SOLIDOMETRYA

(STEREOMETRYA).

Czcigodnemu i niezmordowanemu Pracownikowi
na polu matematycznéj wiedzy
Augustynowi Frączkiewiczowi
Professorowi b. Uniwersytetu Warszawskiego
obecnie zaś Dziekanowi i Professorowi Szkoły Głównej Warszawskiéj
na pamiątkę odbytego przed Nim examinu nauczycielskiego
w dowód wysokiego szacunku i poważania
ofiaruje tę pracę

[illegible]

Warszawa dnia 16. Marca [illegible] r.

KURS
SOLIDOMETRYI
(STEREOMETRYI)

NAPISANY

PRZEZ

Józefa Krysińskiego.

Ze 160 drzeworytami, w tekscie umieszczonemi.

WARSZAWA.
NAKŁADEM AUTORA.
1865.

Wolno drukować, pod warunkiem złożenia w Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu, prawem przepisanéj liczby egzemplarzy.

w Warszawie, dnia 20 Lutego (4 Marca) 1865 r.

p. o. Cenzora, **J. A. Rogalski.**

w Drukarni Gazety Polskiéj.

PRZEDMOWA.

Pisząc Solidometryą, nie było zamiarem moim obszerne wypracować dzieło i przedmiot w zupełności wyczerpać: chciałem jedynie w systematycznym wykładzie skreślić kurs elementarny do planu szkolnego zastosowany, któryby mógł służyć za podręcznik dla uczącéj się młodzieży. Za tą idąc myślą, starałem się przedewszystkiém o jasność i zrozumiałość, a dla elementarności nieraz prawdziwą matematyczną zwięzłość poświęciłem.

Dla uogólnienia obliczeń bryłowatości kloców graniastosłupowych, wprowadziłem sposób jéj dochodzenia za pomocą tak zwanéj linii przebiegu środka ciężkości. *Sposób ten dozwalający obliczać bryłowatość kloców graniastosłupowych i walcowych, opiera się jedynie na wynalezieniu środka ciężkości wielokąta, co powinno już być znane słuchającym wykładu Solidometryi.*

Bryły okrągłe, mianowicie walce i ostrokręgi, uważałem jako granice do których dążą graniastosłupy i ostrosłupy w miarę powiększania się liczby ścian. Metoda ta najlepiéj trafia do przekonania młodzieży.

Wyrażenie równoległościan prosty i prostokątny *zdawało mi się zbyt długą i niezręczną w użyciu nazwą. Biorąc pod uwagę, że wszystkie ściany téj bryły są wzajem do siebie prostopadłe, co jest charakterystyczną i zupełnie odróżniającą cechą, nazwałem bryłę tę* prostopadłościanem, *na podobieństwo* równoległościanu.

Zrozumienie dowodzeń w Solidometryi, wymaga głównie dokładnego pojęcia figury. Zwróciłem téż baczną na rysunek uwagę, starając się przedstawić figury tak, aby były zrozumiałe każdemu chociażby nie mającemu pojęcia o saméj nauce i aby na pierwszy rzut oka można było rozpoznać przedmiot rysunkiem wyobrażony. Umieściłem figury w tekscie, nie szczędząc żadnych w téj mierze kosztów, żeby ułatwić czytanie i zapobiedz żmudnéj a odrywającéj uwagę pracy, szukania figur w tablicach na końcu książki umieszczonych.

Wreszcie, dla dania uczącym się sposobności probowania sił na drodze samoistnego dochodzenia, zakończyłem kurs Solidometryi zadaniami teoretycznemi i praktycznemi. Odpowiedzi na niektóre zadania zamieściłem, a inne opuściłem. Są odpowiedzi, które same przez się drogę postępowania wyjaśniają, zamieszczenie ich więc byłoby sprzeczne z celem przezemnie zamierzonym.

SPIS PRZEDMIOTÓW.

OMYŁKI W CZASIE DRUKU.

Stron:	*wiersz:*	*zamiast:*	*czytaj:*
51	14 od góry	w kącie bryłowym trójściennym	w kącie bryłowym wielościennym
152	10 od dołu	graniastosłup pochyły	kloc graniastosłupowy pochyły
163	13 od dołu	fig. 137	n° 137.

ROZDZIAŁ I.

O LINIACH PROSTYCH I PŁASZCZYZNACH PRZECINAJĄCYCH SIĘ Z PŁASZCZYZNAMI.

---

1. Wiadomo, że płaszczyzna jest to powierzchnia, do któréj przyłożona linia prosta i obracana w różne strony, zawsze wszystkiemi punktami do niéj przystaje; a że przez dwa punkta tylko jedna linia prosta przechodzić może, więc prosta mająca dwa punkta wspólne z płaszczyzną, cała do niéj przystaje, czyli leży na téj płaszczyznie.

Przez jedną linię prostą można przeprowadzić nieskończoną liczbę płaszczyzn; o czém łatwo się przekonać wyobrażając sobie, że około prostéj danéj obraca się płaszczyzna, która w czasie takowego obrotu coraz zmieniając swoje położenie, przedstawia coraz inną płaszczyznę przez daną prostą przechodzącą.

Ponieważ zaś przez jeden punkt przeprowadzić można nieskończoną liczbę linii prostych, więc można także przez jeden punkt przeprowadzić nieskończoną liczbę płaszczyzn.

2. Tak jak linie proste dają się do nieskończoności przedłużać w obie strony, tak téż i płaszczyzny we wszystkie strony rozszerzać się mogą.

Twierdzenie.

3. *Dwie proste przecinające się oznaczają położenie płaszczyzny.*

Założenie. Dwie linie proste AB i BC (fig. 1) przecinające się w punkcie B leżą na jednéj płaszczyznie.

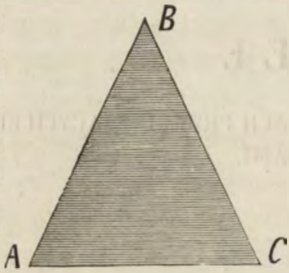


Fig. 1.

Dowodzenie. Przez linią AB przeprowadzam płaszczyznę i obracam ją około téj linii tak, ażeby natrafiła na którykolwiek punkt linii BC, np. na punkt C. Wówczas linia BC mieć będzie dwa punkta B i C wspólne z płaszczyzną a tém samém leżeć będzie na téj płaszczyznie. *Dwie linie więc, i t. d.* co było do okazania.

Ztąd wypada, że:

a) Trzy punkta nie leżące na jednéj linii prostéj, jak np. A, B i C (fig. 1).

b) Linia prosta i punkt zewnątrz niéj wzięty, jak np. linia AB i punkt C (fig. 1) leżą na jednéj płaszczyznie.

Nakoniec:

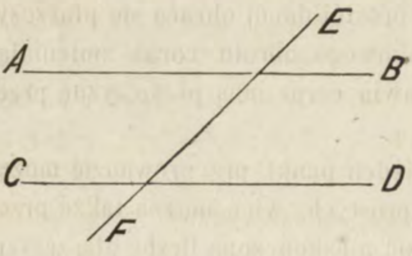


Fig. 2.

c) Dwie linie od siebie równoodległe, jak np. AB i CD (fig. 2) leżą także na jednéj płaszczyznie, bo przeciąwszy je sieczną EF, przypadek ten sprowadza się do nº 3.

Twierdzenie.

4. *Wspólne przecięcie się dwóch płaszczyzn jest linią prostą.*

Założenie. Niech będą (fig. 3) dwie płaszczyzny AB i BC przecinające się z sobą, trzeba dowieść że ich wspólne przecięcie BD jest linią prostą.

Dowodzenie. Gdyby linia BD nie była prostą, to możnaby obrać na niéj trzy punkta np. B, E i D, któreby na jednéj linii prostéj nie leżały. Ponieważ zaś te trzy punkta B, E i D są obrane na wspólném przecięciu danych dwóch płaszczyzn AB i BC, więc należałyby tém samém tak do jednéj jak do drugiéj płaszczyzny. Przez **trzy** zatém punkta nie będące na jednéj linii prostéj, możnaby przeprowadzić dwie różne płaszczyzny, co być nie może (nº 3, *a*). *A zatém wspólne przecięcie się dwóch płaszczyzn i t. d.* co było do okazania.

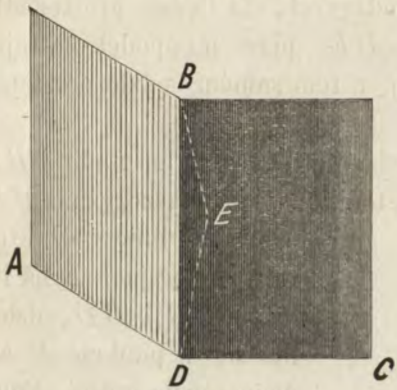


Fig. 3.

5. Linia prosta jest wówczas równoodległą od płaszczyzny, gdy przedłużona jak najdaléj w obie strony, nigdy téj płaszczyzny nie spotka.

6. Punkt w którym linia spotyka płaszczyznę, lub się z nią przecina, nazywa się *spodkiem* linii.

7. Linia prosta jest prostopadłą do płaszczyzny, gdy jest prostopadłą do wszystkich linii przez jéj spodek na téj płaszczyznie przechodzących.

Twierdzenie.

8. *Jeżeli linia prosta jest prostopadłą do dwóch linii przez jéj spodek na płaszczyznie przechodzących, to jest prostopadłą i do każdéj innéj prostéj, przez jéj spodek na téj płaszczyznie przechodzącej, a tém samém prostopadłą i do płaszczyzny* (n° 7).

Założenie. Jeżeli linia AB (fig. 4) jest prostopadłą do dwoch linii prostych BC i BD przez jéj spodek B na płaszczyznie MN przechodzących, to będzie prostopadłą i do każdéj innéj linii np. BE, przez jéj spodek na téjże płaszczyznie przechodzącéj, a tém samém będzie prostopadłą do płaszczyzny.

Dowodzenie. Na dowodzenie tego obieram na linii BE dowolny punkt E, i przez ten punkt na płaszczyznie MN prowadzę linię CD, któraby opierając się na liniach BC i BD, dzieliła się w punkcie E na dwie równe części. Punkta C, E i D, z punktem A łączę liniami prostemi i uważam: że w trójkącie CAD środek podstawy CD, to jest punkt E, połączony jest z wierzchołkiem A linią prostą AE, zatém jest:

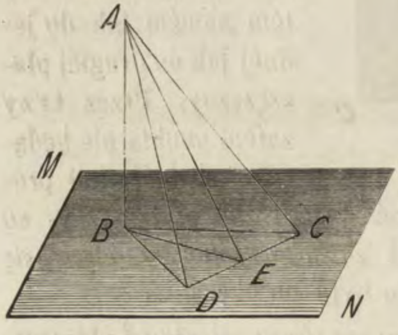


Fig. 4.

$$1) \quad \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = 2\,\overline{AE}^2 + 2\,\overline{DE}^2$$

Podobnież w trójkącie CBD leżącym na płaszczyznie MN jest:

$$2) \quad \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 = 2\,\overline{BE}^2 + 2\,\overline{DE}^2$$

Odjąwszy drugie równanie od pierwszego będzie:

$$3)\quad (\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2) + (\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2) = 2\,\overline{AE}^2 - 2\,\overline{BE}^2$$

Ponieważ trójkąty ABC i ABD są prostokątne, gdyż z założenia linia AB jest prostopadłą tak do BC jak i do BD, więc w równaniu (3):

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 \quad \text{i} \quad \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$$

Równanie to więc zamieni się na:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 \quad \text{czyli} \quad 2\,\overline{AB}^2 = 2\,\overline{AE}^2 - 2\,\overline{BE}^2.$$

Podzieliwszy to ostatnie równanie przez 2, wypadnie:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{BE}^2.$$

A że to gdzieindziéj być nie może, jak tylko w trójkącie prostokątnym, żeby kwadrat z jednego boku był równy różnicy kwadratów z dwóch drugich boków, więc trójkąt ABE jest prostokątnym, a bok najdłuższy AE przeciwprostokątną. Kąt zatém ABE jest prosty i linia AB jest prostopadłą do BE, dowolnie przez jéj spodek na płaszczyznie MN poprowadzonéj, a ztąd i prostopadłą do płaszczyzny MN, co było do okazania.

Twierdzenie powyższe można jeszcze dowieść w inszy sposób, a mianowicie:

Dowodzenie 2gie. Linię AB przedłużam tak, aby przedłużenie BF było równe AB (fig. 5), nadto linie BC,

BE i BD przecinam dowolną linią prostą DC. Punkta C, E i D z punktami A i F łączę liniami prostemi i uważam, że ponieważ z wykreślenia $AB = BF$ a z założenia AF jest prostopadłą do BC, więc $AC = CF$ jako pochyłe równo oddalone od spodka prostopadłéj. Podobnież, ponieważ $AB = BF$ i nadto AB prostopadła do BD, więc $AD = DF$. Dwa więc trójkąty ACD i FCD mają bok $AC = CF$ i bok $AD = DF$ z dowiedzenia, a bok DC wspólny, więc są sobie równe, a z ich równości wypada, że kąt $ADE = FDE$. Uważam teraz dwa trójkąty ADE i FDE, które mają bok $AD = FD$ z dowiedzenia, bok DE wspólny i kąt $ADE = FDE$ także z dowiedzenia, więc trójkąty te są sobie równe, a ztąd bok $AE = FE$. Linia więc BE ma dwa punkta B i E równo oddalone od końców linii AF, jest więc do téj linii prostopadłą i nawzajem linia AF jest prostopadłą do BE, a tém samém prostopadłą do wszelkiéj innéj linii przez jéj spodek na płaszczyznie MN przechodzącéj, czyli jest prostopadłą do płaszczyzny. *Jeżeli zatém linia prosta jest prostopadłą do dwóch linii i t.d.* co było do okazania.

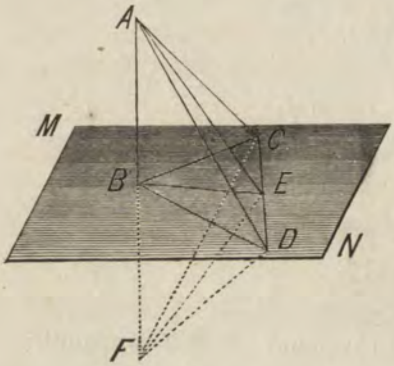


Fig. 5.

Twierdzenie.

9. *Przez punkt wzięty na płaszczyznie, jedną tylko prostopadłę do téj płaszczyzny poprowadzić można.*

Założenie. Przez punkt A (fig. 6) wzięty na płaszczyznie MN jedną tylko prostopadłę AB do téj płaszczyzny poprowadzić można.

Dowodzenie. Przypuśćmy, że przez punkt A drugą prostopadłę AC do płaszczyzny MN poprowadzić można, to przeprowadziwszy przez linie AB i AC płaszczyznę (nº 3), ona przetnie się z płaszczyzną MN po prostéj DE (nº 4).

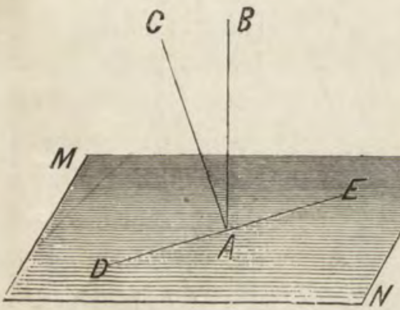


Fig. 6.

Ponieważ linia AB z założenia jest prostopadłą do płaszczyzny MN, więc jest prostopadłą i do linii DE przez jéj spodek A na téj płaszczyznie MN przechodzącéj. A że linia AC z przypuszczenia ma być prostopadłą do płaszczyzny MN, więc byłaby także prostopadłą do linii DE (nº 7). Przez jeden więc punkt A, możnaby na płaszczyznie CAB poprowadzić dwie prostopadłe do linii DE, co być nie może. *A więc przez punkt wzięty na płaszczyznie i t. d.*, co było do okazania.

Twierdzenie.

10. *Z punktu danego nad płaszczyzną, tylko jedną prostopadłę do téj płaszczyzny spuścić można.*

Założenie. Z punktu A wziętego nad płaszczyzną MN (fig. 6^a), tylko jedną prostopadłę AB do téj płaszczyzny spuścić można.

Dowodzenie. Gdyby przez punkt A można było do płaszczyzny MN poprowadzić drugą prostopadłę np. AC, to przesunąwszy przez dwie linie AB i AC płaszczyznę, płaszczyzna ta przetnie się z płaszczyzną MN po prostéj BC. Ponieważ z założenia prosta AB jest prostopadłą do płaszczyzny MN, więc jest także prostopadłą i do linii BC, jako przechodzącéj przez jéj spodek i leżącéj na płaszczyznie MN. Że zaś linia AC jest z przypuszczenia prostopadłą do płaszczyzny MN, więc byłaby także prostopadłą i do linii BC. Na płaszczyznie więc ABC, możnaby z punktu A spuścić dwie prostopadłe do prostéj BC, co być nie może. *A więc przez punkt wzięty nad płaszczyzną i t. d.*, co było do okazania.

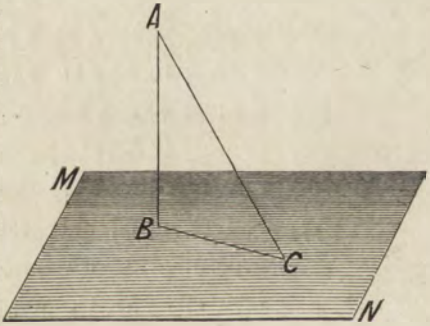


Fig. 6 *a*.

11. *Uwaga*. Ponieważ przez punkt wzięty nad płaszczyzną, jedną tylko prostopadłę do płaszczyzny poprowadzić można, więc prostopadła ta mierzy prawdziwą odległość punktu od płaszczyzny. Odległość ta bowiem mierzona po prostopadłéj zawsze wypadnie jedna i ta sama, gdy tymczasem mierzona po każdéj innéj linii z tego punktu do płaszczyzny poprowadzonéj, jak się to zaraz poniżéj okaże, wypadałaby coraz insza, pomimo, że oddalenie punktu od płaszczyzny pozostałoby nie zmienne.

Twierdzenie.

12. *Jeżeli z punktu wziętego nad płaszczyzną spuścimy do niéj prostopadłę i ilekolwiek pochyłych, to będzie: 1° Prostopadła krótszą od każdéj pochyłéj, a więc najkrótszą ze wszystkich linii jakie z punktu wziętego nad płaszczyzną do téj płaszczyzny poprowadzić można. 2° Pochyłe równooddalone od spodka prostopadłéj, będą sobie równe. 3° Z dwóch pochyłych ta będzie dłuższa, która się bardziéj od spodka prostopadłéj oddala.*

Założenie. Jeżeli z punktu A (fig. 7) śpuścimy prostopadłą AB do płaszczyzny MN tudzież pochyłe AC, AD, AE, *i t. d.*, to prostopadła AB będzie krótszą od każdéj pochyłéj, np. od pochyłéj AC, a tém samém będzie najkrótszą ze wszystkich linii jakie z punktu A do płaszczyzny MN poprowadzić można. Pochyłe AC, AD i AE równooddalone od punktu B, spodka prostopadłéj AB, będą sobie równe, a z pochyłych nie równo oddalonych od spodka prostopadłéj, pochyła AG będzie dłuższą np. od AE zakładając że $BG > BE$.

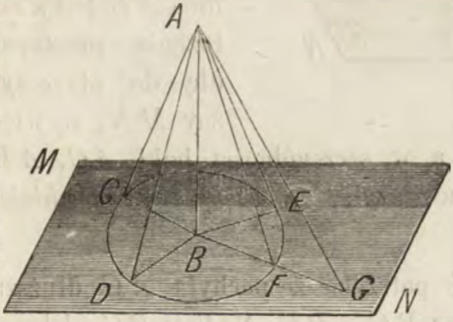


Fig. 7.

Dowodzenie. Ponieważ linia AB jest prostopadłą do płaszczyzny MN, więc jest prostopadłą i do linii BC przechodzącéj przez jéj spodek B, a leżącéj na płaszczyznie MN; trójkąt więc ABC jest prostokątny przy B, i AB jako ramię kąta prostego jest mniejsze od przeciwprostokątnéj AC, czyli, *że prostopadła jest krótszą od każdéj pochyłéj a tém samém i t. d.*

Dla dowiedzenia że pochyłe AC, AD i AE równo oddalone od spodka prostopadłéj są sobie równe, uważam trójkąty ABC, ABD i ABE. Trójkąty te mają bok AB wspólny, boki BC, BD i BE z założenia równe między sobą i kąty ABC, ABD i ABE równe jako kąty proste, bo linia AB jest z założenia prostopadłą do płaszczyzny MN, są więc

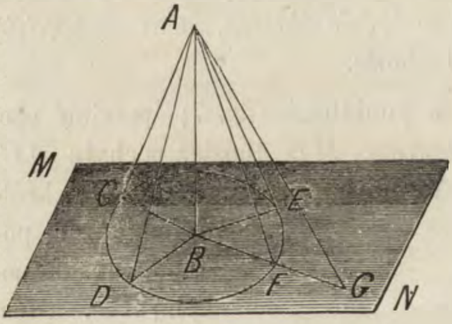


Fig. 7.

między sobą równe, a w szczególności boki AC, AD i AE są sobie równe, czyli, *że pochyłe równooddalone i t. d.*

Nakoniec dowieść potrzeba że pochyła AG dłuższą jest od AE, zakładając $BG > BE$. Na linii BG odcinam $BF = BE$ i łączę punkt A z punktem F linią prostą, to na płaszczyznie ABG jest, jak wiadomo z Planimetryi, $AG > AF$. A że $AF = AE$ bo $BE = BF$ z wykreślenia, więc jest $AG > AE$, czyli, *że z pochyłych ta jest dłuższą i t. d.* co było do okazania.

13. *Uwaga.* Spodki pochyłych równych znajdują się na jednym okręgu koła, którego środkiem jest spodek prostopadłéj.

Z téj uwagi nastręcza się sposób praktyczny, spuszczania z punktu wziętego nad płaszczyzną, prostopadłéj do téj płaszczyzny. Natrafić tu możemy na dwa przypadki:

1° Jeżeli płaszczyzna jest poziomą, wówczas kierunek pionu, czyli sznurka, u którego końca zawieszony jest ciężarek, wskazywać będzie prostopadłę do téj płaszczyzny.

2° Jeżeli płaszczyzna ma położenie pochyłe do poziomu, wówczas z punktu danego prowadzą się do téj płaszczyzny trzy pochyłe równe, przez ich spodki przeprowadza się okrąg koła, którego środek będzie spodkiem prostopadłéj; połączywszy więc środek tego koła z punktem danym linią prostą, otrzymamy żądaną prostopadłę.

Twierdzenie.

14. *Jeżeli ze spodka prostopadłéj do płaszczyzny poprowadzimy prostopadłę do linii leżącéj na płaszczyznie, i spodek téj drugiéj prostopadłéj połączymy z którymkolwiek punktem pierwszéj prostopadłéj linią prostą, to ta linia będzie także prostopadłą do owéj linii leżącéj na płaszczyznie.*

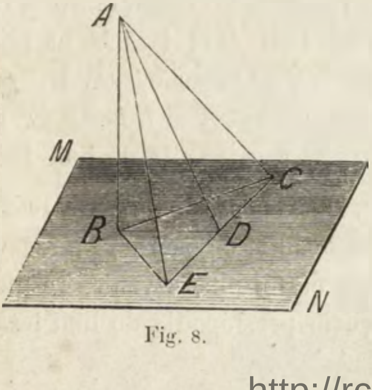


Fig. 8.

Założenie. Jeżeli z punktu B, spodka linii AB (fig. 8) prostopadłéj do płaszczyzny MN, poprowadzimy linię BD prostopadłą do linii CE leżącéj na płaszczyznie MN, i spodek téj drugiéj prostopadłéj, to jest punkt D połączymy z którymkolwiek punktem prostopadłéj AB, np. z A prostą AD, to ta prosta AD będzie prostopadłą do linii CE.

Dowodzenie. Na dowodzenie tego robię $DC = DE$ i punkta C i E z punktami A i B łączę liniami prostemi. Ponieważ z założenia jest BD prostopadłą do EC, a nadto $DC = DE$, więc téż jest i $BC = BE$ jako pochyłe równo oddalone od spodka prostopadłéj BD. A skoro $BC = BE$ więc i $AC = AE$ jako pochyłe równo oddalone od spodka prostopadłéj

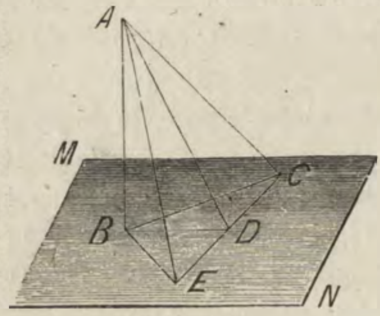


Fig. 8.

AB. Dwa więc trójkąty ADC i ADE mają bok AD wspólny, bok $DC = DE$ z wykreślenia i bok $AC = AE$ z dowiedzenia, są więc sobie równe, a z ich równości wypada, że kąt $ADC = ADE$; że zaś to są kąty przyległe i są sobie równe, więc muszą być proste, a zatém linia AD jest prostopadłą do EC. *Jeżeli więc ze spodka prostopadłéj do płaszczyzny i t. d.*, co było do okazania.

15. *Wniosek.* Ponieważ prosta EC jest z wykreślenia prostopadłą do BD, a z dowiedzenia prostopadłą do AD, więc jest prostopadłą do dwóch linii BD i AD na płaszczyznie ABD przez jéj spodek D przechodzących, zatém jest prostopadłą i do téj płaszczyzny ABD. Nawzajem więc płaszczyzna ABD jest prostopadłą do linii EC.

16. *Uwaga.* Jeżeli w trójkącie prostokątnym, jedno ramię kąta prostego jest prostopadłe do pewnéj płaszczyzny, a drugie do linii leżącéj na téj płaszczyznie, to nietylko przeciwprostokątna będzie prostopadłą do linii leżącéj na płaszczyznie, ale i cała powierzchnia trójkąta będzie do owéj linii prostopadłą, i nawzajem linia ta będzie do płaszczyzny trójkąta prostopadłą.

Twierdzenie.

17. *Dwie linie proste, prostopadłe do jednéj płaszczyzny, są od siebie równoodległe.*

Założenie. Niech będą dwie linie proste AB i CD (fig. 9) prostopadłe do płaszczyzny MN, mam dowieść, że te dwie linie są od siebie równoodległe.

Dowodzenie. Na dowodzenie tego łączę punkt B z punktem D linią prostą. Ponieważ linia BD ma dwa punkta B i D wspólne z płaszczyzną MN, więc leży na téj płaszczyznie (nº 1); a że linia AB jest z założenia prostopadłą do płaszczyzny MN, więc jest prostopadłą i do linii BD (nº 7). Dla téj saméj przyczyny linia CD jest prostopadłą do BD; dwie więc te linie AB i CD są prostopadłe do jednéj linii prostéj BD, zatém są od siebie równoodległe. *A więc dwie linie prostopadłe do jednéj płaszczyzny i t. d.* co było do okazania.

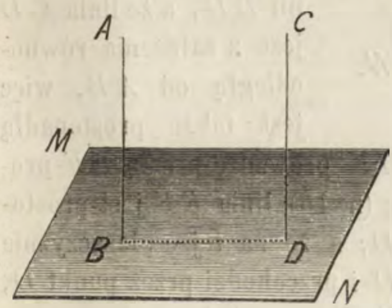


Fig. 9.

Twierdzenie.

18. *Z dwóch linii równoodległych, jeżeli jedna jest prostopadłą do płaszczyzny, to i druga jest także do téj płaszczyzny prostopadłą.*

Założenie. Niech będą dwie linie AB i CD (fig. 10) od siebie równoodległe. Zakładam że linia AB jest prostopadłą do płaszczyzny MN, mam dowieść że i linia CD będzie do płaszczyzny MN prostopadłą.

Dowodzenie. Na dowodzenie tego, przez dwie linie równoodległe AB i CD przeprowadzam płaszczyznę (n° 3, c), która przetnie się z płaszczyzną MN po linii prostéj BD. Ponieważ AB jest z założenia prostopadłą do płaszczyzny MN, więc jest prostopadłą i do linii BD, a że linia CD jest z założenia równoodległą od AB, więc jest także prostopadłą

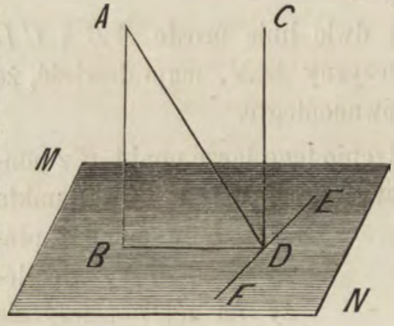


Fig. 10.

do BD. Na płaszczyznie MN prowadzę prostą EF prostopadłą do BD, to podług (n° 15) linia EF jest prostopadłą do płaszczyzny ABD; a że na tejże płaszczyznie znajduje się także i linia CD i przechodzi przez punkt D, który jest spodkiem prostéj EF względem płaszczyzny $ABDC$, więc jest EF prostopadłą i do linii CD, a nawzajem CD prostopadłą do prostéj EF. Linia więc CD jest prostopadłą do dwóch prostych BD i EF przez jéj spodek na płaszczyznie MN przechodzących, więc jest prostopadłą i do płaszczyzny (n° 8). *Z dwóch zatém linii równoodległych i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

19. *Dwie linie proste równoodległe od trzeciéj, są równoodległe między sobą.*

Założenie. Niech będzie linia AB równoodległą od CD i linia EF także równoodległą od CD (fig. 11), mam dowieść, że linia AB będzie równoodległą od EF.

Dowodzenie. Na dowodzenie tego wszystkie trzy proste AB, CD i EF przecinam płaszczyzną MN prostopadłą do linii CD.

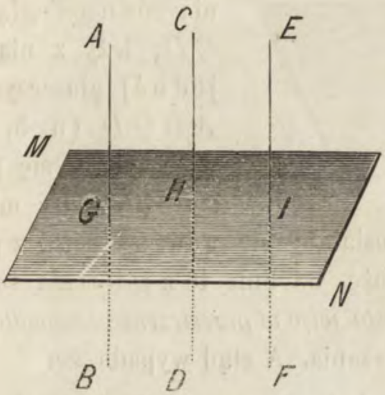


Fig. 11.

Ponieważ prosta AB z założenia jest równoodległą od CD, a CD z wykreślenia prostopadłą do MN, więc i AB jest prostopadłą do MN (nº 18). Podobnie, ponieważ prosta EF jest równoległą od CD, więc jest także prostopadłą do płaszczyzny MN. Dwie więc proste AB i EF prostopadłe do jednéj płaszczyzny MN, są od siebie równoodległe (nº 17). *A więc dwie linie równoodległe od trzeciéj i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

20. *Jeżeli prosta w przestrzeni jest równoodległą od prostéj leżącéj na płaszczyznie, to jest i równoodległą od tejże płaszczyzny.*

Założenie. Prosta AB (fig. 12) w przestrzeni położona, równoodległa od prostéj CD leżącéj na płaszczyznie MN, jest od tejże płaszczyzny MN równoodległą.

