de viscosité dont l'expression par unité de surface est, par extension aux coordonnées curvilignes (r, θ) de l'expression $\mu \frac{dv}{dz}$ valable en coordonnées rectilignes :

$$\mu \frac{Dv}{Dr},$$

le symbole D étant celui de la dérivée covariante :

$$\mu \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right).$$

Le moment de la quantité de mouvement transmis par cet effort tangentiel à la couche cylindrique à travers sa face interne de rayon r est :

$$M = -2\pi\mu r^2 \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)$$

et la condition de régime permanent devient :

$$\frac{dM}{dv} = 0$$

ou :

$$(4) \quad \frac{d}{dr} r^2 \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right) = 0,$$

ce qui est bien équivalent à (3).

L'intégration de (3), facilitée par la forme (4), montre que l'intégrale générale est de la forme :

$$(5) \quad v = Ar - \frac{B}{r},$$

où A et B sont des constantes

Appliquons ce résultat à la région (fig 49.) comprise entre $r = a$ et $r = b$; si ω désigne la vitesse angulaire de rotation imposée au manchon, les conditions aux limites pour cette région sont :

$$v = 0 \quad \text{pour } r = a \quad \text{et} \quad v = \omega b \quad \text{pour } r = b.$$

Ces conditions déterminent A et B dans la solution générale (5) et l'on obtient pour r compris entre a et b :

$$(6) \quad v = \frac{\omega b^2}{b^2 - a^2} \left(r - \frac{a^2}{r} \right).$$

De même, à l'extérieur du manchon, pour r compris entre b et c :

$$(7) \quad v = \frac{\omega b^2}{c^2 - b^2} \left(\frac{c^2}{r} - r \right).$$

Si le manchon tournant a une épaisseur finie, avec un rayon extérieur b' , cette formule (7) reste exacte pour r compris entre b' et c à condition d'y remplacer b par b' .

D'autre part, si U_1 représente la différence de potentiel établie entre le cylindre intérieur et le manchon, le champ radial entre $r = a$ et $r = b$ est donné par la formule bien connue du condensateur cylindrique :

$$(8) \quad h = \frac{U_1}{rL \frac{1}{b}}.$$

L , logarithme népérien.

De même, si U_2 est la différence de potentiel maintenue entre le manchon et le cylindre extérieur, le champ est donné entre $r = b$ et $r = c$ par la formule :

$$(9) \quad h = \frac{U_2}{rL \frac{1}{b}}.$$

avec substitution de b' à b si l'on veut tenir compte de l'épaisseur finie du manchon.

Remarquons que, si l'on fait en sorte que :

$$(10) \quad \frac{U_1}{L \frac{1}{a}} = \frac{U_2}{L \frac{1}{b}} = C,$$

l'intensité du champ h ne subit aucune discontinuité à la traversée du manchon et, ce qui est particulièrement important, le manchon peut présenter des ouvertures quelconques sans qu'il en résulte aucune déformation des lignes de force radiales et que le champ cesse d'être représenté dans tout l'intervalle entre les deux cylindres fixes par l'expression $\frac{C}{r}$.

Ceci cesse d'être vrai si le manchon a une épaisseur finie. Nous verrons comment on peut évaluer l'importance de l'erreur qui en résulte par rapport aux formules simples que nous établissons en ce moment et comment cette erreur peut être maintenue dans les limites admises.

L'application des formules (6) et (8) à l'équation différentielle (1) permet de calculer, par une intégration simple, l'angle θ_1 dont l'ion est dévié en azimut (fig. 49) entre le cylindre intérieur fixe et le manchon :

$$(11) \quad \theta_1 = \frac{\omega b^2}{kU_1} \left[\frac{1}{2} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} L \frac{b}{a} \right] L \frac{c}{b}.$$

On aura de même :

$$(12) \quad \theta_2 = \frac{\omega b^2}{kU^2} \left[\frac{c^2}{c^2 - b^2} L \frac{c}{b} - \frac{1}{2} \right] L \frac{c}{b}.$$

Si l'on suppose réalisée la condition (10) et si l'on réalise par construction la relation simple :

$$(13) \quad \frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \alpha,$$

qui exprime que le rayon du manchon est la moyenne géométrique des rayons des cylindres fixes, on obtient, pour la déviation totale θ la formule remarquablement simple :

$$(14) \quad \theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{2\omega b^2}{kU} (L\alpha^2),$$

où $U = U_1 + U_2 = 2U_1$ est la différence de potentiel totale maintenue entre les cylindres fixes et partagée en deux parties égales par le manchon en vertu de (10) et (13).

Pour une première réalisation de l'appareil, j'ai admis les valeurs suivantes :

$$b = 8 \text{ cm}, \quad c = 10 \text{ cm}, \quad \alpha = \frac{c}{b} = 1,25, \quad L\alpha = 0,2231.$$

La vitesse angulaire de rotation ω que l'on peut adopter pour le manchon est limitée supérieurement par la condition que le régime laminaire soit stable. Cette condition s'exprime en écrivant que le nombre de Reynolds, qui sera ici, pour la région comprise entre le manchon et le cylindre extérieur :

$$(15) \quad R = \frac{\rho}{\mu} \omega b (c - b),$$

ne dépasse pas une limite supérieure de l'ordre de 2 000. Pour l'air sous la pression atmosphérique, $\frac{\rho}{\mu}$ a la valeur 6,5 d'où, avec les valeurs adoptées pour b et c :

$$R = 100 \omega$$

Une vitesse angulaire de 3 t : s pour laquelle ω est égal à 6π semble donc admissible.

Pour les ions ordinaires, dans l'air, k est de l'ordre de 500 en unités C. G. S. ; si nous utilisons une différence de potentiel totale U égale à 0,1 unité C. G. S. ou 30 V, la formule (14) donne :

$$\theta = 2,4 \text{ radians},$$

ce qui fait un peu moins que la demi-circonférence admise sur la figure 49 et

correspond à un déplacement, du fait de la rotation, du point d'arrivée des ions sur la face interne du cylindre extérieur fixe :

$$\theta c = 24 \text{ cm.}$$

Une largeur de 2 mm donnée à la languette électrode E correspond bien à une finesse d'exploration du spectre de l'ordre du centième. La fente-source F, placée sur le cylindre intérieur de rayon environ moitié moindre, devra, au même ordre de précision, avoir une largeur d'environ 1 mm.

FORCE CENTRIFUGE ET FORCE DE CORIOLIS. — L'équation différentielle de la trajectoire (1) a été obtenue en admettant, pour le mouvement de l'ion par rapport au gaz, la loi de mobilité en kh . Cette loi suppose que la seule force qui intervient, pour déplacer l'ion dans le gaz est la force he exercée par le champ électrique h sur la charge e de l'ion. Ceci n'est exact, en toute rigueur, que si le gaz est immobile ou en translation uniforme. Le mouvement représenté par les formules (6) ou (7) est différent. Il est facile de voir que, dans la région extérieure au manchon où la formule (7) est applicable, par exemple, le mouvement instantané d'un élément de volume du gaz situé à la distance r de l'axe, se compose :

1° D'une rotation autour de l'axe XX' de vitesse angulaire :

$$\omega' = \frac{1}{2} \text{rot } v = - \frac{\omega b^2}{c^2 - b^2};$$

2° D'une translation, dans la direction tangentielle, de vitesse égale à :

$$\frac{\omega b^2 c^2}{(c^2 - b^2) r};$$

3° D'une déformation pure sans changement de volume consistant en une contraction suivant une direction située dans le plan de la figure 2 et à 45° du rayon et en une dilatation égale dans la direction du plan de la figure 2 perpendiculaire à la précédente. Chacune de ces deux déformations égales et opposées produit par unité de temps une variation relative des dimensions linéaires de l'élément de volume égale à :

$$\frac{\omega b^2 c^2}{2r^2 (b^2 - c^2)},$$

c'est-à-dire de l'ordre de ω .

La rotation ω' donne lieu à une force centrifuge et à une force de Coriolis qui se superposent à la force électrique he pour déterminer le mouvement de l'ion par rapport au gaz. Il est facile de montrer que, pour les ions ordinaires au moins, les deux premières forces sont complètement négligeables par rapport à la force électrique.

La force centrifuge est $m\omega'^2 r$ si m est la masse de l'ion; son rapport à la force électrique qui varie en raison inverse de r est maximum en même temps

que r , c'est-à-dire pour la valeur c du rayon. On obtient ainsi pour le maximum de ce rapport, en utilisant la valeur (15) de ω' :

$$(16) \quad \frac{2m\omega^2 b^4 c^2}{(c^2 - b^2)^2 U e} L\alpha.$$

L'agglomération qui constitue les ions ordinaires, dans l'air en particulier, comprend au maximum une vingtaine d'atomes, ce qui représente une masse m de l'ordre de $10^{-21}g$, l'ion est toujours monovalent, de sorte que e a la valeur d'environ $5 \cdot 10^{-10}$ unités électrostatiques C. G. S. En introduisant dans le rapport (16) les valeurs numériques précédemment admises pour les autres quantités, on obtient une valeur de l'ordre de 10^{-6} .

La force de Coriolis donne lieu à un résultat analogue : pour un mouvement relatif radial de vitesse kh , elle est tangentielle et a pour valeur $2 m \omega' kh$. Le rapport à la force électrique he est :

$$(17) \quad \frac{2m\omega'k}{e} = \frac{2mk\omega b^2}{(c^2 - b^2)e}.$$

En utilisant les valeurs numériques précédemment indiquées, on obtient pour ce rapport une valeur de l'ordre de 10^{-7} . L'influence de la rotation sur le mouvement relatif est, par conséquent, négligeable.

La translation d'ensemble ne donne lieu à aucune action tendant à déplacer l'ion par rapport au gaz. Il en est certainement de même d'une déformation pure autour du point occupé par l'ion. L'équation (1) est donc largement suffisante pour représenter les faits au degré de précision qui nous intéresse ici.

Voyons maintenant quel est l'effet de la force centrifuge sur le gaz lui-même. La seconde des équations (2) :

$$\rho \frac{v^2}{r} = \frac{dp}{dr},$$

signifie que la pression dans le gaz en régime permanent de circulation doit aller en augmentant du centre à la périphérie. Pour évaluer les différences qui en résultent, désignons par ρ_0 et p_0 la densité et la pression du gaz au contact du cylindre fixe intérieur, pour r égal à a . On a, en vertu de la loi de compressibilité :

$$\rho = \frac{\rho_0}{p} p,$$

d'où

$$L \frac{p}{p_0} = \frac{\rho_0}{p_0} \int_a^r \frac{r v^2}{r} dr.$$

En utilisant la formule (6) qui donne la vitesse v pour la région comprise

entre a et b et en désignant par p_1 la pression à la surface du manchon, on obtient :

$$(18) \quad L \frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho_0}{\rho_0} \int_a^b \frac{\omega^2 b^4}{(b^2 - a^2)^2} \left(r - \frac{a^2}{r} \right)^2 \frac{dr}{r} = \frac{\rho_0 \omega^2 b^4}{\rho_0 (b^2 - a^2)^2} \left[\frac{b^4 - a^4}{2b^2} - 2a^2 L \frac{b}{a} \right].$$

Si nous admettons, comme nous l'avons fait dans ce qui précède, les valeurs 8 cm et 10 cm pour b et c respectivement, il en résulte, pour a , d'après la relation (13), la valeur 6,4 cm.

Pour l'air à la température ordinaire, $\frac{\rho_0}{\rho_0}$ est de l'ordre de $1,13 \cdot 10^{-9}$ en unités C. G. S. Avec la vitesse angulaire admise de 3 t : s, l'application de (18) donne :

$$L \frac{p_1}{p_0} = 2,2 \cdot 10^{-6}.$$

On trouverait de la même manière, en désignant par p_2 la pression sur la face interne du cylindre extérieur fixe :

$$L \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_0 \omega^2 b^4}{\rho_0 (c^2 - b^2)^2} \left[\frac{c^4 - b^4}{2b^2} - 2c^2 L \frac{c}{b} \right],$$

qui conduit à la même valeur numérique :

$$L \frac{p_2}{p_1} = 2,2 \cdot 10^{-6}.$$

La variation relative de pression, et par conséquent de densité, d'un point à l'autre du gaz ne dépassera donc pas quelques millièmes et l'on pourra considérer ce gaz comme homogène. La différence de pression, même très faible, entre la périphérie et le centre pourrait cependant avoir l'inconvénient de donner naissance à un mouvement de circulation du gaz à travers les fentes nécessairement pratiquées dans le manchon, avec retour par la partie inférieure ou supérieure de celui-ci. Il est facile de rendre ce mouvement parasite absolument négligeable en réduisant autant que possible les intervalles par lesquels peut passer le gaz pour contourner les bords inférieur ou supérieur du manchon, tout en permettant la libre rotation de celui-ci. La disposition générale de l'appareil serait ainsi celle que représente la figure 50. Ce schéma reproduit, en les précisant, les indications de la figure 48.

Le manchon est porté par le plateau MN, solidaire lui-même de l'axe XX'. A la partie supérieure de celui-ci est fixé un aimant ou un morceau de fer doux PQ qui permet d'exercer magnétiquement, de l'extérieur, l'action nécessaire pour établir et entretenir la rotation du manchon. Aucune circulation parasite ne peut s'établir sous l'action de la force centrifuge par le bord supérieur du manchon que ferme le plateau MN. La partie inférieure, qui doit rester libre, est garnie des bourrelets cylindriques M'M''N'N' qui laissent deux intervalles étroits entre eux et les bourrelets A'B', C'D' portés par les cylindres fixes.

Étant donnée la petitesse des différences de pression dues à l'action centrifuge, un calcul simple montre que cette disposition suffit à empêcher toute circulation parasite appréciable.

Les extrémités de la fente-source F et de l'électrode E sont suffisamment éloignées des bords inférieurs et supérieurs des cylindres pour que le régime

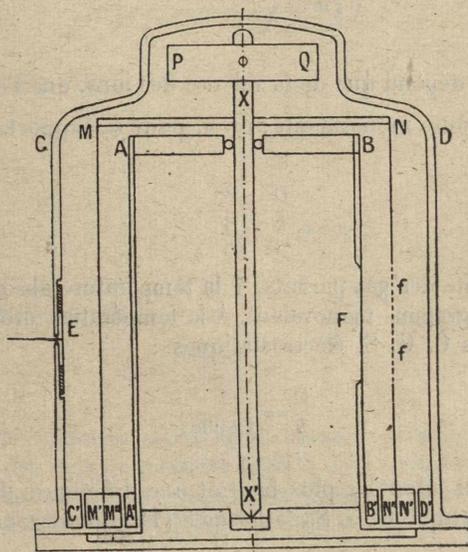


Fig. 50.

laminaire représenté par les équations (6) et (7) soit réalisé dans toute la région occupée par les ions, à l'influence près des fentes horizontales f que nous examinerons plus loin.

EFFET DE LA DIFFUSION. — La diffusion des ions a pour effet d'augmenter progressivement l'épaisseur de la lame verticale d'ions extraite de la fente F par le champ, épaisseur initialement égale à la largeur de la fente, admise plus haut comme étant de l'ordre du millimètre. Nous considérerons l'influence de la diffusion, qui tend à diminuer le pouvoir séparateur, comme négligeable si l'épaississement qui en résulte ne dépasse pas 1 mm.