Dowodzenie. Gdyby prosta AB nie była równoodległą od płaszczyzny MN, to dostatecznie przedłużone tak prosta jak i płaszczyzna zeszłyby się z sobą. A ponieważ prosta AB, będąc z założenia równoodległą od CD, leży z nią na jednéj płaszczyznie $ABCD$ (nº 3, c), więc gdyby się prosta AB zejść miała z płaszczyzną MN, musiałaby się wówczas zejść z prostą CD, co być nie może, bo linie te z założenia są od siebie równoodległe. *Prosta więc w przestrzeni równoodległa od i t. d.* co było do okazania. A ztąd wypada, że:

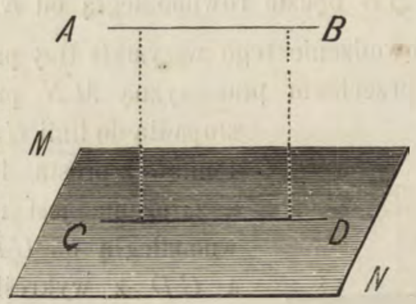


Fig. 12.

21. *Wniosek.* Jeżeli dwie proste są od siebie równoodległe, a przez jednę z nich przeprowadzimy płaszczyznę, to ta płaszczyzna będzie równoodległą i od drugiéj prostéj, i nawzajem druga prosta będzie równoodległą od płaszczyzny przechodzącéj przez pierwszą.

Twierdzenie.

22. *Jeżeli przez linią równoodległą od płaszczyzny, przeprowadzimy inną płaszczyznę przecinającą się z płaszczyzną daną, to wspólne przecięcie się tych dwóch płaszczyzn, będzie równoodległe od tejże linii.*

Założenie. Jeżeli linia AB jest równoodległą od płaszczyzny MN (fig. 13), i jeżeli przez AB przeprowadzimy płaszczyznę $ABCD$, przecinającą się z płaszczyzną

MN po prostéj CD, to dowieść potrzeba, że to wspólne przecięcie jest równoodległe od AB.

Dowodzenie. Ponieważ prosta AB jest z założenia równoodległą od płaszczyzny MN, więc zejść się z tą płaszczyzną nie może. Nie mogąc się zaś zejść z płaszczyzną MN, nie może się także zejść i z prostą CD, leżącą na płaszczyznie MN; a że linia AB z linią CD leżą na jednéj płaszczyznie $ABCD$ i zejść się z sobą nie mogą, więc są od siebie równoodległe. *A zatém, jeżeli przez linię równoodległą i t. d.* co było do okazania. Ztąd wypada że:

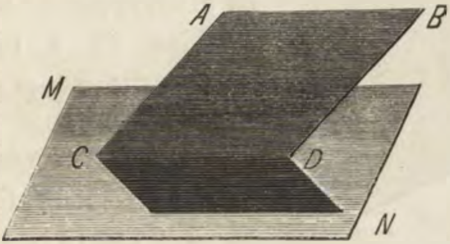


Fig. 13.

23. *Wniosek 1szy.* Jeżeli od linii w przestrzeni równoodległéj od płaszczyzny danéj, poprowadzimy przez punkt wzięty na téj płaszczyznie, linię równoodległą, to ta ostatnia przystawać będzie do płaszczyzny danéj.

24. *Wniosek 2gi.* Jeżeli przez każdą z dwóch prostych od siebie równoodległych przesuniemy płaszczyzny przecinające się z sobą, to wspólne przecięcie się tych dwóch płaszczyzn będzie linią równoodległą od linii danych. Tak np.: Jeżeli przez dwie proste dane AB i CD (fig. 14) od siebie równoodległe, przesuniemy dwie oddzielne płaszczyzny MN i OP, to ich wspólne przecięcie NO, będzie od danych dwóch prostych AB i CD równoodległe.

Prosta CD będąc z założenia równoodległą od linii AB leżącéj na płaszczyznie MN, jest od tejże płaszczyzny równoodległą; płaszczyzna więc OP przechodząc przez linię CD równoodległą od płaszczyzny MN, przecina się z tąż płaszczyzną po prostéj NO równoodległéj od CD a tém samém i równoodległéj od AB (nº 19), co też było do okazania.

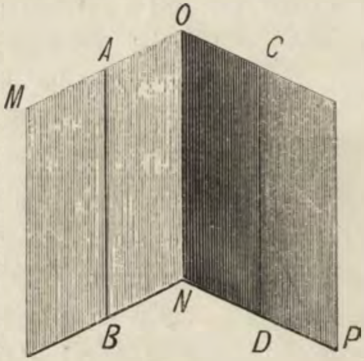


Fig. 14.

25. *Wniosek 3ci* Linia prosta równoodległa od dwóch płaszczyzn przecinających się z sobą, jest i od ich wspólnego przecięcia się równoodległą. Tak np. linia AB równoodległa od dwóch płaszczyzn MN i OP (fig. 15), jest równoodległą i od ich wspólnego przecięcia NO. Obrawszy bowiem na tém wspólném przecięciu się NO punkt N, należący tém samém i do płaszczyzny MN i do płaszczyzny OP i wyobraziwszy sobie w myśli, przeprowadzoną przez ten punkt N, prostą równoodległą od AB, to podług wniosku pierwszego z tego twierdzenia, linia ta musiałaby się znaj-

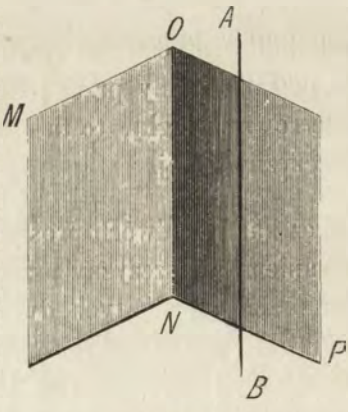


Fig. 15.

dować razem i na płaszczyznie MN i na płaszczyznie OP, musi więc znajdować się na ich wspólném przecięciu NO. Zatém AB jest równoodległą od NO, co było do okazania.

Twierdzenie.

26. *Dwie płaszczyzny prostopadłe do jednéj linii prostéj, są od siebie równoodległe.*

Założenie. Niech będą dwie płaszczyzny MN i OP (fig. 16) prostopadłe do linii prostéj AB, trzeba dowieść, że są od siebie równoodległe.

Dowodzenie. Gdyby te dwie płaszczyzny MN i OP, nie były od siebie równoodległe, to przedłużone dostatecznie, przecięłyby się z sobą np. po prostéj CD (nº 4). Obrawszy na tém wspólném przecięciu CD punkt np. E, punkt ten należałby tak do płaszczyzny MN jak i do płaszczyzny OP. Gdybyśmy połączyli punkt E z punktem B

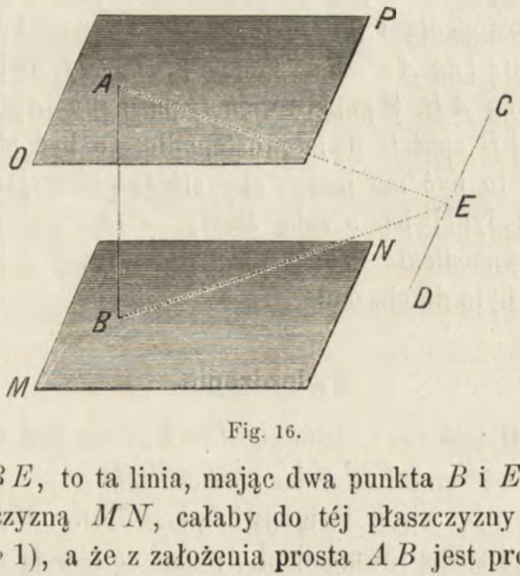


Fig. 16.

prostą BE, to ta linia, mając dwa punkta B i E wspólne z płaszczyzną MN, całaby do téj płaszczyzny przystawała (nº 1), a że z założenia prosta AB jest prostopadłą do płaszczyzny MN, więc byłaby prostopadłą i do linii BE (nº 7), i nawzajem prosta EB byłaby do AB prostopadłą. Podobnież, gdyby się połączyło punkt A z punktem E linią prostą AE, cała ta linia przystawałaby

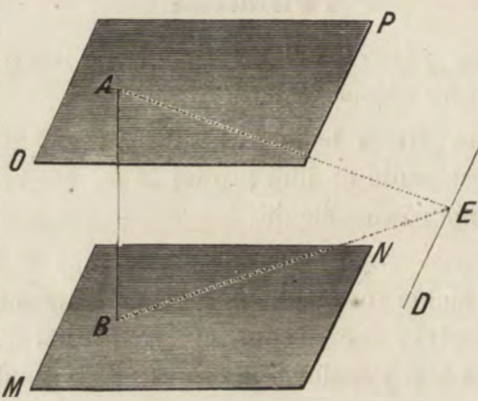


Fig. 16.

do płaszczyzny OP; a że prosta AB jest z założenia także prostopadłą i do płaszczyzny OP, więc byłaby też prostopadłą i do AE, a nawzajem prosta AE byłaby prostopadłą do AB. Z punktu więc E możnaby do jednéj linii prostéj AB spuścić dwie prostopadłe, co być nie może, a więc i to być nie może, aby się te płaszczyzny MN i OP kiedykolwiek z sobą zeszły, a tém samém są od siebie równoodległe. *Dwie zatém płaszczyzny prostopadłe i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

27. *Wspólne przecięcia się dwóch płaszczyzn równoodległych z trzecią, są od siebie równoodległe.*

Założenie. Niech będą dwie płaszczyzny MN i OP (fig. 17) od siebie równoodległe, przecięte trzecią $ABCD$, mam dowieść że ich wspólne przecięcia się AB i CD są od siebie równoodległe.

Dowodzenie. Gdyby prosta AB nie była równoodległą od CD, to te dwie linie dostatecznie przedłużone zeszłyby się z sobą. A ponieważ prosta AB cała znajduje

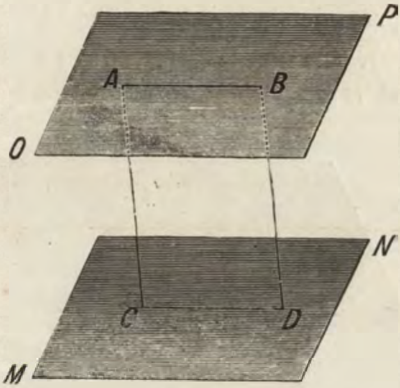


Fig. 17.

się na płaszczyźnie OP, a prosta CD na płaszczyźnie MN, i oderwanemi od swych płaszczyzn być nie mogą, więc za zejściem się prostéj AB z prostą CD, musiałaby się zejść także i płaszczyzna OP z płaszczyzną MN co być nie może, bo z założenia są one od siebie równoodległe, a więc i proste AB i CD, także zejść się z sobą nie mogą; że zaś jeszcze leżą one na jednéj płaszczyznie $ABCD$, więc są od siebie równoodległe. *Wspólne zatém przecięcia się dwóch i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

28. *Linie równoodległe zawarte między płaszczyznami równoodległemi, są sobie równe, czy leżą, czy nie leżą na jednéj płaszczyznie.*

Założenie. Niech będą linie AB, CD, EF od siebie równoodległe (fig. 18), zawarte między płaszczyznami MN i OP także równoodległemi; trzeba dowieść, że te linie AB, CD, EF są sobie równe.

Dowodzenie. Przez proste AB i CD jako od siebie równoodległe, przeprowadzam płaszczyznę (nº 3, *c*). Płaszczyzna ta przetnie się z płaszczyzną MN po linii prostéj BD (nº 4), a z płaszczyzną OP po prostéj AC równoodległéj od BD (nº 27), czworokąt więc $ACDB$ ma

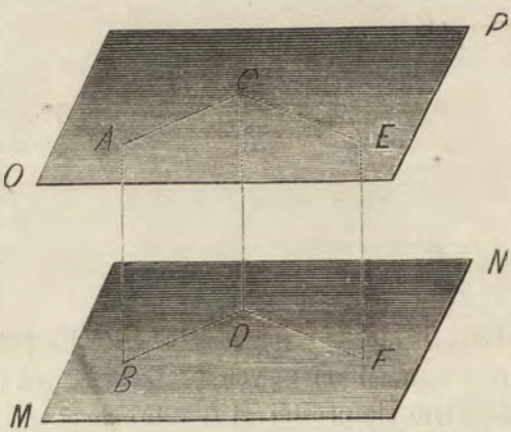


Fig. 18.

bok AB równoodległy od CD z założenia, a bok AC równoodległy od BD jak się dopiero co okazało, jest więc równoległobokiem i ma boki przeciwne sobie równe, czyli jest $AB = CD$. Przeprowadziwszy podobnież przez dwie proste równoodległe CD i EF płaszczyznę $ECDF$, czworokąt przez nią utworzony, będzie również równoległobokiem i będzie znowu $CD = EF$, a że poprzednio okazało się że jest $AB = CD$, a teraz że $CD = EF$, trzy więc te proste AB, CD i EF są między sobą równe. *Linie zatém równoodległe zawarte i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

29. *Linia prosta prostopadła do jednéj płaszczyzny, jest prostopadłą i do drugiéj od niéj równoodległéj.*

Założenie. Linia prosta AB (fig. 19) prostopadła do płaszczyzny MN, będzie także prostopadłą i do płaszczyzny OP równoodległéj od MN.

Dowodzenie. Przez prostą AB przeprowadzam jakąkolwiek płaszczyznę $CABD$, która się przetnie z płaszczyzną MN po prostéj BD, a z płaszczyzną OP po prostéj AC równoodległéj od BD (nº 27). A ponieważ prosta AB jest z założenia prostopadłą do płaszczyzny MN, więc jest prostopadłą i do linii BD przechodzącéj przez jéj spodek na płaszczyznie MN (nº 7); będąc zaś prostopadłą do prostéj BD jest także prostopadłą i do AC równoodległéj od BD.

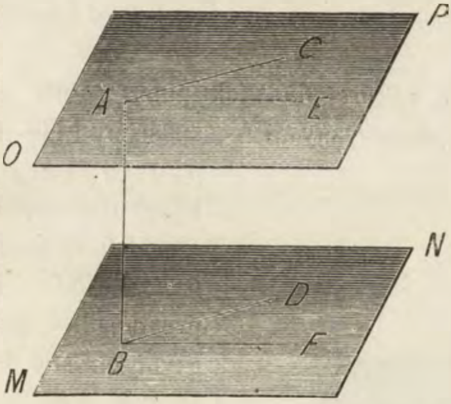


Fig. 19.

Przeprowadziwszy przez prostą AB drugą płaszczyznę $EABF$, płaszczyzna ta przetnie się z płaszczyzną MN podług prostéj BF, a z płaszczyzną OP po linii AE równoodległéj od BF (nº 27). Przez podobne jak poprzednio rozumowanie, okaże się, że prosta AB jest prostopadłą do AE. Linia prosta więc AB, będąc prostopadłą do dwóch prostych AC i AE przez jéj spodek A na płaszczyznie OP przechodzących, jest do téj płaszczyzny prostopadłą (n° 8). *A zatém jeżeli linia prosta jest prostopadłą do jednéj płaszczyzny i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

30. *Jeżeli z któregokolwiek punktu linii pochyłéj do płaszczyzny, spuścimy prostopadłą na tęż płaszczyznę i spodek téj prostopadłéj połączymy ze spodkiem pochyłéj linią prostą, to kąt zawarty między pochyłą, a linią łączącą jéj spodek ze spodkiem prostopadłéj, jest najmniejszy ze wszystkich, jakie pomiędzy pochyłą a płaszczyzną poprowadzić można. Kąt ten mierzy nachylenie pochyłéj do płaszczyzny i nazywa się kątem nachylenia.*

Założenie. Jeżeli z któregokolwiek punktu linii AB (fig. 20) pochyłéj do płaszczyzny MN, spuścimy linię AC prostopadłą do tejże płaszczyzny, i spodek B pochyłéj, ze spodkiem C prostopadłéj, połączymy prostą BC, to kąt ABC zawarty między pochyłą AB a prostą BC, jest mniejszy od każdego innego kąta np. ABD zawartego między pochyłą AB a wszelką inną linią np. BD przez spodek pochyłéj na płaszczyznie MN przechodzącéj.

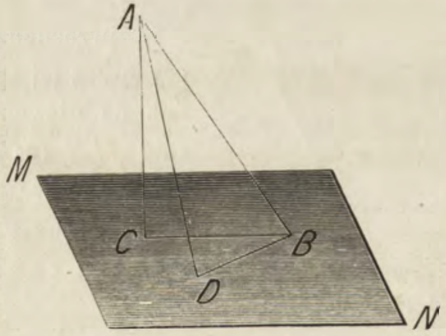


Fig. 20.

Dowodzenie. Robię $BD=BC$ i uważam dwa trójkąty ABC i ABD. W tych dwóch trójkątach jest bok AB

wspólny, bok $BC = BD$ z wykreślenia a bok $AC < AD$ jako prostopadła od pochyłéj, jest zatém kąt ABC przeciwny bokowi mniejszemu w jednym trójkącie, mniejszy od kąta ABD, przeciwnego bokowi większemu w drugim trójkącie. *Kąt więc zawarty między pochyłą a linią łączącą spodek pochyłéj i prostopadłéj i t. d.* co było do okazania.

31. *Uwaga.* Ponieważ kąt zawarty między pochyłą do płaszczyzny a linią łączącą spodek téj pochyłéj ze spodkiem prostopadłéj, jest zawsze jeden i ten sam, z któregokolwiek punktu pochyłéj spuścilibyśmy prostopadłą na płaszczyznę, więc mierzy nachylenie linii prostéj do płaszczyzny i nazywa się *kątem nachylenia.*

Twierdzenie.

32. *Jeżeli końce trzech linii prostych równych i od siebie równoodległych połączymy liniami prostemi, to trójkąty z tego połączenia powstałe, będą sobie równe, a ich płaszczyzny od siebie równoodległe.*

Założenie. Jeżeli końce trzech linii prostych AB, CD i EF sobie równych i od siebie równoodległych (fig. 21), połączymy prostemi AC, CE i AE, tudzież BD, DF i BF, to powstałe ztąd trójkąty ACE i BDF będą sobie równe, a ich płaszczyzny od siebie równoodległe.

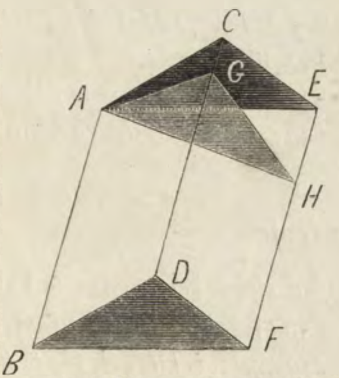


Fig. 21.

Dowodzenie. Ponieważ z założenia linia AB jest równa CD i od niéj równoodległa, więc czworokąt $ACDB$ jest równoległobokiem i bok $AC = BD$. Podobnież, ponieważ CD jest równa i równoodległa od EF, więc czworokąt $CEFD$, jest równoległobokiem i jest $CE = DF$. Dla podobnéj przyczyny jest także $AE = BF$. Dwa więc trójkąty ACE i BDF, mając po trzy boki równe, są sobie równe.

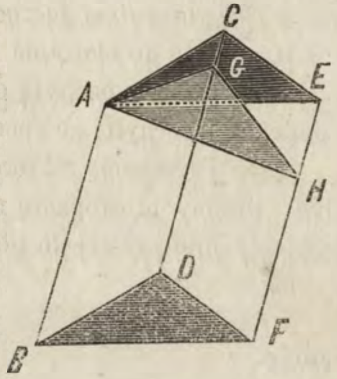


Fig. 21.

Gdyby teraz płaszczyzna ACE, nie była równoodległą od płaszczyzny BDF, to jaka inna płaszczyzna przez punkt A przechodząca, np. AGH, byłaby od niéj równoodległą, a że linie AB, GD i HF z założenia są od siebie równoodległe, a nadto byłyby zawarte między płaszczyznami AGH i BDF z przypuszczenia od siebie równoodległemi, więc byłyby sobie równe (nº 28), to jest byłaby prosta $AB = GD = HF$, a że z założenia jest $AB = CD = EF$, więc wszystkie te pięć linii byłyby sobie równe i byłaby $CD = GD$ i $EF = HF$, co być nie może, a więc i to być nie może, aby płaszczyzny ACE i BDF, nie były od siebie równoodległe. *Jeżeli zatém końce trzech linii prostych i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

33. *Kąty mające ramiona od siebie równoodległe i skierowane w jedną stronę, chociaż nie leżą na jednéj płaszczyznie są sobie równe, a płaszczyzny na których się te kąty znajdują, od siebie równoodległe.*

Założenie. Niech będą (fig. 22) dwa kąty ABC i DEF leżące na dwóch odmiennych płaszczyznach OP i MN i mające ramię BA równoodległe od ED, a ramię BC równoodległe od EF; mam dowieść że kąt ABC będzie równy kątowi DEF i że płaszczyzna OP będzie równoodległą od płaszczyzny MN.

Dowodzenie. Robię $BA = ED$ i $BC = EF$ i punkta A, B i C z punktami D, E i F łączę liniami prostemi, i uważam, że w czworokącie $ABED$ jest bok $BA = ED$ z wykreślenia, a z założenia od niego równoodległy, a więc i drugie dwa boki BE i AD są sobie równe i od siebie równoodległe. Podobnież, w czworokącie $CBEF$ ponieważ bok BC jest równy

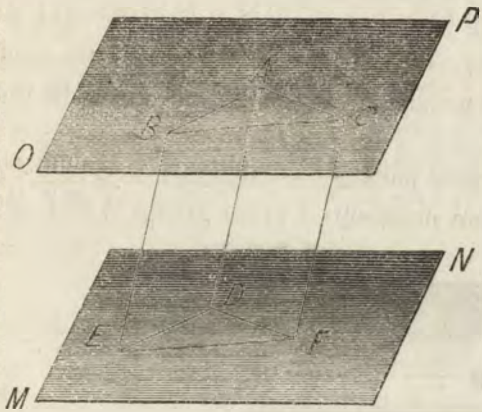


Fig. 22.

i równoodległy od EF, więc też i dwa drugie boki BE i CF są sobie równe i od siebie równoodległe. Kiedy zaś bok $AD = BE$ i od niego równoodległy, i bok $CF = BE$ i także od niego równoodległy, więc jest i bok $AD = CF$ i od niego równoodległy (nº 19). W czworokącie zatém $CADF$ z przyczyny że bok $AD = CF$ i od niego równoodległy, jest i bok $AC = DF$. Dwa więc trójkąty ABC i DEF mając po trzy boki równe, są sobie równe, a tém samém kąt ABC równy kątowi DEF.

Ponieważ trzy linie BE, AD i CF, jak się wyżéj dowiodło, są sobie równe i od siebie równoodległe, a przez końce ich, przechodzą płaszczyzny MN i OP, więc (nº 32) płaszczyzny te są od siebie równoodległe. *Zatém kąty mające ramiona od siebie równoodległe i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

34. *Linie proste zawarte pomiędzy iląkolwiek płaszczyznami od siebie równoodległemi, są podzielone przez te płaszczyzny na części proporcyonalne.*

Założenie. Linie proste AB, CD i EF (fig. 23) zawarte między płaszczyznami MN, OP i QR od siebie równoodległemi, są podzielone przez te płaszczyzny na części proporcyonalne.

Dowodzenie. Łączę punkt C z punktem B, i punkt E z punktem D liniami prostemi, i przez proste AB i BC

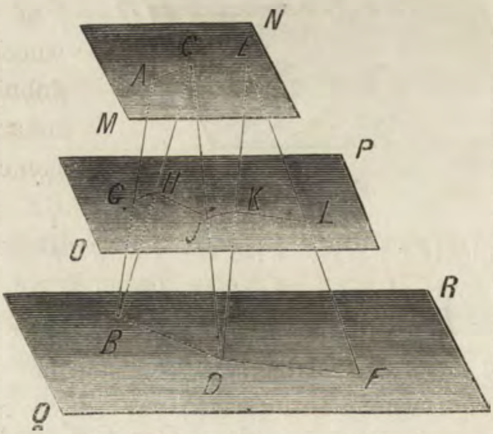


Fig. 23.

przeprowadzam płaszczyznę (nº 3), która z płaszczyzną MN przetnie się podług prostéj AC (nº 4), a z płaszczyzną OP podług prostéj GH, równoodległéj od AC

(n° 27). Podobnież płaszczyzna przeprowadzona przez proste BC i CD przetnie się z płaszczyzną QR po linii BD, a z płaszczyzną OP po linii HJ równoodległéj od BD; płaszczyzna przeprowadzona przez proste CD i ED, przetnie się z płaszczyznami MN i OP po liniach CE i JK od siebie równoodległych. Nakoniec płaszczyzna DEF przetnie się z płaszczyznami OP i QR po liniach KL i DF od siebie równoodległych.

Ponieważ w trójkącie ABC jest GH równoodległa od AC, więc ma się:

$$AG : GB = CH : HB$$

Dla podobnéj przyczyny, ma się także:

$$CH : HB = CJ : JD$$

$$CJ : JD = EK : KD$$

$$EK : KD = EL : LF$$

A z powodu stosunków wspólnych jest:

$$AG : GB = CJ : JD = EL : LF$$

czyli, że *linie proste zawarte między płaszczyznami i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

35. *Mając dane dwie linie proste nie leżące na jednéj płaszczyźnie, można poprowadzić trzecią, jednocześnie do obydwóch prostopadłą. Taka prostopadła tylko jedna być może i jest najkrótszą odległością między dwiema liniami danemi.*

Założenie. Niech będą dwie proste AB i CD (fig. 24) nie leżące na jednéj płaszczyźnie, mam dowieść, że można poprowadzić tylko jedną linię prostopadłą tak do CD jak do AB, i że ta linia jest najkrótszą między niemi odległością.

Dowodzenie. Przez punkt A prowadzę linię AE równoodległą od CD i z któregokolwiek punktu linii CD np. z punktu F, spuszczam prostopadłą FG na płaszczyznę BAE; przez spodek téj prostopadłéj, to jest przez punkt G, prowadzę na płaszczyznie BAE linię równoodległą od linii AE aż do przecięcia się z prostą AB w punkcie H. Przez punkt H prowadzę linię równoodległą od prostéj FG aż do przecięcia się z linią CD w punkcie np. J, i powiadam że linia HJ jest linią żądaną, to jest prostopadłą zarazem i do linii AB i do linii CD.

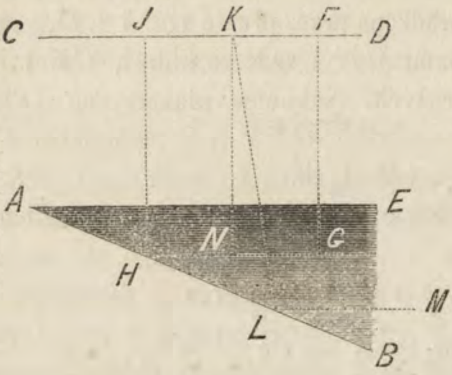


Fig. 24.

Ponieważ prosta FG jest z wykreślenia prostopadłą do płaszczyzny BAE, więc i prosta HJ jako od niéj równoodległa jest także do téj płaszczyzny prostopadłą (n° 18), a tém samém, prostopadłą do linii AB i HG przecinających się w jéj spodku (n° 7). Lecz ponieważ tak linia CD jak i HG są równoodległe od AE, więc są równoodległe między sobą (n° 19), a tém samém leżą na jednéj płaszczyznie $CFGH$ (n° 3, *c*). Linia HJ jest z wykreślenia równoodległą od FG i przechodzi przez punkt H leżący na płaszczyznie $CFGH$, więc cała leży na téj płaszczyznie (n° 23), i przecinać się koniecznie musi z linią CD. Prosta HJ, jest jak się okazało, prostopadłą do HG, więc jest prostopadłą i do CD równoodległéj od HG. A że linia HJ jest także prostopadłą do AB, więc jest prostopadłą do dwóch linii danych AB i CD nie leżących na jednéj płaszczyznie.

Przypuśćmy, że pomiędzy dwiema prostemi AB i CD możnaby poprowadzić drugą linię prostą np. KL, zarazem do obydwóch prostopadłą, to poprowadziwszy na płaszczyznie BAE przez punkt L linię LM równoodległą od AE, a tém samém i od CD, byłaby linia KL prostopadłą do linii LM, bo z przypuszczenia jest prostopadłą do linii CD; będąc zaś także z przypuszczenia prostopadłą do linii AB, byłaby prostopadłą do dwóch linii LM i AB a tém samém prostopadłą i do płaszczyzny BAE (nº 8). Poprowadziwszy teraz na płaszczyznie $CFGH$ linię KN równoodległą od FG, z wykreślenia prostopadłéj do płaszczyzny BAE, to będzie linia KN prostopadłą do płaszczyzny BAE; że zaś linia LK jest z przypuszczenia prostopadłą do płaszczyzny BAE, więc z punktu K możnaby było spuścić dwie prostopadłe do jednéj płaszczyzny, co być nie może (nº 10), a więc pomiędzy dwiema liniami danemi AB i CD, nie leżącemi na jednéj płaszczyznie, tylko jedna wspólna prostopadła poprowadzoną być może.

Ponieważ linia KN jest prostopadłą, a linia KL pochyłą do płaszczyzny BAE, więc $KN<KL$ (nº 12), a że $KN=JH$, więc jest i $JH<KL$. Tak samo okazaćby można że jest HJ któtszą od każdéj innéj linii, pomiędzy prostemi AB i CD poprowadzonéj, zatém jest najkrótszą między niemi odległością. *A więc mając dane dwie linie i t. d.* co było do okazania.

36. *Uwaga.* Ponieważ mając dane dwie proste nie leżące na jednéj płaszczyznie, jedną tylko prostopadłę zarazem do obydwóch poprowadzić można, więc ta prostopadła mierzy prawdziwą ich odległość.

ROZDZIAŁ II.

O KĄTACH DWUŚCIENNYCH I BRYŁOWYCH.

KĄTY DWUŚCIENNE.

37. Kąt dwuścienny jest to nachylenie się ku sobie dwoch płaszczyzn przecinających się. I tak np. (fig. 25) wzajemne nachylenie się ku sobie dwóch płaszczyzn MN i OP, przecinających się po prostéj NO, nazywa się *kątem dwuściennym*. Płaszczyzny MN i OP nazywają się *ścianami* a wspólne ich przecięcie się NO *krawędzią kąta*. Kąt dwuścienny oznacza się czterema głoskami, z których dwie piszą się przy krawędzi, a dwie inne gdziekolwiek na ścianach; czyta się zaś tak, aby litery będące przy krawędzi, wymawiane były we środku. I tak dany kąt dwuścienny przeczytać można albo $MNOP$ albo $PONM$.

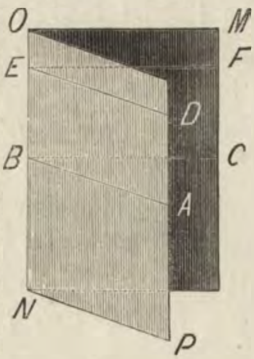


Fig. 25.

Stosownie do opisania kąta dwuściennego widzimy, że wielkość jego, zależy jedynie od mniejszego lub większego nachylenia się ścian ku sobie, a bynajmniéj nie od ich rozciągłości.

38. Kąty dwuścienne mogą być tak samo jak kąty płaskie, ostre, proste i rozwarte.

Jeżeli kąt dwuścienny jest prosty, to ściany jego są do siebie prostopadłe.

39. Dwa kąty dwuścienne przystają do siebie a tém samém są sobie równe, gdy wsunięty jeden w drugi, ściany i krawędź jednego przystają do ścian i krawędzi drugiego.

40. Jeżeli przez punkt B (fig. 25), dowolnie na krawędzi kąta dwuściennego obrany, poprowadzimy na ścianach tegoż kąta, dwie prostopadłe BA i BC do téj krawędzi, to kąt płaski ABC między niemi zawarty, nazywa się *kątem odpowiednim dwuściennemu.*

Twierdzenie.

41. *Kąty płaskie odpowiednie dwuściennemu, są sobie równe.*

Założenie. Niech będą dwa kąty płaskie ABC i DEF (fig. 25), odpowiednie kątowi dwuściennemu $MNOP$; trzeba dowieść że są sobie równe.

Dowodzenie. Linie AB i DE jako ramiona kątów odpowiednich dwuściennemu są prostopadłe do krawędzi ON, zatém są od siebie równoodległe. Dla podobnéj przyczyny ramię BC jest równoodległe od EF, a więc kąty ABC i DEF mają ramiona od siebie równoodległe i skierowane w jedną stronę, więc są sobie równe (n° 33). *Zatém kąty płaskie odpowiednie i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

42. *Jeżeli kąty płaskie odpowiednie dwuściennym są sobie równe, to i kąty dwuścienne są sobie równe.*

Założenie. Niech będą kąty dwuścienne *MNOP* i *mnop* (fig. 26), w których zakładam, że kąty płaskie *ABC* i *abc*, odpowiednie dwuściennym, są sobie równe; mam dowieść, że i kąty dwuścienne *MNOP* i *mnop* są sobie równe.

Dowodzenie. Wsuńmy kąt dwuścienny *mnop* w kąt dwuścienny *MNOP*, tak ażeby punkt *b* padł na punkt *B*, aby linia *bc* poszła po linii *BC* i płaszczyzna *abc* po płaszczyznie *ABC*, wtedy i linia *ba* pójdzie po linii *BA*, bo kąty *ABC* i *abc* są sobie równe z założenia. Skoro płaszczyzna

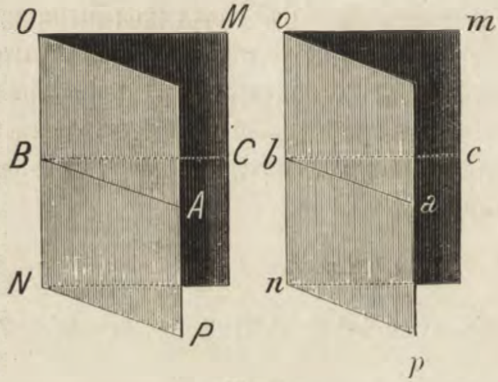


Fig. 26

abc przystała do płaszczyzny *ABC*, to i linia *no* prostopadła do płaszczyzny *abc* (n° 8). pójdzie po linii *NO* prostopadłéj do płaszczyzny *ABC*, bo w przeciwnym razie możnaby z jednego punktu *B* wyprowadzić dwie prostopadłe do jednéj płaszczyzny *ABC*, co być nie może (n° 9). Gdy zaś linia *bc* pójdzie po *BC* a *no* po *NO*, to i płaszczyzna przez te dwie linie przechodząca, to jest płaszczyzna *mn* pójdzie po *MN*. Podobnież kiedy linia *ba* poszła po *BA* a *no* po *NO*, to i płaszczyzna *op* pójdzie po płaszczyznie *OP*. Ściany więc i krawędź kąta dwuściennego *mnop*, przystają do ścian i krawędzi kąta *MNOP*, kąty te więc są sobie równe (n° 39). *A zatém, jeżeli kąty płaskie odpowiednie i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie odwrotne.

43. *Jeżeli kąty dwuścienne są sobie równe, to i kąty płaskie tymże kątom dwuściennym odpowiednie, są sobie równe.*

Założenie. Zakładam, że kąty dwuścienne $MNOP$ i $mnop$ (fig. 26) są sobie równe; mam dowieść, że kąty płaskie ABC i abc tym kątom dwuściennym odpowiednie, są sobie równe.

Dowodzenie. Wsuwam kąt dwuścienny $mnop$ w kąt $MNOP$, tak aby punkt b padł na punkt B, krawędź no, żeby poszła po krawędzi NO i ściana mn poszła po ścianie MN; to w takim razie, ściana op pójdzie koniecznie po ścianie OP, bo kąty dwuścienne $mnop$ i $MNOP$ są sobie z założenia równe (n° 39). Skoro zaś kąty dwuścienne $mnop$ i $MNOP$ przystają do siebie i punkt b leży na punkcie B, to i bc prostopadła do no, przystanie do BC prostopadłéj do NO, bo inaczéj z jednego punktu możnaby było poprowadzić dwie prostopadłe do jednéj linii prostéj, co być nie może. Dla téjże saméj przyczyny prostopadła ba pójdzie po prostopadłéj BA, a tém samém kąt płaski abc, jest równy kątowi ABC. *Jeżeli więc kąty dwuścienne i t. d.* co było do okazania.

Uwaga. Z tego i poprzedzającego twierdzenia wypada, że płaszczyzny dzielące kąt dwuścienny na ilekolwiek części równych, dzielą i kąt odpowiedni dwuściennemu na tyleż równych części.

Twierdzenie.

44. *Kąty dwuścienne mają się do siebie jak kąty płaskie im odpowiednie.*

Założenie. Niech będą kąty dwuścienne $MNOP$ i $mnop$ (fig. 27) i kąty płaskie im odpowiednie ABC i abc. Mamy dowieść: że tak się ma $MNOP : mnop = ABC : abc$.

Dowodzenie. Z wierzchołka kątów ABC i abc jednakowym promieniem zakreślam łuki między ich ramionami. Łuki te mogą być współmierne albo niewspółmierne.

Weźmy przypadek 1szy że łuki AC i ac są współmierne i przypuśćmy, że jest jakiś łuk trzeci, który w łuku AC mieści się np. trzy razy, a w łuku ac dwa razy. Przez punkta podziałów tych łuków i wierzchołki kątów B i b poprowadziwszy proste BD, BE i bd, kąt ABC będzie się składał z trzech takich kątów cząstkowych, jakich dwa mieści w sobie kąt abc; zatém ma się:

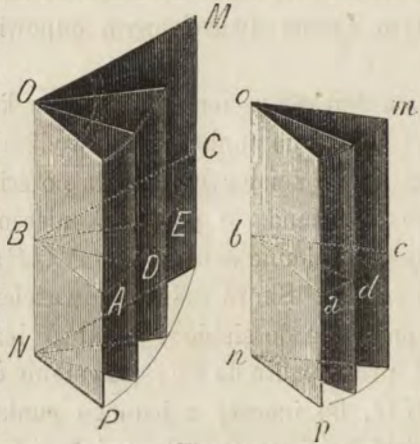


Fig. 27.

$$1)\quad ABC : abc = 3 : 2.$$

Jeżeli teraz przez linie BD i NO, BE i NO, bd i no, przeprowadzimy płaszczyzny, to ponieważ kąty cząstkowe odpowiednie są sobie równe, to i dwuścienne im odpowiadające są także sobie równe (nº 42), a zatém cały kąt dwuścienny $MNOP$ składać się będzie z trzech takich części, jakich dwie ma w sobie kąt $mnop$; ma się zatém

$$2)\quad MNOP : mnop = 3 : 2.$$

W proporcyach 1) i 2), drugie stosunki są sobie równe, a więc i pierwsze będą sobie równe i złożą proporcyę, to jest będzie:

$$MNOP : mnop = ABC : abc,$$

czyli że kąty dwuścienne mają się do siebie jak kąty płaskie im odpowiednie, jeżeli kąty te są współmierne.

W przypadku 2[gim] gdy kąty płaskie ABC i abc (fig. 28), odpowiednie dwuściennym $MNOP$ i $mnop$ są niewspółmierne, potrzeba dowieść, że ma się również:

$$1) \quad MNOP : mnop = ABC : abc.$$

Gdyby ta proporcya nie miała miejsca, to mogłoby to być tylko dla tego, że wyraz czwarty abc byłby albo za mały albo za duży. Przypuśćmy że wyraz abc jest za mały, więc w miejsce abc weźmy coś większego np. abd, a wtenczas proporcya 1) zamieni się na następującą:

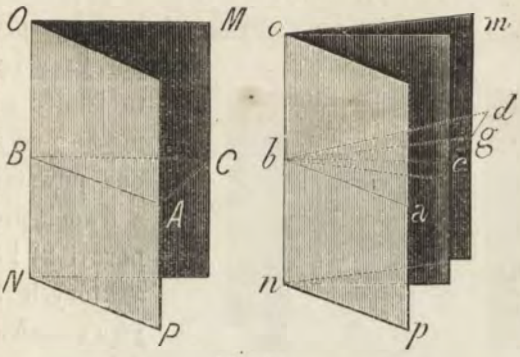


Fig. 28.

$$2) \quad MNOP : mnop = ABC : abd.$$

Kąt ABC dzielę na tyle równych części, aby jedna z nich była mniejszą od kąta cbd i cząstkę takową przenoszę na kąt abd począwszy od ramienia ab.

Ramię takiego kąta cząstkowego, nie może nigdy paść na ramię bc, bo z założenia kąty ABC i abc są niewspółmierne, lecz zawsze paść może za ramieniem bc np. tak jak ramię bg. Przez linie bg i no przeprowadzam płaszczyznę i uważam dwa kąty dwuścienne $MNOP$ i $gnop$, których kąty płaskie im odpowiednie ABC i abg, są z wykreślenia współmierne, a więc z poprzedniego dowodzenia jest:

$$3) \quad MNOP : gnop = ABC : abg.$$

W proporcyach 2) i 3) poprzedniki $MNOP$ i $MNOP$, ABC i ABC są jednakowe, następniki więc, powinnyby złożyć proporcyę, to jest powinnoby być:

$$mnop : gnop = abd : abg$$

Lecz w proporcyi téj w pierwszym stosunku poprzednik $mnop < gnop$, a w drugim poprzednik $abd > abg$, proporcya więc ta istnieć nie może; a że ona powstała z dwóch proporcyi 2) i 3) z których 3) jest dowiedziona, a 2) tylko przypuszczona, więc przypuszczenie musiało być złe, to jest że w proporcyi 1) wyrazu czwartego powiększyć nie można.

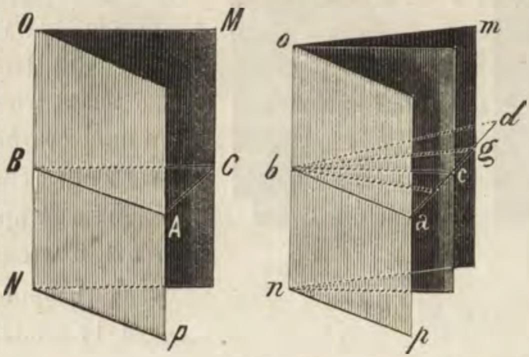


Fig. 28.

Podobnym sposobem dowiodłoby się, że go także i zmniejszyć nie można, a tém samém że wyraz abc jest do trzech pierwszych proporcyonalny, czyli że ma się:

$$MNOP : mnop = ABC : abc$$

chociaż kąty płaskie ABC i abc odpowiednie dwuściennym $MNOP$ i $mnop$ są niewspółmierne. *Zatém w ka-*

żdym razie kąty dwuścienne mają się do siebie i t. d. co było do okazania.

45. *Uwaga 1sza.* Tak jak kąty płaskie mają za jedność kąt płaski prosty, tak téż i kąty dwuścienne mają za jedność kąt dwuścienny prosty, który podobnie jak płaski dzieli się na 90°, stopień na 60′, minuta na 60″ i t. d. A ponieważ stosunek kątów dwuściennych równa się stosunkowi kątów płaskich odpowiednich, więc kąt dwuścienny jakikolwiek, jest liczebnie równy kątowi płaskiemu odpowiedniemu.

46. *Uwaga 2ga.* Kąty dwuścienne nastręczają twierdzenia zupełnie podobne twierdzeniom o kątach płaskich jak np.

1° *Że summa kątów dwuściennych przyległych równa się dwom kątom prostym dwuściennym.*

2° *Że kąty dwuścienne krawędzią przeciwległe, są sobie równe.*

3° *Że gdy dwie płaszczyzny równoodległe przetniemy trzecią sieczną, to kąty dwuścienne naprzemianległe wewnętrzne, kąty dwuścienne jednostronne odpowiadające, kąty dwuścienne naprzemianległe zewnętrzne będą sobie równe, a kąty dwuścienne jednostronne zewnętrzne lub jednostronne wewnętrzne, ważyć będą dwa kąty dwuścienne proste i t. p.*

Dowodzenie tych twierdzeń w Solidometryi, byłoby zbytecznėm gdyż kąty dwuścienne jak się okazało, odnoszą się zupełnie do kątów płaskich im odpowiednich, a o kątach płaskich wszystkie te twierdzenia w Planimetryi dowodzone były.

Twierdzenie.

47. *Płaszczyzna przechodząca przez linię prostopadłą do płaszczyzny, jest do tejże płaszczyzny prostopadłą.*

Założenie. Płaszczyzna FE przechodząca przez linię AB prostopadłą do płaszczyzny MN (fig. 29), jest do tejże płaszczyzny prostopadłą.

Dowodzenie. Na płaszczyznie MN do linii DE będącéj wspólném przecięciem płaszczyzny FE z płaszczyzną MN, wyprowadzam z punktu B prostopadłą. Ponieważ linia AB jest z założenia prostopadłą do płaszczyzny MN, więc jest prostopadłą i do linii DE i do linii BC (nº 7), kąt więc ABC jest prosty, a że jest zawarty między dwiema prostopadłemi do wspólnego przecięcia się płaszczyzn FE i MN i ma ramiona swoje na tychże płaszczyznach, więc jest kątem płaskim odpowiednim dwuściennemu (nº 40). Kąt zatém dwuścienny zawarty pomiędzy płaszczyzną FE i MN jest prosty, zatém płaszczyzna FE jest prostopadłą do MN. *Płaszczyzna więc przechodząca przez linię i t. d.* co było do okazania.

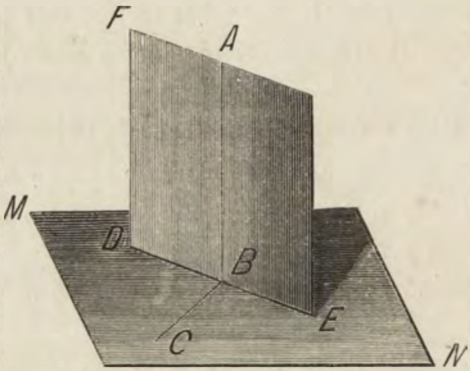


Fig. 29.

48. *Wniosek 1szy.* Na mocy powyższego twierdzenia można przez punkt wzięty nad płaszczyzną daną, przeprowadzić do niéj płaszczyznę prostopadłą. I tak (fig. 29) mając np. przez punkt A przeprowadzić płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny MN, to tylko z punktu A, sposobem wiadomym (*n*º 13, 1^0 i 2^0) spuszczam linię AB prostopadłą do płaszczyzny MN, a wszelka płaszczyzna np. FE przez linię AB przechodząca, jest do płaszczyzny MN prostopadłą.

Można także przez punkt wzięty nad płaszczyzną daną, prowadzić płaszczyznę od niéj równoodległą. I tak np. (fig. 30), chciawszy przez punkt A przeprowadzić płaszczyznę równoodległą od płaszczyzny MN, prowadzę z punktu A do płaszczyzny MN jakąkolwiek linię prostą AB i przez tę linię przeprowadzam naprzód jednę płaszczyznę ABC, i na płaszczyznie téj prowadzę linię AD równoodległą od wspólnego przecięcia BC. Następnie przez linię AB przeprowadzam drugą płaszczyznę ABE i na płaszczyznie téj prowadzę linię FA równoodległą od wspólnego przecięcia EB. Jeżeli teraz przez dwie linie AD i AF przecinające się z sobą, przeprowadzę płaszczyznę, to ona będzie równoodległą od płaszczyzny MN (n° 33).

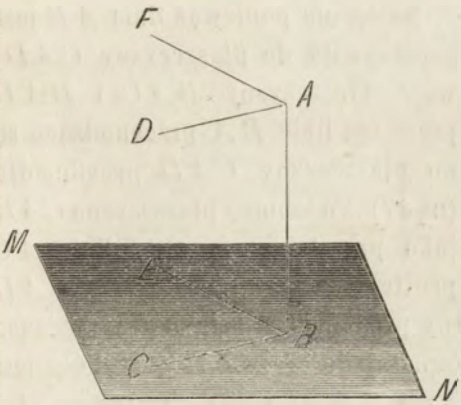


Fig. 30.

49. *Wniosek 2gi.* Jeżeli trzy linie proste są do siebie prostopadłe, to każda z nich jest prostopadłą do płaszczyzny przez drugie dwie przechodzącéj, i trzy płaszczyzny przez te linie przechodzące są wzajemnie do siebie prostopadłe. I tak (fig. 31), jeżeli trzy linie proste AB, AC i AD są do siebie prostopadłe, to każda z nich np. AB jest prostopadłą do płaszczyzny CAD, przez pozostałe dwie linie AC i AD przechodzącéj. Z założenia bowiem jest linia

AB prostopadłą do dwóch linii AC i AD, przez jéj spodek A na płaszczyznie CAD przechodzących, zatém jest prostopadłą i do płaszczyzny CAD (nº 8). Dla podobnéj przyczyny jest linia AC prostopadłą do płaszczyzny BAD, a nakoniec linia AD do płaszczyzny BAC.

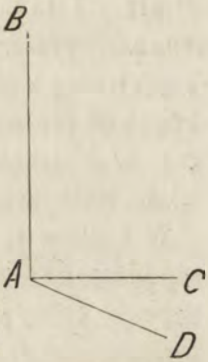


Fig. 31.

Następnie ponieważ linia AB jest prostopadłą do płaszczyzny CAD, więc płaszczyzny BAC i BAD przez tęż linię BA przechodzące są do płaszczyzny CAD prostopadłe (nº 47). Podobnież płaszczyzna CAD jako przechodząca przez linię AC prostopadłą do płaszczyzny BAD jest do tejże płaszczyzny prostopadłą, a jako przechodząca przez linię AD prostopadłą do płaszczyzny BAC, jest również i do téj płaszczyzny prostopadłą. Trzy więc płaszczyzny BAC, CAD i BAD przez trzy linie dane AB, AC i AD, do siebie prostopadłe przechodzące, są wzajemnie do siebie prostopadłe.

Twierdzenie.

50. *Jeżeli dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe i jeżeli na jednéj z nich poprowadzimy linię prostopadłą do ich wspólnego przecięcia się, to ta linia będzie prostopadłą i do płaszczyzny drugiéj.*

Założenie. Niech będzie płaszczyzna FE (fig. 29) prostopadłą do płaszczyzny MN i jeżeli na płaszczyznie FE, poprowadzimy linię AB prostopadłą do linii DE wspólnego przecięcia się płaszczyzny FE z płaszczyzną MN, to będzie linia AB prostopadłą do płaszczyzny MN.

Dowodzenie. Na płaszczyznie MN prowadzę z punktu B linią BC prostopadłą do DE, to kąt ABC jest kątem płaskim odpowiednim dwuściennemu $FEDM$, a ponieważ płaszczyzna FE z założenia jest prostopadłą do MN, więc kąt dwuścienny $FEDM$ i jemu odpowiedni ABC jest prosty, a więc linia AB jest prostopadłą do BC

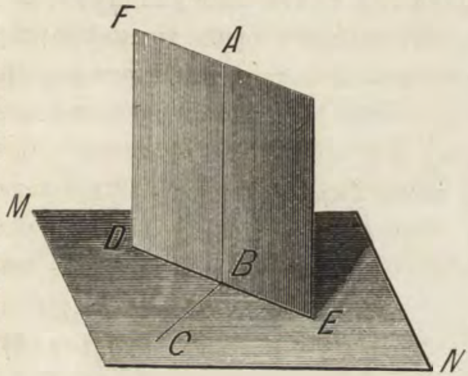


Fig. 29.

a że z wykreślenia jest prostopadłą do DE, więc jest prostopadłą do dwóch linii DE i BC przez jéj spodek na płaszczyznie MN przechodzących, zatém jest prostopadłą i do płaszczyzny MN (nº 8). *Jeżeli więc dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłe i t. d.* co było do okazania.

51. *Wniosek 1szy.* Jeżeli z któregokolwiek punktu wspólnego przecięcia się dwóch płaszczyzn do siebie prostopadłych, wyprowadzimy linię prostopadłą do jednéj z tych płaszczyzn, to ta linia przystawać będzie zupełnie do płaszczyzny drugiéj. I tak (fig. 29). Jeżeli jest płaszczyzna FE prostopadłą do płaszczyzny MN, i jeżeli z któregokolwiek punktu wspólnego przecięcia się tych płaszczyzn, to jest np. z punktu B wyprowadzimy prostopadłą AB do płaszczyzny MN, to ta prostopadła przystawać będzie do płaszczyzny FE.

Gdyby linia AB nie leżała na płaszczyznie FE, to inna jaka linia prostopadła do linii DE z punktu B wyprowadzona, leżałaby na płaszczyźnie FE, a że płaszczyzna FE jest z założenia prostopadłą do MN, więc i ta inna linia prostopadła do DE, byłaby prostopadłą do płaszczyzny MN; że zaś linia AB z wykreślenia jest prostopadłą do płaszczyzny MN, więc możnaby z jednego punktu wziętego na płaszczyźnie, poprowadzić do niéj dwie prostopadłe, co być nie może (nº 9), a więc linia AB przystawać musi zupełnie do płaszczyzny FE, co było do okazania.

52. *Wniosek 2gi.* Jeżeli dwie płaszczyzny są prostopadłe do trzeciéj, to i ich wspólne przecięcie jest do tejże płaszczyzny prostopadłe. I tak (fig. 32), jeżeli dwie płaszczyzny OP i QR są prostopadłe do trzeciéj płaszczyzny MN, to i ich wspólne przecięcie się AB, będzie do tejże płaszczyzny MN prostopadłe. Wyobraziwszy bowiem sobie, że z punktu B jest wyprowadzona linia BC prostopadła do płaszczyzny MN, to ponieważ punkt B znajduje się na wspólném przecięciu dwóch płaszczyzn OP i MN do siebie prostopadłych, prostopadła więc BC znajdowaćby się musiała na płaszczyźnie OP. Dla podobnéj przyczyny, ponieważ punkt B znajduje się również na wspólném przecięciu się dwóch płaszczyzn QR i MN do siebie prostopadłych, zatém prostopadła BC znajdowaćby się mu-

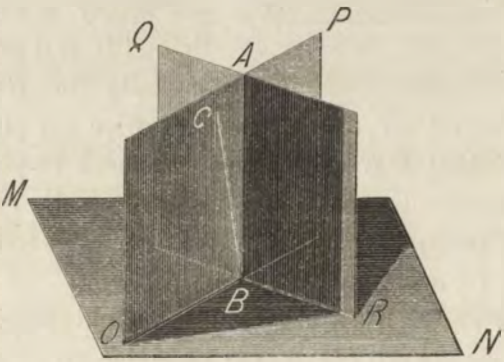


Fig. 32.

siała na płaszczyznie QR. W jednym więc i tym samym czasie prostopadła BC musi się znajdować i na płaszczyznie OP i na płaszczyznie QR, a więc przystawać koniecznie musi i do linii AB, wspólnego przecięcia się tych płaszczyzn, a tém samém wspólne przecięcie AB jest prostopadłe do płaszczyzny MN, co było do okazania.

KĄTY BRYŁOWE.

53. *Kąt bryłowy* jest to przestrzeń zawarta pomiędzy iląkolwiek płaszczyznami schodzącemi się w jednym punkcie.

Punkt zejścia płaszczyzn ograniczających kąt bryłowy nazywa się *wierzchołkiem*.

Płaszczyzny ograniczające kąt bryłowy nazywają się *ścianami*, a wspólne przecięcia się ścian *krawędziami* kąta bryłowego.

Do ograniczenia kąta bryłowego najmniéj trzech płaszczyzn potrzeba. Kąt bryłowy przybiera nazwisko od liczby ścian ograniczających go. Tak więc może być trójścienny, czworościenny, pięciościenny i t. d., a to stosownie czy go trzy, cztery, pięć lub więcéj ścian ogranicza.

54. Kąty bryłowe są wtenczas równe, gdy wsunięty jeden w drugi, krawędzie, ściany i wierzchołek jednego, spływają z krawędziami, ścianami i wierzchołkiem drugiego, czyli kiedy mają ściany i kąty dwuścienne odpowiednie równe.

55. Kąty bryłowe, które wsunąć się jeden w drugi nie dadzą, z powodu wprost przeciwnego układu ścian, lecz mają też ściany i kąty dwuścienne odpowiednie równe, nazywają się równe przez symetryę czyli wprost kątami *symetrycznemi*. I tak np. (fig. 33), kąty trójścienne wierzchołkiem przeciwległe $ABCD$ i $AEFG$, to jest mające krawędzie na liniach prostych, przez jeden punkt przechodzących, są sobie równe przez symetryę, czyli inaczéj są względem siebie symetryczne. Jest albowiem kąt płaski $BAD=EAG$ jako kąty wierzchołkiem przeciwległe. Podobnież kąt $BAC=FAG$ i kąt $CAD=EAF$. A więc kąty płaskie jednego kąta trójściennego są równe kątom płaskim drugiego kąta trójściennego. Nadto kąt dwuścienny $CABD=FAGE$ jako kąty dwuścienne krawędzią przeciwległe i dla téj saméj przyczyny kąt dwuścienny $CADB=FAEG$ i nareszcie kąt dwuścienny $BACD=GAFE$. Mają więc dane kąty trójścienne, po trzy kąty płaskie i po trzy kąty dwuścienne równe, a więc są sobie równe, lecz tylko przez symetryę, bo ściany jednego kąta trójściennego są wprost przeciwnym ułożone porządku, jak ściany drugiego.

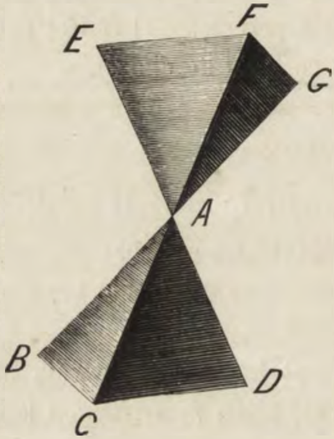


Fig. 33.

Twierdzenie.

56. *W kącie bryłowym trójściennym summa dwóch kątów płaskich ograniczających go, jest większą od trzeciego.*

Założenie. W kącie trójściennym A (fig. 34) ograniczonym trzema kątami płaskiemi BAC, CAD i BAD, mam dowieść, że summa dwóch którychkolwiek z nich jest większą od trzeciego.

Gdyby wszystkie trzy kąty płaskie BAC, CAD i BAD były między sobą równe, to nie potrzebaby dowodzenia, że dwa którekolwiek z nich byłyby większe od trzeciego. Weźmiemy więc ten ogólny przypadek, że trzy kąty płaskie ograniczające kąt trójścienny A, nie są sobie równe i przypuśćmy że kąt BAD jest z nich największy, a dowiedziemy że summa dwóch mniejszych $BAC+CAD$ będzie większą od kąta największego BAD.

Dowodzenie. Na płaszczyznie kąta BAD przy prostéj BA i przy punkcie A, kreślę kąt $BAE=BAC$ i robię $AE=AC$. Przez trzy punkta B, C i E nie leżące na jednéj liniii prostéj przeprowadzam płaszczyznę (nº 3, a), to płaszczyzna ta przetnie się ze wszystkiemi ścianami kąta trójściennego, a mianowicie ze ścianą BAD po prostéj BD, ze ścianą BAC po prostéj BC, a ze ścianą CAD po prostéj CD (nº 4).

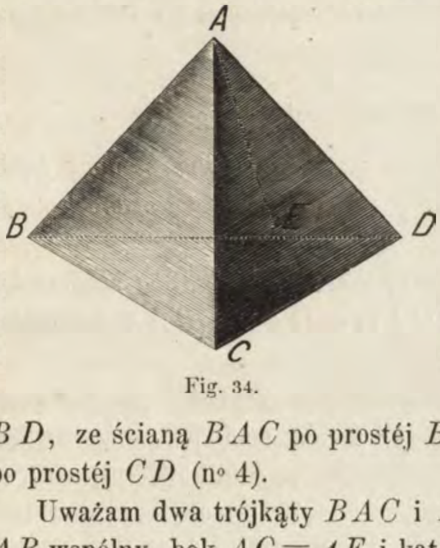


Fig. 34.

Uważam dwa trójkąty BAC i BAE, które mają bok AB wspólny, bok $AC=AE$ i kąt $BAC=BAE$ z wykreślenia, a więc te dwa trójkąty są sobie równe, zatém $BC=BE$. W trójkącie BCD jest $BC+CD>BD$; gdy od ilości większéj $BC+CD$ odejmiemy BC, a od ilości mniejszéj BD odejmiemy $BE=BC$ z dowiedzenia, pozostanie $CD>ED$. Nakoniec dwa trójkąty CAD i EAD mają bok AD wspólny, bok $AC=AE$ z wykreślenia a bok $CD>ED$ z dowiedzenia; więc jest i kąt $CAD>EAD$. Gdy teraz do kąta większego CAD dodamy kąt BAC, a do kąta mniejszego EAD dodamy kąt $BAE=BAC$

z wykreślenia, będzie $BAC+CAD>BAE+EAD$; a że $BAE+EAD=BAD$, więc jest $BAC+CAD>BAD$. *W kącie więc trójściennym summa dwóch kątów i t. d.* co było do okazania.

57. *Wniosek*. Ponieważ jest $BAD<BAC+CAD$, więc i od ilości mniejszéj BAD i od ilości większéj $BAC+CAD$ odjąwszy po BAC wypadnie $BAD-$ $-BAC<CAD$, to jest że w kącie trójściennym różnica dwóch kątów płaskich ograniczających go, jest mniejszą od trzeciego.

Twierdzenie.

58. *W kącie bryłowym wielościennym summa kątów płaskich ograniczających go, jest mniejszą od czterech kątów prostych.*

Założenie. W kącie bryłowym A (fig. 35) summa kątów płaskich $BAC+CAD+DAE+BAE$ jest mniejszą od czterech kątów prostych.

Dowodzenie. Przecinam kąt bryłowy A płaszczyzną, która przetnie się z każdą ścianą kąta bryłowego po linii prostéj (n° 4). Przecięcie ztąd powstałe $BCDE$, jest wielokątem, mającym zawsze tyle boków, ile kątów płaskich ogranicza kąt bryłowy. Wewnątrz wielokąta $BCDE$ obieram gdziekolwiek punkt S i łączę go z wierzchołkami B, C, D i E liniami prostemi i uważam, że

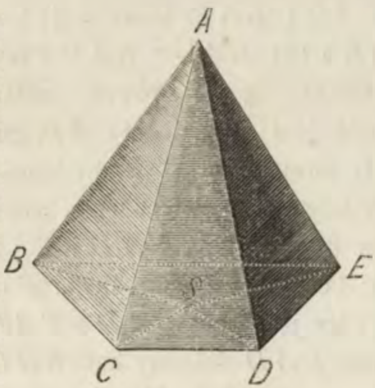


Fig. 35.

w kącie trójściennym przy punkcie B, ograniczonym trzema kątami płaskiemi ABE, ABC i EBC jest (nº 56):

$ABE + ABC > EBS + SBC$, następnie w kącie trójściennym C, jest: $ACB + ACD > BCS + SCD$; podobnież w kącie trójściennym D, jest: $ADC + ADE > CDS + SDE$: nakoniec w kącie trójściennym E, jest: $AED + AEB > DES + SEB$.