Si D est le coefficient de diffusion des ions dans le gaz, et t la durée du trajet des ions entre la fente-source et l'électrode, on sait que \sqrt{Dt} représente l'ordre de grandeur du déplacement d'un ion par diffusion au bout du temps t . Le temps de parcours total entre la fente F et l'électrode E est facile à évaluer, on a :

$$dt = \frac{dr}{kh}$$

et comme :

$$h = \frac{1}{2rL\alpha},$$

il vient :

$$(19) \quad t = \int_a^c \frac{2L\alpha}{kU} r dr = \frac{(c^2 - a^2) L\alpha D}{kU}.$$

d'où :

$$(20) \quad \sqrt{Dt} = \sqrt{\frac{(c^2 - a^2) L\alpha D}{U} \frac{D}{k}}.$$

Le rapport $\frac{D}{k}$ ne dépend que de la valence des ions, que l'expérience montre d'ailleurs être toujours monovalents ; on a, pour ce rapport, l'expression bien connue :

$$\frac{D}{k} = \frac{RT}{F},$$

où R est la constante des gaz parfaits, T la température absolue et F la charge portée par un ion-gramme monovalent. A la température ordinaire on a sensiblement, en unités C. G. S. électrostatiques :

$$\frac{D}{k} = \frac{1}{12\,000}.$$

Avec les dimensions adoptées plus haut et une différence de potentiel U de 0,1 unité électrostatique C. G. S., la formule (19) donne sensiblement :

$$\sqrt{Dt} = 0,1$$

c'est-à-dire 1 mm.

Une indication intéressante que donne la formule (19) est que, pour un appareil donné et quel que soit le gaz, l'élargissement par diffusion ne dépend que de la différence de potentiel employée et varie en raison inverse de la racine carrée de celle-ci. Si l'on veut, au cours de l'exploration d'un spectre de mobilités, maintenir constant l'épaississement par diffusion quand on fait varier la mobilité, il faut simplement maintenir constante la différence de potentiel U et explorer en faisant varier, soit la vitesse angulaire de rotation ω , soit le décalage en azimut θ de l'électrode E par rapport à la fente F.

EFFET DE LA RÉPULSION MUTUELLE DES IONS. — Les ions utilisés étant tous chargés du même signe, la lame mince extraite de la fente tend à augmenter d'épaisseur par répulsion mutuelle des ions qui la composent. Cet effet est facile à évaluer. Je supposerai à tous les ions une même mobilité k .

La largeur du ruban d'ions est égale à la longueur l de la fente-source, si i est l'intensité du courant représenté par les ions qui sortent de la fente, la densité superficielle électrique σ du ruban en un point où l'intensité du champ est h , a pour valeur :

$$\sigma = \frac{i}{khl}.$$

lorsque le mouvement des ions est radial et de vitesse kh , c'est-à-dire lorsque le gaz est immobile.

Cette couche de densité σ produit à sa surface, de chaque côté, un champ normal à celui-ci et d'intensité $2\pi\sigma$ qui, agissant sur les ions de mobilité k , présents à cette surface pendant un temps dt , produit un épaissement :

$$d\varepsilon = 4\pi k\sigma dt = \frac{4\pi i}{hl} dt.$$

et, en remplaçant dt par kh :

$$d\varepsilon = \frac{4\pi i}{kh^2 l} dr.$$

Comme d'ailleurs :

$$h = \frac{U}{2rL\alpha}, \quad d\varepsilon = \frac{16\pi i(L\alpha)^2}{kU^2} r^2 dr.$$

En intégrant entre a et c :

$$\varepsilon = \frac{16\pi i(L\alpha)^2}{3kU^2} (c^3 - a^3).$$

Cherchons, avec les données numériques admises jusqu'ici, une longueur de fente de 6 cm et des ions de mobilité égale à 500 unités C. G. S., quelle doit être l'intensité i , en unités électrostatiques C. G. S. pour que l'épaissement par répulsion reste inférieur à 1 mm. On obtient :

$$i < \frac{1}{200} \text{ C. G. S.}$$

Cette intensité de courant est celle qui sort de la fente. Celle qui est recueillie par l'électrode lorsque le manchon tourne est réduite, même en supposant des ions d'une seule mobilité, dans un rapport au maximum égal à la fraction de la surface du manchon occupée par les fentes f dans la tranche horizontale de celui-ci qui contient la fente-source et l'électrode. Ce maximum est atteint si le manchon est infiniment mince ; une épaisseur finie du manchon introduit un nouveau facteur de réduction que nous étudierons plus loin. On peut fixer la fraction du courant i disponible sur l'électrode pour l'analyse des mobilités, à environ 20 p. 100, ce qui correspond à un courant de l'ordre du millième d'unité électrostatique.

Remarquons d'ailleurs que, lorsque le manchon tourne, la rotation du gaz allonge le ruban d'ions et diminue d'autant la densité superficielle des charges qu'il porte et, par conséquent, la vitesse d'épaissement par répulsion mutuelle, d'où, puisque la durée du trajet entre fente-source et électrode reste toujours la même, diminution de l'épaissement.

Remarquons encore que les forces exercées par le champ électrique radial h sur les ions présents dans le gaz sont finalement transmises à celui-ci et y produisent les mouvements parasites de la nature du vent électrique. On peut montrer, en traitant le problème ainsi posé, qu'avec les intensités de courant

envisagées ci-dessus, auxquelles correspondent des distributions déterminées d'ions dans les gaz, ces mouvements parasites sont entièrement négligeables par rapport au mouvement d'ensemble imposé par la rotation du manchon.

POUVOIR SÉPARATEUR. — Les résultats de la discussion précédente peuvent encore être présentés sous une autre forme. S'il est possible de réduire l'influence de la répulsion mutuelle des ions en diminuant l'intensité du courant recueilli, c'est-à-dire en augmentant la sensibilité de l'appareil de mesure électrométrique, il n'en est pas de même pour l'influence de la diffusion qui dépend seulement de la différence de potentiel employée et des dimensions de l'analyseur. Comme la diffusion joue ainsi un rôle analogue à celui de la diffraction en spectroscopie, il est naturel de définir le pouvoir séparateur P par le rapport entre le déplacement $c\theta$ du point d'arrivée des ions sur la surface interne du cylindre extérieur et la quantité $2\sqrt{D}t$ qui mesure l'épaississement du ruban d'ions produit par la diffusion. En remplaçant θ et t par leurs valeurs (14) et (19) il vient :

$$P = \frac{\omega l^2}{k\sqrt{U}} \sqrt{\frac{k}{D} \frac{(L\alpha)^3}{(\alpha^4 - 1)}}$$

L'accroissement de ce pouvoir séparateur par augmentation de la vitesse angulaire ω est limitée par l'instabilité du régime laminaire. Pour tenir compte de cette circonstance, il est indiqué d'introduire dans l'expression de P le nombre R de Reynolds défini par l'équation (15). Il en résulte :

$$P = \frac{\mu}{\rho} \frac{R}{k\sqrt{U}} \sqrt{\frac{k}{D} \frac{(L\alpha)^3}{(\alpha - 1)^2(\alpha^4 - 1)}}$$

$\frac{D}{k}$ est, à une température donnée, une constante commune à tous les ions monovalents et dont la racine carrée est sensiblement égale à 110 en unités C. G. S., d'où :

$$P = 110 \frac{\mu}{\rho} \frac{R}{k\sqrt{U}} \sqrt{\frac{(L\alpha)^3}{(\alpha - 1)^2(\alpha^4 - 1)}}$$

Pour un gaz donné, quand on fait varier la pression, le coefficient de viscosité μ ne change pas, non plus que le produit ρk puisque la mobilité des ions varie généralement en sens inverse de la pression. Il en résulte que, pour un gaz donné, le maximum possible pour le pouvoir séparateur (limité supérieurement par R) dépend seulement de la différence de potentiel employée et du coefficient de forme α . On peut d'ailleurs remarquer que l'influence de ce coefficient de forme sur P est très limitée, la fonction de α qui figure sous le radical dans l'expression de P ayant un maximum égal à $\frac{1}{4}$ lorsque α est voisin de l'unité et diminuant lentement lorsque α s'éloigne de l'unité, c'est-à-dire lorsque les rayons a , b , c des cylindres s'écartent de plus en plus les uns des autres. Il y a néanmoins intérêt à prendre α voisin de l'unité, c'est-à-

dire à faire en sorte que les deux condensateurs cylindriques intérieurs l'un à l'autre se rapprochent autant que possible de la forme plane. En admettant la valeur $\frac{1}{4}$ pour la fonction de σ , il vient :

$$P = 55 \frac{\mu R}{\rho k \sqrt{U}}.$$

Pour l'air, en particulier, on a, en admettant la mobilité 500 et la valeur 2.000 pour la constante R :

$$P = \frac{34}{\sqrt{U}},$$

U étant exprimé en unités électrostatiques C. G. S. Pour $U = 0,1$, on a P voisin de 100.

INFLUENCE DES FENTES DU MANCHON. — Un autre aspect du problème qu'il convient d'examiner avec soin concerne l'influence que les fentes pratiquées dans le manchon pour permettre le passage des ions peuvent avoir sur le mouvement d'entraînement du gaz.

Nous avons déjà vu que si le manchon est très mince et si la condition (10) est satisfaite par les différences de potentiel U_1 et U_2 , la surface du manchon se confond avec la surface équipotentielle U_1 et la distribution du champ électrique reste exactement la même quelles que soient les ouvertures pratiquées dans le manchon et même si celui-ci est complètement enlevé. Il n'en est pas de même, naturellement, pour ce qui concerne l'entraînement du gaz, représenté en toute rigueur par les formules (6) et (7) seulement dans le cas où le manchon ne présente aucune ouverture. Comme les ouvertures sont indispensables, il s'agit d'évaluer et de réduire au minimum la perturbation qu'elles apportent, tout en conservant une valeur suffisante à la fraction du courant d'ions qui peut passer à travers le manchon. Si celui-ci est infiniment mince, le champ électrique est inaltéré et cette fraction est égale au rapport entre la surface des ouvertures et la surface totale du manchon dans la tranche horizontale qui contient exactement la fente-source F et l'électrode E.

La disposition d'ouvertures qui apporte la moindre perturbation dans le mouvement représenté par (6) et (7), parce qu'elle en conserve la symétrie cylindrique, est celle de fentes horizontales f , disposées périodiquement, comme le représentent les figures 48 et 50, dans toute la hauteur occupée par la fente-source F et par l'électrode E. Ces fentes ne peuvent pas, naturellement, s'étendre sur toute la périphérie du manchon, mais on leur en fera occuper la plus grande partie possible en les disposant en groupes de grande longueur par rapport à la largeur de chacune d'elles et séparés par des parties pleines suffisantes pour assurer la tenue mécanique du manchon. C'est seulement entre les fentes que le gaz est entraîné par la surface du manchon avec la vitesse $v_0 = \omega b$ imposée à ce dernier par le mouvement de rotation. Il s'agit d'évaluer la perturbation introduite par la présence des fentes dans le mouvement du gaz et, plus particulièrement, la diminution qui peut en résulter dans la finesse du spectre des mobilités.

Étant donné que les différences $c - b$ et $b - a$ entre les rayons des cylindres sont assez faibles par rapport à ces rayons eux-mêmes, l'évaluation cherchée ne sera pas modifiée de manière importante si nous substituons au problème cylindrique le problème plan correspondant d'une grille plane, composée de barreaux infiniment plats, tous de même largeur et équidistants (j'examinerai plus loin l'influence d'une épaisseur finie de ces barreaux sur le mouvement du gaz et sur la distribution du champ électrique) se mouvant parallèlement à la longueur des barreaux d'un mouvement uniforme de vitesse v_0 entre deux plans immobiles, parallèles à celui de la grille et placés à une même distance d de part et d'autre de celle-ci.

Dans le mouvement laminaire ainsi défini, la vitesse v en un point du gaz sera évidemment parallèle à celle de la grille et ne dépendra pas de la coordonnée d'espace dans cette même direction. Il suffira donc de connaître la distribution de v dans un plan P perpendiculaire à cette direction, c'est-à-dire à la longueur des barreaux. En vertu de la première des équations (2) qui s'applique évidemment ici, cette distribution satisfait à l'équation de Laplace et le problème se ramène à la recherche, dans le plan P considéré, d'une fonction harmonique s'annulant sur les deux droites AB et CD, intersection du plan P avec les plans parallèles immobiles et prenant la valeur v_0 sur les sections telles que MN, M'N', etc. (fig. 51) des barreaux de la grille par le plan P. La grille est supposée

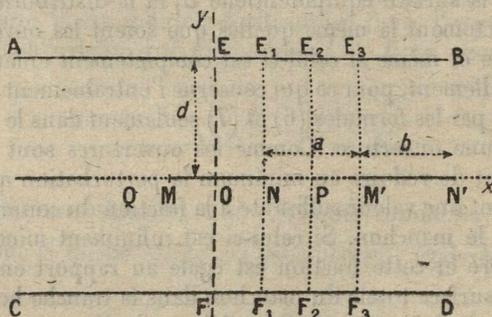


Fig. 51.

se mouvoir perpendiculairement au plan de la figure avec la vitesse v_0 . Dans le plan P de cette figure, prenons pour origine le milieu O de la section du barreau MN, pour axe des x la direction du plan P contenue dans le plan de la grille et pour axe des y la perpendiculaire à ce plan. Désignons par b la largeur de chaque barreau et par a la largeur des fentes qui séparent ces barreaux. Les formules que nous allons obtenir se simplifieront dans le cas représenté sur la figure où a est égal à b , cas que nous supposons également réalisé dans l'appareil. Laissons, pour l'instant, a et b quelconques.

En raison de la structure périodique de la grille, la fonction cherchée v de x et de y doit être périodique en x avec la période $a + b$ et elle doit, en outre, être fonction paire de y pour tenir compte de la position symétrique occupée par la grille entre les plans fixes AB et CD.

Dans le cas où la distance d est supposée assez grande par rapport à la période $a + b$ (condition qui sera réalisée dans l'appareil) une première solution très simple nous sera fournie par application de la méthode des variables imaginaires ou de la représentation conforme.

On sait que si la variable complexe :

$$Z = X + iY,$$

où X et Y sont des quantités réelles est une fonction analytique quelconque de la variable :

$$z = x + iy,$$

les quantités conjuguées X et Y seront des fonctions harmoniques de x et y .

Pour simplifier nos formules ultérieures, posons, en conservant les notations de la figure 51 :

$$(22) \quad \begin{cases} \xi = \frac{\pi x}{a+b}, & \eta = \frac{\pi y}{a+b}, & \zeta = \frac{\pi z}{a+b}, \\ \rho = \frac{b}{a+b}, & \zeta = \xi + i\eta, & \gamma = \sin \frac{\pi \rho}{2}. \end{cases}$$

Il est remarquable que la fonction analytique Z de ζ et par conséquent de z , définie par la relation simple :

$$(23) \quad \gamma \sin Z = \sin \zeta$$

fournisse la solution de notre problème.

Pour le montrer, traduisons la relation (23) dans le domaine réel par les deux équations qui lui sont équivalentes :

$$(24) \quad \begin{cases} \gamma \sin X \operatorname{ch} Y = \sin \xi \operatorname{ch} \eta, \\ \gamma \cos X \operatorname{sh} Y = \cos \xi \operatorname{sh} \eta, \end{cases}$$

γ étant, d'après sa définition (22), une constante positive et inférieure à l'unité.

Nous examinerons plus particulièrement ce qui concerne la fonction Y définie à partir de ξ et η par l'équation suivante, obtenue en éliminant X entre les deux équations (24),

$$(25) \quad \frac{\sin^2 \xi \operatorname{sh}^2 \eta}{\operatorname{ch}^2 Y} + \frac{\cos^2 \xi \operatorname{sh}^2 \eta}{\operatorname{sh}^2 Y} = \gamma^2.$$

Il est facile de voir que cette équation, quels que soient ξ et η , donne pour $\operatorname{sh}^2 Y$ une et une seule valeur positive à laquelle correspondent, pour $\operatorname{sh} Y$ et par conséquent pour Y , deux valeurs égales et de signes contraires. Pour achever de définir la fonction Y , nous choisirons la détermination positive dont il est également facile de voir qu'elle représente une fonction continue de ξ et de η dans toute l'étendue du plan des ζ .

Il résulte de l'équation (25), qui ne change pas quand on y remplace ξ par $\pi + \xi$, que la fonction Y est périodique en ξ avec la période π et, par conséquent, périodique en x avec la période $a + b$. De même, l'équation (25) ne changeant pas quand on y remplace η par $-\eta$, notre fonction Y est paire en η et, par conséquent, en y .

Montrons que cette fonction s'annule sur les segments tels que $MN, M'N', \dots$ de l'axe des x (fig. 4), c'est-à-dire sur les barreaux de la grille sans s'annuler dans leurs intervalles, c'est-à-dire sur les segments tels que NM' de l'axe des x .

Pour tout point appartenant à l'un quelconque de ces segments de l'axe des x, y et par conséquent η sont nuls et l'équation (25) devient :

$$(26) \quad \text{sh}^2 Y (\sin^2 \xi - \gamma^2 \text{ch}^2 Y) = 0.$$

Les abscisses x de M et N sont respectivement $-\frac{b}{2}$ et $+\frac{b}{2}$ et correspondent aux valeurs $-\frac{\pi\rho}{2}$ et $+\frac{\pi\rho}{2}$ de ξ ou $-\gamma$ et $+\gamma$ de $\sin \xi$ en vertu des notations (22).

On voit facilement que pour tout point des segments tels que MN (barreaux), $\sin^2 \xi$ est compris entre zéro et γ^2 , tandis que pour tout point des segments tels que NM' (fentes), $\sin^2 \xi$ est compris entre γ^2 et l'unité.

L'équation (26) montre que, dans le premier intervalle, $\text{ch}^2 Y$ étant toujours supérieur à l'unité, le second facteur du premier membre ne peut s'annuler et la seule solution possible est celle qui annule le premier facteur, c'est-à-dire :

$$Y = 0.$$

Dans le second intervalle, au contraire, cette solution ne convient pas puisque, substituée avec $\eta = 0$ dans la première des équations (24) qui devient :

$$\gamma \sin X = \sin \xi,$$

elle conduit à une impossibilité, $\sin \xi$ étant supérieur à γ en valeur absolue dans l'intervalle considéré et X devant être une quantité réelle.

On a donc nécessairement, dans cet intervalle à annuler le second facteur du premier membre de (26) et l'on obtient :

$$\text{ch}^2 Y = \frac{1}{\gamma^2} \sin^2 \xi,$$

correspondant pour Y à des valeurs qui varient depuis 0 aux points tels que N, M' (bords des fentes) jusqu'à un maximum Y , aux points tels que P (milieux des fentes) donné par :

$$(27) \quad \text{ch} Y_P = \frac{1}{\gamma}$$

Les caractères de la fonction Y ainsi obtenue apparaissent clairement sur la figure 52 qui traduit la correspondance établie par la relation (23) entre le

plan des ζ et le demi-plan supérieur des Z (Y étant toujours positif) réalisant ainsi une représentation conforme de l'un sur l'autre.

La figure 52 correspond au cas particulier où a est égal à b et par conséquent ρ égal à $\frac{1}{2}$, d'où :

$$\gamma = \sin \frac{\pi\rho}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et, d'après (27) :

$$\text{ch } Y_P = \sqrt{2}, \quad Y_P = 0,88.$$

Les courbes tracées dans le plan des ζ sont les courbes :

$$Y = \text{const.}$$

et correspondent aux droites horizontales du plan des Z . Elles sont tracées pour les valeurs croissantes de Y : $\frac{\pi}{8}$, Y_P , $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ et π .

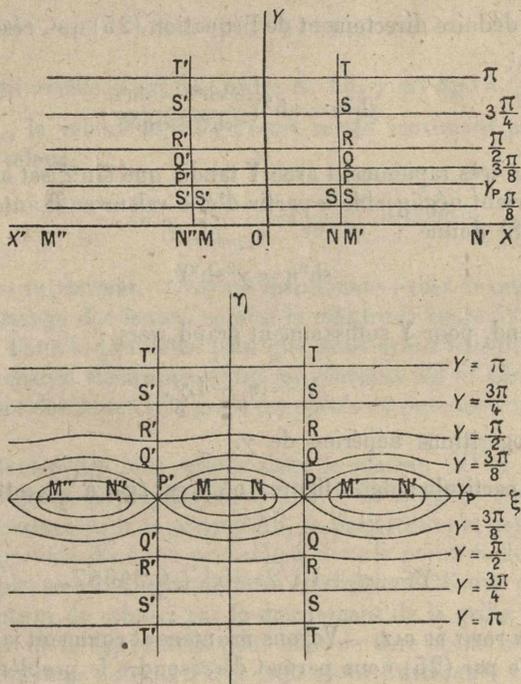


Fig. 52.

Les points homologues dans les deux plans des Z et des ζ sont indiqués par une même lettre. On voit que la transformation (23) dilate les segments MN , $M'N'$, ... de l'axe des ζ (barreaux) et les place bout à bout pour en faire

l'axe des X. En même temps, les segments tels que NM' (fentes) sont pliés en deux au point milieu P et relevés verticalement, les deux moitiés NP et PM' étant appliquées l'une sur l'autre.

Un caractère très net que fait ressortir la figure est que la déformation ou perturbation liée à l'existence des fentes diminue très rapidement quand on s'éloigne du plan de la grille et disparaît pratiquement à une distance de celle-ci qui est de l'ordre de la largeur des fentes. Alors que la courbe Q'Q qui correspond à la valeur $\frac{3\pi}{8}$ de Y est nettement ondulée, la courbe R'R pour Y égal à $\frac{\pi}{2}$ ne l'est plus que très faiblement et toute trace d'ondulation disparaît, à l'échelle de la figure, sur S'S pour Y égal à $\frac{3\pi}{4}$. Cela signifie que les courbes :

$$Y = \text{const.}$$

se transforment très rapidement, quand Y augmente, en courbes :

$$\eta = \text{const.}$$

Ce fait peut se déduire directement de l'équation (25) qui, résolue par rapport à $\text{sh}^2\eta$ donne :

$$(28) \quad \text{sh}^2\eta = \text{sh}^2Y \frac{\gamma^2 \text{ch}^2Y - \sin^2\xi}{\text{ch}^2Y - \sin^2\xi},$$

$\text{ch}^2 Y$ augmente très rapidement avec Y tandis que $\sin^2\xi$ est au maximum égal à l'unité et devient négligeable à partir d'une valeur suffisante de Y. Dans ces conditions, (28) donne :

$$\text{sh}^2\eta = \gamma^2 \text{sh}^2Y,$$

relation qui tend, pour Y suffisamment grand, vers :

$$(29) \quad Y = |\eta| - L\gamma,$$

$L\gamma$ étant le logarithme népérien de γ .

Dans le cas particulier de la figure, où γ est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, cette relation limite devient :

$$Y = |\eta| + L\sqrt{2} = |\eta| + 0,34657.$$

VITESSE EN UN POINT DU GAZ. — Voyons maintenant comment la fonction harmonique Y définie par (25) nous permet de résoudre le problème de l'influence des fentes sur le mouvement du gaz. Posons :

$$v = v_0 - CY$$

et déterminons la constante C de manière que v s'annule sur les plateaux AB et CD, pour $y = \pm d$, c'est-à-dire pour $\eta = \pm \delta$. Si δ est suffisamment grand,

et nous avons vu qu'il lui suffit d'atteindre quelques unités, alors que dans l'appareil réalisé il est de l'ordre de 10, la relation (29) est applicable et C se trouve déterminé par la condition :

$$0 = v_0 - C(\delta - L\gamma),$$

d'où, pour la solution de notre problème :

$$(30) \quad v = v_0 \left(1 - \frac{Y}{\delta - L\gamma} \right),$$

qui satisfait bien aux conditions imposées à v d'être une fonction harmonique prenant la valeur v_0 sur les barreaux de la grille ($Y = 0$) et s'annulant sur les plateaux AB et CD.

Les courbes de la figure 5 représentent ainsi les sections par le plan de la figure des surfaces cylindriques sur chacune desquelles v a une valeur constante.

Dans le plan de la grille, l'écart de la vitesse à partir de v_0 est maximum au milieu des fentes, en P par exemple et a pour valeur :

$$v_0 - v_P = v_0 \frac{Y_P}{\delta - L\gamma}.$$

Dans l'appareil réalisé, δ est de l'ordre de 10, γ est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et nous avons trouvé, pour Y_P , la valeur 0,880; l'écart relatif maximum par rapport à v_0 prend ainsi la valeur :

$$\frac{v_0 - v_P}{v_0} = \frac{0,880}{10 + L\sqrt{2}} = \frac{0,880}{10,346} = 0,085.$$

DÉVIATION DE LA TRAJECTOIRE. — Voyons maintenant l'effet de cette perturbation, localisée au voisinage des fentes, comme le montre la figure 52, sur le déplacement des ions. Dans le problème plan que nous avons substitué au problème cylindrique, le champ électrique, entre les plateaux AB et CD, reste uniforme malgré l'existence des fentes si la grille est portée au potentiel moyen entre ceux de AB et CD.

La fente F source des ions, située dans le plateau CD et perpendiculaire aux fentes de la grille, se projette sur le plan P de la figure 4 suivant $FF_1F_2F_3$ et l'électrode E, située dans le plateau AB, se projette sur le même plan suivant $EE_1E_2E_3$. La trajectoire d'un ion particulier, dont le point de départ se projette en F, par exemple, serait la ligne de force électrique FOE si le gaz était immobile. L'entraînement de celui-ci par le mouvement de la grille qui est perpendiculaire au plan de la figure aura pour effet de faire suivre à l'ion une trajectoire qui se projettera suivant FOE, mais dont l'extrémité E sera déplacée perpendiculairement au plan de la figure de la quantité :

$$(31) \quad l = \int v dt = \frac{1}{kh} \int_{-a}^{+a} v dy = \frac{2}{kh} \int_0^a v dy,$$

v étant la vitesse d'entraînement du gaz au point d'ordonnée y sur la droite

FE, h l'intensité du champ électrique uniforme et k la mobilité de l'ion sous l'action de ce champ.

L'ion n'arrivera d'ailleurs à l'électrode que si le point où sa trajectoire se présente pour traverser la grille tombe à l'intérieur d'une fente. Il en sera ainsi pour les trajectoires projetées entre F_1E_1 et F_3E_3 . Les déplacements ne seront pas les mêmes pour toutes ces trajectoires et leurs valeurs extrêmes l_1 et l_2 correspondront évidemment aux trajectoires F_1E_1 et F_2E_2 qui traversent une fente : la première à son bord N, la deuxième en son milieu P. Si v_1 et v_2 désignent respectivement les vitesses d'entraînement du gaz au point d'ordonnée y sur les droites F_1E_1 et F_2E_2 on aura, d'après (31) :

$$(32) \quad l_1 = \frac{2}{kh} \int_0^d v_1 dy, \quad l_2 = \frac{2}{kh} \int_0^d v_2 dy.$$

C'est la différence $l_1 - l_2$ qui mesure la dispersion due à l'influence des fentes. Seule, sa valeur relative nous intéresse. Prenons pour terme de comparaison le déplacement l_0 que subirait l'ion si les fentes étaient infiniment étroites, c'est-à-dire si a tendait vers 0. On a, dans ce cas, d'après les définitions (22) :

$$\rho = 1, \quad \gamma = \sin \frac{\pi\rho}{2} = 1, \quad Ly = 0$$

et la formule (30) devient, en tenant compte de (29) :

$$v = v_0 \left(1 - \frac{|\eta|}{\delta} \right),$$

ce qui concorde bien avec la solution simple :

$$v = v_0 \left(1 - \frac{|\gamma|}{d} \right),$$

dans le cas où la grille est remplacée par un plan matériel déplacé avec la vitesse v_0 entre les deux plans fixes AB et CD. On a, dans ce cas, d'après (31) :

$$(33) \quad l_0 = \frac{2}{kh} \int_0^d v_0 \left(1 - \frac{y}{d} \right) dy = \frac{v_0 d}{kh}.$$

Désignons par Y_1 et Y_2 les valeurs que prend la fonction Y de η sur F_1E_1 et F_2E_2 respectivement (fig. 51) qui correspondent aux valeurs $\frac{\pi}{2}\rho$ et $\frac{\pi}{2}$ de ξ , c'est-à-dire aux valeurs γ et 1 de $\sin \xi$. On aura, d'après (22), (30) et (32) :

$$l_1 - l_2 = \frac{2v_0}{kh(\delta - L\gamma)} \int_0^d (Y_2 - Y_1) dy = \frac{2v_0(a+b)}{\pi kh(\delta - L\gamma)} \int_0^\delta (Y_2 - Y_1) d\eta,$$

d'où, d'après (33) :

$$(34) \quad \frac{l_1 - l_2}{l_0} = \frac{2}{\delta(\delta - L\gamma)} \int_0^\delta (Y_2 - Y_1) d\eta.$$

Les fonctions Y_2 et Y_1 de η s'obtiennent à partir de (25) en y donnant à $\sin^2 \xi$ les valeurs 1 et γ^2 respectivement. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} Y_2 &= \frac{1}{\gamma} \operatorname{ch} \eta, \\ \operatorname{sh}^2 Y_1 &= \frac{\operatorname{sh} \eta (\operatorname{sh} \eta + \sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta + 4\gamma^2(1 - \gamma^2)})}{2\gamma^2}. \end{aligned}$$

Quand b est égal à a et γ égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ces expressions deviennent :

$$(35) \quad \operatorname{ch} Y_2 = \sqrt{2} \operatorname{ch} \eta, \quad \operatorname{sh}^2 Y_1 = \operatorname{sh} \eta (\operatorname{sh} \eta + \operatorname{ch} \eta)$$

et la dispersion relative (34) :

$$(36) \quad \frac{l_1 - l_2}{l_0} = \frac{2}{\delta(\delta + L\sqrt{2})} \int_0^\delta (Y_2 - Y_1) d\eta.$$

Il résulte des définitions (35) que $Y_2 - Y_1$ tend très rapidement vers zéro quand η augmente, de sorte que l'intégrale figurant dans (36) ne dépend sensiblement pas de sa limite supérieure δ dès que celle-ci dépasse quelques unités. Cette valeur limite de l'intégrale, facile à calculer par intégration graphique, est sensiblement égale à 0,314, de sorte que :

$$\frac{l_1 - l_2}{l_0} = \frac{0,628}{\delta(\delta + L\sqrt{2})}, \quad \int_0^\delta (v_1 - v_2) d\eta = \frac{0,314}{\delta + L\sqrt{2}}.$$

Pour δ voisin de 10, cette valeur de la dispersion relative introduite par la largeur finie de fentes égales aux intervalles plans qui les séparent se montre ainsi inférieure au centième, c'est-à-dire à l'ordre que nous nous sommes fixé pour la finesse du spectre des mobilités.

II. INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR FINIE DU MANCHON.

SOMMAIRE. — Étude théorique du mouvement d'un gaz entraîné par un manchon cylindrique épais percé de fentes horizontales, tournant autour de son axe vertical, entre deux cylindres coaxiaux, suivie de l'étude du champ électrostatique entre le manchon et les cylindres conducteurs, pris comme électrodes.

Les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction vitesse s'obtiennent, en tenant compte des conditions aux limites, par un nombre infini d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Un choix convenable d'un nombre limité d'inconnues et d'équations donne une solution approchée suffisante pour calculer les corrections à apporter au cas du manchon infiniment mince déjà résolu dans la première partie de ce travail par une méthode différente.

Un raisonnement très analogue s'applique au problème électrostatique.

INFLUENCE SUR LE MOUVEMENT D'ENTRAÎNEMENT DU GAZ. — L'influence de l'épaisseur du manchon a un double aspect puisqu'elle s'exerce sur le mouvement d'entraînement du gaz et sur la distribution du champ électrique. Examinons d'abord le premier de ces deux points de vue.

Nous substituerons ici aussi, au problème cylindrique, sans changer l'ordre de grandeur des résultats, le problème plan d'une grille composée de barreaux parallèles de section rectangulaire, de largeur b et d'épaisseur $2c$, séparés par des intervalles, les fentes f , de largeur a , se mouvant parallèlement aux barreaux avec la vitesse uniforme v_0 dans le milieu visqueux situé entre deux plateaux immobiles parallèles à la grille et situés de part et d'autre de celle-ci à une même distance d du plan médian qui sépare en deux moitiés égales l'épaisseur de chacun des barreaux.

La figure 53 représente la section de ce système par un plan P perpendiculaire à la direction des barreaux et, par conséquent, à celle du mouvement de la grille. Dans le mouvement laminaire qu'il s'agit d'étudier, la vitesse v du fluide entraîné sera en tout point parallèle à cette même direction et dépendra seulement des deux coordonnées x et y de la projection du point sur le plan P. Cette vitesse devra s'annuler sur la surface des plans fixes et devenir égale à v_0 en tout point de la surface des barreaux. Dans la figure 53, on a supposé, comme précédemment, la largeur de ceux-ci égale à celle des fentes qui les séparent, mais la solution que nous allons obtenir n'implique pas cette hypothèse particulière.

Pour faciliter la comparaison entre cette solution et celle, toute différente, du problème précédent, qui représente le cas limite du problème actuel lorsqu'on y suppose la grille infiniment mince et la distance d grande par rapport à la période $a + b$ du réseau plan que représente cette grille, nous conserverons les notations (22) en y ajoutant les suivantes :

$$(22 \text{ bis}) \quad \frac{\pi c}{a + b} = \varepsilon, \quad \sigma = e^{-2\varepsilon}.$$

Je n'ai pas réussi à obtenir la solution du problème en considérant immédia-

tement dans son ensemble tout le domaine compris entre les plans fixes AB et CD, mais j'ai pu tourner la difficulté en remarquant que le plan médian de la grille, GH, est un plan de symétrie pour le système en même temps que pour l'ensemble des données du problème et que, si la solution est obtenue pour une des moitiés du système, celle qui est comprise entre CD et GH,

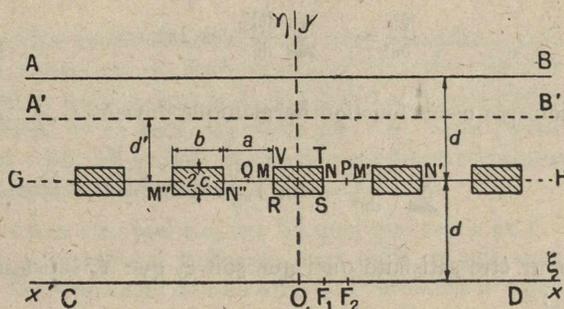


Fig. 53.

par exemple, celle qui concerne l'autre moitié s'en déduira immédiatement par mirage dans le plan médian. Les conditions aux limites pour le nouveau domaine sont faciles à définir : la fonction harmonique v et x de y doit être nulle en tout point de CD, égale à v_0 sur la surface des demi-barreaux, c'est-à-dire sur les demi-rectangles tels que MRSN (fig. 6) et, d'autre part, par raison de symétrie et de continuité, $\frac{\partial v}{\partial y}$ doit être nul en tout point des segments tels que NM'. Il en est de même de $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ si v est considéré comme fonction de ξ et de η .

Prenons pour origine, dans le plan P, le point O situé sur CD en face du milieu de la largeur d'un des barreaux, MN par exemple, pour axe des x la droite CD et pour axe des y la perpendiculaire menée par O à CD dans le plan P.

Pour trouver quelle forme peut prendre la solution, remarquons, comme nous l'avons déjà fait à propos du problème de la grille infiniment mince, que la structure périodique de la grille impose à cette solution d'être elle-même périodique en x avec la période $a + b$, c'est-à-dire en ξ avec la période π . D'autre part, la symétrie du système par rapport à Oy impose à la solution d'être une fonction paire de x et, par conséquent, de ξ . Le développement de v en série de Fourier doit donc être de la forme :

$$(37) \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \cos 2n\xi.$$

Les Y_n sont des fonctions de y et, par conséquent, de v . La fonction v devant s'annuler en tout point de CD, c'est-à-dire quel que soit ξ quand η est nul, chaque Y doit être nul en même temps que η .

On déduit de (37) :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = - \sum 4n^2 Y_n \cos 2\pi \xi$$

et :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \sum \frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} \cos 2\pi \xi.$$

La condition que v soit fonction harmonique devient :

$$\sum \left(\frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} - 4n^2 Y_n \right) \cos 2\pi \xi = 0$$

et impose, pour être satisfaite quel que soit ξ , que Y_n satisfasse à l'équation différentielle :

$$(38) \quad \frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} - 4n^2 Y_n = 0,$$

dont l'intégrale générale est, quand l'entier positif n est différent de zéro :

$$Y_n = C_n \operatorname{sh} 2n\eta + D_n \operatorname{ch} 2n\eta,$$

Y_n devant être nul en même temps que η , il en résulte que D_n est nul.

Pour n égal à zéro, l'équation (38) devient :

$$\frac{d^2 Y_0}{d\eta^2} = 0.$$

D'où :

$$Y_0 = C_0 \eta + D_0,$$

avec D_0 nul pour que Y_0 s'annule en même temps que η .

Le développement de v en série de Fourier est donc nécessairement de la forme :

$$(39) \quad v = C_0 \eta + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} 2n\eta \cos 2n\xi.$$

Les constantes A_0 et $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ vont être déterminées par les conditions aux limites sur le bord supérieur GH du domaine.

Nous aurons intérêt, pour la commodité des applications, à poser :

$$C_0 = \frac{A_0}{\delta}, \quad C_n = \frac{A_n}{\operatorname{sh} 2n\delta}$$

et à prendre les constantes A_0 pour inconnues. Le développement (39) devient ainsi :

$$(40) \quad v = A_0 \frac{\eta}{\delta} + A_n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi.$$

Cherchons quelles relations entre les A_n sont nécessaires pour traduire les conditions aux limites sur le bord supérieur de notre domaine. En raison de la périodicité de celui-ci dans la direction des x , il nous suffira d'envisager la portion RSNPM' de ce bord supérieur (fig. 53). Cette portion se compose de trois parties : RS, SN et NM' qui nous conduiront respectivement à trois groupes indépendants d'équations.

GRUPE I. — v doit être égal à v_0 sur RS quel que soit x ou ξ .

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les coefficients du développement de v en série de Fourier sur le segment RS soient tous nuls, sauf le premier qui doit être égal à v_0 . Comme v est fonction paire de ξ et que cette variable prend en R et S respectivement les valeurs $-\frac{\pi\rho}{2}$ et $+\frac{\pi\rho}{2}$, ce développement est nécessairement de la forme :

$$(41) \quad v = \sum_{m=0}^{\infty} V_m \cos \frac{2m\xi}{\rho}.$$

D'autre part, comme, sur le segment RS, η est égal à $\delta - \varepsilon$, l'expression (40) devient :

$$(42) \quad v = A_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi.$$

La relation (41) donne, par le procédé bien connu de multiplication des deux membres par $\cos \frac{2m\xi}{\rho}$ et intégration par rapports à ξ entre les limites $-\frac{\pi\rho}{2}$ et $+\frac{\pi\rho}{2}$, ou, ce qui revient au même en raison de la parité de v , entre les limites zéro et $\frac{\pi\rho}{2}$,

$$V_m = 2 \int_0^{\frac{\pi\rho}{2}} v \cos \frac{2m\xi}{\rho} d\xi,$$

pour les valeurs entières de m depuis 1 jusqu'à l'infini, et

$$V_0 = \frac{2}{\pi\rho} \int_0^{\frac{\pi\rho}{2}} v d\xi,$$

pour m égal à zéro.

En remplaçant dans les intégrales v par l'expression (42) et en écrivant que V_0 doit être égal à v_0 et V_m nul pour les autres valeurs de m , depuis 1 jusqu'à l'infini, on obtient le premier groupe d'équations linéaires en A_n

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = A_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{1}{\pi \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \sin n\pi\rho, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_n}{n^2\rho^2 - m^2} \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \sin n\pi\rho = 0 \quad (m \geq 1). \end{array} \right.$$

Ces équations se simplifient dans deux cas particuliers intéressants :

Pour la grille infiniment mince, ε est nul et (43) devient :

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = A_0 + \frac{1}{\pi \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \sin n\pi\rho, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_n}{n^2\rho^2 - m^2} \sin n\pi\rho = 0. \end{array} \right.$$

Si d est assez grand par rapport à $a + b$ pour que δ soit supérieur à quelques unités, on a :

$$\frac{\text{sh } 2(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2\delta} = e^{-2\varepsilon} = \sigma$$

et (43) devient :

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = A_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{1}{\pi \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sigma^n}{n} \sin n\pi\rho, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_n \sigma^n}{n^2\rho^2 - m^2} \sin n\pi\rho = 0, \end{array} \right.$$

(44) est évidemment le cas limite de (45) pour $\varepsilon = 0$ ou $\sigma = 1$.

GRUPE II. — Un procédé analogue va nous conduire au groupe d'équations exprimant la condition que $\frac{\partial \eta}{\partial v}$ soit nul sur le segment NM' , quel que soit ξ entre la valeur $\frac{\pi}{2}\rho$ qui correspond au point N et la valeur $\pi - \frac{\pi}{2}\rho$ qui correspond au point M' . Il sera commode de poser :

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \xi',$$

ξ' variant entre $-\frac{\pi}{2}(1-\rho)$ et $+\frac{\pi}{2}(1-\rho)$. La droite F_2P qui correspond à ξ égal à $\frac{\pi}{2}$ étant, comme OY , un axe de symétrie binaire pour le système, $\frac{\partial v}{\partial \eta}$

doit être fonction paire de ξ' comme de ξ et doit se développer en série sur le segment N'M sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \sum_{m=0}^{\infty} V'_m \cos \frac{2m\xi'}{1-\rho},$$

avec la condition nécessaire et suffisante que tous les V'_n , y compris V'_0 , s'annulent pour que $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ s'annule en tout point de NM'. Cela se traduit par les équations, pour toutes les valeurs entières de m depuis zéro jusqu'à l'infini :

$$(46) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\rho) \frac{\partial v}{\partial \eta} \cos \frac{2m\xi'}{1-\rho} = 0.$$

D'autre part, l'expression (40) de v donne :

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{A_0}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} 2nA_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi'$$

ou, en donnant à η la valeur δ qu'il a sur NM' et en remplaçant ξ par $\frac{\pi}{2} + \xi'$:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{A_0}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2nA_n \coth 2n\delta \cos 2n\xi'.$$

En remplaçant $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ par cette expression dans les équations (46) et en effectuant les intégrations, on obtient :

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} + \frac{2}{\pi(1-\rho)} \sum_1^{\infty} (-1)^n A_n \coth 2n\delta \sin n\pi(1-\rho) &= 0, \\ \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 A_n}{n^2(1-\rho)^2 - m^2} \coth 2n\delta \sin n\pi(1-\rho) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Quand δ est assez grand, les cotangentes hyperboliques sont pratiquement égales à l'unité, et le groupe (47) devient :

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} + \frac{2}{\pi(1-\rho)} \sum_1^{\infty} (-1)^n A_n \sin n\pi(1-\rho) &= 0, \\ \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 A_n}{n^2(1-\rho)^2 - m^2} \sin n\pi(1-\rho) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ces équations s'appliquent, sans modification, au cas de la grille infiniment mince.

GRUPE III. — Prenons maintenant la portion SN du contour supérieur de notre domaine (fig. 53) sur laquelle v doit prendre la valeur v_0 quel que soit η .

Comme ξy est partout égal à $\frac{\pi}{2}\rho$ le développement (40) y devient :

$$v = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos n\pi\rho.$$

Sur le segment SN, η varie depuis $\delta - \varepsilon$ jusqu'à δ , ou, si nous posons :

$$\eta = \delta - x,$$

x varie entre zéro et ε . Le développement (48) devient :

$$(49) \quad v = A_0 - \frac{A_0 x}{\delta} + \sum_1^{\infty} A_n \frac{\text{sh } 2n(\delta - x)}{\text{sh } 2n\delta} \cos n\pi\rho.$$

Le développement en série d'une fonction arbitraire de x entre zéro et ε est de la forme :

$$v = \sum_0^{\infty} V_m \cos \frac{2m\pi}{\varepsilon} x + \sum_1^{\infty} U_m \sin \frac{2m\pi}{\varepsilon} x$$

et, pour que v prenne la valeur v_0 quel que soit x entre zéro et ε , il est nécessaire et suffisant que V_0 soit égal à v_0 et que tous les V_m et U_m soient nuls pour toutes les valeurs de l'entier m depuis 1 jusqu'à l'infini. D'où les équations :

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} v \, dx, \\ \int_0^{\varepsilon} v \cos \frac{2m\pi}{\varepsilon} x \, dx = 0, \\ \int_0^{\varepsilon} v \sin \frac{2m\pi}{\varepsilon} x \, dx = 0. \end{array} \right.$$

En remplaçant v par son expression (49) et en effectuant les intégrations, on obtient le groupe d'équations linéaires entre les A_n :

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) A_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi\rho \, \text{ch } 2n\delta - \text{ch } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} A_n, \\ \sum_1^{\infty} \frac{n \cos n\pi\rho \, \text{ch } 2n\delta - \text{ch } 2n(\delta - \varepsilon)}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{1}{\text{sh } 2n\delta} A_n = 0, \\ \sum_1^{\infty} \frac{n \cos n\pi\rho}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \left[1 - \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta}\right] A_n = 0, \\ \quad \quad \quad (m \geq 1) \end{array} \right.$$

Si δ est grand, ceci se réduit à :

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} v_0 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) A_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi\rho}{n} (1 - \sigma^n) A_n, \\ \sum_1^{\infty} \frac{n \cos n\pi\rho}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} (1 - \sigma^n) A_n &= 0, \\ \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\pi\rho}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} (1 - \sigma^n) A_n &= 0, \\ &(m \geq 1). \end{aligned} \right.$$

Quand on passe au cas limite de la grille infiniment mince, ε tendant vers zéro, σ qui est égal à $\varepsilon^{-2\varepsilon}$ tend vers 1 et l'on constate facilement que seule subsiste la première équation de l'un ou l'autre des groupes (51) et (52) sous la forme :

$$(53) \quad v_0 = A_0 + \sum A_n \cos n\pi\rho,$$

qui signifie simplement, comme on peut le vérifier sur le développement (40), que v doit prendre la valeur v_0 au point N (fig. 50) pour lequel ξ est égal à $\frac{\pi}{2}\rho$ et η égal à δ . C'est en effet à ce seul point que se réduit le segment SN (fig. 53) quand l'épaisseur des barreaux diminue indéfiniment.