Dodawszy teraz ilości większe do większych a mniejsze do mniejszych, to summa z ilości większych będzie większą od summy z ilości mniejszych; będzie zatém:

$$(ABC + ACB) + (ACD + ADC) + (ADE + AED) + (ABE + AEB) >$$
$$(SBC + BCS) + (SCD + CDS) + (SDE + DES) + (EBS + SEB)$$

a biorąc zamiast dwóch kątów w trójkącie, 180⁰ mniéj kątem trzecim, wypadnie:

$$(180^0 - BAC) + (180^0 - CAD) + (180^0 - DAE) + (180^0 - BAE) >$$
$$(180^0 - BSC) + (180^0 - CSD) + (180^0 - DSE) \quad (180^0 - BSE)$$

czyli:

$$4 \times 180^0 - BAC - CAD - DAE - BAE >$$
$$4 \times 180^0 - BSC - CSD - DSE - BSE.$$

Nazwawszy dla krótkości kąty BAC, CAD i t. d. to jest kąty płaskie ograniczające kąt bryłowy dany przez A, a znowu kąty BSC, CSD i t. d., czyli kąty naokoło punktu S przez S, będzie:

$$4 \times 180^0 - A > 4 \times 180^0 - S$$

W téj ostatniéj nierówności przenosząc $(-S)$ na pierwszą stronę, a $(-A)$ na drugą i od obydwóch stron odjąwszy po 4×180^0, wypadnie:

$$S > A \text{ czyli nawzajem } A < S.$$

A że kąty przy S jako kąty na jednéj płaszczyznie na około jednego punktu ważą 4 kąty proste, więc kąty płaskie przy A, czyli kąty płaskie ograniczające kąt bryłowy, są mniejsze od czterech kątów prostych.

Powyższy dowód da się jeszcze krócéj wyrazić w następujący sposób:

Po przecięciu danego kąta bryłowego płaszczyzną $BCDE$, i obraniu na niéj dowolnego punktu S, oraz połączeniu go z wierzchołkami B, C, D i E liniami prostemi uważam, że summa trójkątów bocznych $BAC + CAD$ i t. d. jest równa summie trójkątów $BSC + CSD$ i t. d. leżących na płaszczyznie $BCDE$; a że w każdym trójkącie summa wszystkich trzech kątów, równa się dwóm kątom prostym, więc z tego wypada, że summa wszystkich kątów w trójkątach bocznych, równa się summie wszystkich kątów w trójkątach leżących na płaszczyznie $BCDE$.

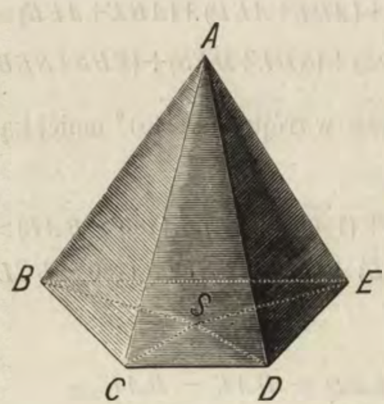


Fig. 35.

Lecz w kącie trójściennym B, ograniczonym kątami płaskiemi ABE, ABC i EBC, jest (n° 56) $ABE + ABC > EBC$, czyli $ABE + ABC > EBS + SBC$. W kącie trójściennym C jest podobnież $ACB + ACD > BCS + SCD$, i tak następnie uważając kąty trójścienne przy punktach D i E, wypadnie, że summa kątów u podstaw, w trójkątach bocznych, będzie większą od summy kątów u podstaw w trójkątach leżących na płaszczyznie $BCDE$, a że summa wszystkich kątów w trójkątach bocznych jest równą summie wszystkich kątów w trójkątach leżących na płaszczyznie $BCDE$, więc oczywiście summa kątów przy wierzchołkach w trójkątach bocznych, czyli kątów płaskich ograniczających kąt bryłowy A, jest mniejszą od summy kątów przy wierzchołkach w trójkątach leżących na płaszczyznie $BCDE$, czyli kątów na około punktu S. Ponieważ zaś kąty na około punktu S jako leżące na jednéj płaszczyznie, ważą cztery kąty proste, więc kąty na około punktu A, to jest kąty płaskie ograniczające kąt bryłowy, są mniejsze od czterech kątów prostych. *Zatém w kącie bryłowym trójściennym kąty i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

59. *Dwa kąty trójścienne są sobie równe, gdy mają po kącie dwuściennym równym zawartym pomiędzy dwiema ścianami odpowiednio równemi i w tym samym porządku ułożonemi.*

Założenie. Niech będą dwa kąty trójścienne A i a (fig. 36), mające kąt dwuścienny $CABD = cabd$, ścianę $BAC = bac$, $BAD = bad$ i w tym samym porządku ułożone; mam dowieść, że kąty te są sobie równe.

Dowodzenie. Wsuwam kąt trójścienny a w kąt trójścienny A, tak aby punkt a padł na punkt A, krawędź ab żeby poszła po krawędzi AB i ściana bad poszła po ścianie BAD; że zaś te ściany z założenia są sobie równe, więc i prosta ad pójdzie po AD. Ponieważ kąt dwuścienny $CABD = cabd$, a ściana bad leży na BAD i krawędź ab na AB, więc i ściana bac pójdzie po BAC, a że te ściany z założenia są sobie równe, więc i krawędź ac pójdzie po krawędzi AC; że zaś ad leży także na AD i punkt a na punkcie A, więc cała ściana cad przystanie do ściany CAD, a tém samém i kąt trójścienny a jest równy kątowi trójściennemu A (nº 54). *Kąty zatém trójścienne są sobie równe, kiedy i t. d.* co było do okazania.

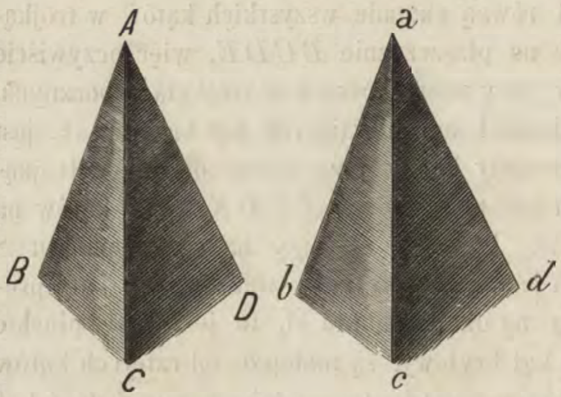


Fig. 36.

Twierdzenie.

60. *Dwa kąty trójścienne są sobie równe, gdy mają po jednéj ścianie równéj i po dwa kąty dwuścienne przy téj ścianie leżące równe i w jednakowym porządku ułożone.*

Założenie. Niech będą dwa kąty trójścienne A i a (fig. 36), w których zakładam, że ściana $BAD = bad$, kąt dwuścienny $CABD = cabd$ i kąt dwuścienny $CADB = cadb$; mam dowieść, że te kąty trójścienne są sobie równe.

Dowodzenie. Wsuwam kąt trójścienny a w kąt trójścienny A, tak żeby punkt a padł na punkt A, krawędź ab

kładę na krawędź AB i ścianę bad na BAD; a że te ściany z założenia są sobie równe, więc i krawędź ad pójdzie po AD. Dla równości kątów dwuściennych $cabd$ i $CABD$, ściana bac pójdzie po ścianie BAC i krawędź ac znajdować się będzie na płaszczyznie BAC. Dla równości znowu kątów dwuściennych $cadb$ i $CADB$, ściana dac pójdzie po DAC i krawędź ac znajdować się będzie na płaszczyznie DAC: w jednym więc i tym samym czasie, krawędź ac ma się znajdować na dwóch płaszczyznach BAC i DAC, a więc musi leżéć koniecznie na ich wspólném przecięciu, to jest na krawędzi AC, a tém samém kąty trójścienne A i a są sobie równe. *Kąty zatém trójścienne mające po jednéj ścianie równéj i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

61. *Dwa kąty trójścienne są sobie równe, gdy mają po trzy kąty płaskie ograniczające je równe i w jednakowym porządku ułożone.*

Założenie. Niech będą kąty trójścienne A i a (fig. 37), w których zakładam, że jest kąt $BAC = bac$, kąt $BAD = bad$ i kąt $CAD = cad$; mam dowieść, że kąt trójścienny A równy kątowi a.

Dowodzenie. Chcąc to okazać, na wszystkich krawędziach obu kątów trójściennych odcinam części równe, tak żeby było $AB = AC = AD = ab = ac = ad$. Punkta B, C i D oraz b, c i d łączę liniami prostemi, i na płaszczyzny BCD i bcd, jakby na podstawy kątów trójściennych A i a, z wierzchołków tychże kątów spuszczam prostopadłe AE i ae; to ponieważ pochyłe AB, AC i AD są z wykreślenia między sobą równe, więc spodek prostopadłéj AE, to jest punkt E, jest środkiem koła przechodzącego przez spodki tychże pochyłych (nº 13), to jest przez punkta B, C i D, a tém samém okręgu koła opisanego na trójkącie BCD. Dla téjże saméj przyczyny punkt e jest środkiem koła opisanego na trójkącie bcd.

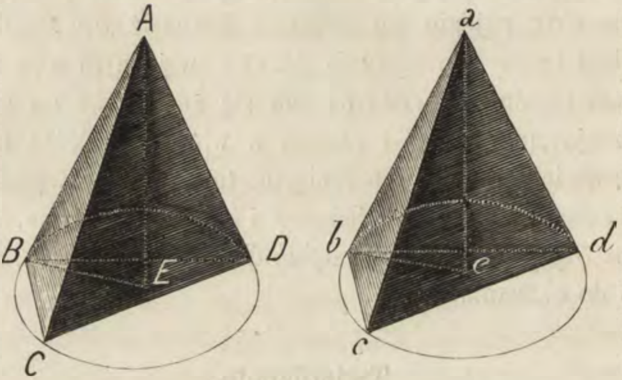


Fig. 37.

Uważam teraz dwa trójkąty BAC i bac: te dwa trójkąty mają bok $AB=ab$ i bok $AC=ac$ z wykreślenia a kąt $BAC=bac$ z założenia, a więc trójkąty te są sobie równe a z ich równości wypada, że bok $BC=bc$. Podobnież z równości trójkątów BAD i bad wypada, że jest bok $BD=bd$, a nakoniec z równości trójkątów CAD i cad wypada, że jest bok $CD=cd$. Dwa więc trójkąty BCD i bcd mające po trzy boki równe są sobie równe, a więc i koła na tychże trójkątach opisane są także sobie równe, to jest, mają promienie równe. Jest więc promień BE równy promieniowi be. Nakoniec dwa trójkąty prostokątne AEB i aeb mają przeciwprostokątną $AB=ab$ z wykreślenia a ramię kąta prostego $BE=be$ z dowiedzenia, więc są sobie równe, a z ich równości wypada, że prostopadła $AE=ae$.

Jeżeli teraz kąt trójścienny a wsuniemy w kąt trójścienny A, tak aby podstawa bcd przystała do podstawy BCD, to i punkt e padnie na punkt E, a że z punktu danego na płaszczyznie, jednę tylko do niéj prostopadłę poprowadzić można (nº 9) więc i prostopadła ea pójdzie po EA, że zaś te dwie prostopadłe są sobie z dowiedzenia równe, więc i punkt a padnie na punkt A. Skoro zaś podstawa bcd przystała do podstawy BCD i punkt a padł na punkt A, więc wszystkie ściany kąta trójściennego a, przystaną do ścian kąta trójściennego A, a tém samém te kąty trójścienne są sobie równe. *Kąty więc trójścienne mające po trzy kąty i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie to, jeszcze w inny sposób dowiedzione być może. I tak niech będą kąty trójścienne A i a (fig. 37 *bis*), w których kąt $BAC = bac$, kąt $BAD = bad$ i kąt $CAD = cad$, trzeba dowieść, że te kąty trójścienne są sobie równe.

Dowodzenie. Od wierzchołków A i a odcinam $AB = ab$. Z punktów B i b na ścianach BAC i BAD oraz bac i bad prowadzę proste BC i BD oraz bc i bd prostopadłe do odpowiednich krawędzi AB i ab i uważam dwa trójkąty ABC i abc które mają bok $AB = ab$ z wykreślenia, kąt $ABC = abc$ jako kąty proste i kąt $BAC = bac$ z zało-

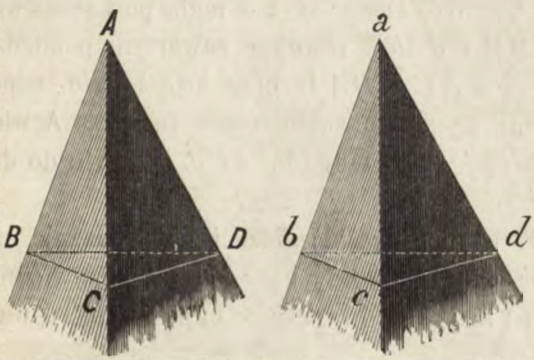


Fig. 37 *bis*.

żenia; trójkąty więc te są sobie równe, a w szczególności bok $AC = ac$ i $BC = bc$. Dla takiéjże przyczyny trójkąty ABD i abd są sobie równe, a z ich równości jest bok $AD = ad$ i $BD = bd$. Trójkąty zatém ACD i acd jako mające bok

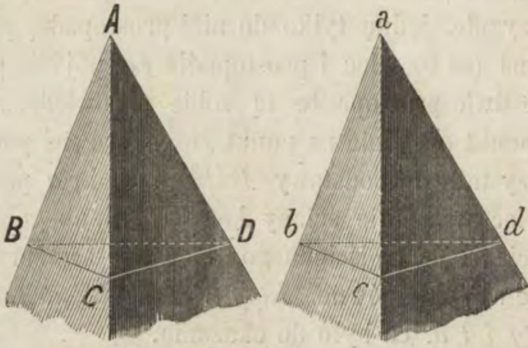


Fig. 37 *bis*.

$AC = ac$ i bok $AD = ad$ z dowiedzenia, a kąt $CAD = cad$ z założenia, są sobie równe i jest $CD = cd$. A że z poprzedzającego, jest bok $BC = bc$ i $BD = bd$, więc dwa trójkąty BCD i bcd są sobie równe a w szczególności kąt $CBD = cbd$. Lecz kąty CBD i cbd są odpowiednie dwójściennym $DABC$ i $dabc$ (nº 40), zatém kąty trójścienne A i a mają po kącie dwuściennym $DABC$ i $dabc$ równym zawartym pomiędzy dwiema ścianami BAC i BAD oraz bac i bad odpowiednio równemi, są przeto sobie równe (nº 59). A więc *kąty trójścienne mające po trzy kąty i t. d.* co było do dowiedzenia.

Wniosek. Z powyższego dowodzenia się okazuje, że kąty trójścienne mające po trzy kąty płaskie odpowiednio równe, mają i po trzy kąty dwuścienne odpowiednio równe.

Twierdzenie.

62. *Wewnątrz kąta bryłowego trójściennego obrawszy gdziekolwiek punkt i z tego punktu spuściwszy prostopadłe* *do ścian tegoż kąta a następnie przez każde dwie prostopadłe przesunąwszy płaszczyznę, te trzy płaszczyzny utworzą nowy kąt trójścienny, którego kąty pochyłości płaszczyzn, czyli kąty dwuścienne są spełnieniami przeciwległych kątów płaskich danego kąta trójściennego; i nawzajem kąty płaskie utworzonego kąta trójściennego są spełnieniami przeciwległych kątów dwuściennych danego kąta trójściennego.*

Założenie. Niech będzie kąt trójścienny O (fig. 38) ograniczony trzema kątami płaskiemi AOB, AOC i COB. Obrawszy wewnątrz niego gdziekolwiek punkt o i z tego punktu spuściwszy oa prostopadłą do COB, ob prostopadłą do AOC i oc prostopadłą do AOB i przez te prostopadłe poprowadziwszy płaszczyzny, utworzy się przez to kąt trójścienny o. Trzeba więc dowieść, że kąty dwuścienne kąta o są spełnieniem kątów płaskich danego kąta O, i nawzajem kąty dwuścienne danego kąta trójściennego O, są spełnieniem kątów płaskich utworzonego kąta trójściennego.

Dowodzenie. Płaszczyzna przechodząca przez ob i oc, jako przez linie prostopadłe do płaszczyzn AOC i AOB jest do tychże płaszczyzn prostopadłą (nº 47) a tém samém prostopadłą do ich wspólnego przecięcia AO (nº 52), i nawzajem AO jest prostopadłe do płaszczyzny boc a tém samém prostopadłe do

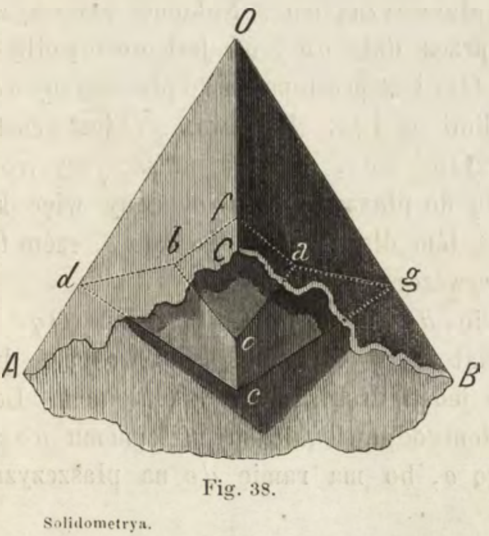


Fig. 38.

linii *bd* i *cd*, na téj płaszczyznie przez spodek *d* prostéj *A O* przechodzących a będących przecięciami się płaszczyzny *b o c* z płaszczyznami *A O C* i *A O B*. Podobnież płaszczyzna przeprowadzona przez *o a* i *o c* jest prostopadłą do *B O* i nawzajem *B O* prostopadłą do płaszczyzny *a o c* a tém samém do linii *a g* i *g c*, z których *a g* leży na płaszczyznie *C O B* i jest wspólném przecięciem się téj płaszczyzny z płaszczyzną *a o c*, zaś *g c* leży na płaszczyznie *A O B* i jest wspólném przecięciem się téj płaszczyzny z płaszczyzną *a o c*. Nakoniec płaszczyzna przeprowadzona przez linie *o a* i *o b* jest prostopadłą do *C O*, i nawzajem *C O* jest prostopadłą do płaszczyzny *a o b* a tém samém do linii *a f* i *f b*. Ponieważ *A O* jest prostopadłą do płaszczyzny *b o c*, *C O* do płaszczyzny *a o b*, a *B O* prostopadłą do płaszczyzny *a o c*, dany więc kąt trójścienny *O* jest tém dla utworzonego kąta *o*, czém ten ostatni jest dla pierwszego.

Fig. 38.

W czworokącie *d O g c*, kąt *O d c* i kąt *O g c* są proste a więc kąt *d O g* z kątem *d c g*, czynią dwa kąty proste, czyli jeden drugiego jest spełnieniem. Lecz kąt *d c g* jest kątem odpowiednim dwuściennemu *a o c b*, kąta trójściennego *o*, bo ma ramię *d c* na płaszczyznie

boc, a ramię cg na płaszczyznie aoc, i obadwa te ramiona prostopadłe do wspólnego przecięcia się tych płaszczyzn to jest do oc, które będąc z wykreślenia prostopadłe do płaszczyzny AOB, jest tém samém prostopadłém do prostych cg i cd, przez jego spodek na téj płaszczyznie przechodzących. Kąt zaś dOg czyli AOB jest kątem płaskim kąta trójściennego O i kątowi dcg przeciwległym; zatém kąt płaski kąta trójściennego O, z kątem dwuściennym kąta trójściennego o, sobie przeciwległym, są kątami spełniającemi się do 180°.

Tym sposobem, uważając czworokąt $dOfb$, dowiedziemy, że kąt dOf czyli AOC, z kątem dbf czyli dwuściennym $coba$ spełniają się wzajemnie do 180°, a uważając czworokąt $fOga$, okaże się, że kąt fOg czyli COB z kątem fag czyli dwuściennym $boac$ spełniają się również do 180°.

Następnie w czworokącie $dboc$, kąty dbo i dco są proste, zatém kąt płaski boc, utworzonego kąta trójściennego o, z kątem bdc, odpowiednim dwuściennemu $CAOB$ danego kąta trójściennego O, czynią dwa kąty proste; jest więc jeden spełnieniem drugiego.

Tak samo dowiedzie się, że kąt aob z kątem afb czyli dwuściennym $AOCB$, kąta trójściennego O, i kąt aoc z kątem agc czyli dwuściennym $COBA$, tegoż kąta trójściennego O wzajemnie się spełniają do 180°.

A zatém wewnątrz kąta trójściennego, obrawszy gdziekolwiek punkt i z tego punktu i t. d. co było do okazania.

Kąty trójścienne takie jak O i o nazywają się *spełniającemi.*

Twierdzenie.

63. *Kąty trójścienne mające nachylenia się ścian odpowiednich jednakowe, mają i ściany odpowiednie równe, a tém samém są sobie równe.*

Dowodzenie. Oznaczmy dane kąty trójścienne przez A i a, a kąty ich spełniające przez B i b. Ponieważ kąty A i a mają z założenia kąty dwuścienne odpowiednio równe, to i spełnienia tych kątów, czyli kąty płaskie ograniczające kąty trójścienne B i b są sobie równe, a tém samém jest kąt trójścienny $B = b$ (nº 61).

Z równości kątów trójściennych B i b wypada, że mają kąty dwuścienne odpowiednie sobie równe (nº 61, wniosek), a więc i spełnienia tych ostatnich czyli kąty płaskie, ograniczające dane kąty trójścienne A i a są także sobie równe. Dane więc kąty trójścienne A i a mające teraz po trzy kąty płaskie ograniczające je równe, są sobie równe. Co było do okazania.

Twierdzenie.

64. *W kącie trójściennym każdy kąt dwuścienny powiększony dwoma kątami prostemi, jest większy od dwóch pozostałych kątów dwuściennych. Summa zaś trzech kątów dwuściennych kąta trójściennego jest większą od dwóch a mniejszą od sześciu kątów prostych.*

Dowodzenie. Niech A, B i C oznaczają trzy kąty dwuścienne danego kąta trójściennego, to kąty płaskie ograniczające kąt trójścienny spełniający go, będą $180^0 - A$, $180^0 - B$ i $180^0 - C$ (nº 62).

Lecz w kącie trójściennym, jedna ściana jest mniejszą od dwóch pozostałych (nº 56); jest więc:

$$180^0 - A < 180^0 - B + 180^0 - C$$

czyli zmieniając w całéj téj nierówności znaki na przeciwne, będzie:

$$-180^0 + A > -180^0 + B - 180^0 + C$$

czyli:

$$A - 180^0 > B + C - 360^0$$

Dodając do obydwóch stron téj ostatniéj nierówności po 360^0, jest:

$$A - 180^0 + 360^0 > B + C - 360^0 + 360^0$$

czyli:

$$A + 180^0 > B + C.$$

A zatém *w kącie trójściennym, każdy kąt dwuścienny powiększony dwoma kątami prostemi i t. d.* co było do okazania.

Co do drugiego. Trzy kąty płaskie kąta trójściennego spełniającego, są podług powyższego $180^0 - A$, $180^0 - B$ i $180^0 - C$. Lecz summa kątów płaskich ograniczających kąt bryłowy jest mniejsza od czterech kątów prostych (nº 58), ale zawsze większą od zera. Jest więc:

$$180^0 - A + 180^0 - B + 180^0 - C > 0$$

$$180^0 - A + 180^0 - B + 180^0 - C < 4 \times 90^0$$

czyli:

$$1) \quad 6 \times 90^0 - A - B - C > 0$$

$$2) \quad 6 \times 90^0 - A - B - C < 4 \times 90^0$$

W nierównościach 1) i 2) przenosząc 6×90 na drugie strony, będzie:

$$-A - B - C > -6 \times 90^0$$

$$-A - B - C < -2 \times 90^0$$

Zmieniając w dwóch ostatnich nierównościach znaki na przeciwne, jest:

$$A + B + C < 6 \times 90^0$$

$$A + B + C > 2 \times 90^0$$

czyli, *że summa trzech kątów dwuściennych kąta trójściennego jest większą i t. d.* co także było do okazania.

Uwaga 2ga. Ważném jest podobieństwo, jakie zachodzi pomiędzy własnościami trójkąta a kąta trójściennego. Można z jednych przechodzić do drugich podstawiając za boki, kąty i wierzchołki trójkąta, ściany, kąty dwuścienne i krawędzie kąta trójściennego. I tak:

1° *W trójkącie summa dwóch boków jest większą od trzeciego.*
W kącie trójściennym summa dwóch ścian jest większą od trzeciéj.

2° *W trójkącie mającym dwa kąty równe, boki przeciwne kątom równym, są sobie równe.*
W kącie trójściennym mającym dwie ściany sobie równe, kąty dwuścienne tym ścianom przeciwległe, są sobie równe.

3° *Jeżeli trójkąty mają po trzy boki odpowiednie równe, mają i kąty tym bokom przeciwne, sobie równe.*
Jeżeli kąty trójścienne mają po trzy ściany odpowiednie równe, mają i kąty dwuścienne tymże ścianom przeciwne, także sobie równe i t. d.

Ważném jest również i to, że chociaż każdéj własności trójkąta, odpowiada własność kąta trójściennego, to nie zawsze własnościom kąta trójściennego odpowiadają własności trójkąta. I tak np. własności, że w kącie trójściennym, summa ścian jest mniejszą od czterech kątów prostych, nie ma odpowiedniéj w trójkącie.

ROZDZIAŁ III.

O WIELOŚCIANACH W OGÓLNOŚCI — WIELOŚCIANY FOREMNE I SYMETRYCZNOŚĆ.

---

65. *Bryłą wielościenną* albo *wielościanem* nazywamy bryłę ograniczoną ze wszystkich stron płaszczyznami, które się nazywają *ścianami wielościanu.*

Wspólne przecięcia się ścian nazywają się *krawędziami*, a punkta w których się przecinają krawędzie, *wierzchołkami wielościanu.*

Linia prosta łącząca wierzchołki wielościanu a nie leżąca na żadnéj z jego ścian, nazywa się *przekątną wielościanu.*

Na ograniczenie wielościanu najmniéj czterech płaszczyzn potrzeba, bo jak wiemy, trzy płaszczyzny dopiero kąt bryłowy utworzyć mogą.

Wielościan przybiera nazwisko od ilości ścian, które go ograniczają. Może więc być czworościanem, pięciościanem, sześciościanem i t. d., a to stosownie do tego, czy go cztery, pięć, sześć lub więcéj ścian ogranicza.

Wielościan jest *wypukłym*, jeżeli cały znajduje się po jednéj stronie każdéj z ograniczających go płaszczyzn dostatecznie przedłużonych; *wklęsłym* zaś, jest w przypadku przeciwnym.

W kursie tym mówić tylko będziemy o wielościanach wypukłych.

Wielościany mogą jeszcze być foremne lub nieforemne.

66. *Wielościan foremny* jest wtenczas, kiedy wszystkie jego ściany są wielokątami foremnemi o jednakowéj liczbie boków i sobie równemi. Wielościanów foremnych jest tylko pięć i więcéj ich być nie może, a to dla tego, że na ograniczenie kąta bryłowego, najmniéj trzech kątów płaskich potrzeba, i że summa kątów płaskich ograniczających kąt bryłowy, musi być mniejszą od czterech kątów prostych (nº 58).

Rozbierzmy to po szczególe. Ponieważ najprostszy ze wszystkich wielokątów jest trójkąt, zacznijmy więc bryłę, a tém samém i kąty bryłowe ograniczać trójkątami foremnemi. Weźmy najprzód najmniéj ile wziąć można kątów płaskich na ograniczenie kąta bryłowego, to jest trzy, i zobaczmy czy kąt bryłowy ztąd utworzony będzie odpowiadał warunkom. Ponieważ każdy kąt trójkąta foremnego waży 60° czyli $\frac{2}{3}$ kąta prostego, więc trzy takie kąty ważyć będą 180° to jest mniéj niż cztery kąty proste. Będziemy więc już mieli jeden wielościan ograniczony trójkątami foremnemi, którego kąty bryłowe są trójścienne, i wielościan taki nazywa się *czworościanem foremnym* (fig. 39).

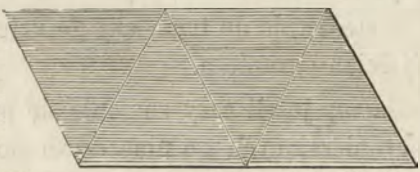
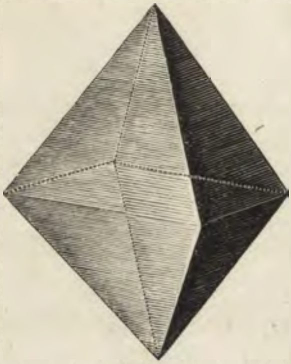


Fig. 39.



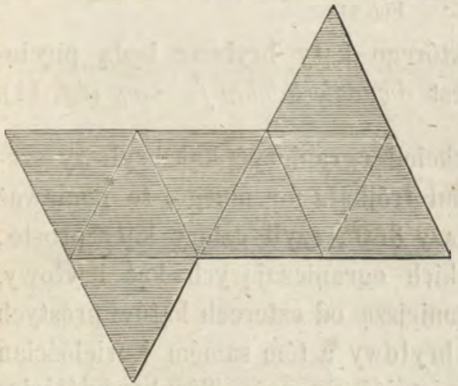


Fig. 40.

Następnie wziąwszy cztery trójkąty, czyli cztery kąty płaskie trójkąta foremnego, na ograniczenie kąta bryłowego, summa tych czterech kątów ważyć będzie 240°, to jest mniéj jak cztery kąty proste, a więc znowu mieć będziemy drugi wielościan foremny, którego kąty bryłowe będą czworościenne, i taką bryłą jest *ośmiościan foremny* (fig. 40).

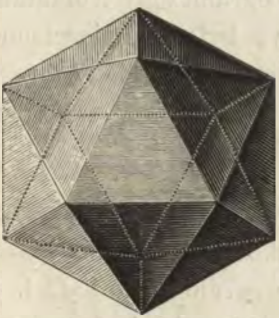


Fig. 41.

Wziąwszy daléj pięć trójkątów, czyli pięć kątów płaskich trójkąta foremnego, na ograniczenie kąta bryłowego, to summa tych pięciu kątów płaskich ważyć będzie 300°, zawsze mniéj jak cztery kąty proste, mieć zatém będziemy trzeci wielościan foremny, ogra-

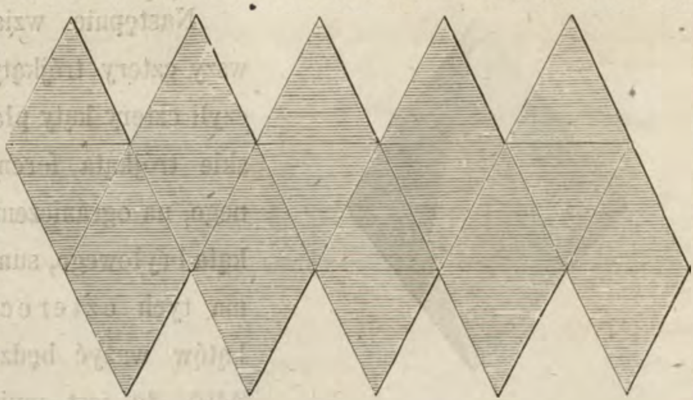
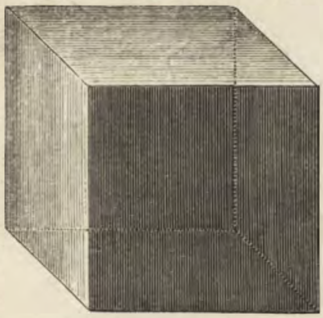


Fig. 41.

niczony trójkątami, którego kąty bryłowe będą pięcio-ścienne i taką bryłą jest *dwudziestościan foremny* (fig. 41).