Cette équation (53) doit d'ailleurs être considérée comme une conséquence des équations (44), qui se rapportent à ce même cas de la grille infiniment mince et qui expriment la condition que v soit égal à v_0 en tout point de MN (fig. 50) et au point N en particulier. Il ne subsiste donc, dans ce cas particulier, que les deux groupes (44) et (48) d'équations indépendantes.

L'ensemble des trois groupes (43), (47) et (51) représente un système d'un nombre infini d'équations linéaires à une infinité d'inconnues A_n . Bien qu'il ne m'ait pas été possible d'en obtenir une solution directe et complète, j'ai pu cependant m'assurer qu'il permet d'obtenir de notre problème une solution aussi approchée qu'on le désire en limitant le nombre des inconnues et en choisissant convenablement un nombre égal d'équations. Par exemple, on conservera seulement les n premières inconnues depuis A_0 jusqu'à A_{n-1} et l'on conservera également les premières équations de chacun des trois groupes jusqu'à concurrence du nombre total n . Quand il s'agit, comme c'est le cas pour nous, d'obtenir seulement un ordre de grandeur d'écarts ou de termes correctifs, il n'est pas nécessaire de pousser bien loin l'application de ce procédé pour obtenir une approximation très suffisante. Je voudrais le montrer en comparant les résultats que donne cette solution dans le cas limite de la grille infiniment mince à la solution rigoureuse que nous avons pu obtenir directement de ce cas limite en étudiant l'influence de la largeur des fentes. Je me limiterai d'ailleurs au cas particulier pour lequel nous avons fait l'application

numérique de cette solution rigoureuse, celui où la largeur a des fentes est égale à celle b des barreaux, ρ devenant égal à $\frac{1}{2}$.

Nous avons déjà remarqué, d'ailleurs, que pour la grille infiniment mince, il ne subsiste que les deux groupes d'équations (44) et (48) qui se simplifient quand on y fait ρ égal à $\frac{1}{2}$. Il convient d'opérer avec quelque précaution ce passage à la limite. Prenons d'abord le groupe (44); il devient :

$$v_0 = A_0 + \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{n} \sin \frac{n\pi}{2},$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{nA_n}{n^2 - 4m^2} \sin \frac{n\pi}{2} = 0.$$

La somme qui figure dans la première de ces équations ne donne lieu à aucune difficulté. Le sinus qui y figure n'est différent de zéro que pour les valeurs impaires $2p + 1$ de n et prend alors la valeur $(-1)^p$; dans chacune des sommes qui figurent dans les autres équations, un autre terme que ceux de rang impair est différent de zéro : c'est celui pour lequel n prend la valeur paire $2m$, qui annule le dénominateur en même temps que le sinus. Pour trouver la vraie valeur de ce terme, il suffit d'y faire tendre n vers $2m$. On obtient ainsi :

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = A_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} A_{2p+1}, \\ A_{2m} + \frac{4}{\pi} (-1)^m \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2 - 4m^2} A_{2p+1} = 0. \end{array} \right.$$

De même, le groupe (48) devient, quand on y remplace ρ par la valeur particulière $\frac{1}{2}$:

$$\frac{A_0}{\delta} + \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^n A_n \sin \frac{n\pi}{2} = 0,$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 A_n}{n^2 - 4m^2} \sin \frac{n\pi}{2} = 0.$$

Si l'on tient compte des mêmes remarques que ci-dessus, on obtient finalement :

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0}{\delta} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_{2p+1} = C, \\ A_{2m} - \frac{2}{m\pi} (-1)^m \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)^2}{(2p+1)^2 - 4m^2} A_{2p+1} = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on combine par soustraction chaque équation de la seconde ligne de ce groupe avec l'équation correspondante de la seconde ligne du groupe (54), on obtient pour remplacer (55) le groupe plus simple :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0}{\delta} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_{2p+1} = 0, \\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{2p+1-2m} A_{2p+1} = 0. \end{array} \right.$$

L'aspect de ce dernier groupe, qui renferme uniquement les inconnues d'indice impair à côté de A_0 , montre comment il est raisonnable de procéder dans le choix des équations, à un ordre déterminé d'approximation. Si le nombre des inconnues auquel on se limite est pair et égal à $2p+2$ depuis A_0 jusqu'à A_{2p+1} , le nombre des inconnues d'indice impair est $p+1$, et pour les déterminer en fonction de A_0 il est tout indiqué de prendre, dans le groupe (56), ce même nombre $p+1$ d'équations, à savoir celle de la première ligne et p équations de la seconde ligne, depuis $m=1$ jusqu'à $m=p$ inclusivement.

Le système ainsi constitué étant résolu et donnant les inconnues d'indice impair en fonction de A_0 , la première équation du groupe (54), après substitution, ne contiendra plus que A_0 , qu'elle déterminera, et enfin, les p premières équations de la seconde ligne du groupe (54) donneront immédiatement chacune une des inconnues d'indice pair, depuis A_2 jusqu'à A_{2p} en y faisant varier m depuis 1 jusqu'à p .

Si le nombre d'inconnues auquel on se limite est impair, depuis A_0 jusqu'à A_{2p+2} , on procédera exactement comme il vient d'être indiqué pour avoir les $2p+2$ premières inconnues depuis A_0 jusqu'à A_{2p+1} , c'est-à-dire qu'on prendra simplement les résultats de l'approximation paire précédente et l'on y adjoindra A_{2p+2} tiré de l'équation (53), qui, pour ρ égal à $\frac{1}{2}$, ne renferme plus que les inconnues d'indice pair puisqu'elle devient, dans ce cas :

$$v_0 = A_0 + \sum_1 (-1)^p A_{2p} = \sum_0 (-1)^p A_{2p}.$$

Ainsi donc, pour obtenir l'approximation d'ordre pair $2p+2$ ou impair $2p+3$, il suffit de résoudre le système d'équations linéaires à $p+1$ inconnues que représente le groupe (56) quand on le limite comme il a été dit.

La comparaison des résultats ainsi obtenus avec ceux de la première solution représentée par les formules (25) et (30) se fera, par exemple, en calculant v_0 , ainsi que l'intégrale

$$\int_0^{\delta} (v_1 - v_2) d\eta.$$

Pour ces quantités, la première solution nous a donné⁽¹⁾ :

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 - v_p = \frac{Y_p}{\delta + L\sqrt{2}} v_0 = \frac{0,880}{\delta + 0,346} v_0 \text{ et} \\ \int_0^\delta (v_1 - v_2) d\eta = \frac{0,314 v_0}{\delta + 0,346}. \end{array} \right.$$

La solution actuelle nous permet d'exprimer ces mêmes quantités en fonction des A_n . Pour ce qui concerne le point P, milieu d'une fente, de coordonnées :

$$\xi = \frac{\pi}{2}, \quad \eta = \delta,$$

le développement (40) donne :

$$(58) \quad v_p = A_0 + \sum_1^\infty (-1)^n A_n = \sum_0^\infty (-1)^n A_n.$$

Pour évaluer l'intégrale, nous déduisons du développement (40) les expressions suivantes de v_1 et de v_2 , qui s'obtiennent en donnant à ξ respectivement les valeurs $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$:

$$v_1 = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{p=1}^\infty (-1)^p \frac{\text{sh } 4p\eta}{\text{sg } 4p\delta} A_{2p},$$

$$v_2 = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} A_n.$$

En intégrant par rapport à η entre zéro et δ , on obtient :

$$\int_0^\delta v_1 d\eta = A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{p=1}^\infty (-1)^p \frac{\text{ch } 4p\delta - 1}{4p \text{ sh } 4p\delta} A_{2p}$$

et

$$\int_0^\delta v_2 d\eta = A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\text{ch } 2n\delta - 1}{2n \text{ sh } 2n\delta} A_n.$$

(2) L, logarithme népérien.

Quand δ est suffisamment grand, ces expressions se réduisent à :

$$(59) \quad \begin{cases} \int_0^\delta v_1 d\eta = A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4p} A_{2p}, \\ \int_0^\delta v_2 d\eta = A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} A_n. \end{cases}$$

Voyons maintenant quels sont les résultats de nos approximations successives obtenues en utilisant, comme il a été dit, les équations (54) et (56). Pour la commodité des calculs, il y a intérêt à introduire, au lieu des A_n , des inconnues auxiliaires x_n définies par :

$$x_{2p} = (-1)^p A_{2p}, \quad x_{2p+1} = (-1)^p \frac{4(2p+1)}{\pi} A_{2p+1}.$$

Les équations entre les x_n prennent ainsi la forme :

$$(60) \quad \begin{cases} v_0 = x_0 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_{2p+1}}{2(2p+1)^2}, \\ x_{2m} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_{2p+1}}{(2p+1)^2 - 4m^2} = 0; \end{cases}$$

$$(61) \quad \frac{x_0}{\delta} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_{2p+1}}{2p+1}, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_{2p+1}}{2p+1 - 2m} = 0.$$

L'équation complémentaire (53) devenant :

$$v_0 = \sum_{p=0}^{\infty} x_{2p}.$$

Il est remarquable qu'on obtienne une approximation déjà très bonne en conservant un très petit nombre d'inconnues. Prenons-en, par exemple, quatre seulement : x_0, x_1, x_2, x_3 , entre lesquelles le système (60), (61) devient :

$$\begin{aligned} v_0 &= x_0 + \frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{18}, & x_2 - \frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{5} &= 0; \\ \frac{x_0}{\delta} &= x_1 + \frac{x_3}{3}, & x_1 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

La résolution de ce système permet de remonter aux inconnues A reliées aux x par :

$$A_0 = x_0, \quad A_2 = -x_2, \quad A_1 = \frac{\pi}{4} x_1, \quad A_3 = -\frac{\pi}{12} x_3$$

et d'en déduire, par application des formules (58) et (59) :

$$v_0 - v_p = v_0 - A_0 + A_1 - A_2 + A_3,$$

$$\int_0^\delta (v_1 - v_2) d\eta = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{1} + \frac{A_3}{6}.$$

Des calculs numériques très simples conduisent ainsi à :

$$v_0 - v_p = \frac{0,909v_0}{\delta + 0,417},$$

$$\int_0^\delta (v_1 - v_n) d\eta = \frac{0,312v_0}{\delta + 0,417},$$

ce qui, comparé à (57), montre combien notre méthode d'approximations successives conduit rapidement à des évaluations suffisantes. L'épreuve que nous faisons ainsi subir à cette méthode dans le cas particulier de la grille infiniment mince, pour lequel une autre solution plus directe nous était connue, peut nous donner confiance dans les résultats qu'elle va nous fournir pour une grille d'épaisseur finie.

Appliquons les formules générales (45), (48) et (52) relatives au cas où la distance d est assez grande par rapport à $a + b$, en supposant a égal à b , ou ρ égal à $\frac{1}{2}$. On obtient immédiatement les groupes :

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = A_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \sigma_{2p+1}}{2p+1} A_{2p+1}. \\ \frac{4}{\pi} (-1)^m \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p+1) \sigma_{2p+1} - 2m}{(2p+1)^2 - 4m^2} A_{2p+1} + A_{2m} = 0; \end{array} \right.$$

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0}{\delta} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_{2p+1}, \\ \frac{2}{m\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)^2}{(2p+1)^2 - 4m^2} A_{2p+1} - A_{2m} = 0. \end{array} \right.$$

Ce groupe (64), combiné par addition de sa seconde ligne avec la seconde ligne de (63), permet de lui substituer le groupe plus simple :

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0}{\delta} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p A_{2p+1}, \\ \sum \frac{(2p+1)^2 - 4m^2}{(-1)^p (2p+1)} \left(\sigma_{2p+1} - 2m + \frac{2p+1}{2m} \right) A_{2p+1} = 0, \end{array} \right.$$

où ne figurent plus, à côté de A_0 , que les inconnues d'indice impair.

Le groupe (52) devient, quand on y fait ρ égal à $\frac{1}{2}$,

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} v_0 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) A_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{(1 - \sigma^{2p})}{2p} A_{2p}, \\ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p (1 - \sigma^{2p})}{4p^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} A_{2p} &= 0, \\ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p (1 - \sigma^{2p})}{4p^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} A_{2p} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ce groupe joue, pour les inconnues d'indice pair, le même rôle que le précédent pour les inconnues d'indice impair.

Nous tirerons les conséquences de ces formules quand nous aurons résolu, pour la grille d'épaisseur finie située entre deux plateaux symétriques par rapport à elle, le problème de la distribution du champ électrique.

DISTRIBUTION DU CHAMP ÉLECTRIQUE. — La grille et les plateaux étant supposés portés à des potentiels donnés, le problème de la distribution du potentiel et du champ correspondant se pose exactement comme le problème précédent et se ramène à la recherche d'une fonction harmonique dans le plan P prenant des valeurs données sur les limites du domaine compris entre la grille et les plateaux. Lorsque ceux-ci sont supposés portés au même potentiel, que nous pouvons prendre pour origine et supposer nul, la solution précédente s'applique exactement, le potentiel électrique U remplaçant la vitesse du gaz v .

Le problème électrique qui concerne notre appareil est différent et, comme nous le verrons, complémentaire du précédent. Pour que les ions se déplacent dans le même sens avant et après la traversée de la grille, il faut que les plateaux soient portés à des potentiels de signes opposés par rapport à celui de la grille et, plus particulièrement, à des potentiels égaux et opposés pour correspondre à la condition (10) du problème cylindrique. Si nous prenons, tout d'abord le potentiel de la grille pour origine, la symétrie du système implique que les potentiels en deux points quelconques symétriques par rapport au plan médian GH (fig. 6) seront égaux et de signes contraires et, par conséquent, que le potentiel sera nul en tout point de ce plan, c'est-à-dire sur les segments tels que NM' situés sur GH à l'intérieur des fentes. Ceci nous permet, comme dans le problème précédent de n'envisager que la moitié du domaine primitif et de résoudre le problème de Dirichlet pour la portion du plan comprise entre CD et un bord supérieur dentelé composé de parties successives telles que $MRSNPM'$, le potentiel devant s'annuler sur la totalité de ce bord supérieur et prendre une valeur constante sur le bord inférieur rectiligne CD . Il revient d'ailleurs au même, par simple changement de l'origine des potentiels, de supposer le potentiel U nul sur CD et prenant partout une valeur donnée U_1 sur le bord supérieur dentelé du demi-domaine.