Gdybyśmy teraz chcieli ograniczyć kąt bryłowy sze-ścioma kątami płaskiemi trójkąta foremnego, to ponieważ sześć takich kątów waży 360°, czyli cztery kąty proste, a summa kątów płaskich ograniczających kąt bryłowy, musi być koniecznie mniejszą od czterech kątów prostych (nº 58), więc taki kąt bryłowy a tém samém i wielościan mający kąty sześcienne istniéć nie może. Tém bardziéj więc nie może także istniéć wielościan ograniczony trójkątami foremnemi, któregoby kąty bryłowe były siedmiościenne, ośmiościenne i t. d. Trzy więc tylko są wielościany forem-ne ograniczone trójkątami, to jest: *czworościan*, *ośmiościan* i *dwudziestościan*.

67. Po trójkątach następują czworokąty; wziąwszy więc trzy, to jest najmniéj ile tylko wziąść można kątów płaskich czworokąta foremnego na ograniczenie kąta bry-łowego, to ponieważ każdy kąt w czworokącie foremnym czyli w kwadracie jest prosty, zatém waży 90°, trzy więc



ważyć będą 270° czyli mniéj jak cztery kąty proste. Można więc będzie bryłę ograniczyć kwadratami. Bryła taka mieć będzie kąty trójścienne i nazywa się *sześcianem foremnym* czyli po prostu *sześcianem*, albo inaczéj *kubikiem* (fig. 42). Cztery kąty płaskie kwadratu już ważyłyby cztery kąty proste, a ztąd kąta bryłowego ograniczyćby nie mogły.

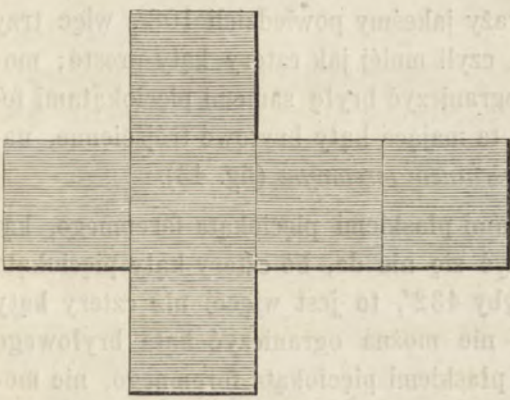


Fig. 42.

68. Weźmy teraz pięciokąty foremne. Wiadomo, że każdy kąt pięciokąta foremnego waży $\frac{6}{5}$ kąta prostego czyli 108°. Wziąwszy więc znów najmniéj ile wziąść można, to jest trzy kąty pięciokąta foremnego na ograniczenie kąta bryłowego, to ponieważ każdy kąt pięcio-

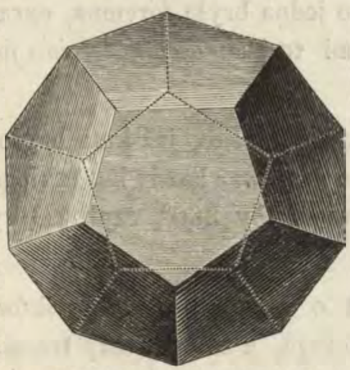


Fig. 43.

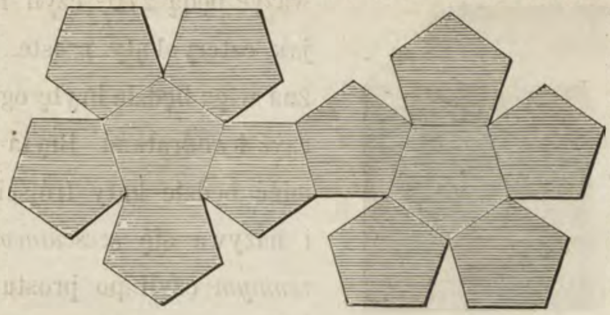


Fig. 43.

kąta foremnego waży jakeśmy powiedzieli 108°, więc trzy ważyć będą 324°, czyli mniéj jak cztery kąty proste; można więc będzie ograniczyć bryłę samemi pięciokątami foremnemi, i bryła ta mająca kąty bryłowe trójścienne, nazywa się *dwunastościanem foremnym* (fig. 43).

Czterema kątami płaskiemi pięciokąta foremnego, kąt bryłowy ograniczyć się nie da, bo cztery kąty pięciokąta foremnego ważyłyby 432°, to jest więcéj niż cztery kąty proste. A skoro nie można ograniczyć kąta bryłowego czterema kątami płaskiemi pięciokąta foremnego, nie można go tém bardziéj ograniczyć pięcioma, sześcioma, siedmioma i t. d. Jest więc tylko jedna bryła foremna, ograniczona pięciokątami foremnemi to jest: *dwunastościan foremny*.

Trzema kątami sześciokąta foremnego, już kąta bryłowego ograniczyć nie można; bo ponieważ każdy kąt takiego sześciokąta waży 120°, trzy ważyłyby 360°, czyli cztery kąty proste.

Wielokąt foremny im jest o większéj liczbie boków, tém ma kąty wewnętrzne większe, a zatém kiedy trzema sześciokątami, kąta bryłowego ograniczyć nie można, to tém bardziéj nie można go ograniczyć trzema siedmiokątami foremnemi, ośmiokątami foremnemi i t. d.

Jest więc tylko pięć wielościanów foremnych, a mianowicie: ograniczonych trójkątami foremnemi trzy: *czworościan*, *ośmiościan* i *dwudziestościan*; kwadratami jeden to jest *sześcian*, pięciokątami jeden: *dwunastościan*, i więcéj ich być nie może.

Uwaga 1sza. Pod figurą każdéj z powyższych pięciu brył (fig. 39, 40, 41, 42, 43), narysowana jest sieć wielokątów ją ograniczających, a to dla pokazania w jaki sposób można te bryły bardzo łatwo samemu zrobić. Trzeba bowiem tylko, wykroić np. z tektury, obwód sieci czyli figurę oznaczoną liniami zewnętrznemi, a wszystkie linie wewnętrzne, odgraniczające wielokąty między sobą, do połowy grubości tektury ponarzynać. Z tak przygotowanéj figury, bez żadnych już trudności złoży się wielościan żądany.

Uwaga 2ga. *Czworościan foremny* jako ograniczony czterema trójkątami równobocznemi, ma wszystkich boków tych trójkątów $4\times3=12$, a że 2 boki dają jedną krawędź, tych więc ostatnich będzie $\frac{12}{2}=6$. Co do kątów płaskich, tych w czworościanie jest 4×3, a że trzy kąty płaskie téj bryły tworzą jeden jéj kąt bryłowy, kątów zatém bryłowych będzie $\frac{12}{3}=4$.

Ośmiościan foremny składa się z ośmiu trójkątów równobocznych, ma więc wszystkich boków $8\times3=24$, krawędzi $\frac{24}{2}=12$, wszystkich kątów płaskich $8\times3=24$, a że cztery płaskie idą na jeden bryłowy, tych więc ostatnich będzie $\frac{24}{4}=6$.

Dwudziestościan foremny ma ścian trójkątnych dwadzieścia, wszystkich zatém boków a tém samém i kątów płaskich $3\times20=60$, krawędzi $\frac{60}{2}=30$, kątów bryłowych $\frac{60}{5}=12$, na każdy bowiem kąt bryłowy idzie pięć płaskich.

Sześcian ma ścian kwadratowych sześć, boków a tém samém i kątów płaskich $6\times4=24$, krawędzi $\frac{24}{2}=12$, kątów bryłowych trójściennych $\frac{24}{3}=8$.

Dwunastościan foremny ma ścian pięciokątnych dwanaście, boków a tém samém i kątów płaskich $5\times12=60$, krawędzi $\frac{60}{2}=30$, kątów bryłowych trójściennych $\frac{60}{3}=20$.

Uwaga 3^{cia}. Liczba ścian sześcianu odpowiada liczbie kątów bryłowych ośmiościanu, i odwrotnie. Takaż sama odpowiedniość zachodzi pomiędzy liczbami ścian i kątów bryłowych dwunasto i dwudziestościanów.

O SYMETRYCZNOŚCI.

69. Symetrya uważaną być może potrójnie: to jest albo względem punktu, albo względem linii, albo téż wreszcie względem płaszczyzny.

Punkt, linia lub płaszczyzna, względem których uważa się symetrya, nazywają się: punkt, *środkiem;* linia, *osią;* a płaszczyzna, płaszczyzną *symetryi.*

Figury są wtenczas symetryczne względem punktu, kiedy mają wierzchołki odpowiednie na liniach prostych przechodzących przez środek symetryi, i dzielących się w nim na dwie równe części. I tak np. dwa czworościany $ABCD$ i $abcd$ (fig. 44) są symetryczne względem punktu E, gdyż wierzchołki A i a, B i b, C i c, D i d, są na liniach Aa, Bb, Cc, Dd przechodzących przez punkt E, czyli przez środek symetryi i dzielących się

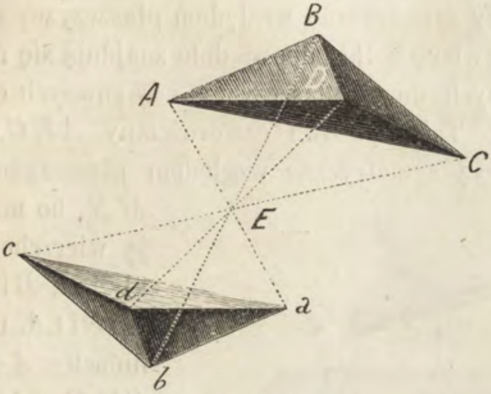


Fig. 44

w nim na dwie równe części, tak że jest $AE=Ea$, $BE=$ $=Eb$ i t. d.

Figury symetryczne względem linii są wtenczas, kiedy ich wierzchołki odpowiednie znajdują się na liniach prostopadłych do osi symetryi i w równych od niéj odległościach. I tak (fig. 45), wielokąty $ABCDE$ i $abcde$ są symetryczne względem linii FG, która jest osią symetryi, bo mają wierzchołki A i a, B i b, C i c i t. d. na liniach Aa, Bb, Cc i t. d. prostopadłych do osi symetryi FG i podzielonych przez tęż oś na dwie równe części tak, że jest $AH=Ha$, $BK=Kb$, $CM=Mc$ i t. d.

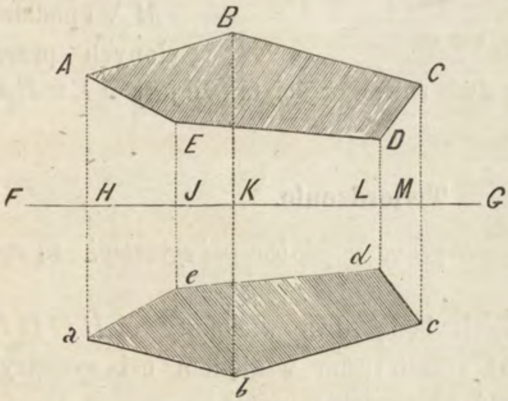


Fig. 45.

Względem linii mogą być tylko symetrycznemi figury płaskie.

Nakoniec figury symetryczne względem płaszczyzny są wówczas, gdy ich wierzchołki odpowiednie znajdują się na liniach prostopadłych do téj płaszczyzny i w równych od niéj odległościach. Tak np. dwa czworościany $ABCD$ i $abcd$ (fig. 46) są symetryczne względem płaszczyzny MN, bo mają wierzchołki A i a, B i b, C i c i t.d. na liniach Aa, Bb, Cc i t.d. prostopadłych do płaszczyzny symetryi MN i podzielonych przez tęż płaszczyznę na dwie równe części, tak że jest $AE=Ea$, $BG=Gb$ i t. d.

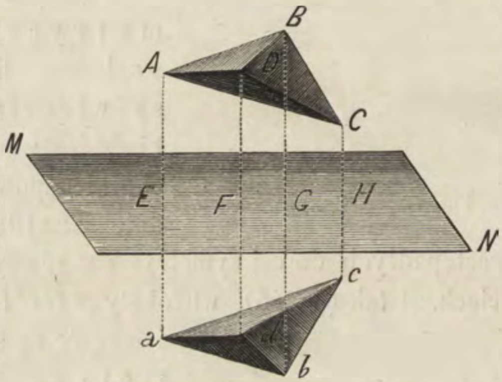


Fig. 46.

Twierdzenie.

70. *Figury symetryczne względem osi symetryi, są sobie równe.*

Założenie. Niech będą dwa wielokąty $ABCDE$ i $abcde$ (fig. 45) symetryczne względem osi symetryi FG, mam dowieść że są sobie równe.

Dowodzenie. Obracajmy wielokąt $abcde$ około osi symetryi FG, tak ażeby wierzchołki jego a, b, c, d, e, znajdowały się ciągle na liniach prostopadłych do téjże osi FG i odległości swych od niéj nie zmieniały. Wówczas wielokąt $abcde$ będący pod osią symetryi, przejdzie nad tęż oś, i ponieważ $Ha=HA$, punkt a padnie

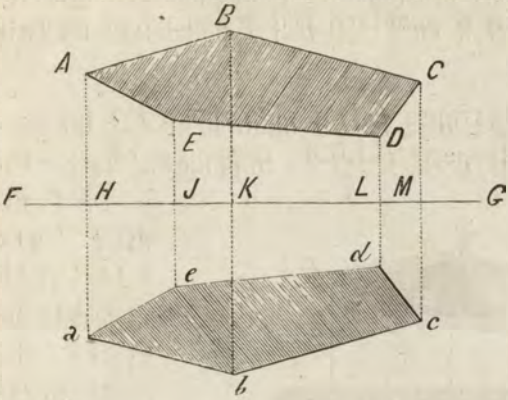


Fig. 45.

na punkt A. Dla téj saméj przyczyny punkt b padnie na B, punkt c na C i t. d., czyli wierzchołki wielokąta $abcde$ padną na wierzchołki wielokąta $ABCDE$ a tém samém i boki pierwszego, pójdą po bokach drugiego; więc dwa te wielokąty są sobie równe. *Figury zatém symetryczne i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

71. *W dwóch wielościanach symetrycznych, ściany odpowiednie są sobie równe, i nachylenie się ścian przyległych w jednym wielościanie, jest równe nachyleniu się ścian odpowiednich w drugim.*

Założenie. Niech będą dwa wielościany symetryczne względem płaszczyzny symetryi MN (fig. 47). Wierzchołkami kątów bryłowych jednego niech będą punkta A i B, a wierzchołkami odpowiedniemi drugiego a i b; mam dowieść, że wielościany te mają ściany odpowiednie równe i nachylenie się ścian przyległych w jednym, jest równe nachyleniu się ścian odpowiednich w drugim wielościanie.

Dowodzenie. Ponieważ dane dwa wielościany są symetryczne, względem płaszczyzny MN, a więc linie Aa i Bb

są do téj płaszczyzny prostopadłe, i w punktach przecięcia się z nią, to jest w punktach F i J podzielone na dwie równe części.

Obracając teraz trapez $FJba$ około boku FJ, tak ażeby się położył na trapezie $FJBA$, to ponieważ kąty aFJ i AFJ tudzież kąty bJF i BJF są proste, bo linie Aa i Bb będąc prostopadłe do płaszczyzny MN, są także prostopadłe i do linii FJ przechodzącéj przez ich spodki (n° 7); więc linia Fa pójdzie po FA, a Jb po JB, a że $Fa = FA$ i $Jb = JB$, więc punkt a padnie na punkt A i punkt b na punkt B: ztąd linia $ab = AB$ i jedna do drugiéj zupełnie przystaje.

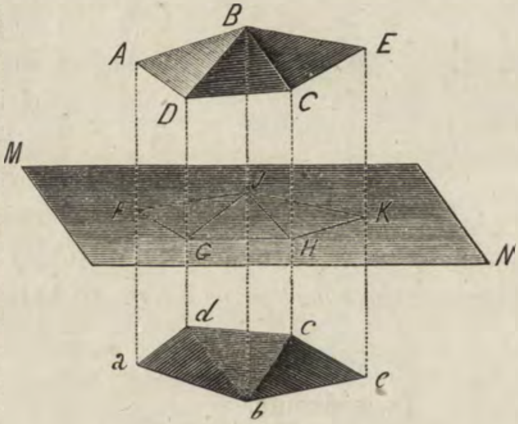


Fig. 47.

Niech będzie D wierzchołkiem kąta bryłowego w wielościanie górnym, a d wierzchołkiem kąta bryłowego jemu odpowiedniego w wielościanie dolnym, to będziem mieli podobnie jak powyżéj $BD = bd$ i $AD = ad$. Trójkąt więc ABD zawarty pomiędzy trzema wierzchołkami kątów bryłowych w wielościanie górnym, jest równy trójkątowi abd zawartemu pomiędzy trzema odpowiedniemi wierzchołkami w wielościanie dolnym.

Gdyby jeszcze punkt C był wierzchołkiem kąta bryłowego w wielościanie górnym, a punkt c wierzchołkiem odpowiedniego kąta bryłowego w wielościanie dolnym, to przez podobne jak powyżéj dowodzenie okazałoby się, że $BC=bc$, $DC=dc$ a tém samém, że trójkąt $DBC=dbc$. Podobnym sposobem dowieśćby można, że wszystkie trójkąty jak ABD, DBC i t. d. znajdujące się na powierzchni wielościanu górnego, byłyby równe odpowiednim trójkątom abd, dbc i t. d. na powierzchni wielościanu dolnego, czyli że powierzchnie dwóch danych wielościanów symetrycznych składają się z jednakowéj liczby trójkątów odpowiednio sobie równych; biorąc więc z nich te, które składają jedne ściany, pokaże się że ściany odpowiednie w wielościanach symetrycznych są sobie równe.

Aby okazać że nachylenia się ścian przyległych w jednym wielościanie, są równe nachyleniom się ścian odpowiednich w drugim, uważmy którekolwiek dwa kąty bryłowe, np. B i b. Kąty te mają: kąt płaski $ABD=abd$, kąt $DBC=dbc$ z dowiedzenia, i kąt $ABC=abc$; bo jakbyśmy połączyli punkt A i C, tudzież a i c liniami prostemi, to byłby trójkąt $ABC=abc$. A więc trzy kąty płaskie ograniczające kąt trójścienny B, są równe trzem kątom płaskim ograniczającym odpowiedni kąt bryłowy b, zatém nachylenia się ścian odpowiednich mają jednakowe (n° 61, wniosek). *W dwóch zatém wielościanach symetrycznych, ściany odpowiednie i t. d.* co było do okazania.

Uwaga. Ponieważ dwa powyższe wielościany symetryczne mają ściany odpowiednie równe, nachylenia się ścian przyległych w jednym, równe nachyleniom się ścian odpowiednich w drugim, a tém samém i kąty bryłowe równe;

więc są sobie równe, ale równe przez symetryą, bo ściany jednego są przeciwnie ułożone jak ściany drugiego.

Przykład równości przez symetryą bardzo jasno przedstawia się na rękach lub nogach człowieka. Obie ręce są sobie równe, lecz równe przez symetryą, bo np. rękawiczka z lewéj ręki nie wejdzie na rękę prawą, choć jest jéj zupełnie równa.

ROZDZIAŁ IV.

O GRANIASTOSŁUPIE, RÓWNOLEGŁOŚCIANIE I WALCU.

---

72. *Graniastosłup* czyli *pryzma* jest to bryła otoczona równoległobokami, a z jednéj i drugiéj strony ograniczona wielokątami równemi i od siebie równoodległemi (fig. 48 i 49).

Wielokąty $ABCDE$ i $FGHJK$ ograniczające graniastosłup nazywają się *podstawami*.

Równoległoboki AF, EK, DJ i t. d. otaczające graniastosłup nazywają się *ścianami*, a linie wspólnego przecięcia się ścian, jak AG, EF, DK i t. d. nazywają się *krawędziami* graniastosłupa.

Ściany graniastosłupa razem wzięte, składają *powierzchnię boczną*.

Prostopadła LM, spuszczona z któregokolwiek punktu jednéj podstawy na drugą, nazywa się *wysokością* graniastosłupa.

Jeżeli krawędzie graniastosłupa są prostopadłe do jego podstaw, czyli jeżeli są zarazem wysokościami, to wówczas graniastosłup jest prosty i ściany jego są prostokątami. W przeciwnym razie, gdy krawędzie graniastosłupa są pochyłe do jego podstaw, czyli gdy ściany są równoległobokami, graniastosłup jest pochyły.

Graniastosłup można uważać jako utworzony przez posuwanie się wielokąta równoodlegle od pierwszego swego położenia po pewnéj linii prostéj. I tak, jeżelibyśmy wielokąt $ABCDE$ (fig. 48 i 49) posuwali po linii prostéj AG, równoodlegle od pierwszego swego położenia, to wierzchołki wielokąta czyli punkta A, B, C i t. d. utworzą przez to posuwanie, linie AG, EF, DK i t. d. czyli krawędzie graniastosłupa; boki wielokąta to jest linie AB, BC, CD i t. d. utworzą płaszczyzny AH, BJ, DJ i t. d. czyli ściany graniastosłupa, a nakoniec sama płaszczyzna wielokąta $ABCDE$, przebieży przestrzeń $ABCDEFGHJK$, która jest graniastosłupem.

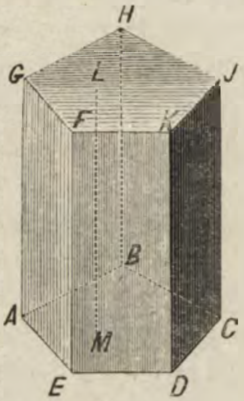


Fig. 48.

Jeżeli linia po któréj się posuwa wielokąt tworzący graniastosłup, jest do płaszczyzny tego wielokąta prostopadłą, jak np. linia AG (fig. 48), to utworzy się graniastosłup prosty; jeżeli zaś jest do płaszczyzny wielokąta pochyłą, jak np. linia AG (fig. 49), to utworzy się graniastosłup pochyły.

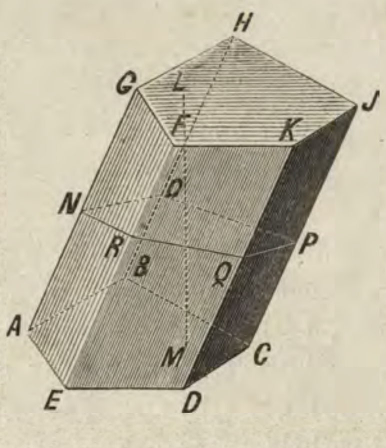


Fig. 49.

73. Z tego sposobu tworzenia się graniastosłupa wypada, że wszelkie przecięcie téj bryły płaszczyzną równoodległą od podstawy, jest wielokątem podobnym i równym podstawie.

Graniastosłup przybiera nazwisko od swojéj podstawy i jest trójkątnym, jeżeli za podstawę ma trójkąt, czworokątnym jeżeli ma czworokąt, pięciokątnym jeżeli ma pięciokąt i t. d.

Najprostszy ze wszystkich graniastosłupów jest graniastosłup trójkątny.

Przecięcie graniastosłupa pochyłego płaszczyzną $NOPQR$ prostopadłą do jego krawędzi (fig. 49) nazywa się *profilem*.

Graniastosłup prosty, mający za podstawy wielokąty foremne, nazywa się *graniastosłupem foremnym*.

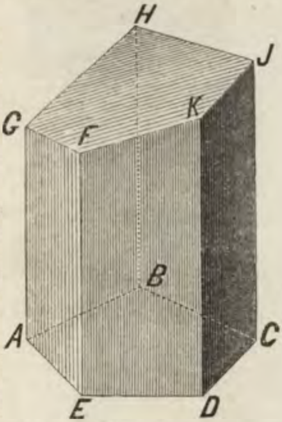


Fig. 50.

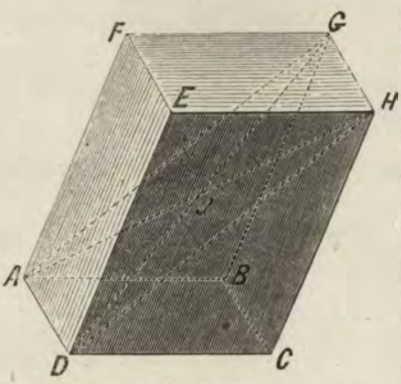


Fig. 51.

Część graniastosłupa $ABCDEFGHJK$ (fig. 50) zawarta pomiędzy podstawą $ABCDE$ a przecięciem $FGHJK$ nierównoodległém od podstawy, nazywa się *klocem graniastosłupowym*.

Graniastosłup mający za podstawy równoległoboki (fig. 51) nazywa się *równoległościanem*.

Płaszczyzna $AGHD$ (fig. 51) przechodząca wewnątrz równoległościanu, przez dwie jego krawędzie przeciwległe, nazywa się *płaszczyzną przekątną*. Proste AH i DG będące przekątnemi płaszczyzny przekątnéj, nazywają się *przekątnemi równoległościanu*. Końce przekątnych są *wierzchołkami* równoległościanu sobie przeciwległemi.

Równoległościan mający za podstawy i ściany prostokąty (fig. 52) nazywa się *równoległościanem prostym prostokątnym* albo krócéj *prostopadłościanem*.

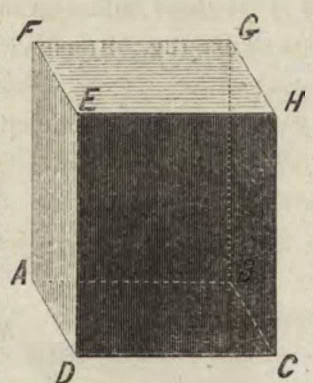


Fig. 52.

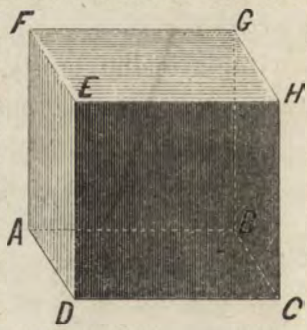


Fig. 53.

Prostopadłościan mający za podstawy i ściany kwadraty (fig. 53), nazywa się *sześcianem*. W sześcianie wszystkie krawędzie są sobie równe.

Jeżelibyśmy na płaszczyznie wykreślili okrąg koła lub inną jaką krzywę, i linię prostą pod jakimkolwiek kątem nachyloną do téj płaszczyzny, posuwali po owéj linii krzywéj równoodlegle od pierwszego swego położenia i przytém wyobrazili sobie, że linia ta posuwając się ślad po sobie pozostawia; to wówczas powierzchnia krzywa zakreślona tą prostą, nazywa się *powierzchnią walcową*. Prostą posuwającą się zwać będziemy *tworzącą*, a rzeczony okrąg koła, lub każdą inną linię krzywą na płaszczyznie nakreśloną *kiero-*

wnicą. Mówić tu będziemy tylko o takiéj powierzchni walcowéj, która za kierownicę ma okrąg koła.

Twierdzenie.

74. *Jeżeli powierzchnię walcową przetniemy płaszczyzną równoodległą od téj na któréj zakreśloną została kierownica, to przecięcie ztąd otrzymane będzie zupełnie równe kierownicy.*

Założenie. Niech $ABCDEF$ będzie okręgiem koła będącego kierownicą (fig. 54), którego środkiem jest punkt S, linia Aa tworzącą, posuwającą się po tym okręgu koła równoodlegle od swego pierwotnego położenia i zajmującą następnie położenia Bb, Cc i t. d. Niech $abcdef$ będzie przecięciem równoodległém od płaszczyzny $ABCDEF$; mam dowieść, że to przecięcie jest okręgiem koła, równym okręgowi $ABCDEF$.

Dowodzenie. Ze środka S prowadzę linię równoodległą od któregokolwiek położenia tworzącéj, do spotkania się z płaszczyzną przecięcia $abcdef$ w punkcie s. Punkt S z punktami A, B, C, D, E i F tudzież punkt s z punktami a, b, c, d, e i f łączę liniami prostemi. Uważam w czworokącie $AasS$, że $Aa=Ss$ jako linie równoodległe zawarte pomiędzy płaszczyznami $ABCDEF$ i $abcdef$ od siebie równoodległemi (nº 28), a więc jest i $AS=as$. Podobnież uważając czworokąt $BbsS$ wypadnie, że $BS=bs$. Dla téj saméj przyczyny $CS=cs$, $DS=ds$ i t. d. A że $AS=BS=CS=DS$ i t. d.

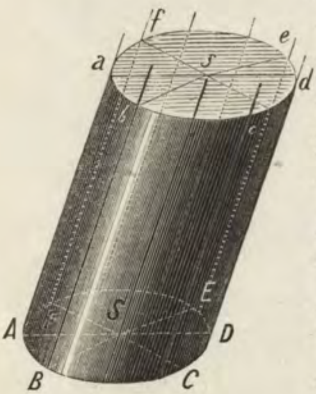


Fig. 54.

jako promienie koła, więc i $as = bs = cs = ds$ i t. d. Linia krzywa więc $abcdef$ ma wszystkie punkta równooddalone od środka s, jest więc okręgiem koła, którego promienie as, bs, cs i t. d. są równe promieniom AS, BS, CS i t. d., a tém samém, równym kierownicy $ABCDEF$. *Jeżeli więc powierzchnię walcową przetniemy i t. d.* co było do okazania.

75. *Uwaga 1sza.* Powierzchnia walcowa wraz z płaszczyzną kierownicy i płaszczyzną przecięcia równoodległą od płaszczyzny kierownicy, ograniczają bryłę *walcem* nazwaną.

Walec może być prosty i pochyły. Jeżeli tworząca jest do płaszczyzny kierownicy prostopadłą, walec wówczas jest prosty: jeżeli zaś tworząca jest do płaszczyzny kierownicy pochyłą, to walec jest pochyły.

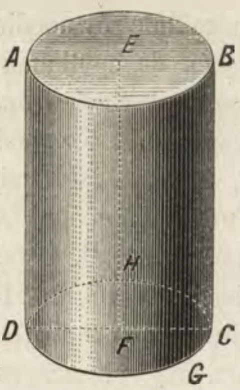


Fig. 55.

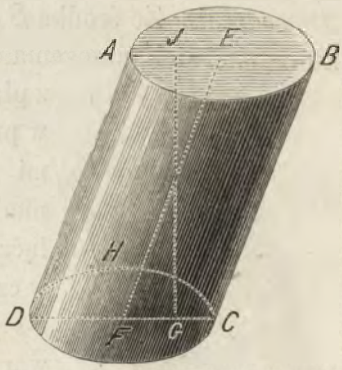


Fig. 56.

Koła AB i DC ograniczające walec (fig. 55 i 56) nazywają się *podstawami;* prostopadła JG (fig. 56) spuszczona z któregokolwiek punktu jednéj podstawy na drugą, *wysokością;* linia prosta EF łącząca środki podstaw, *osią walca.* W walcu prostym oś walca jest zarazem jego wysokością. Linie proste AD, BC (fig. 55 i 56) leżące na powierzchni walcowéj i łączące punkta okręgów podstaw, nazywają się *tworzącemi walca.* Oś walca i wszystkie jego tworzące są sobie równe, jako linie równoodległe zawarte między płaszczyznami równoodległemi.

Walec można uważać jako utworzony przez posuwanie się koła, równoodlegle od pierwszego swego położenia, tak aby środek tego koła znajdował się ciągle na linii prostéj, zwanéj osią walca. Z takowego tworzenia się walca wypada, że wszelkie przecięcie walca płaszczyzną równoodległą od podstawy, jest zawsze kołem równém podstawie.

Walec prosty jeszcze uważać można, jako utworzony przez obrót prostokąta $AEFD$ (fig. 55) około jednego ze swoich boków, jak tu np. około boku EF. W takim obrocie boki EA i FD nakreślą koła AB i CD będące podstawami walca, a bok AD zakreśli powierzchnię walcową.

76. *Uwaga 2ga.* Jeżeli wpiszemy i opiszemy na podstawie walca (fig. 57) wielokąty foremne $abcd$ i $ABCD$ o jednakowéj liczbie boków i na tych wielokątach wystawimy graniastosłupy $abcdefgh$ i $ABCDEFGH$, z których pierwszy nazwiemy wpisanym a drugi opisanym na walcu, to powierzchnia graniastosłupa $abcdefgh$ będzie mniejszą, a graniastosłupa $ABCDEFGH$ większą od powierzchni walcowéj, pierwsza jako objęta, a druga jako też powierzchnię

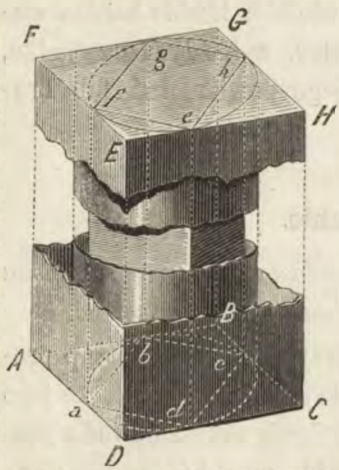


Fig. 57.

walcową obejmująca. Lecz podwajając ciągle liczbę boków w wielokątach *abcd* i *ABCD*, i za każdém podwojeniem wystawiając na nich graniastosłupy wpisane i opisane na walcu, o téj saméj co walec wysokości, to powierzchnie boczne takich graniastosłupów, będą się coraz bardziéj do siebie zbliżały, tak, że jak pomiędzy obwodami ich podstaw może zachodzić różnica mniejsza od wszelkiéj ilości naznaczonéj, tak téż i pomiędzy ich powierzchniami bocznemi zachodzić będzie różnica nieskończenie mała; a pomiędzy powierzchnią jednego z tych graniastosłupów a powierzchnią walca, jeszcze mniejsza. Powierzchnia więc walcowa środkuje pomiędzy dwiema powierzchniami bocznemi graniastosłupów i jest ich granicą, do któréj, za powiększeniem się ścian, ciągle się zbliżają, nie mogąc wszakże jéj dosięgnąć, a tém bardziéj przekroczyć. Na mocy więc podobnych rozumowań, tak jak to było przy powierzchni koła w Planimetryi, wniesiemy, że powierzchnię walcową uważać można jako powierzchnię boczną graniastosłupa, a walec jako graniastosłup, którego podstawy są wielokąty o bardzo wielkiéj liczbie bardzo małych boków. Tak téż odtąd walec, w każdym przypadku, a osobliwie przy dochodzeniu jego powierzchni lub bryłowatości uważać będziemy.

Twierdzenie.

77. *Powierzchnia boczna graniastosłupa prostego równa się iloczynowi z obwodu jego podstawy przez wysokość.*

Założenie. Niech będzie naprzykład graniastosłup prosty *ABCDEFGHJK* (fig. 48), mam dowieść, że jego powierzchnia boczna równa się iloczynowi z obwodu podstawy *ABCDE* przez wysokość, np. *AG.*

Dowodzenie. Powierzchnia boczna graniastosłupa prostego $ABCDEFGHJK$ składa się z prostokątów AF, EK, DJ i t. d.; chciawszy więc obliczyć powierzchnię boczną tego graniastosłupa, potrzeba obliczyć powierzchnię każdego takiego prostokąta i dodać je do siebie.

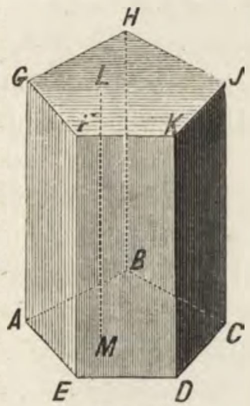


Fig. 48.

Powierzchnia prostokąta $AF = AE \times AG$. Powierzchnia prostokąta $EK = ED \times EF$, a że $EF = AG$, więc będzie $EK = ED \times AG$. Podobnież powierzchnia prostokąta $DJ = DE \times AG$ i tak następnie. Dodawszy teraz do siebie powierzchnie tych prostokątów, mieć będziemy: $AF + EK + DJ$ i t. d. $= AE \times AG + ED \times AG + DC \times AG$ i t. d. czyli: $AF + EK + DJ$ i t. d. $= (AE + ED + DC$ i t. d.$)\,AG$. A ponieważ $AF + EK + DJ$ i t. d. stanowi powierzchnię boczną graniastosłupa, a $AE + ED + DC$ i t. d. obwód podstawy, więc *powierzchnia boczna graniastosłupa prostego równa się iloczynowi z obwodu podstawy przez wysokość*, co było do okazania.

Nazwawszy więc powierzchnię boczną graniastosłupa prostego przez P, obwód jego podstawy przez O, a wysokość przez W, będziemy mieli wzór ogólny na tę powierzchnię boczną $P = O \times W$.

78. *Wniosek.* Ponieważ walec prosty uważać można jako takiż graniastosłup, mający za podstawy wielokąty o bardzo wielkiéj liczbie bardzo małych boków (n° 76), więc powierzchnia boczna walca prostego równa się iloczynowi z okręgu koła służącego mu za podstawę, przez wysokość. Nazwawszy więc promień podstawy walca prostego przez r, a wysokość tegoż walca przez W, powierzchnię zaś walcową przez P, mieć będziemy wzór ogólny dla powierzchni walca $P = 2\pi r \times W$.

Gdybyśmy powierzchnię boczną walca prostego $ABDC$ (fig. 58) rozcięli wzdłuż jego tworzącéj i rozwinęli na pła-

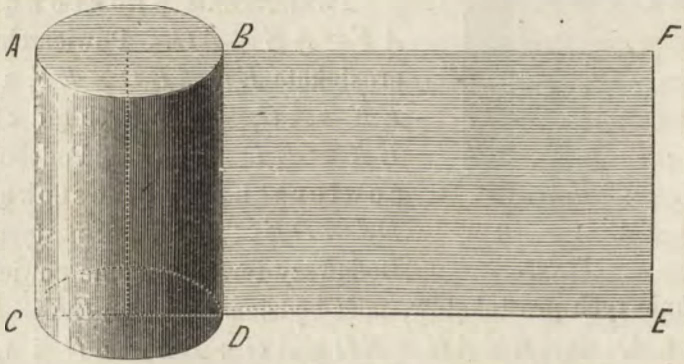


Fig. 58.

szczyznie, powierzchnia ta zamieni się na prostokąt $BDEF$, którego podstawa DE, jest równa okręgowi podstawy walca, a wysokość DB jest zarazem tworzącą i wysokością tegoż walca. Obliczyć więc powierzchnię walca danego, jest to samo co obliczyć powierzchnię prostokąta $BDEF$. Ponieważ zaś powierzchnia prostokąta $BDEF = DE \times BD$, czyli równa iloczynowi z okręgu podstawy walca przez jego wysokość, a więc i powierzchnia boczna walca prostego, równa się iloczynowi z okręgu podstawy przez wysokość.

Twierdzenie.

79. *Powierzchnia boczna graniastosłupa pochyłego równa się iloczynowi z obwodu jego profilu przez którąkolwiek krawędź.*

Założenie. Niech będzie graniastosłup pochyły BG (fig. 59), którego profilem, czyli przecięciem prostopadłém do wszystkich krawędzi jest wielokąt $LMNOP$; mam dowieść, że powierzchnia boczna graniastosłupa BG będzie równa iloczynowi z obwodu profilu $LMNOP$ przez którąkolwiek krawędź, np. przez AK.

Dowodzenie. Powierzchnia boczna graniastosłupa BG składa się z równoległoboków AJ, BH, CG i t. d., których obliczywszy powierzchnie i dodawszy do siebie, mieć będziemy powierzchnię boczną graniastosłupa BG.

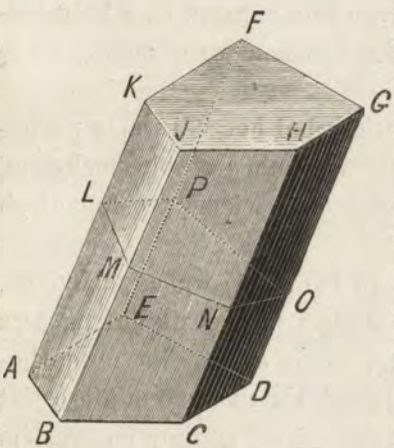


Fig. 59.

Ponieważ płaszczyzna $LMNOP$ jest prostopadłą do krawędzi AK, BJ, CH i t. d., więc nawzajem te krawędzie są prostopadłe do płaszczyzny $LMNOP$, a tém samém prostopadłe do linii LM, MN, NO i t. d jako przechodzących przez ich spodki a leżących na płaszczyznie $LMNOP$ (nº 8). Jeżeli więc krawędzie graniastosłupa BG weźmiemy za podstawy równoległoboków AJ, BH, CG i t. d., to wtenczas linie LM, MN, NO i t. d. będą wysokościami tychże równoległoboków.

Powierzchnia równoległoboku $AJ = LM \times AK$. Powierzchnia równoległoboku $BH = MN \times BJ$; a że $BJ = AK$, więc $BH = MN \times AK$. Podobnież powierzchnia równoległoboku $CG = NO \times AK$ i tak następnie. Dodawszy teraz powierzchnie tych wszystkich równoległoboków będziemy mieli:

$AJ + BH + CG$ i t. d. $= LM \times AK + MN \times AK + NO \times AK$ i t. d., czyli $AJ + BH + CG$ i t. d. $= (LM + MN + NO$ i t. d.$) AK$. A że $AJ + BH + CG$ i t. d. składa powierzchnię boczną graniastosłupa BG, a $LM + MN + NO$ i t. d. obwód profilu, więc *powierzchnia boczna graniastosłupa pochyłego równa się iloczynowi z obwodu profilu przez krawędź którąkolwiek*, co było do okazania.

Nazwawszy więc powierzchnię boczną graniastosłupa pochyłego przez P, obwód jego profilu przez O, a którąkolwiek krawędź przez K, mieć będziem wzór ogólny na tę powierzchnię: $P = O \times K$.

Uwaga. Aby dojść powierzchni bocznéj walca pochyłego, potrzeba podobnie jak w graniastosłupie pochyłym, pomnożyć przez tworzącą, obwód przecięcia prostopadłego do tejże tworzącéj.

Przecięcie prostopadłe do tworzącéj walca pochyłego, jako nie równoodległe od podstawy nie będzie kołem, lecz inną linią krzywą zamkniętą, zwaną *elipsą*. Sposób dochodzenia długości elipsy w wyższéj matematyce dopiero jest podany, dla tego tutaj ograniczyć się musimy na prostém zmierzeniu takiéj elipsy sznurkiem, a następnie długość sznurka pomnożywszy przez długość tworzącéj, otrzymamy powierzchnię boczną walca pochyłego.

Twierdzenie.

80. *Dwa graniastosłupy mające po trzy ściany schodzące się w jednym punkcie równe, czyli mające po kącie trójściennym równym, zawartym pomiędzy trzema ścianami równemi i jednakowo ułożonemi, są sobie równe.*

Założenie. Niech będą dwa graniastosłupy EH i eh (fig. 60), w których zakładam, że podstawa $ABCDE = abcde$, ściana $AEFG = aefg$ i ściana $FEDK =$

fedk, mam dowieść, że te dwa graniastosłupy są sobie równe.

Równości brył nie można sobie wyobrazić przez ich przystawanie, tak jak to miało miejsce przy równości płaszczyzn; lecz wówczas bryły uważać będziemy za równe, gdy wsuwane po kolei w pewną wyrobioną formę, zupełnie ją wypełniają, przystając wszystkiemi swemi ścianami, krawędziami i wierzchołkami, do ścian, krawędzi i wierzchołków w formie wyrobionych.

Dowodzenie. Wsuwam graniastosłup *eh* w graniastosłup *EH*, tak ażeby punkt *e* padł na punkt *E* i wielokąt *abcde* kładę na wielokąt *ABCDE*; a że te dwa wielokąty są sobie z założenia równe, więc wierzchołki i boki jednego padną na wierzchołki i boki drugiego. Ponieważ kąty płaskie ograniczające kąt trójścienny *e*,

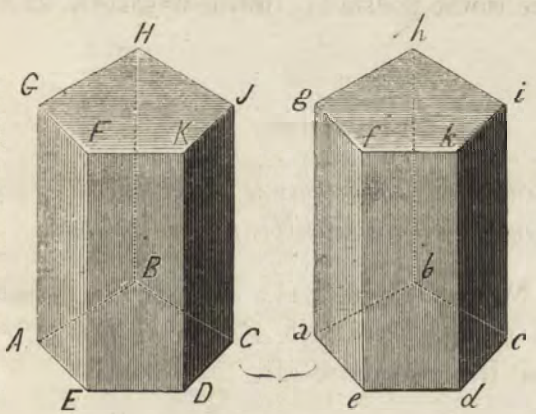


Fig. 60.

są z założenia równe kątom płaskim ograniczającym kąt trójścienny *E*, więc nachylenia ścian w jednym kącie trójściennym są równe nachyleniom ścian odpowiednich w drugim (nº 61, wniosek); skoro więc płaszczyzna *abcde* leży na płaszczyznie *ABCDE*, punkt *e* na *E* i bok *ed* na boku *ED*, zatém ściana *ek* przystanie do ściany *EK*, a tém samém bok *ef* pójdzie po boku *EF*, bok *fk* po *FK*, bok *dk* po *DK* i boki te są sobie równe. Kiedy zaś bok *dc* leży na

DC bok dk na DK i są sobie równe, to cała ściana di przystanie do ściany DJ i ściany te są sobie równe, a zatém bok ki pójdzie po KJ i bok ci pójdzie po CJ, i boki te są także sobie równe. Przechodząc tak następnie od ściany do ściany, przekonamy się, że wszystkie ściany, krawędzie i wierzchołki graniastosłupa eh, przystaną do ścian, krawędzi i wierzchołków graniastosłupa EH; dwa więc te graniastosłupy są sobie równe. *A zatém dwa graniastosłupy mające po trzy ściany schodzące się w jednym punkcie równe i t. d.* co było do okazania.

Wniosek. Z tego twierdzenia wypada, że dwa graniastosłupy mające równe podstawy i równe wysokości, są sobie równe.

Twierdzenie.

81. *W każdym równoległościanie, którekolwiek ściany przeciwległe są sobie równe i od siebie równoodległe.*

Założenie. W równoległościanie AH (fig. 51) mam dowieść, że np. ściany przeciwległe $AFED$ i $BGHC$ są sobie równe i od siebie równoodległe.

Dowodzenie. W równoległoboku $ABCD$ jest bok AD równy i równoodległy od BC, w równoległoboku zaś $ABGF$ jest bok AF równy i równoodległy od BG i jest kąt $FAD = GBC$ jako kąty mające ramiona od siebie równoodległe i skierowane w jedną stronę. Równoległoboki więc $AFED$ i $BGHC$ mają po dwa boki przyległe równe i po kącie między niemi zawartym równym, są więc sobie równe; a że AF równoodległe od BG a AD od BC, więc i cały równoległobok

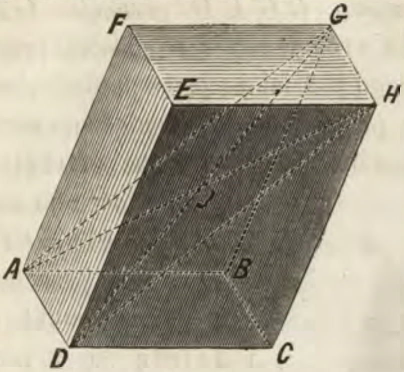


Fig. 51.

$AFED$ jest równoodległy od $BGHC$. *W każdym więc równoległościanie, którekolwiek ściany i t. d.* co było do okazania.

Wniosek. Z twierdzenia tego wypada, że w równoległościanie można brać za podstawy, dwie którekolwiek ściany przeciwległe.

Twierdzenie.

82. *Linie przekątne w równoległościanie i linie łączące środki ścian przeciwległych, dzielą się wzajemnie na dwie równe części i przechodzą wszystkie przez jeden punkt wewnątrz równoległościanu się znajdujący.*

Założenie. W równoległościanie $ABCDEFGH$ (fig. 61) mam dowieść, że jego linie przekątne FC, GD, EB i AH tudzież linie np. KL, MN łączące środki ścian przeciwległych, dzielą się wzajemnie w punkcie J na dwie równe części i wszystkie przez tenże punkt J przechodzą.

Dowodzenie. Płaszczyzna przekątna $FGCD$ jest równoległobokiem, bo FG jest równe i równoodległe od CD, linie więc FC i GD, będące przekątnemi równoległościanu są zarazem przekątnemi w równoległoboku $FGCD$; dzielą się zatém w punkcie J na dwie równe części. W równoległoboku znowu $BGED$ przekątne GD i EB dzielą się także na dwie równe części, a ponieważ przekątna GD już z poprzedniego podzieloną jestw punkcie J na dwie równe części, więc przekątna EB koniecznie musi przez ten punkt J przechodzić. Trzy więc już przekątne równoległościanu danego, to jest linia FC, GD i EB przechodzą przez punkt J i dzielą się w nim wzajemnie na dwie równe części. Podobnież uważając równoległobok $AEHB$, dowiedzie się, że przekątna AH przecina się z przekątną EB w punkcie J i dzieli się w nim na dwie równe części; wszystkie zatém przekątne równoległościanu przechodzą przez jeden punkt J i dzielą się w nim wzajemnie na dwie równe części.

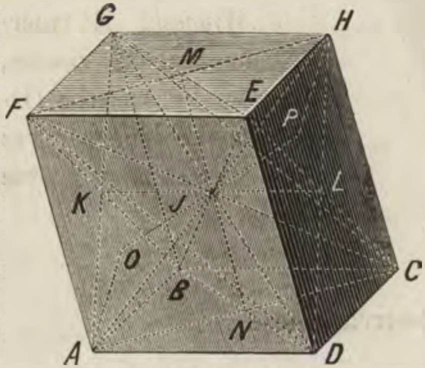


Fig. 61.

Linia KL, łącząca środki K i L ścian przeciwległych $AFGB$ i $DEHC$ łączy zarazem środki boków AG i DH przeciwnych w równoległoboku $AGHD$; przechodzić więc musi przez jego środek J i dzielić się w tym punkcie na dwie równe części. Toż samo powiedzieć można o linii MN łączącéj środki ścian $ABCD$ i $EFGH$ i o linii łączącéj środki ścian $AFED$ i $BGHC$, że przechodzą przez punkt J i dzielą się w nim na dwie równe części. *A zatém linie przekątne w równoległościanie i linie łączące środki ścian i t. d.* co było do okazania.

Uwaga 1sza. Punkt J przez który przechodzą linie przekątne równoległościanu i linie łączące środki ścian przeciwległych i dzielą się w nim na dwie równe części, nazywa się *środkiem równoległościanu;* albowiem poprowadziwszy przez ten punkt jakąkolwiek prostą opierającą się na przeciwległych ścianach równoległościanu, ta prosta dzielić się także będzie w tym punkcie J na dwie równe części. Poprowadźmy np. linią OP i połączywszy jéj końce O i P z punktami A i H prostemi OA i PH, uważmy dwa trójkąty AOJ i HJP, które mają bok $AJ=JH$ z dowiedzenia, kąt $AJO=HJP$ jako wierzchołkiem przeciwległe i kąt $OAJ=JHP$ jako naprzemianległe wewnętrzne; przystają więc do siebie i są sobie równe, a w szczególności jest bok $OJ=JP$, co było do okazania.

Uwaga 2ga. W prostopadłościanie, płaszczyzny przekątne są prostokątami, a wszystkie linie przekątne są sobie równe.

Twierdzenie.

83. *Dwa równoległościany albo równoległościan i prostopadłościan, mające wspólną podstawę dolną a podstawy górne na jednéj płaszczyznie i między temiż samemi liniami równoodległemi, są sobie równoważne.*

Założenie. Niech będzie na przykład prostopadłościan $ABCDEFGH$ (fig. 62) i równoległościan $ABCDMJKL$ mające podstawę $ABCD$ wspólną, a podstawy górne $EFGH$ i $MJKL$ na jednéj płaszczyznie i między temiż samemi liniami FK i EL od siebie równoodległemi; mam dowieść że są sobie równoważne.

Dowodzenie. Uważam dwa trójkąty AFJ i BGK które mają bok $AF = BG$ i bok $AJ = BK$ jako boki przeciwne w równoległobokach, nadto kąt $FAJ = GBK$ jako kąty mające ramiona od siebie równoodległe i skierowane w jedną stronę; trójkąty więc te są sobie ró-

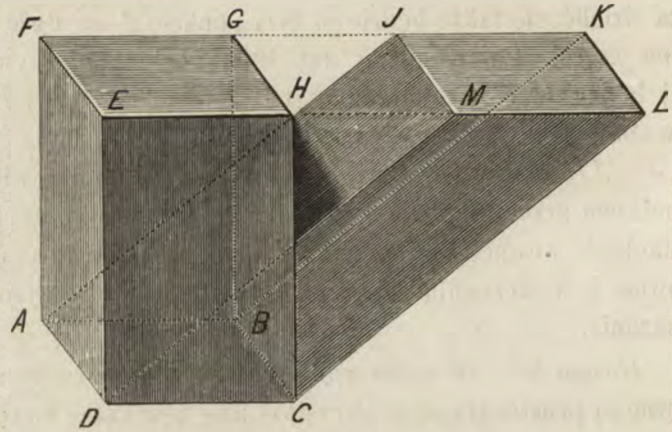


Fig. 62.

wne; dwa zatém graniastosłupy trójkątne $AFJMED$ i $BGKLHC$, mają ścianę $AFJ = BGK$ z dowiedzenia, ścianę $AE = BH$ jako przeciwne w prostopadłościanie DG i ścianę $AM = BL$ jako przeciwne w równoległościanie DK (nº 81); mają więc po trzy ściany schodzące się w jednym punkcie odpowiednio równe, więc są sobie równe (nº 80). Jeżeli teraz od całéj bryły $ABCDEFKL$ odejmiemy naprzód graniastosłup trójkątny $BGKLHC$, pozostanie prostopadłościan $ABCDEFGH$; jeżeli zaś od téj saméj bryły $ABCDEFKL$ odejmiemy następnie graniastosłup $AFJMED$, pozostanie równoległościan $ABCDMJKL$. A że od równych odejmując równe, reszty pozostają równe, a tu właśnie jedną resztą jest prostopadłościan $ABCDEFGH$, drugą zaś równoległościan $ABCDMJKL$, więc *dwa równoległościany, lub też prostopadłościan i równoległościan mające podstawę dolną wspólną i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

84. *Dwa równoległościany lub prostopadłościan i równoległościan, mające podstawę dolną wspólną a podstawy górne na jednéj płaszczyznie, lecz już nie między temi samemi liniami równoodległemi, czyli w ogólności mające wspólną podstawę i równą wysokość, są sobie równoważne.*

Założenie. Niech będzie na przykład prostopadłościan $ABCDEFGH$ (fig. 63) i równoległościan $ABCDIKLM$, mające podstawę dolną $ABCD$ wspólną a podstawy górne $EFGH$ i $IKLM$ na jednéj płaszczyznie, lecz nie między temi samemi liniami równoodległemi, czyli mające wspólną podstawę i równą wysokość; mam dowieść że są sobie równoważne.

Dowodzenie. Na płaszczyznie podstaw górnych przedłużam linie IK i ML aż do przecięcia się z przedłużonemi liniami FG i EH, z czego utworzy się równoległobok $NOPQ = ABCD$. Punkta N, O, P, Q, z punktami A, B, C, D łączę liniami prostemi, i mieć będę równoległościan $ABCDNOPQ$, który z prostopadłościanem $ABCDEFGH$ ma podstawę $ABCD$ wspólną a podstawy górne $EFGH$ i $NOPQ$ na jednéj płaszczyznie i między temiż samemi liniami

FP i *EQ* od siebie równoodległemi, jest więc prostopadłościan *ABCDEFGH* = *ABCDNOPQ* (nº 83). Lecz równoległościan *ABCDNOPQ* z równoległościanem *ABCDIKLM* mają podstawę *ABCD* wspól-

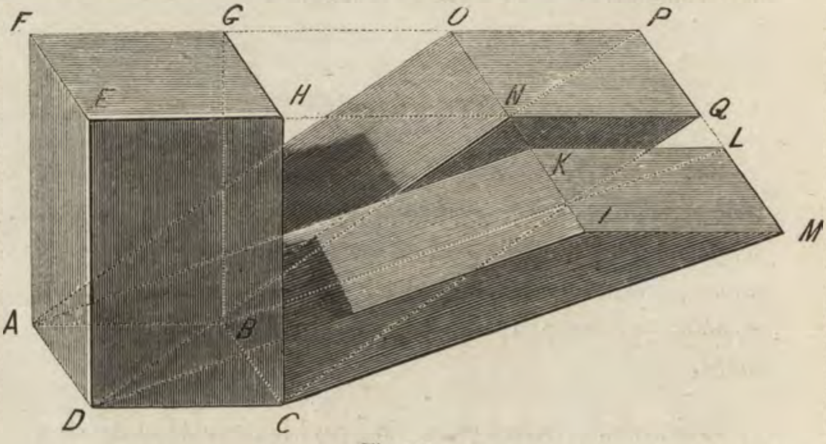


Fig. 63.

ną a podstawy górne *NOPQ* i *IKLM* na jednéj płaszczyznie i między temiż samemi liniami *IO* i *MP* od siebie równoodległemi, jest więc równoległościan *ABCDNOPQ*=*ABCDIKLM*. Kiedy więc prostopadłościan *ABCDEFGH* jest równoważny z równoległościanem *ABCDNOPQ*, ten zaś ostatni równoważny z równoległościanem *ABCDIKLM*, to jest i prostopadłościan *ABCDEFGH* równoważny równoległościanowi *ABCDIKLM*. *Dwa więc równoległościany albo prostopadłościan i równoległościan, mające i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

85. *Dwa prostopadłościany mające równe podstawy a wysokości nie równe, mają się do siebie jak wysokości, czy te są współmierne czy niewspółmierne.*

Przypadek 1^{szy} — Założenie. Niech będą dwa prostopadłościany AH i ah (fig. 64), w których zakładam, że podstawa $ABCD = abcd$ a wysokości AF i af nie równe lecz współmierne; mamy dowieść, że tak się będzie miał prostopadłościan $AH : ah = AF : af$.

Dowodzenie. Przypuśćmy, że wspólna miara dwóch wysokości AF i af, mieści się w wysokości AF trzy razy,

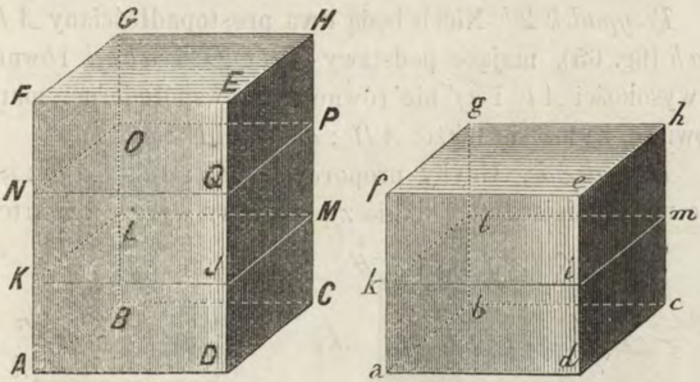


Fig. 64.

a w wysokości af dwa razy. Przez punkta podziałów K, N i k przecinam prostopadłościany dane, płaszczyznami równoodległemi od podstaw; to przecięcia ztąd powstałe KM, NP i km będą po szczególe równe podstawom $ABCD$ i $abcd$, a tym sposobem dane prostopadłościany podzielą się na mniejsze AM, KP, NH, am i kh równe między sobą, bo mające równe podstawy i równe wysokości (nº 84).

Ponieważ prostopadłościan AH ma w sobie takich prostopadłościanów trzy, jakich prostopadłościan ah ma dwa, więc ma się:

$$1) \qquad AH : ah = 3 : 2.$$

Wysokość AF ma znowu w sobie takich części trzy, jakich wysokość af ma dwie; więc będzie:

$$2) \qquad AF : af = 3 : 2.$$

W proporcyach 1) i 2) drugie stosunki są sobie równe, więc pierwsze są także sobie równe i składają proporcyę; będzie więc: $AH : ah = AF : af$ co było do okazania.

Przypadek 2gi. Niech będą dwa prostopadłościany AH i ah (fig. 65), mające podstawy $ABCD$ i $abcd$ równe, a wysokości AF i af nie równe i nie współmierne; mam dowieść, że ma się także: $AH : ah = AF : af$.

Dowodzenie. Gdyby proporcya $AH : ah = AF : af$ nie miała miejsca, to jedynie z przyczyny wyrazu czwarte-

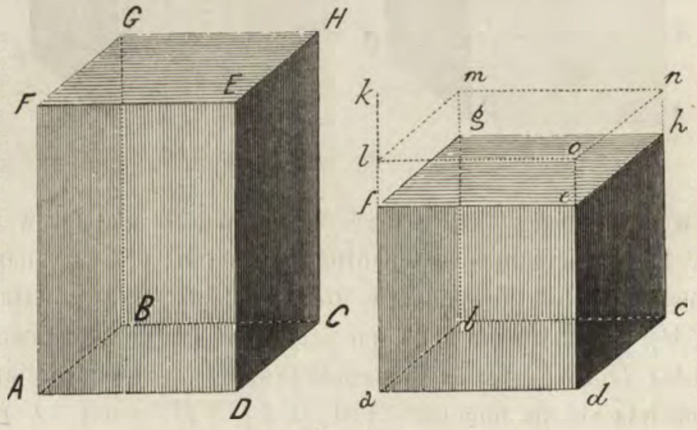


Fig. 65.

go af, który byłby albo za mały albo za duży, trzy bowiem wyrazy proporcyi dowolnie mogą być wzięte, a tylko czwarty do nich stosować się winien. Przypuśćmy więc, że wyraz czwarty af jest za mały, i weźmy zamiast af coś większego np: ak, mieć więc będziemy proporcyę:

1) $AH : ah = AF : ak.$

Wysokość AF dzielę na tyle równych części, aby każda z nich była mniejszą od fk, i jedną taką cząstkę przenoszę na ak poczynając od punktu a. Żadna z tych cząstek nie może skończyć się w punkcie f, bo linie AF i af z założenia są niewspółmierne, lecz skończyć się może między punktami f i k np. w punkcie l. Przez punkt l prowadzę płaszczyznę $lmno$ równoodległą od podstawy $abcd$ i linie af, bg, de i ch przedłużam do spotkania się z płaszczyzną $lmno$ w punktach l, m, n, o, przez co utworzy się prostopadłościan an, który z prostopadłościanem AH ma podstawę $abcd = ABCD$, a wysokości al i AF nie równe, lecz współmierne z wykreślenia; więc podług pierwszego przypadku tego twierdzenia jest:

2) $AH : an = AF : al$

W proporcyach 1) i 2) poprzedniki AH i AH oraz AF i AF są równe, następniki więc składać powinny proporcyę i będzie:

3) $ah : an = ak : al.$

Lecz proporcyę tę uważając na figurze, widzimy, że w pierwszym stosunku jest $ah < an$, gdy tymczasem w drugim jest $ak > al$, co być nie może. A że proporcya 3) powstała z dwóch proporcyj 1) i 2), z których 2) jest dowiedziona, a 1) tylko przypuszczona, więc przypuszczenie jest złe, czyli że wyrazu czwatego w założonéj proporcyi $AH : ah = AF : af$ powiększyć nie można. Tak samo się dowiedzie, że go i zmniejszyć nie można; a skoro go ani powiększyć ani zmniejszyć nie można, musi więc pozostać takim, jakim jest. Proporcya więc $AH : ah = AF : af$ ma miejsce, czyli że: *dwa prostopadłościany mające równe podstawy a nie równe wysokości i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

86. *Dwa prostopadłościany mające równe wysokości a nie równe podstawy, mają się do siebie jak podstawy.*

Założenie. Niech będą dwa prostopadłościany AH i KN (fig. 66), mające wspólną wysokość CH a podstawy AC i KM nie równe; mam dowieść, że się mają do siebie jak podstawy.