En raisonnant exactement comme nous l'avons fait à propos du mouvement

du gaz, on voit facilement que le développement en série de la fonction U , à la fois harmonique et périodique en ξ , doit être de la forme, analogue à (40) :

$$(67) \quad U = B_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi.$$

La condition que U prenne la valeur U_1 en tout point du segment RS se traduit par un groupe d'équations linéaires entre les B_n exactement analogue au groupe (43) :

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = B_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{1}{\pi\rho} \sum_1^{\infty} \frac{B_n \text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \sin n\pi\rho, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nB_n}{n^2\rho^2 - m^2} \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \sin n\pi\rho = 0. \end{array} \right.$$

Le second groupe doit exprimer que U prend la valeur U_1 aussi sur le segment NM'; en procédant comme nous l'avons fait pour obtenir (47), on arrive facilement à :

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = B_0 + \frac{1}{\pi(1-\rho)} \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n} \sin n\pi(1-\rho), \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nB_n}{n^2(1-\rho)^2 - m^2} \sin n\pi(1-\rho) = 0. \end{array} \right.$$

Enfin la condition que U soit égal à U_1 sur SN devient :

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) B_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_1^{\infty} \frac{B_n \text{ch } 2n\delta - \text{ch } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \cos n\pi\rho, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nB_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{\text{ch } 2n\delta - \text{ch } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \cos n\pi\rho = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{\text{ch } 2n\delta - \text{ch } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \cos n\pi\rho = 0. \end{array} \right.$$

Ces équations se simplifient notablement quand on y suppose δ suffisamment grand et ρ égal à $\frac{1}{2}$ pour correspondre au cas particulier où la largeur

des fentes est égale à celle des barreaux. Les trois groupes (68), (69), (70) deviennent respectivement :

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = B_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \sigma^{2p+1}}{2p+1} B_{2p+1}, \\ (-1)^m B_{2m} + \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1) \sigma^{2p+1-2m}}{(2p+1)^2 - 4m^2} B_{2p+1} = 0; \end{array} \right.$$

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = B_0 - \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} B_{2p+1}, \\ (-1)^m B_{2m} - \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2 - 4m^2} B_{2p+1} = 0; \end{array} \right.$$

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) B_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1 - \sigma^{2p}}{2p} B_{2p}, \\ \sum_1^{\infty} (-1)^p \frac{1 - \sigma_p^2}{4p^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} B_{2p} = 0, \\ \sum_1^{\infty} (-1)^p \frac{1 - \sigma_p^2}{4p^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} B_{2p} = 0. \end{array} \right.$$

En retranchant chaque équation du groupe (72) de l'équation correspondante du groupe (71), on obtient, pour remplacer ce dernier, le groupe plus simple :

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{B_0 \varepsilon}{\delta} = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (1 + \sigma^{2p+1})}{2p+1} B_{2p+1}, \\ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p+1)(\sigma^{2m} + \sigma^{2p+1})}{(2p+1)^2 - 4m^2} B_{2p+1} = 0. \end{array} \right.$$

Le résultat le plus important que puisse nous donner la solution de ce problème de l'influence de l'épaisseur finie de la grille sur la distribution du champ électrique est celui qui concerne la fraction que laisse passer la grille du nombre total des ions amenés par le champ et dont les trajectoires projetées sur le plan P perpendiculaire au mouvement d'entraînement du gaz, sont les lignes de force du champ électrique contenues dans ce plan P.

Par raison de symétrie, la ligne de force telle que F_2PE_2 (fig. 54) n'est pas déformée puisqu'elle passe par le milieu P d'une fente, mais les lignes voisines sont gonflées vers les barreaux, jusqu'à prendre la forme particulière F_1NE_1 qui amène les ions aux barreaux en N. Seuls, les ions émis par la source entre F_1 et F'_1 arrivent à l'électrode en passant par la fente correspondante. Si la distance d est suffisante pour que les lignes de force arrivent rectilignement aux

plateaux au voisinage desquels le champ sera par conséquent uniforme, et si l'on suppose que l'extraction des ions se fait uniformément dans la longueur de la fente-source F , le rapport cherché est égal au rapport :

$$r = \frac{F_1 F_2}{F_0 F_2'}$$

égal d'ailleurs au rapport des charges électriques situées sur les portions de

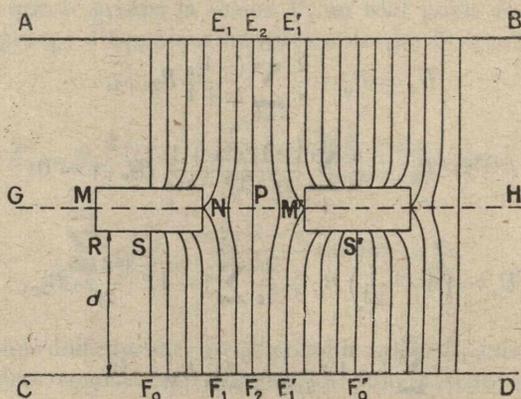


Fig. 54.

la surface des plateaux correspondant à $F_1 F_2$ et $F_0 F_2'$ respectivement ou encore au rapport des flux de force ou d'induction qui partent de ces surfaces.

Cette remarque nous conduit à faire intervenir la fonction de flux φ , fonction harmonique conjuguée de U et reliée à celle-ci par les conditions :

$$(75) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

En remplaçant ici U par son expression générale (67) et en intégrant, on obtient :

$$(76) \quad \varphi = B_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \sin 2n\xi,$$

la constante d'intégration est ainsi choisie de manière que φ s'annule en même temps que ξ . La fonction φ est telle que sa valeur reste constante tout le long d'une ligne de force. L'origine des ξ étant en F_0 (fig. 7), φ est nul sur la ligne de force $F_0 S$. Si nous désignons par φ_1 et φ_2 les valeurs de φ sur les lignes de force $F_1 N$ et $F_2 P$, le rapport cherché a pour valeur :

$$r = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_2}$$

La ligne $F_1 N$ le long de laquelle φ_1 est constant permet de calculer cette

valeur en substituant à ξ et η dans (76) les coordonnées d'un quelconque de ses points et, en particulier, celles du point N qui sont $\frac{\pi}{2}\rho$ et δ ; on obtient ainsi :

$$\varphi_1 = B_0 \frac{\pi\rho}{2\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \coth 2n\delta \sin n\pi\rho,$$

de même :

$$\varphi_2 = B_0 \frac{\pi}{2\delta}.$$

Dans le cas particulier où d est grand par rapport à $a + b$ et où a est égal à b , ces expressions deviennent :

$$\varphi_1 = \frac{B_0 \pi}{4 \delta} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_{2p+1},$$

d'où :

$$r = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_2} = \frac{1}{2} - \frac{2\delta}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^p \frac{B_{2p+1}}{B_0}.$$

Il est remarquable que ce résultat fasse intervenir seulement celles des inconnues qui figurent dans le groupe (74) d'équations, de sorte qu'il suffit, pour déterminer notre rapport, de conserver et de résoudre le système constitué par ce seul groupe. Dans ce but, il est commode d'introduire de nouvelles variables :

$$z_p = \frac{2\delta}{\pi} (-1)^p \frac{B_{2p+1}}{B_0},$$

qui satisfont aux équations, déduites de (74) :

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1 + \sigma^{2p+1}}{2p+1} z_p = \varepsilon, \\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\sigma^{2m} + \sigma^{2p+1})(2p+1)}{(2p+1)^2 - 4m^2} z_p = 0, \\ \left(r = \frac{1}{2} - \sum_0^{\infty} z_p \right). \end{array} \right.$$

Pour obtenir une approximation déterminée dans l'évaluation de r , il suffit de conserver $p + 1$ inconnues z depuis l'indice zéro jusqu'à l'indice p et de résoudre le système constitué par la première équation (75) et p équations de la seconde ligne pour les valeurs de m depuis 1 jusqu'à p .

Le déterminant du système ainsi constitué est toujours différent de zéro, de sorte que, quand ε est nul (grille infiniment mince) tous les z_p sont nuls

et le rapport r prend, comme on pouvait le prévoir, la valeur $\frac{1}{2}$ puisque, dans ce cas, les lignes de force restent rectilignes et que, la largeur des fentes étant supposée égale à celle des barreaux, la moitié des ions issus de la source peuvent traverser la grille.

Déjà la première approximation, dans laquelle on conserve la seule inconnue z_0 et la première équation (75) qui devient :

$$(1 + \sigma) z_0 = \varepsilon$$

donne pour r une valeur :

$$(78) \quad r_1 = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{1 + \sigma},$$

que ne modifient pas notablement les approximations plus élevées tant que l'épaisseur de la grille $2c$ reste sensiblement inférieure à la période $a + b$. Si nous adoptons, par exemple :

$$a = b = 3, \quad 2c = 1,$$

on a :

$$\varepsilon = \frac{\pi c}{a + b} = \frac{\pi}{12}, \quad \sigma = e^{-2c} = 0,5924$$

et, d'après (78) :

$$r_1 = 0,5 - 0,164 = 0,336,$$

le tiers environ des ions passera à travers la grille.

ÉTALEMENT DES POINTS D'ARRIVÉE DES IONS DE MÊME MOBILITÉ. — La connaissance du mouvement du gaz et de la distribution du champ électrique nous permet d'évaluer ce que devient l'étalement des points d'arrivée pour des ions d'une même mobilité, du fait de l'existence des fentes dans le manchon d'épaisseur finie. Les trajectoires qui donnent lieu au maximum et au minimum de déplacement des ions sont celles qui se projettent sur le plan P suivant F_1NE_1 et F_2PE_2 respectivement (fig. 7). Pour la seconde de ces trajectoires, on a le déplacement :

$$(79) \quad l_2 = \frac{2}{k} \int_0^d \frac{v_2}{h_2} dy,$$

v_2 est donné par la formule (40) quand on y donne à ξ la valeur $\frac{\pi}{2}$ qui correspond à l'abscisse commune de tous les points de la droite F_2PE_2 donc :

$$v_2 = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_1^{\infty} (-1)^n A_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta}.$$

Le champ h_2 a pour valeur :

$$h = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{a+b}{\pi} \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

U étant donné par la formule (67); d'où, pour ξ égal à $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{a+b} h_2 = \frac{B_0}{\delta} + \sum_1^{\infty} (-1)^n 2n B_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta},$$

les A et les B s'obtiennent comme il a été indiqué par la résolution des groupes correspondants d'équations linéaires. Connaissant ainsi v_2 et h_2 en fonction de η , on obtiendra l_2 d'après (79) en effectuant l'intégration graphique contenue dans :

$$l_2 = \frac{2(a+b)}{\pi k} \int_0^{\delta} \frac{v_2}{h_2} d\eta.$$

Le calcul est un peu plus compliqué pour la trajectoire F_1NE_1 , à cause de la forme incurvée de sa projection sur le plan P .

Si v_1 est la vitesse du gaz en un point quelconque de cette trajectoire, on a :

$$(80) \quad l_1 = \frac{2}{k} \int_0^d \frac{v_1}{\frac{\partial U}{\partial y}} dy = \frac{2(a+b)^2}{\pi^2 k} \int_0^{\delta} \frac{v_1}{\frac{\partial U}{\partial \eta}} d\eta,$$

v_1 et $\frac{\partial U}{\partial \eta}$ s'obtiennent en fonction de η en donnant à ξ dans les formules :

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_1^{\infty} A_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{B_0}{\delta} + \sum_1^{\infty} 2n B_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi, \end{array} \right.$$

les valeurs qui correspondent à celles de η dans l'équation de la trajectoire projetée F_1NE_2 qui est, comme nous l'avons vu :

$$(82) \quad \varphi = \frac{B_0 \xi}{\delta} + \sum_1^{\infty} B_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi = \frac{B_0 \pi}{4\delta} + \sum_1^{\infty} (-1)^n B_n \coth 2n\delta = \varphi_1.$$

La dispersion des points d'arrivée se mesurera par le rapport :

$$\frac{l_1 - l_2}{l_0},$$

où l_0 a la valeur (33).

Pour construire la courbe (82) entre ξ et η , il semble nécessaire de construire le réseau des courbes représentant φ en fonction de ξ pour diverses valeurs de η et d'en déduire les valeurs de ξ qui donnent à φ la valeur φ_1 pour chacune de ces valeurs de η . Ces valeurs de ξ portées dans (81) permettent de construire la courbe représentant $\frac{v}{\delta U}$ en fonction de η et d'opérer l'intégration graphique pour avoir l_1 par la formule (80).

III. APPLICATION DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES TRAITÉS À L'ÉTUDE DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE ENTRE UNE GRILLE ET DES PLATEAUX.

SOMMAIRE. — Dans ce Mémoire, suite de ceux parus dans les deux numéros précédents ⁽¹⁾. P. Langevin calcule le champ électrique produit par une grille conductrice placée entre deux plans conducteurs parallèles. Après avoir étudié divers cas particuliers il donne la solution pour une grille épaisse placée entre deux plans conducteurs situés à des distances différentes.

Les solutions que nous venons d'obtenir permettent de résoudre les problèmes électrostatiques qui concernent le système constitué par une grille et les deux plateaux symétriquement placés par rapport à celle-ci. Pour distinguer les uns des autres ces trois conducteurs, nous ferons correspondre l'indice 0 au plateau CD, l'indice 1 à la grille et l'indice 2 au plateau AB. Nous prendrons pour origine des potentiels celui de CD, le potentiel de la grille étant U_1 et celui de AB étant U_2 .

Le problème que nous avons résolu à propos du mouvement du gaz correspond au cas où U_2 est nul et où v_0 est remplacé par U_1 . Le second problème, celui de la distribution du champ électrique correspondait à U_2 égal à $2U_1$.

En superposant les solutions correspondant à ces deux problèmes dans une proportion convenable, on aura la solution du problème général pour notre système lorsque les potentiels U_1 et U_2 sont quelconques. Si en effet U' représente la solution du premier problème et U'' celle du deuxième, on aura évidemment :

$$(83) \quad U = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right) U' + \frac{U_2}{2U_1} U''.$$

En effet, sur la grille, on a :

$$U' = U'' = U_1.$$

d'où U égal à U_1 , et sur le plateau AB on a :

$$U' = 0, \quad U'' = 2U_1,$$

d'où U égal à U_2 .

Les quantités les plus intéressantes à calculer parmi celles qui caractérisent électrostatiquement notre système sont d'une part la capacité C_1 de la grille par unité de sa surface et le coefficient d'influence C_{02} ou C_{20} des plateaux AB et CD l'un sur l'autre à travers la grille. Les coefficients d'influence C_{12} et C_{01} de la grille sur les plateaux sont tous deux égaux à $-\frac{C_1}{2}$ par raison de symétrie.

⁽¹⁾ *Journal de Physique et le Radium*, 1949, 10, 177 et 225.

GRILLE MINCE. — Prenons d'abord le cas de la grille infiniment mince et de la distance d suffisamment grande par rapport à la période $a + b$, cas auquel s'applique notre première solution du premier problème. La formule (30) donne :

$$U' = U_1 \left(1 - \frac{Y}{\delta - L\gamma} \right)^{(1)}.$$

D'autre part, nous avons déjà remarqué que pour $U_2 = 2U_1$, la présence des fentes dans la grille infiniment mince ne modifie pas la répartition des potentiels, le plan de la grille prenant spontanément le potentiel moitié de celui du plateau CD. On a donc, en conservant l'origine des coordonnées η ou Y sur la grille comme dans la figure 52⁽²⁾ :

$$U'' = U_1 \left(1 - \frac{\eta}{\delta} \right).$$

D'où, en portant dans (83) :

$$(84) \quad U = U_1 - \left(U_1 - \frac{U_2}{2} \right) \frac{Y}{\delta - L\gamma} - \frac{U_2 \eta}{2\delta}.$$

Pour calculer les capacités ou coefficients d'influence, il faut se reporter à la distribution des charges qui est déterminée par la fonction de flux φ conjuguée de U . La fonction conjuguée de Y étant X , donnée par (24), et celle de η étant ξ , la fonction π , supposée s'annuler sur la ligne de force qui passe par l'origine, milieu d'un barreau, devient d'après (84) :

$$(85) \quad \varphi = \left(U_1 - \frac{U_2}{2} \right) \frac{X}{\delta - L\gamma} + \frac{U_2 \xi}{2\delta}.$$

Pour trouver les charges présentes sur le plateau CD par période $a + b$ de la grille, nous devons donner à η la valeur δ et à ξ la valeur π . On a, dans ces conditions :

$$X = \xi = \pi,$$

δ étant supposé assez grand pour que $\text{Coth } \delta$ puisse être considérée comme égale à l'unité. L'expression (85) devient :

$$\varphi = \left(U_1 - \frac{U_2}{2} \right) \frac{\pi}{\delta - L\gamma} + \frac{U_2 \pi}{2\delta}.$$

D'après le théorème de Gauss, la charge Q correspondant au flux φ est égale à $\frac{\varphi}{4\pi}$; donc la charge portée par le plateau CD par période $a + b$ et par unité de longueur des barreaux est :

$$Q = \frac{2U_1 - U_2}{8(\delta - L\gamma)} + \frac{U_2}{8\delta}.$$

(1) L, logarithme népérien.

(2) Voir *J. Physique et Radium*, 1949, 10, 186, et, dans ce volume, p. 199.

Par unité de surface de la grille, on aura la charge :

$$(86) \quad Q_1 = \frac{Q}{a+b} = \frac{2U_1 - U_2}{8[\pi d - (a+b)L\gamma]} + \frac{U_2}{8\pi d}.$$

Si l'on veut avoir la capacité de la grille, il faut supposer U_2 égal à zéro et doubler la charge Q_1 pour tenir compte de celle que porte en même temps le plateau AB . En divisant par le potentiel U_1 pour avoir la capacité, on obtient :

$$(87) \quad C_1 = \frac{1}{2[\pi d - (a+b)L\gamma]}$$

ou, pour une surface S de la grille, et en remplaçant γ par sa définition (22) :

$$C = \frac{S}{2[\pi d - (a+b)L \sin \frac{\pi b}{2(a+b)}]}$$

Quand a est nul, c'est-à-dire que la grille est remplacée par un plan conducteur plein, le logarithme est nul et l'on retrouve bien la capacité $\frac{S}{2\pi d}$ d'un plateau isolé entre deux plateaux symétriquement placés par rapport à lui à distance d .

Lorsque, au contraire, b s'annule le logarithme devient infini négatif et la capacité s'annule comme elle doit le faire puisqu'il n'existe plus rien entre les deux plateaux.

Pour trouver le coefficient d'influence du plateau AB sur le plateau CD , par unité de surface de la grille, nous devons supposer nul le potentiel de celle-ci et (86) devient :

$$Q_1 = \frac{U_2}{8} \left[\frac{1}{\pi d} - \frac{1}{\pi d - (a+b)L\gamma} \right],$$

d'où :

$$(88) \quad C_{02} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{\pi d - (a+b)L\gamma} - \frac{1}{\pi d} \right].$$

Ce coefficient s'annule bien quand la grille est pleine ($a = 0$) puisqu'elle fait écran à l'influence mutuelle des plateaux, et devient bien, quand la grille disparaît ($b = 0$) égale à :

$$C_{02} = -\frac{1}{8\pi d},$$

représentant l'influence, par unité de surface, d'un plateau sur un plateau parallèle à distance $2d$.

GRILLE ÉPAISSE. — Voyons maintenant ce que donne notre seconde solution qui est plus générale puisqu'elle correspond à une distance d quelconque et à une épaisseur quelconque des barreaux.

Il résulte de (40) :

$$U' = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum A_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi,$$

la fonction conjuguée :

$$\varphi' = A_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum A_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \sin 2n\xi,$$

et de (67) :

$$U'' = B_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum B_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi,$$

la fonction conjuguée :

$$\varphi'' = B_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum B_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \sin 2n\xi.$$

La charge du plateau CD par période $a + b$ et par unité de longueur des barreaux s'obtient en faisant dans les φ , ξ égal à π , d'où, par application de la formule déduite de (83) :

$$\varphi = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right) \varphi' + \frac{U_2}{2U_1} \varphi'',$$

la charge :

$$Q = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right) \frac{A_0}{4\delta} + \frac{U_2}{2U_1} \frac{B_0}{4\delta}$$

et, par unité de surface de la grille :

$$(89) \quad Q_1 = \frac{Q}{a+b} = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right) \frac{A_0}{4\pi d} + \frac{U_2}{2U_1} \frac{B_0}{4\pi d}.$$

Le cas où la largeur des fentes est égale à la largeur des barreaux se présente comme particulièrement simple, puisqu'il suffit, pour avoir A_0 de résoudre le système d'équation constitué par la première équation du groupe (55) et les équations du groupe (56), B_0 s'obtenant de la même manière à partir de la première équation du groupe (72) et l'ensemble du groupe (74).

La formule générale (86) nous donne, pour la capacité C_1 et pour le coefficient d'influence à travers la grille C_{20} :

$$(90) \quad C_1 = \frac{A_0}{2\pi d u_1} \quad \text{et} \quad C_{20} = \frac{A_0 - B_0}{8\pi d U_1}.$$

Nous trouvons là encore une occasion de mettre à l'épreuve notre méthode d'approximations successives en confrontant les résultats (90) avec ceux de

la première méthode qui deviennent, dans le cas particulier envisagé ici où a est égal à b :

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{2(\pi d + 2aL\sqrt{2})} \\ \text{et} \\ C_{20} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{\pi d + 2aL\sqrt{2}} - \frac{\pi d}{1} \right]. \end{array} \right.$$

Pour ce qui concerne C_1 , l'approximation que nous avons déjà utilisée pour obtenir les résultats (62) conduit à :

$$\frac{A_0}{U_1} = \frac{\delta}{\delta + 0,417},$$

d'où, d'après (90) :

$$C_1 = \frac{1}{2(\pi d + 0,834a)},$$

au lieu de, d'après (90') :

$$C_1 = \frac{1}{2(\pi d + 0,692a)}.$$

D'autre part, pour la grille infiniment mince, E est nul et le groupe (74), dont les équations deviennent homogènes en B_{2p+1} avec un déterminant non nul, donnent des valeurs nulles pour ces B_{2p+1} de sorte que la première équation (72) nous conduit à :

$$\frac{B_0}{U_1} = 1,$$

ce qui, substitué dans la seconde des équations (90) donne :

$$C_{20} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{\pi d + 0,834a} - \frac{1}{\pi d} \right],$$

au lieu de :

$$C_{20} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{\pi d + 0,692a} - \frac{1}{\pi d} \right].$$

L'approximation suivante, où l'on conserve trois des A_{2p+1} , soit A_1, A_3 et A_5 , donne :

$$C_1 = \frac{1}{2(\pi d + 0,781a)}$$

et :

$$C_{20} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{\pi d + 0,781a} - \frac{1}{\pi d} \right].$$

La suivante encore, avec quatre inconnues d'indice impair, A_1, A_3, A_5 et A_7 dans les équations (56) et la première des équations (54) donne :

$$C_1 = \frac{1}{2(\pi d + 0,760a)}$$

et :

$$C_{20} = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{\pi d + 0,760a} - \frac{1}{\pi d} \right].$$

On voit ainsi les approximations successives converger vers la valeur exacte.

PROBLÈME ÉLECTROSTATIQUE GÉNÉRAL DE LA GRILLE ENTRE PLATEAUX PARALLÈLES. — Nous nous sommes limités jusqu'ici au cas du système symétrique où les plateaux sont placés de part et d'autre de la grille à égale distance de celle-ci et la solution (83) pour des potentiels quelconques des trois conducteurs a été obtenue par superposition de deux solutions particulières U' et U'' qui correspondent aux deux cas que nous pouvons appeler respectivement le cas symétrique où les plateaux sont tous deux au même potentiel pris pour origine, et le cas antisymétrique où les différences de potentiel entre la grille et les deux plateaux sont égales et de signes contraires. Il nous sera utile d'explicitier ces deux solutions particulières U' et U'' en fonction de ξ et η ainsi que les fonctions conjuguées φ' et φ'' qui leur correspondent. Si nous conservons les mêmes axes de coordonnées (fig. 53) et les mêmes notations que précédemment, à ceci près que, dans la solution symétrique la vitesse v_0 de la grille sera remplacée par son potentiel U_1 , la fonction U' est donnée entre CD et GH, c'est-à-dire pour η variant entre 0 et δ , par l'expression analogue à (40) :

$$(91) \quad U' = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum A_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi.$$

La solution entre GH et AB, valable quand η varie entre δ et 2δ doit être symétrique de la précédente par rapport à GH; on a donc, dans l'intervalle considéré :

$$(92) \quad U = A_0 \frac{2\delta - \eta}{\delta} + \sum A_n \frac{\text{sh } 2n(2\delta - \eta)}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi.$$

Cette solution s'annule bien sur AB, et les deux fonctions (91) et (92) se raccordent bien sur les segments de GH situés à l'intérieur des fentes sans présenter aucune discontinuité dans les valeurs de U et dans celles de $\frac{\partial U}{\partial \eta}$ qui y est nul.

La fonction φ étant reliée à U par les conditions (75), on voit qu'il correspond à (91), pour la région comprise entre CD et GH, c'est-à-dire pour $0 < \eta < \delta$:

$$(93) \quad \varphi' = A_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum A_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \sin 2n\xi.$$

et à (92) pour la région $\delta < \eta < \delta$:

$$(94) \quad \varphi' = -A_0 \frac{\xi}{\delta} - \sum A_n \frac{\text{ch } 2n(2\delta - \eta)}{\text{sh } 2n\delta} \sin 2n\xi.$$

De même, la solution antisymétrique donnera les formules correspondantes :

$$(95) \quad U'' = B_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum B_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi,$$

$$(96) \quad U'' = 2U_1 - \frac{B_0(2\delta - \eta)}{\delta} - \sum B_n \frac{\text{sh } 2n(2\delta - \eta)}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi,$$

$$(97) \quad \varphi'' = B_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum B_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \sin 2n\xi,$$

$$(98) \quad \varphi'' = B_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum B_n \frac{\text{ch } 2n(2\delta - \eta)}{\text{sh } 2n\delta} \sin 2n\xi.$$

Ainsi que nous l'avons vu précédemment, la fonction de flux φ permet de calculer les charges présentes sur les plateaux ; pour le plateau CD, il faut faire η égal à 0 dans les formules (93) et (97) et prendre la valeur de φ pour $\xi = \pi$; en désignant par Q'_0 et Q''_0 les charges présentes par unité de surface de CD dans la solution symétrique et la solution antisymétrique respectivement, on obtient, en grandeur et en signe :

$$(99) \quad \begin{cases} Q'_0 = -\frac{\varphi'\pi}{4\pi(a+b)} = -\frac{A_0}{4\pi d}, \\ Q''_0 = -\frac{\varphi''\pi}{4\pi(a+b)} = +\frac{B_0}{4\pi d}. \end{cases}$$

On aura de même sur le plateau AB, en remarquant que la normale extérieure η est dirigée dans le sens négatif des η :

$$(100) \quad \begin{cases} Q'_2 = -\frac{\varphi'\pi}{4\pi(a+b)} = -\frac{A_0}{4\pi d}, \\ Q''_2 = +\frac{\varphi''\pi}{4\pi(a+b)} = +\frac{B_0}{4\pi d}. \end{cases}$$

La charge de la grille par unité de surface est égale et opposée à la somme des charges présentes sur les plateaux, donc :

$$Q'_1 = \frac{A_0}{2\pi d}, \quad Q''_1 = 0.$$

Lorsque la grille et le plateau AB ont des potentiels quelconques U_1 et U_2 par rapport à CD nous avons vu que la distribution du potentiel est donnée par (83) :

$$U = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right) U' + \frac{U_2}{2U_1} U''.$$

On aura donc :

$$\varphi = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right) \varphi' + \frac{U_2}{2U_1} \varphi''$$

et pour les charges, en posant :

$$(101) \quad a_0 = \frac{A_0}{U_1}, \quad b_0 = \frac{B_0}{U_1},$$

on obtient :

$$(102) \quad \begin{cases} Q_0 = \frac{a_0 - b_0}{8\pi d} U_2 - \frac{a_0}{4\pi d} U_1, \\ Q_2 = \frac{a_0 - b_0}{8\pi d} U_2 - \frac{a_0}{4\pi d} U_1, \\ Q_1 = \frac{a_0}{2\pi d} U_1 - \frac{a_0}{4\pi d} U_2. \end{cases}$$

Il en résulte en particulier pour la capacité de la grille et pour le coefficient d'influence mutuel des plateaux à travers la grille les valeurs, par unité de surface :

$$(103) \quad C_1 = \frac{a_0}{2\pi d}, \quad C_{02} = \frac{a_0 - b_0}{8\pi d}.$$

Les coefficients a_0 et b_0 , purement numériques, s'obtiennent par la résolution des systèmes d'équations linéaires établis pour la solution de chacun des deux problèmes symétrique (a_0) et antisymétrique (b_0).

Quand d est suffisamment grand, il résulte de la forme particulière que prennent alors nos groupes d'équations linéaires, que a_0 et b_0 se présentent sous les formes :

$$(104) \quad a_0 = \frac{\delta}{\delta + \alpha}, \quad b_0 = \frac{\delta}{\delta + \beta},$$

où les quantités α et β dépendent uniquement de la grille, par l'intermédiaire de ε et de ρ . Quand ε est nul (grille infiniment mince), nous avons vu que les valeurs limites de α et β sont :

$$\alpha = -L \sin \frac{\pi\rho}{2}, \quad \beta = 0.$$

Quand ρ est nul, la grille disparaît, α devient infini et β nul, de sorte que a_0 est nul et b_0 égal à l'unité. Pour ρ égal à 1, les fentes disparaissent, la grille devient une plaque continue, α et β deviennent égaux à $-\varepsilon$.

En substituant la valeur (104) de a_0 dans l'expression (103) de la capacité C_1 , on obtient pour celle-ci :

$$(105) \quad C_1 = \frac{1}{2[\pi d + \alpha(a + b)]},$$

avec ce résultat que l'influence des fentes sur la capacité de la grille, équivaut

à une augmentation de la distance des plateaux de chaque côté de la grille égale à :

$$\frac{\alpha - \varepsilon}{\pi} (a + b).$$

La simplicité de ce résultat est liée au fait que, lorsque la distance d devient suffisamment grande par rapport à $a + b$, le champ devient uniforme au voisinage des plateaux et que, dans ces conditions, pour une même distribution du champ au voisinage de la grille, et par conséquent pour une même distribution des charges à la surface de celle-ci, un accroissement de la distance d produit simplement un accroissement proportionnel dans les différences de potentiel U_1 et U_2 . Ces différences de potentiel sont donc des fonctions linéaires de la distance quand celle-ci devient suffisante, et c'est bien ce que traduit, en particulier, la forme (105) de la capacité de la grille.