Dowodzenie. Ścianę $AFED$ przedłużam aby przecięła prostopadłościan KN. Ściana ta przedłużona przetnie się z płaszczyzną JN po prostéj EP, z płaszczyzną KM po prostéj DQ, a z płaszczyzną LN po prostéj PQ. Uważam teraz dwa prostopadłościany AH i DN, mające wspólną ścianę $DEHC$, którą wziąwszy za wspólną ich podstawę a tém samém linie BC i CM za wysokości, będzie (nº 85):

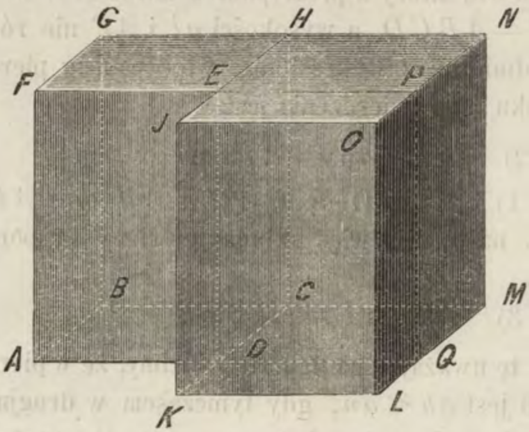


Fig. 66.

$$1) \quad AH : DN = BC : CM.$$

Następnie dwa prostopadłościany DN i KN, mają wspólną podstawę $CHNM$ a wysokości CD i CK nie równe, mają się więc jak wysokości i jest:

$$2) \quad DN : KN = CD : CK.$$

Proporcye 1) i 2) pomnożywszy przez siebie i zarazem wyrazy pierwszego stosunku skróciwszy przez DN, będzie:

$$AH : KN = BC \times CD : CM \times CK$$

a że $BC \times CD$ oznacza powierzchnię prostokąta czyli prostokąt $ABCD$, a $CM \times CK$ prostokąt $KCML$, więc ma się:

$$AH : KN = ABCD : KCML$$

to jest, że *prostopadłościany mające równe wysokości a nie równe podstawy i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

87. *Dwa prostopadłościany nie mające ani równych podstaw ani równych wysokości, mają się do siebie jak iloczyny z podstaw przez wysokości, czyli jak iloczyny z trzech krawędzi schodzących się w jednym punkcie.*

Założenie. Niech będą dwa prostopadłościany AH i ah (fig. 67), których wysokości AF i af i podstawy AC i ac nie są sobie równe; trzeba dowieść, że tak się ma $AH : ah = AC \times AF : ac \times af$ albo jak $AD \times AB \times AF : ad \times ab \times af$.

Dowodzenie. Na wysokości AF odcinam $AJ = af$. Przez punkt J prowadzę płaszczyznę JK równoodległą od AC i uważam dwa prostopadłościany AH i AK, które mają podstawę AC wspólną, a wysokości AF i AJ nie równe, będzie więc (n° 85):

1) $AH : AK = AF : AJ$ albo do af, bo $AJ = af$.

Uważam następnie dwa prostopadłościany AK i ah, które mają wysokości AJ i af równe a podstawy AC i ac nie równe; więc (nº 86) ma się:

$$2)\quad AK : ah = AC : ac$$

Proporcye 1) i 2) rozmnożywszy przez siebie i zarazem skróciwszy wyrazy pierwszego stosunku przez AK, będzie:

$$AH : ah = AC \times AF : ac \times af.$$

Zatém prostopadłościany dane mają się do siebie jak iloczyny z podstaw przez wysokości.

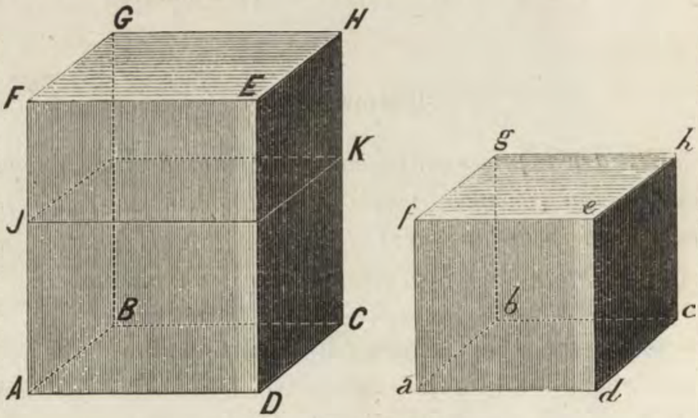


Fig. 67.

Zamiast podstawy AC która jest prostokątem, można wziąść $AD \times AB$; podobnież $ac = ad \times ab$. Te wartości za AC i ac wstawiwszy w ostatnią proporcyę będzie:

$$AH : ah = AD \times AB \times AF : ad \times ab \times af$$

z czego okazuje się znowu, że prostopadłościany dane mają się do siebie, jak iloczyny z trzech krawędzi schodzących się w jednym punkcie.

Uwaga. Zmierzyć objętość czyli bryłowatość pewnéj bryły, jest to dojść ile bryła dana zawiera w sobie sześcianów wziętych za miarę czyli za jedność. Jeżeli każdy bok sześcianu wziętego za jedność ma cal długości, to sześcian takowy nazywa się *calem sześciennym;* jeżeli ma długości stopę, to *stopą sześcienną,* a w ten sam sposób może być *łokieć sześcienny, sążeń sześcienny* i t. d.

88. *Wniosek 1szy.* Wziąwszy prostopadłościan AH i sześcian ah (fig. 68), to będzie podług poprzedzającego twierdzenia:

$$AH : ah = AF \times AD \times AB : af \times ad \times ab.$$

Przypuśćmy, że sześcian ah, jest jednością, np. stopą sześcienną i że w prostopadłościanie AH, wysokość AF ma stóp 5, linia AD stóp 3, a linia AB stóp 2. Proporcya więc poprzedzająca zamieni się na następującą:

$$AH : ah = 5 \times 3 \times 2 : 1.$$

Ile więc $5 \times 3 \times 2$, czyli iloczyn z trzech krawędzi schodzących się w jednym punkcie, albo iloczyn z podstawy przez wysokość w prostopadłościanie ma w sobie jedności, tyle prostopadłościan AH ma w sobie sześcianów ah. Czyli że: *prostopadłościan ma w sobie tyle sześcianów wziętych za*

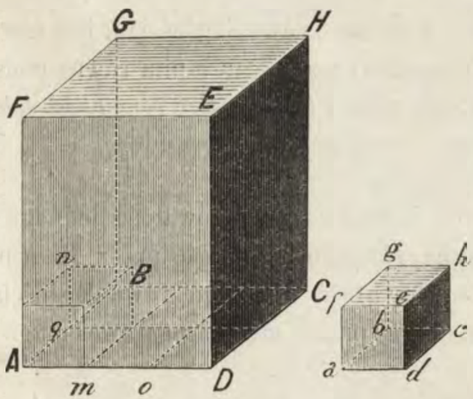


Fig. 68.

jedność, ile iloczyn z trzech krawędzi schodzących się w jednym punkcie, czyli iloczyn z podstawy przez wysokość ma w sobie jedności.

O prawdzie téj można się jeszcze przekonać w ten sposób:

Linia AD ma 3 stopy; a AB 2 stopy, poprowadziwszy więc przez punkta m, o, linie równoodległe od AB, a przez punkt q równoodległą od AD, podstawa AC podzieli się na 6 kwadratów czyli stóp kwadratowych. Na każdéj takiéj stopie kwadratowéj może stanąć stopa sześcienna jak np. mn, a tém samém na podstawie AC stanie 6 stóp sześciennych i one stanowić będą jednę warstwę prostopadłościanu AH na stopę wysoką. Że zaś wysokość AF ma 5 stóp, warstw więc takich w prostopadłościanie AH będzie 5, a że każda ma 6 stóp kubicznych, cały więc prostopadłościan AH, mieć będzie stóp kubicznych 30, to jest właśnie tyle, ile wynosi iloczyn z trzech krawędzi schodzących się w jednym punkcie, czyli z podstawy przez wysokość.

89. *Wniosek 2gi.* Ponieważ równoległościan, jest równoważny prostopadłościanowi mającemu z nim równą podstawę i wysokość (nº 84), więc i *bryłowatość równoległościanu równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość.*

90. *Wniosek 3ci.* Nazwawszy bryłowatość jednego równoległościanu przez R, jego wysokość przez W a podstawę przez P; bryłowatość drugiego równoległościanu przez r, jego wysokość przez w, a podstawę przez p, będzie:

$$R = P \times W \quad \text{i} \quad r = p \times w, \quad \text{a ztąd:}$$

$$1)\qquad R : r = P \times W : p \times w.$$

To jest że: *równoległościany nie mające ani równych podstaw ani równych wysokości, mają się do siebie jak iloczyny z podstaw przez wysokości.*

Jeżeli równoległościany dane mają równe podstawy, to jest $P = p$, w takim razie proporcya 1) zamieni się na:

$$R : r = W : w$$

czyli że: *równoległościany mające równe podstawy a nie równe wysokości mają się do siebie jak wysokości.*

Przypuściwszy wreszcie że $W = w$, to proporcya 1) zamieni się na

$$R : r = P : p$$

czyli, że *równoległościany mające równe wysokości a nie równe podstawy, mają się do siebie jak podstawy.*

Twierdzenie.

91. *Płaszczyzna przekątna dzieli równoległościan na dwa graniastosłupy trójkątne symetryczne, sobie równe.*

Założenie. Niech będzie równoległościan AH (fig. 69), mam dowieść, że płaszczyzna przekątna $BDEG$ dzieli go na dwa graniastosłupy $ABDEGF$ i $BCDEGH$ symetryczne i równe sobie.

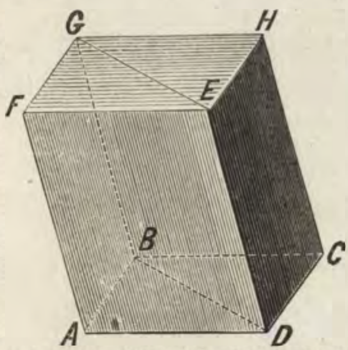


Fig. 69.

Dowodzenie. Przekątna BD dzieli równoległobok $ABCD$ na dwie równe części, jest więc $ABD = BCD$, nadto ściana $ABGF = EDCH$, jako przeciwne w równoległościanie (nº 81), i dla téjże samej przyczyny ściana $GBCH = EDAF$, trzy więc ściany schodzące się w punkcie B w graniastosłupie $ABDEGF$ są równe trzem ścianom schodzącym się w punkcie D w graniastosłupie $BCDEGH$; dwa więc te graniastosłupy są sobie równe (n° 80). Nadto jest widoczne, że ściany graniastosłupa $ABDEGF$ sa wprost przeciwnym porządku ułożone, jak ściany graniastosłupa $BCDEGH$; dwa więc te graniastosłupy są symetryczne. A zatém *płaszczyzna przekątna dzieli równoległościan na dwa i t. d.* co było do okazania.

92. *Wniosek 1szy.* Graniastosłup trójkątny jest połową równoległościanu mającego z nim równą wysokość a podstawę dwa razy większą.

93. *Wniosek 2gi.* Oznaczywszy bryłowatość jednego z graniastosłupów trójkątnych np. $ABDEGF$ (fig. 69) przez G, podstawę równoległościanu AH, to jest równoległobok $ABCD$ przez P, a wysokość przez W, będzie bryłowatość graniastosłupa $ABDEGF$ jako będącego połową równoległościanu AH, równa połowie iloczynu $P \times W$, czyli będzie $G = \frac{P \times W}{2} = \frac{P}{2} \times W$. A że $\frac{P}{2}$ to jest połowa podstawy $ABCD$, równa się trójkątowi ABD, więc $G = ABD \times W$. *Bryłowatość więc graniastosłupa trójkątnego równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość.*

Twierdzenie.

94. *Bryłowatość jakiegokolwiek graniastosłupa równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość.*

Założenie. Niech będzie graniastosłup AJ (fig. 70), mam dowieść, że jego bryłowatość równa się iloczynowi z podstawy $ABCDE$ przez wysokość, którą oznaczmy np. przez W.

Dowodzenie. Przez linie FE i HB, tudzież HB i KD przeprowadzam płaszczyzny, które się przetną z podstawą dolną $ABCDE$ po liniach BE i BD a z podstawą górną $FGHJK$ po liniach HF i HK, i podzielą cały graniastosłup dany, na trzy graniastosłupy trójkątne, jeden $ABEFGH$, drugi $EBDKHF$, a trzeci $DBCJHK$, mające jednakową wysokość, to jest wysokość graniastosłupa danego czyli W. Chciawszy więc obliczyć bryłowatość danego graniastosłupa AJ, potrzeba obliczyć bryłowatość każdego z tych trzech graniastosłupów trójkątnych i te bryłowatości dodać do siebie.

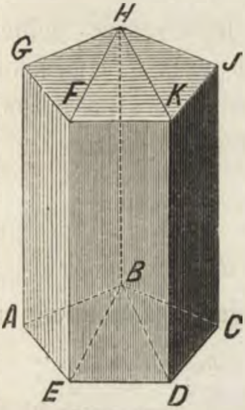


Fig. 70.

Bryłowatość graniastosłupa $ABEFGH = ABE \times W$ (nº 93),

„ „ $EBDKHF = EBD \times W$

„ „ $DBCJHK = DBC \times W$

Dodawszy te trzy bryłowatości będzie:

$$ABEFGH + EBDKHF + DBCJHK = ABE \times W + EBD \times W + DBC \times W$$

albo:

$$ABEFGH + EBDKHF + DBCJHK = (ABE + EBD + DBC)\ W$$

Że zaś strona pierwsza tego równania znaczy bryłowatość danego graniastosłupa a $ABE + EBD + DBC = ABCDE$, więc **bryłowatość** danego graniastosłupa $AJ = ABCDE \times W$. *Zatém bryłowatość jakiegokolwiek graniastosłupa i t. d.* co było do okazania.

95. *Wniosek 1szy.* Ponieważ walec można uważać jako graniastosłup, mający za podstawy wielokąty o bardzo wielkiéj liczbie bardzo małych boków, więc *bryłowatość walca równa się także iloczynowi z podstawy przez wysokość.*

96. *Wniosek 2gi.* Oznaczywszy bryłowatość jednego graniastosłupa przez G, podstawę jego przez P, a wysokość przez W, a bryłowatość drugiego graniastosłupa przez g, jego podstawę przez p, a wysokość przez w, będzie:

$$G = P \times W \quad \text{i} \quad g = p \times w \quad \text{a ztąd:}$$

$$1) \quad G : g = P \times W : p \times w$$

Przypuszczając że $P = p$ proporcya 1) zamieni się na:

$$2) \quad G : g = W : w.$$

Przypuszczając nakoniec że $W = w$, proporcya 1) zamieni się na:

$$3) \quad G : g = P : p.$$

Z proporcyi 1), 2) i 3) widzimy, że *graniastosłupy nie mające ani równych podstaw, ani równych wysokości, mają się do siebie, jak iloczyny z podstaw przez wysokości; mające równe podstawy mają się do siebie jak wysokości, i nakoniec mające równe wysokości mają się do siebie jak podstawy.*

97. *Wniosek 3ci.* Oznaczywszy bryłowatość jednego walca przez C, promień jego podstawy przez R, a wysokość przez W, i podobnie bryłowatość drugiego przez c, promień jego podstawy przez r, a wysokość przez w, będzie (nº 95):

$$C = \pi R^2 \times W \quad \text{i} \quad c = \pi r^2 \times w, \quad \text{a ztąd:}$$

$$C : c = \pi R^2 \times W : \pi r^2 \times w, \quad \text{lub też:}$$

$$1) \quad C : c = R^2 \times W : r^2 \times w$$

Przypuściwszy że $R = r$ proporcya 1) zamieni się na:

$$2) \quad C : c = W : w.$$

Przypuściwszy wreszcie że $W = w$, proporcya 1) zamieni się na:

$$3) \quad C : c = R^2 : r^2$$

Z proporcyi 1), 2) i 3) okazuje się, że *walce nie mające równych podstaw ani równych wysokości, mają się do siebie jak iloczyny z kwadratów promieni ich podstaw przez wysokości; mające równe podstawy, jak wysokości; i nakoniec mające równe wysokości mają się do siebie jak kwadraty z promieni podstaw.*

ROZDZIAŁ V.

O OSTROSŁUPIE I OSTROKRĘGU.

---

98. Bryła otoczona trójkątami schodzącemi się w jednym punkcie, a ze strony przeciwnéj punktowi zejścia ograniczona płaszczyzną, będącą wielokątem o tylu bokach ile trójkątów bryłę otacza, nazywa się *ostrosłupem* albo *piramidą*. I tak: bryła $ABCDEF$ (fig. 71 i 72) otoczona trójkątami AFE, EFD, DFC i t. d. schodzącemi się w punkcie F, a ze strony przeciwnéj temu punktowi F ograniczona wielokątem $ABCDE$, jest *ostrosłupem*.

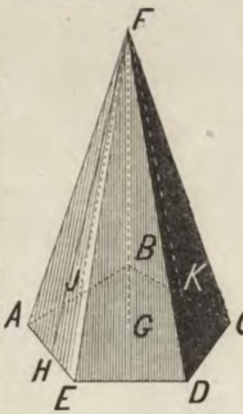


Fig. 71.

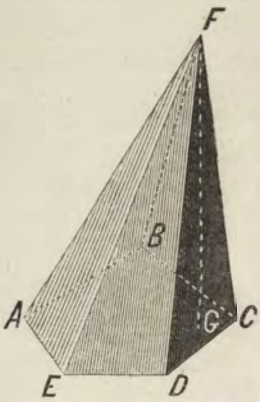


Fig. 72.

Trójkąty AFE, EFD, DFC i t. d. nazywają się *ścianami*, punkt F *wierzchołkiem*, a wielokąt $ABCDE$ *podstawą* ostrosłupa. Wspólne przecięcia się ścian, to jest proste AF, EF, DF i t. d. nazywają się *krawędziami*. Prostopadła FG spuszczona z wierzchołka ostrosłupa na jego podstawę nazywa się *wysokością*. Jeżeli wysokość ostrosłupa pada na środek jego podstawy, jak na fig. 71, to ostrosłup nazywa się *prosty*. Jeżeli zaś wysokość mija środek podstawy, ostrosłup nazywa się *pochyły* (fig. 72).

Ostrosłup przybiera nazwisko od podstawy. I tak, jeżeli ma za podstawę trójkąt, nazywa się *trójkątny;* jeżeli czworokąt, *czworokątny;* jeżeli pięciokąt, *pięciokątny* i t. d. Najprostszy ze wszystkich ostrosłupów jest ostrosłup trójkątny.

Ostrosłup oznacza się literami położonemi przy wierzchołkach kątów bryłowych. Czyta się dowolnie. My czytać będziemy najprzód podstawę a na końcu wierzchołek.

Ostrosłup prosty mający za podstawę wielokąt foremny (fig. 71), nazywa się *ostrosłupem foremnym*. W ostrosłupie foremnym wszystkie krawędzie jak np. AF, EF, DF i t. d. są sobie równe, jako pochyłe równo oddalone od spodka prostopadłéj FG, będącéj wysokością ostrosłupa i znajdują się na jednym okręgu koła opisanego na podstawie ostrosłupa (nº 12 i 13).

99. Ponieważ wszystkie krawędzie ostrosłupa foremnego są sobie równe, wszystkie więc ściany tego ostrosłupa jak AFE, EFD, DFC i t. d. są trójkątami równoramiennemi. Wysokości tych trójkątów, to jest linie FH, FJ, FK i t. d. trafiać muszą na środek podstaw tychże trójkątów czyli na środek boków AE, AB, BC i t. d. wielokąta foremnego $ABCDE$, a tém samém spodki ich znajdować się będą na okręgu koła wpisanego w wielokąt $ABCDE$, wysokości więc te są między sobą równe jako pochyłe równooddalone od spodka prostopadłéj FG, będącéj wysokością ostrosłupa (nº 12).

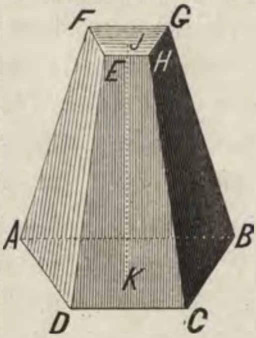


Fig. 73.

Część ostrosłupa $ABCDEFGH$ (fig. 73) zawarta między podstawą $ABCD$ a przecięciem $EFGH$ równoodległém od podstawy, nazywa się *klocem ostrosłupowym.*

Prostopadła JK spuszczona z któregokolwiek punktu przecięcia $EFGH$ na podstawę $ABCD$, nazywa się *wysokością kloca ostrosłupowego.*

100. Jeżelibyśmy linię prostą AB (fig. 74) utwierdzoną stale w punkcie B, obracali tak, ażeby drugi jéj koniec A obiegał okrąg koła $AEFCGA$, czyli tak, żeby linia BA przybierała co raz inne położenia, jak np. BE, B_1F, BC, BG i t. d. pókiby nie powróciła do pierwszego swego położenia BA, to ona nakreśliłaby powierzchnię lejkowatą zwaną *ostrokrężną.*

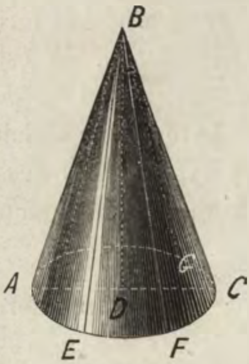


Fig. 74.

Bryła zawarta pomiędzy powierzchnią ostrokrężną a kołem $AEFCGA$ po którego okręgu przebiegał punkt A, nazywa się *ostrokręgiem.*

Koło $AEFCGA$ zamykające przestrzeń otoczoną powierzchnią ostrokrężną, nazywa się *podstawą ostrokręgu*, punkt B w którym linia tworząca powierzchnię ostrokrężną stale utwierdzoną była, nazywa się *wierzchołkiem ostrokręgu.*

Prosta, łącząca środek podstawy z wierzchołkiem ostrokręgu, nazywa się *osią.*

Proste idące po powierzchni ostrokręgu a łączące wierzchołek z którymkolwiek punktem okręgu podstawy, jak np. linie BA, BE, BF, BC i t. d. nazywają się *tworzącemi*.

Prostopadła spuszczona z wierzchołka ostrokręgu na jego podstawę, nazywa się *wysokością ostrokręgu*.

Jeżeli punkt B (fig. 74), w którym linia AB tworząca powierzchnię ostrokrężną, stale jest utwierdzona, znajduje się na prostopadłéj DB wyprowadzonéj ze środka koła będącego podstawą ostrokręgu; wówczas ostrokrąg jest prosty. Jeżeli zaś, (fig. 75) punkt B mija prostopadłę wyprowadzoną ze środka podstawy; w takim razie ostrokrąg jest pochyły.

Fig. 75.

W ostrokręgu prostym oś jest zarazem jego wysokością a wszystkie tworzące są sobie równe, jako pochyłe równooddalone od spodka prostopadłéj.

Jeżelibyśmy (fig. 76) tworzącę AB wyobrazili sobie przedłużoną po za punkt B np. do punktu E, to ona obiegając jednym końcem A po okręgu AC, drugim końcem E zakreśli okrąg koła FE, a c z ę ś c i ą BE powierzchnię ostrokrężną FBE wierzchołkiem przeciwległą z powierzchnią ABC.

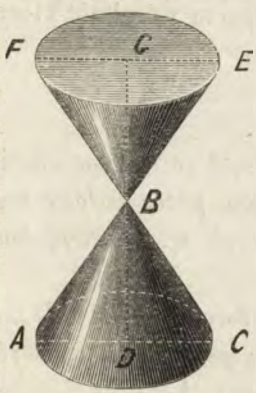


Fig. 76.

Dwa takie ostrokręgi wierzchołkiem przeciwległe jak ABC i FBE stanowią rzeczywiście jeden ostrokrąg o dwóch powłokach *(à deux nappes)*.

Tak jak walec można uważać za graniastosłup, tak téż i ostrokrąg, dla tych samych zupełnie przyczyn, uważany być może jako ostrosłup, mający za podstawę wielokąt foremny o bardzo wielkiéj liczbie bardzo małych boków.

Część ostrokręgu (fig. 77) zawarta między podstawą AD a przecięciem BC równoodległém od podstawy, nazywa się *klocem ostrokręgowym*, który, jak widzimy ma dwie podstawy, dolną AD i górną BC. Linia EF łącząca środki podstaw nazywa się *osią*, a prostopadła spuszczona z któregokolwiek punktu jednéj podstawy na drugą, *wysokością kloca*.

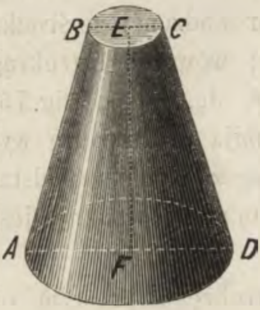


Fig. 77.

Kloc ostrokręgowy prosty uważać można jako utworzony przez obrot trapeza prostokątnego około boku prostopadłego do jego podstaw, np. około boku EF. W obrocie takim podstawy trapeza to jest proste AF i BE utworzą koła będące podstawami kloca, a bok AB przeciwny bokowi prostopadłemu do podstaw, utworzy powierzchnię boczną kloca. Bok EF stanowić będzie oś i zarazem wysokość kloca.

Twierdzenie.

101. *Powierzchnia boczna ostrosłupa foremnego równa się iloczynowi z obwodu jego podstawy, przez połowę wysokości jednego z trójkątów składających tęż powierzchnię boczną.*

Założenie. Niech będzie ostrosłup foremny $ABCDEF$ (fig. 71), trzeba dowieść, że jego powierzchnia boczna równa się iloczynowi z obwodu podstawy $ABCDE$ przez

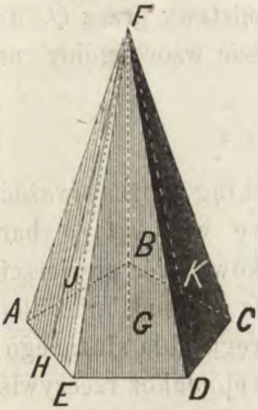


Fig. 71.

połowę wysokości FH jednego z trójkątów np. AFE, składających jego powierzchnię boczną.

Dowodzenie. Powierzchnia boczna ostrosłupa danego składa się z trójkątów AFE, AFB, BFC i t. d. Chcąc ją zatém obliczyć, potrzeba obliczyć powierzchnię każdego z tych trójkątów i te powierzchnie dodać do siebie. Powierzchnia trójkąta $AFE = AE \times \frac{FH}{2}$. Powierzchnia trójkąta $AFB = AB \times \frac{FJ}{2}$, a że $FJ = FH$ (nº 99) więc $AFB = AB \times \frac{FH}{2}$; podobnież $BFC = BC \times \frac{FH}{2}$ i tak następnie.

Dodawszy powierzchnie tych trójkątów, będzie:

$$AFE + AFB + BFC \text{ i t. d.} = AE \times \frac{FH}{2} + AB \times \frac{FH}{2} + BC \times \frac{FH}{2} \text{ i t. d.}$$

czyli:

$$AFE + AFB + BFC \text{ i t. d.} = (AE + AB + BC \text{ i t. d.}) \frac{FH}{2}$$

A że $AFE + AFB + BFC$ i t. d. składa powierzchnię boczną ostrosłupa danego, a $AE + AB + BC$ i t. d. obwód podstawy, więc *powierzchnia boczna ostrosłupa foremnego równa się iloczynowi z obwodu podstawy i t. d.* co było do okazania.

Uwaga. Oznaczywszy powierzchnię boczną ostrosłupa foremnego przez P, obwód jego podstawy przez O, a wysokość jednéj ze ścian przez h, będzie wzór ogólny na tę powierzchnię $P = O \times \frac{h}{2}$.

102. *Wniosek.* Ponieważ ostrokrąg można uważać jako ostrosłup mający za podstawę wielokąt, o bardzo wielkiéj liczbie bardzo małych boków, więc powierzchnia boczna ostrokręgu prostego, równa się podobnież iloczynowi z obwodu podstawy, czyli okręgu koła służącego mu za podstawę, przez połowę tworzącéj. Jakoż rzeczywiście, gdybyśmy powierzchnię boczną ostrokręgu prostego ACB (fig. 78) przecięli wzdłuż tworzącéj i rozwinęli na płaszczyznie, to ona zamieni się na wycinek CBE, którego łuk CE będzie równy okręgowi AC a promień BC równy tworzącéj ostrokręgu.

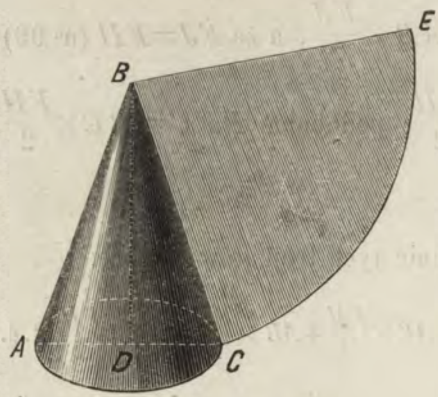


Fig. 78.

Powierzchnia wycinka koła równa się iloczynowi z łuku służącego mu za podstawę, przez połowę promienia; jest więc:

$$CBE = CE \times \frac{BC}{2}.$$

A że powierzchnia wycinka CBE równa powierzchni bocznéj ostrokręgu ACB, a łuk CE równy okręgowi koła AC, więc powierzchnia boczna ostrokręgu ACB równa okręgowi $AC \times \frac{BC}{2}$.

Uwaga. Oznaczywszy powierzchnię boczną ostrokręgu prostego przez P, promień jego podstawy przez r, a tworzącą przez g, będzie wzór ogólny na tę powierzchnię:

$$P = 2\pi r \times \frac{g}{2} = \pi r g.$$

Twierdzenie.

103. *Przecięcie ostrosłupa płaszczyzną równoodległą od podstawy, jest wielokątem podobnym podstawie i dzieli krawędzie i wysokość ostrosłupa na części proporcyonalne.*

Założenie. Niech będzie ostrosłup $ABCDEF$ (fig. 79) przecięty płaszczyzną równoodległą od podstawy, trzeba dowieść, że to przecięcie $abcde$ jest wielokątem podobnym podstawie $ABCDE$ i dzieli krawędzie FA, FE, FD i t. d. tudzież wysokość FG na części proporcyonalne.