Cette uniformité du champ au voisinage des plateaux permet également de résoudre le problème de la distribution du potentiel pour des valeurs données de celui-ci sur la grille et les plateaux lorsque ceux-ci sont à des distances différentes de la grille, ces distances d et d' restant suffisamment grandes par rapport à la période $a + b$.

Soit $A'B'$ (fig. 53) la position du plateau supérieur, à distance d' du plan médian de la grille, le plateau inférieur restant à distance d . Soit U'_2 le potentiel sur le plan $A'B'$, potentiel qui sera constant dans toute l'étendue de ce plan, en raison de l'uniformité du champ entre AB et $A'B'$. Ce champ a pour valeur, en vertu de (83) :

$$(106) \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \left(1 - \frac{U_2}{2U_1}\right) \frac{\partial U'}{\partial y} + \frac{U_2}{2U_1} \frac{\partial U''}{\partial y}.$$

Les valeurs à prendre pour U' et U'' sont celles qui conviennent pour la région supérieure du domaine, et qui sont données par les formules (92) et (96) respectivement. On en déduit :

$$(107) \quad \frac{\partial U'}{\partial y} = -\frac{A_0}{d}, \quad \frac{\partial U''}{\partial y} = \frac{B_0}{d},$$

pour les valeurs de η voisines de 2δ , où $\text{sh } 2n\delta$ est grand.

De même on déduit de (106), en y portant les valeurs (107) :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_2}{2d} (a_0 + b_0) - \frac{U_1}{d} a_0.$$

On a d'ailleurs, puisque ce champ est constant entre AB et $A'B'$:

$$U_2 = U_2 - (d - d') \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_2}{2d} [2d - (a_0 + b_0)(d - d')] + \frac{U_1}{d} a_0 (d - d'),$$

d'où :

$$U_2 = \frac{2dU_2 - 2(d - d') a_0 U_1}{2d - (a_0 + b_0)(d - d')}.$$

Il suffit de porter cette expression de U_2 dans la formule (83) pour avoir la distribution du potentiel entre la grille et les deux plateaux A'B' et CD lorsque le potentiel des A'B' est U'_2 et celui de la grille U , celui de CD étant toujours pris pour origine :

$$(108) \quad U = U' + \frac{dU'_2 - (d-d') a_0 U_1}{2d - (d-d') (a_0 + b_0)} \frac{U'' - U'}{U_1}.$$

La fonction de flux φ sera par conséquent :

$$(109) \quad \varphi = \varphi' + \frac{dU'_2 - (d-d') a_0 U_1}{2d - (d-d') (a_0 + b_0)} \frac{\varphi'' - \varphi'}{U_1}.$$

En tenant compte de (99) et (100), on obtient pour les charges par unité de surface des plateaux et de la grille :

$$(110) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_0 = \frac{(a_0 - b_0) d U'_2 - 2 [a_0 d - a_0 b_0 (d - d')] U_1}{4\pi d [2d - (a_0 + b_0) (d - d')]}, \\ Q_2 = \frac{(a_0 + b_0) U'_2 - 2a_0 U_1}{4\pi [2d - (a_0 + b_0) (d - d')]}, \\ Q_1 = \frac{[2a_0 d - a_0 b_0 (d - d')] U_1 - a_0 d U'_2}{2\pi d [2d - (a_0 + b_0) (d - d')]}. \end{array} \right.$$

De là résultent les valeurs de la capacité C_1 de la grille et du coefficient d'influence mutuelle des plateaux à travers la grille C_{02} :

$$(111) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{2a_0 d - a_0 b_0 (d - d')}{2\pi d [2d - (a_0 + b_0) (d - d')]}, \\ C_{02} = \frac{a_0 - b_0}{4\pi [2d - (a_0 + b_0) (d - d')]}. \end{array} \right.$$

Quand d est égal à d' on retrouve bien les expressions (103) que nous avons obtenues dans le cas symétrique.

Enfin, dans le cas de la plaque pleine, lorsque les fentes de la grille ont une largeur a nulle, les constantes α et β des formules (104) sont égales à $-\varepsilon$, on a donc :

$$a_0 = b_0 = \frac{\delta}{\delta - \varepsilon} = \frac{d}{d - c}$$

et les formules (111) deviennent :

$$\begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{4\pi (d - c)} + \frac{1}{4\pi (d - c)}, \\ C_{02} = 0, \end{array}$$

comme il est raisonnable, puisque la plaque est à des distances $d - c$ et $d' - c$ des deux plateaux, et que cette plaque pleine fait complètement écran à l'influence mutuelle des plateaux situés de part et d'autre d'elle.

TRAITEMENT DIRECT DU CAS DISSYMMÉTRIQUE PAR LA MÉTHODE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES. — Je vais, pour terminer, traiter directement, par la méthode des séries trigonométriques le cas général dissymétrique de la grille placée entre deux plateaux situés à des distances d et d' de part et d'autre du plan médian de celle-ci. Soient de nouveau 0 , U_1 , U_2' les potentiels imposés respectivement au plateau CD, à la grille et au plateau A'B'. La distribution du potentiel entre CD et le plan médian GH sera donnée par :

$$(112) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum A_n \frac{\text{sh } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \cos 2n\xi. \\ \text{La distribution entre GH et A'B' sera} \\ u' = U_2' - A_0 \frac{\delta + \delta' - \eta}{\delta'} - \sum A_n \frac{\text{sh } 2n(\delta + \delta' - \eta)}{\text{sh } 2n\delta'} \cos 2n\xi. \end{array} \right.$$

u s'annule sur CD en même temps que η et u' devient égal à U_2' sur A'B' pour η égal à $\delta - \delta'$. Les conditions à remplir par les A_n et les A'_n doivent traduire les faits suivants :

- 1° u doit être égal à U_1 sur RS en même temps que u' est égal à U_1 sur VT;
- 2° u doit être égal à U_1 sur SN et u' égal à U_1 sur NT;
- 3° Les deux fonctions u et u' doivent se raccorder sur NM' de façon que u et u' y prennent la même valeur en chaque point ainsi que leurs dérivées premières par rapport à η et à ξ .

Ainsi les deux fonctions harmoniques se raccorderont puisqu'il n'existera sur les bandes médianes des fentes, telles que NM', aucune couche double ni simple correspondant aux surfaces de discontinuité du potentiel ou du champ.

Nous aurons ainsi trois groupes d'équations linéaires auxquelles doivent satisfaire les A_n et les A'_n .

I. Le premier groupe sera analogue à (43) et s'écrira :

$$(113) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = A_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{1}{\pi\rho} \sum \frac{A_n \text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \sin n\pi\rho, \\ \sum \frac{nA_n}{n^2\rho^2 - m^2} \frac{\text{sh } 2n(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta} \sin n\pi\rho = 0; \\ U_1 = U_2' - A_0 \frac{\delta' - \varepsilon}{\delta'} \frac{1}{\pi\rho} \sum \frac{A'_n}{n} \times \frac{\text{sh } 2n(\delta' - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta'} \sin n\pi\rho, \\ \sum \frac{nA'_n}{n^2\rho^2 - m^2} \frac{\text{sh } 2n(\delta' - \varepsilon)}{\text{sh } 2n\delta'} \sin n\pi\rho = 0. \end{array} \right.$$

II. La seconde condition conduit à des équations analogues à (51) :

$$(114) \left\{ \begin{array}{l} U_1 = A_0 \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\delta} \right) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{n} \times \frac{\operatorname{ch} 2n\delta - \operatorname{ch} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos n\pi\rho, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nA_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{\operatorname{ch} 2n\delta - \operatorname{ch} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \times \cos n\pi\rho = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \right] \times \cos n\pi\rho = 0; \\ U_1 = U'_2 - A'_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta'} \right) - \frac{1}{2\varepsilon} \sum_1^{\infty} \frac{A'_n}{n} \times \frac{\operatorname{ch} 2n\delta' - \operatorname{ch} 2n(\delta' - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta'} \cos n\pi\rho, \\ \sum_1^{\infty} \frac{nA'_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{\operatorname{ch} 2n\delta' - \operatorname{ch} 2n(\delta' - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta'} \times \cos n\pi\rho = 0, \\ \sum_1^{\infty} \frac{A'_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \left[1 - \frac{\operatorname{sh} 2n(\delta' - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta'} \right] \times \cos n\pi\rho = 0. \end{array} \right.$$

III. La continuité entre u et u' le long de NM' donne :

$$(115) \left\{ \begin{array}{l} U'_2 = A_0 + A'_0 + \frac{1}{\pi(1-\rho)} \times \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{A_n + A'_n}{n} \sin n\pi(1-\rho), \\ \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{n(A_n + A'_n)}{n^2(1-\rho)^2 - m^2} \sin n\pi(1-\rho) = 0. \end{array} \right.$$

La continuité entre $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ et $\frac{\partial u'}{\partial \eta}$ le long de NM' donne :

$$(116) \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0}{\delta} - \frac{A'_0}{\delta'} + \frac{1}{\pi(1-\rho)} \sum (-1)^n \times (A_n \operatorname{coth} 2n\delta - A'_n \operatorname{coth} 2n\delta') \\ \times \sin n\pi(1-\rho) = 0, \\ \sum \frac{(-1)^n n^2}{n^2(1-\rho)^2 - m^2} \times (A_n \operatorname{coth} 2n\delta - \operatorname{coth} 2n\delta') \times \sin n\pi(1-\rho) = 0. \end{array} \right.$$

La continuité entre $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial u'}{\partial \xi}$ le long de NM' donne :

$$(117) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 (A_n + A'_n)}{n^2(1-\rho)^2 - m^2} \cos n\pi(1-\rho) = 0.$$

En liaison avec la distribution (112) du potentiel, celle de la fonction conjuguée φ prend dans les deux régions situées de part et d'autre du plan médian GH les valeurs :

$$(118) \quad \begin{cases} \varphi = A_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum A_n \frac{\text{ch } 2n\eta}{\text{sh } 2n\delta} \sin 2n\xi, \\ \varphi' = A'_0 \frac{\xi}{\delta'} + \sum A'_n \frac{\text{ch } 2n(\delta + \delta' - \eta)}{\text{sh } 2n\delta'} \sin 2n\xi. \end{cases}$$

Comme précédemment, on en déduit pour les charges Q_0 et Q_2 par unité de surface des plateaux CD et A'B' :

$$(119) \quad Q_0 = -\frac{A_0}{4\pi d}, \quad Q_2 = \frac{A'_0}{4\pi d'}.$$

La résolution de notre système d'équations linéaires donnera A_0 et A'_0 en fonction linéaire de U_1 et U'_2 et l'on déduira immédiatement de (119) les coefficients d'influence et les capacités.

La résolution du système d'équations se trouve extrêmement simplifiée dans le cas où la largeur a des fentes est égale à celle b des barreaux, c'est-à-dire où ρ est égal à $\frac{1}{2}$.

Il est en effet possible dans ce cas, en procédant comme nous l'avons fait antérieurement, de former un groupe d'équations linéaires ne renfermant plus, en dehors de A_0 et A'_0 que les inconnues d'indice impair A_{2p+1} et A'_{2p+1} . Ce groupe est le suivant :

$$(120) \quad \left\{ \begin{aligned} U_1 \frac{\delta}{\delta - \varepsilon} &= A_0 + \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^p S_{op}}{2p+1} A_{2p+2}, \\ (U'_2 - U_1) \frac{\delta'}{\delta' - \varepsilon} &= A'_0 + \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^p S'_{op}}{2p+1} A'_{2p+1}, \\ U'_2 &= A_0 + A'_0 - \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} (A_{2p+1} + A'_{2p+1}), \\ \frac{A_0}{\delta} - \frac{A'_0}{\delta'} &= \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} (-1)^p \times [\coth 2(2p+1)\delta A_{2p+1} \\ &\quad - \coth 2(2p+1)\delta' A'_{2p+1}], \\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)^2}{(2p+1)^2 - 4m^2} \times [(1 + S_{mp}) A_{2p+1} + (1 + S'_{mp}) A'_{2p+1}] &= 0, \\ 0 &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)^2}{(2p+1)^2 - 4m^2} \times \left[\left(\frac{2m}{2p+1} \coth 4m\delta S_{mp} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \coth 2(2p+1)\delta \right) A_{2p+1} - \left(\frac{2m}{2p+1} \coth 4m\delta' S'_{mp} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \coth 2(2p+1)\delta' \right) A'_{2p+1} \right]. \end{aligned} \right.$$

Avec les notations :

$$S_{mp} = \frac{\text{sh } 2(2p+1)(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2(2p+1)\delta} \frac{\text{sh } 4m\delta}{\text{sh } 4m(\delta - \varepsilon)},$$

$$S'_{mp} = \frac{\text{sh } 2(2p+1)(\delta' - \varepsilon)}{\text{sh } 2(2p+1)\delta'} \frac{\text{sh } 4m\delta'}{\text{sh } 4m(\delta' - \varepsilon)},$$

$$S_{0p} = \frac{\text{sh } 2(2p+1)(\delta - \varepsilon)}{\text{sh } 2(2p+1)\delta} \frac{\delta}{\delta - \varepsilon},$$

$$S'_{0p} = \frac{\text{sh } 2(2p+1)(\delta' - \varepsilon)}{\text{sh } 2(2p+1)\delta'} \frac{\delta'}{\delta' - \varepsilon}.$$

L'élimination de A_0 et A'_0 entre les quatre premières des équations (120) fournit les deux équations :

$$(121) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{U'_2 \varepsilon}{\delta' - \varepsilon} - \frac{U_1 \varepsilon (\delta - \delta')}{(\delta - \varepsilon)(\delta' - \varepsilon)} = \frac{2}{\pi} \sum_{2p+1} (-1)^p [(S_{0p} + 1) A_{2p+1} \\ \quad + (S'_{0p} + 1) A'_{2p+1}], \\ U_1 \left(\frac{1}{\delta - \varepsilon} + \frac{1}{\delta' - \varepsilon} \right) - \frac{U'_2}{\delta' - \varepsilon} = \frac{2}{\pi} \sum (-1)^p \left[\left(\frac{S_{0p}}{\delta(2p+1)} \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \coth 2(2p+1)\delta \right) A_{2p+1} - \left(\frac{S'_{0p}}{\delta'(2p+1)} + \coth 2(2p+1)\delta' \right) \right. \\ \quad \left. \left. \times A'_{2p+1} \right] \right\}.$$

Ces dernières équations, jointes à celles des deux dernières lignes de (120) permettent de déterminer les A_{2p+1} et les A'_{2p+1} qui, portés dans les deux premières équations (120) donneront A_0 et A'_0 .

Une approximation déjà suffisante consistera à donner à p les valeurs 0, 1, 2, et à prendre deux équations dans chacune des deux dernières lignes de (120) en donnant à m les valeurs 1 et 2.

Pour aller plus loin et en choisissant pour p les $p+1$ valeurs 0, 1, 2, ..., p ce qui donne $2(p+1)$ inconnues A_{2p+1} et A'_{2p+1} , on donnera à m les valeurs 1, 2, ..., p dans les deux dernières lignes de (120), ce qui fournira avec les deux équations (121) les $2p+2$ équations nécessaires pour déterminer ces $2p+2$ inconnues.

Travail fait à Troyes en 1942-1943.

II. IONS DE L'ATMOSPHERE

THE JOURNAL OF THE

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.