Dowodzenie. Ponieważ $abcde$ jest równoodległe od $ABCDE$, więc ab jest równoodległe od AB, bc równoodległe od BC, cd od CD i t. d. jako przecięcia płaszczyzn równoodległych z trzecią (nº 27) a tém samém kąt $abc = ABC$, kąt $bcd = BCD$ i t. d. jako kąty mające ramiona od siebie równoodległe i skierowane w jedną stronę (nº 33). Dwa więc wielokąty $abcde$ i $ABCDE$ mają już kąty

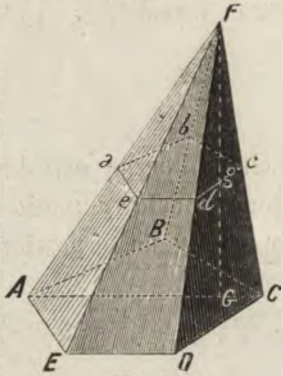


Fig. 79.

odpowiednie równe. Następnie uważam, ponieważ ae równoodległe od AE, więc trójkąt aFe podobny AFE. Dla téj saméj przyczyny trójkąt eFd podobny trójkątowi EFD, trójkąt dFc podobny DFC i t. d. Z podobieństwa trójkątów aFe i AFE wypada: że ma się:

$$1)\quad Fa : FA = ae : AE = Fe : FE.$$

Z podobieństwa trójkątów eFd i EFD

$$2)\quad Fe : FE = ed : ED = Fd : FD.$$

Z podobieństwa znowu trójkątów dFc i DFC wypada:

$$3)\quad Fd : FD = dc : DC = Fc : FC;$$

i tak następnie uważając będzie:

$$4)\quad Fc : FC = cb : CB = Fb : FB,$$

i nakoniec:

$$5)\quad Fb : FB = ba : BA = Fa : FA.$$

Przypatrując się tym ciągom stosunków, widzimy że 1) i 2) mają wspólny stosunek $Fe : FE$, 2) i 3) mają tak samo wspólny stosunek $Fd : FD$, 3) i 4) stosunek $Fc : FC$, nakoniec 4) i 5) stosunek $Fb : FB$; wszystkie więc stosunki ciągi te składające są sobie równe. Ma się więc:

$$ae : AE = ed : ED = dc : DC = cb : CB = ba : BA$$

to jest, że boki wielokątów $abcde$ i $ABCDE$ są proporcyonalne; że zaś poprzednio okazało się, że też wielokąty mają i kąty równe: więc są sobie podobne.

Z równości stosunków składających ciągi powyższe wypada następnie, że tak się ma:

$$Fa : FA = Fe : FE = Fd : FD = Fc : FC = Fb : FB$$

czyli, że krawędzie ostrosłupa są podzielone na części proporcyonalne.

Żeby jeszcze okazać, że wysokość ostrosłupa, to jest linia FG jest podzieloną na części proporcyonalne, przeprowadzam przez linie AF i FG płaszczyznę, która się przetnie z podstawą $ABCDE$ po linii AG a z przecięciem $abcde$ po linii ag równoodległéj od AG (nº 27), a zatém ma się:

$$Fa : FA = Fg : FG.$$

Przecięcie więc ostrosłupa płaszczyzną równoodległą od podstawy jest wielokątem podobnym i t. d. co było do okazania.

Twierdzenie.

104. *Jeżeli ostrosłupy stojące na jednéj płaszczyznie i mające równe wysokości przetniemy płaszczyzną równoodległą od płaszczyzny podstaw, to te przecięcia mieć się będą do siebie jak podstawy.*

Założenie. Niech będą dwa ostrosłupy $ABCDEK$ i $FGHJL$ (fig. 80) stojące na płaszczyznie MN i przecięte płaszczyzną OP równoodległą od MN; trzeba dowieść, że tak się będzie miało przecięcie:

$$abcde : fghi = ABCDE : FGHJ.$$

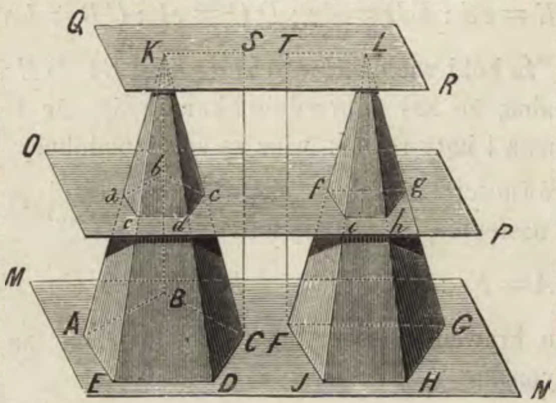


Fig. 80.

Dowodzenie. Ponieważ $abcde$ jest z założenia równoodległe od $ABCDE$, więc jest i $abcde$ podobne $ABCDE$ (nº 103), a zatém ma się:

$$abcde : ABCDE = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$$

a że z podobieństwa trójkątów aKb i AKB jest:

$ab : AB = aK : AK$ a tém samém $\overline{ab}^2 : \overline{AB}^2 = \overline{aK}^2 : \overline{AK}^2$

więc téż jest:

$$1) \quad abcde : ABCDE = \overline{aK}^2 : \overline{AK}^2.$$

Podobnież ma się $fghi : FGHJ = \overline{ih}^2 : \overline{JH}^2$ a że z podobieństwa trójkątów iLh i JLH jest $ih : JH = hL : HL$

a tém samém $\overline{ih}^2 : \overline{JH}^2 = \overline{hL}^2 : \overline{HL}^2$; więc téż jest:

$$2) \quad fghi : FGHJ = \overline{hL}^2 : \overline{HL}^2$$

Ponieważ wysokości ostrosłupów, to jest linie CS i FT z założenia są sobie równe, a podstawy $ABCDE$

i $FGHJ$ znajdują się na jednéj płaszczyznie MN, więc płaszczyzna QR przez wierzchołki K i L danych ostrosłupów przechodząca, może być równoodległą od MN; linie więc AK i HL uważać można jako przecięte płaszczyznami MN, OP, QR od siebie równoodległemi, zatém są podzielone na części proporcyonalne (nº 34), jest więc:

$$aK : AK = hL : HL, \text{ a tém samém}$$

$$\overline{aK}^2 : \overline{AK}^2 = \overline{hL}^2 : \overline{HL}^2.$$

W proporcyach przeto 1) i 2) drugie stosunki są sobie równe, a więc i pierwsze składają proporcyą; jest więc:

$$abcde : ABCDE = fghi : FGHJ$$

lub co na jedno wychodzi:

$$abcde : fghi = ABCDE : FGHJ.$$

Czyli że: *ostrosłupy stojące na jednéj płaszczyznie i mające równe wysokości i t. d.* co było do okazania.

Uwaga. Ponieważ przecięcia $abcde$ i $fghi$ mają się do siebie jak podstawy $ABCDE$ i $FGHJ$, więc jeżeli podstawy byłyby sobie równoważne, to i te przecięcia byłyby równoważne, a ztąd wypada:

105. *Wniosek.* Że przecięcia równoodległe od podstaw w ostrosłupach mających równe podstawy i równe wysokości, są sobie równe.

Twierdzenie.

106. *Dwa ostrosłupy trójkątne mające równe podstawy i równe wysokości, są sobie równe.*

Założenie. Niech będą dwa ostrosłupy trójkątne $ABCD$ i $abcd$ (fig. 81), w których zakładam, że podstawa $ABC=abc$ i że wysokości mają równe, np. dla obydwóch niech będzie wysokością linia AE; trzeba dowieść, że te dwa ostrosłupy są sobie równe.

Dowodzenie 1sze. Gdyby te dwa ostrosłupy nie były sobie równe, to możnaby w ostrosłup większy wsunąć ostrosłup mniejszy. Przypuśćmy, że ostrosłup $ABCD$ jest większy od ostrosłupa $abcd$, to wsunąwszy $abcd$ w $ABCD$ tak, ażeby punkt d dotknął do punktu D, okazałaby się jakaś

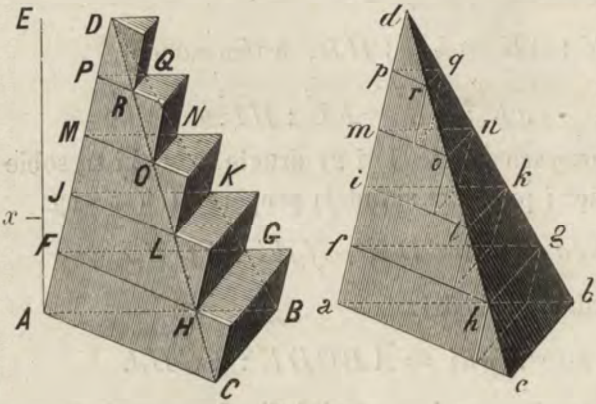


Fig. 68.

różnica, któraby miała za podstawę trójkąt ABC i pewną wysokość np. Ax.

Wysokość AE dzielę na tyle części równych, aby każda z nich była mniejszą od Ax, np. jak tutaj dzielę na pięć części, przez punkta podziału prowadzę płaszczyzny równoodległe od podstaw danych ostrosłupów; to ponieważ z założenia $ABC = abc$ więc i przecięcia odpowiednie będą sobie równe (nº 105): będzie zatém $PQR = pqr$, $MNO = mno$, $JKL = ikl$, $FGH = fgh$.

Na przecięciach ostrosłupa $ABCD$ z przypuszczenia większego, opisuję graniastosłupy trójkątne, których będzie pięć, a mianowicie: $PQRD$, $MNOP$, $JKLM$, $FGHJ$ i $ABCF$; w ostrosłupie zaś $abcd$ z przypuszczenia mniejszym, na odpowiednich przecięciach wpisuję graniastosłupy trójkątne, których będzie tylko cztery, to jest $pqrm$, $mnoi$, $iklf$, i $fgha$.

Widoczném jest że summa graniastosłupów opisanych na ostrosłupie $ABCD$ z przypuszczenia większym, jest większą od tegoż ostrosłupa, a summa znowu graniastosłupów wpisanych w ostrosłup $abcd$ z przypuszczenia mniejszy, jest od niego mniejszą. Różnica więc pomiędzy summą graniastosłupów opisanych a wpisanych powinna być większą jak pomiędzy ostrosłupami.

Lecz graniastosłup opisany $PQRD$ równy wpisanemu $pqrm$, bo mają podstawę $PQR = pqr$ i wysokości równe. Dla podobnéj przyczyny graniastosłup $MNOP = mnoi$, $JKLM = iklf$ i nakoniec $FGHJ = fgha$. Cztery więc graniastosłupy opisane są równe czterem graniastosłupom wpisanym; odjąwszy zatém wpisane od opisanych, pozostanie na resztę piąty graniastosłup opisany $ABCF$ mający za podstawę ABC, to jest ten sam trójkąt który miał być podstawą przypuszczalnéj różnicy pomiędzy danemi ostrosłupami a wysokość z wykreślenia mniejszą od wysokości przypuszczalnéj reszty to jest od Ax. Byłaby więc różnica pomiędzy graniastosłupami, mniejszą od różnicy pomiędzy ostrosłupami, co być nie może, a więc i to być nie może, ażeby pomiędzy ostrosłupami danemi zachodziła jakakolwiek różnica, czyli że muszą być sobie równe. *Zatém dwa ostrosłupy trójkątne i t. d.* co było do okazania.

Dowodzenie 2gie. Gdybyśmy sobie wyobrazili, że wysokość danych ostrosłupów jest podzieloną na bardzo wielką liczbę równych cząstek, i że przez punkta podziałów przeprowadzone są płaszczyzny równoodległe od podstaw, to ostrosłupy dane podzieliłyby się na bardzo wielką liczbę tak cienkich warstw, że możnaby je uważać prawie za płaszczyzny.

Odpowiednie przecięcia takie czyli te warstwy, miałyby się do siebie jak podstawy (nº 104) danych ostrosłupów, a że podstawy te z założenia są sobie równe, więc i warstwy odpowiednie byłyby sobie równe. Pierwsza zatém warstwa pierwszego ostrosłupa, byłaby równa pierwszéj warstwie drugiego; druga pierwszego ostrosłupa, drugiéj drugiego; trzecia pierwszego, trzeciéj drugiego i t. d., a tém samém i summa warstw pierwszego, czyli cały ostrosłup pierwszy, będzie równy summie warstw drugiego, czyli ostrosłupowi drugiemu. *Dwa więc ostrosłupy trójkątne mające i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

107. *Graniastosłup trójkątny składa się z trzech ostrosłupów trójkątnych sobie równoważnych, czyli że ostrosłup trójkątny jest trzecią częścią graniastosłupa trójkątnego, mającego z nim też samą podstawę i wysokość.*

Założenie. Niech będzie graniastosłup trójkątny $ABCDEF$ (fig. 82), trzeba okazać, że on się składa z trzech ostrosłupów trójkątnych między sobą równoważnych.

Dowodzenie. Przez punkt A, D i B przeprowadzam płaszczyznę, która się przetnie z płaszczyzną CE po prostéj AD, z płaszczyzną CF po prostéj BD, a z płaszczyzną ABC po prostéj AB i odetnie ostrosłup trójkątny $ABCD$, mający za podstawę trójkąt ABC to jest podstawę graniastosłupa danego, a wierzchołek w punkcie D; więc za wysokość, wysokość graniastosłupa danego. Pozostał jeszcze ostrosłup czworokątny $AEFBD$. Przez linie ED i DB przeprowadzam płaszczyznę, która się przetnie z płaszczyzną $AEFB$ po prostéj EB dzielą-céj równoległobok *AEFB* na dwie równe części i podzieli ostrosłup czworokątny *AEFBD* na dwa ostrosłupy trójkątne *AEBD* i *EFBD* równe sobie, bo mają podstawy *AEB* i *EFB* równe a wierzchołek w punkcie *D*, więc i wysokość wspólną. Lecz ostrosłup *EFBD* można uważać że ma za podstawę *EFD* a wierzchołek w punkcie *B*, to jest, że ma za podstawę, podstawę, a za wysokość, wysokość graniastosłupa danego. Jest więc ostrosłup *EFBD* równoważny pierwszemu ostrosłupowi *ABCD*, który jak widzieliśmy miał również za podstawę, podstawę, a za wysokość, wysokość graniastosłupa danego. Trzy zatém ostrosłupy *ABCD*, *AEBD* i *EFBD* z których składa się dany graniastosłup *ABCDEF* są sobie równoważne. *A zatém graniastosłup trójkątny składa się z trzech ostrosłupów i t. d.* co było do okazania.

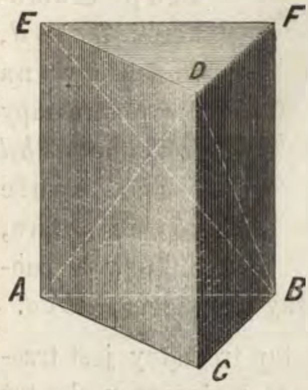


Fig. 82.

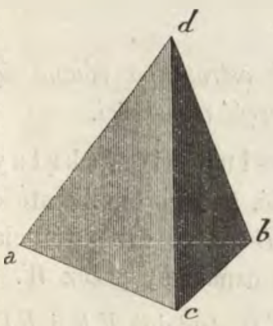


Fig. 82 *a*.

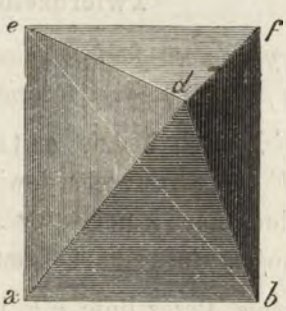


Fig. 82 *b*.

Uwaga. Fig. 82^a okazuje odcięty pierwszy ostrosłup trójkątny *abcd*. Fig. 82^b okazuje pozostały ostrosłup czworokątny *aefbd*. Nakoniec Fig. 82^c

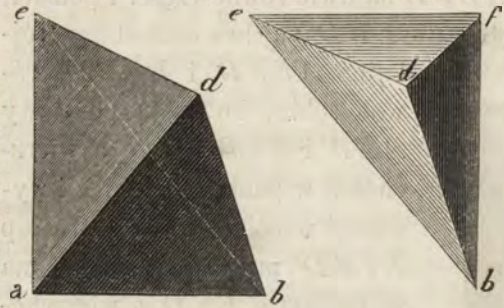


Fig. 82 c.

okazuje pozostały ostrosłup czworokątny $aefbd$, rozdzielony na dwa ostrosłupy trójkątne $aebd$ i $efbd$ sobie równoważne, z których znowu ostrosłup $efbd$ jest równoważny pierwszemu $abcd$.

108. *Wniosek*. Ponieważ ostrosłup trójkątny jest trzecią częścią graniastosłupa trójkątnego mającego z nim téż samą podstawę i wysokość, a bryłowatość graniastosłupa trójkątnego równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość (nº 93); więc *bryłowatość ostrosłupa trójkątnego, równa się trzeciéj części iloczynu z podstawy przez wysokość*, albo *całéj podstawie rozmnożonéj przez trzecią część wysokości*, albo wreszcie *trzeciéj części podstawy rozmnożonéj przez całą wysokość*.

Twierdzenie.

109. *Bryłowatość jakiegokolwiek ostrosłupa równa się iloczynowi z podstawy przez trzecią część wysokości*.

Założenie. Niech będzie ostrosłup pięciokątny $ABCDEF$ (fig. 83), trzeba dowieść, że jego bryłowatość równa jest iloczynowi z podstawy $ABCDE$ przez trzecią część wysokości, którą dla skrócenia oznaczmy przez W.

Dowodzenie. Przez linie EF i FB, tudzież FB i FD przeprowadzam płaszczyzny, które się z podstawą $ABCDE$ przetną po przekątnych BE i BD i podzielą cały ostro-

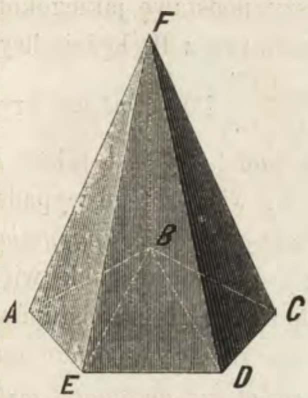


Fig. 83.

słup dany na trzy ostrosłupy trójkątne $ABEF$, $EBDF$ i $DBCF$ mające wspólną wysokość, będącą wysokością ostrosłupa danego.

Chciawszy więc obliczyć bryłowatość ostrosłupa danego, potrzeba obliczyć po szczególe bryłowatość każdego z pomienionych ostrosłupów trójkątnych i te bryłowatości dodać do siebie.

Bryłowatość ostrosłupa $ABEF = ABE \times \frac{W}{3}$ (nº 108).

„ „ $EBDF = EBD \times \frac{W}{3}$

„ „ $DBCF = DBC \times \frac{W}{3}$

Dodawszy te trzy bryłowatości, będzie:

$$ABEF + EBDF + DBCF = ABE \times \frac{W}{3} + EBD \times \frac{W}{3} + DBC \times \frac{W}{3}$$

czyli:

$$ABEF + EBDF + DBCF = (ABE + EBD + DBC)\frac{W}{3}$$

A że $ABEF + EBDF + DBCF = ABCDEF$ zaś $ABE + EBD + DBC = ABCDE$, więc bryłowatość danego ostrosłupa $ABCDEF = ABCDE \times \frac{W}{3}$.

Czyli że bryłowatość jakiegokolwiek ostrosłupa równa się i t. d. co było do okazania.

110. *Wniosek 1szy.* Oznaczywszy podstawę jakiegokolwiek ostrosłupa przez P, a wysokość przez W, będzie bryłowatość tego ostrosłupa równa $P \times \frac{W}{3}$. Ponieważ zaś bryłowatość graniastosłupa, którego podstawą jest także P a wysokością W równa się $P \times W$; więc z tego wypada, *że każdy ostrosłup jest trzecią częścią graniastosłupa mającego z nim też samą podstawę i wysokość.* Stosunek więc do siebie ostrosłupów, jest taki sam jak i graniastosłupów, to jest, że *ostrosłupy nie mające ani równych podstaw ani równych wysokości, mają się do siebie jak iloczyny z podstaw przez wysokości; mające równe podstawy a nie równe wysokości, mają się do siebie jak wysokości; a mające równe wysokości a nie równe podstawy, mają się jak podstawy.*

111. *Wniosek 2gi.* Ponieważ ostrokrąg można uważać jako ostrosłup mający za podstawę wielokąt o bardzo wielkiéj liczbie bardzo małych boków, więc téż i *bryłowatość ostrokręgu, równa się trzeciéj części iloczynu z podstawy przez wysokość,* lub *całéj wysokości przez trzecią część podstawy,* lub téż *całéj podstawie przez trzecią część wysokości.*

Nazwawszy promień podstawy ostrokręgu przez r, a jego wysokość przez w, będzie: bryłowatość ostrokręgu równa $\pi r^2 \times \frac{w}{3}$. Ponieważ zaś bryłowatość walca, którego promień podstawy jest także r, a wysokość w, równa się $\pi r^2 \times w$; więc *ostrokrąg jest trzecią częścią walca mającego z nim też samą podstawę i wysokość.* A ztąd wypada następnie, że stosunek ostrokręgów do siebie, jest taki sam jak i walców, to jest: *że ostrokręgi nie mające ani równych podstaw ani równych* *wysokości, mają się do siebie jak iloczyny z podstaw przez wysokości; mające równe podstawy a nie równe wysokości, mają się do siebie jak wysokości; nakoniec mające równe wysokości, mają się do siebie jak podstawy, albo jak kwadraty z promieni tychże podstaw.*

Twierdzenie.

112. *Kloc ostrosłupowy trójkątny składa się z trzech ostrosłupów trójkątnych, z których każdy ma za wysokość, wysokość kloca; jeden ma za podstawę, podstawę dolną kloca, drugi jego podstawę górną, a trzeci podstawę średnio-jeometrycznie proporcyonalną pomiędzy dwiema temi podstawami.*

Założenie. Niech będzie kloc ostrosłupowy trójkątny $ABCDEF$ (fig. 84), trzeba okazać, że on składa się z trzech ostrosłupów trójkątnych, z których każdy będzie miał za wysokość, wysokość kloca; jeden będzie miał za podstawę trójkąt ABC, to jest podstawę dolną, drugi trójkąt DEF, to jest podstawę górną kloca, a trzeci podstawę średnio-jeometrycznie proporcyonalną pomiędzy temi dwiema podstawami.

Dowodzenie. Przez punkta A, D i B przeprowadzam płaszczyznę, która się przetnie z płaszczyzną EC po linii AD, z płaszczyzną CF po linii DB, a z płaszczyzną ABC po linii AB i odetnie ostrosłup trójkątny $ABCD$ mający za podstawę trójkąt ABC, to jest podstawę dolną kloca, a wierzchołek w punkcie D, więc za wysokość, wysokość kloca. Zatém ostrosłup $ABCD$ jest jednym z ostrosłupów szukanych. Po jego odcięciu pozostał się jeszcze ostrosłup czworokątny $AEFBD$. Przez linie AD i DF przeprowadzam płaszczyznę, która się przetnie z płaszczyzną $AEFD$ po linii AF i podzieli pozostały ostrosłup czworokątny $AEFBD$ na dwa ostrosłupy trójkątne $AEFD$ i $AFBD$. Ostrosłup $AEFD$ można uważać, że ma za podstawę trójkąt DEF, to jest podstawę górną kloca, a wierzchołek w punkcie A, więc za wysokość, wysokość kloca, jest przeto drugim ostrosłupem szukanym. Pozostał nareszcie ostrosłup trójkątny $AFBD$, o którym trzeba dowieść, że się równa ostrosłupowi mającemu za wysokość, wysokość kloca, a za podstawę, podstawę średnio-jeometrycznie proporcyonalną pomiędzy ABC i DEF.

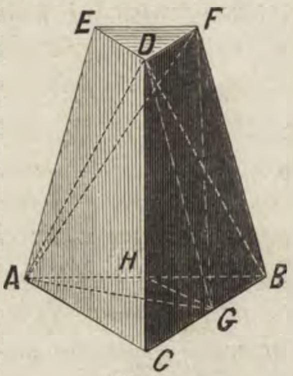


Fig. 84.

Żeby to okazać prowadzę na płaszczyznie $CDFB$ prostę DG równoodległą od FB a tem samém równoodległą od płaszczyzny $AEFB$ (nº 20) i punkt G łączę z punktami A i D liniami prostemi i uważam, że pozostały ostrosłup $AFBD$ jest równy ostrosłupowi $AFBG$, bo mają podstawę AFB wspólną, wierzchołek zaś jednego znajduje się w punkcie D a drugiego w punkcie G, czyli oba wierzchołki znajdują się na prostéj DG równoodległéj od wspólnéj podstawy AFB, mają więc i wysokości równe. Zamiast przeto pozostałego ostrosłupa $AFBD$ można wziąść ostrosłup $AFBG$, który można uważać że ma za podstawę ABG a wierzchołek w punkcie F, zatém ma za wysokość, wysokość kloca; idzie więc tylko o okazanie, że podstawa tego ostrosłupa to jest trójkąt ABG, jest średnio-jeometrycznie proporcyonalny między trójkątami ABC i DEF które są podstawami danego kloca. W tym celu przez punkt G prowadzę na płaszczyznie ABC linię GH równoodległą od AC, a tém samém równoodległą od ED i uważam dwa trójkąty EDF i HGB, które mają bok DF równy GB jako boki przeciwne w równoległoboku $DFBG$, kąt EFD równy HBG i kąt EDF równy HGB jako kąty mające ramiona równoodległe i skierowane w jedną stronę (nº 33), zatém są sobie równe. Następnie dwa trójkąty ABC i ABG mające wierzchołek wspólny w punkcie A i podstawy na jednéj linii prostéj BC, mają się do siebie jak podstawy, to jest ma się:

$$1)\quad ABC : ABG = BC : BG.$$

Dla podobnéj przyczyny ma się trójkąt:

$$2)\quad ABG : HBG = AB : HB.$$

Lecz z wykreślenia prosta HG jest równoodległą od AC, zatém ma się:

$$BC : BG = AB : HB.$$

W proporcyach więc 1) i 2) drugie stosunki są sobie równe, zatém i pierwsze złożą proporcyę, czyli będzie:

$$ABC : ABG = ABG : HBG.$$

W téj ostatniéj proporcyi zamiast HBG wziąwszy jemu równy trójkąt DEF, jest:

$$ABC : ABG = ABG : DEF.$$

Z czego okazuje się, że trójkąt ABG, to jest podstawa trzeciego ostrosłupa szukanego $ABGF$, jest średnio-jeometrycznie proporcyonalną pomiędzy podstawami danego kloca. *A zatém kloc ostrosłupowy trójkątny składa się i t. d.* co było do okazania.

113. *Uwaga* $1^{sza.}$ Trójkąt ABG jako średnio-jeometrycznie proporcyonalny pomiędzy trójkątami ABC i DEF, to jest podstawami danego kloca, równa się pierwiastkowi kwadratowemu z iloczynu tychże podstaw, czyli jest $ABG = \sqrt{ABC \times DEF}$.

114. *Uwaga.* $2^{ga.}$ Fig. 84^a okazuje odcięty pierwszy ostrosłup trójkątny $abcd$. Fig. 84^b okazuje pozostały

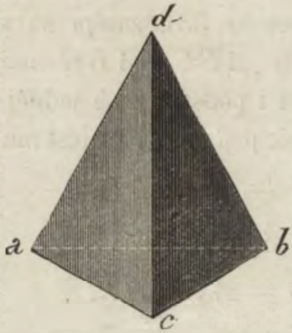


Fig. 84 *a*.

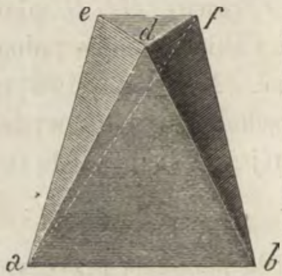


Fig. 84 *b*.

ostrosłup czworokątny $aefbd$. Fig. 84^c okazuje pozostały ostrosłup $aefbd$ rozdzielony na dwa ostrosłupy trójkątne $aefd$ i $afbd$, z których $aefd$ jest szukany. Nakoniec Fig. 84^d okazuje zamieniony trzeci ostrosłup $afbd$ na ostro-

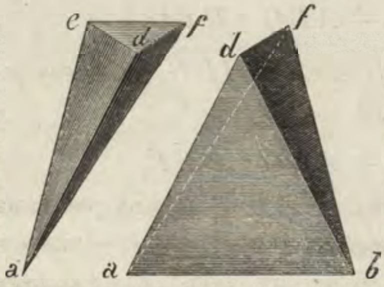


Fig. 84 *c*.

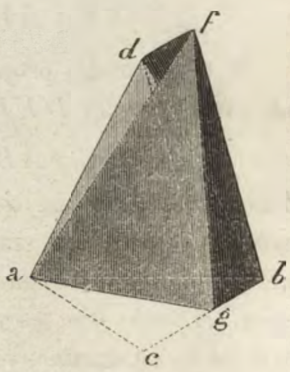


Fig. 84 *d*.

słup jemu równoważny $abgf$, mający za podstawę trójkąt abg średnio-jeometrycznie proporcyonalny między podstawami danego kloca.

115. *Uwaga 3^{cia}.* Niech będzie (fig. 84*bis*) kloc ostrosłupowy $ABCDEFGH$ powstały z przecięcia ostrosłupa wielokątnego, jak tu np. czworokątnego $ABCDJ$, płaszczyzną $EFGH$ równoodległą od podstawy $ABCD$. Na płaszczyznie podstawy $ABCD$ kreślę trójkąt KLM równoważny czworokątowi $ABCD$ i na trójkącie tym wystawiam ostrosłup $KLMQ$ mający tęż samą wysokość co i ostrosłup $ABCDJ$. Jest więc $KLMQ = ABCDJ$ (n° 106). Płaszczyznę $EFGH$ wyobrażam sobie przedłużoną tak, żeby przecięła ostrosłup $KLMQ$, to będzie przecięcie ztąd powstałe $NOP = EFGH$ (n° 105), a tém samém ostrosłup $EFGHJ = NOPQ$; a ztąd kloc ostrosłupowy czworokątny $ABCDEFGH$ jest równoważny takiemuż klocowi trójkątnemu $KLMNOP$. Że zaś ten ostatni jest równoważny trzem ostrosłupom które mają za wysokość, wysokość kloca, a za podstawy, jeden podstawę dolną, drugi podstawę górną a trzeci podstawę średnio-jeometrycznie proporcyonalną, więc i kloc ostrosłupowy wielokątny jest także równoważny trzem ostrosłupom, z których każdy ma wyso-

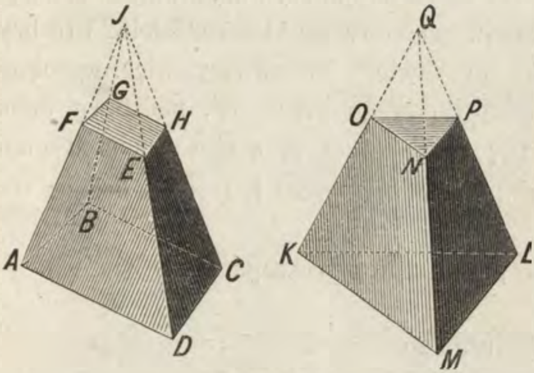


Fig. 84 *bis*.

kość równą wysokości kloca, a za podstawy, jeden podstawę dolną, drugi podstawę górną tegoż kloca, a trzeci podstawę średnio-jeometrycznie proporcyonalną między temi podstawami.

116. *Uwaga 4ta.* Chciawszy obliczyć bryłowatość kloca ostrosłupowego, potrzeba obliczyć bryłowatość każdego z trzech ostrosłupów na które się kloc rozdziela, i te bryłowatości dodać do siebie. Nazwawszy więc wysokość danego kloca ostrosłupowego przez W, podstawę dolną przez P, podstawę górną przez p, a tém samém średnio-jeometrycznie proporcyonalną przez $\sqrt{P \times p}$, będzie:

Bryłowatość pierwszego ostrosłupa $= \frac{W}{3} \times P$

„ drugiego „ $= \frac{W}{3} \times p$

„ trzeciego „ $= \frac{W}{3} \times \sqrt{P \times p}$.

Dodawszy bryłowatości tych trzech ostrosłupów do siebie i wyrzuciwszy wspólny czynnik $\frac{W}{3}$ przed nawias, będzie:

Bryłowatość kloca ostrosłupowego $= \frac{W}{3}(P + p + \sqrt{P \times p})$.

Jest więc bryłowatość kloca ostrosłupowego równa trzeciéj części wysokości rozmnożonéj przez summę z podstawy dolnéj, górnéj i średnio-jeometrycznie proporcyonalnéj pomiędzy temi dwiema podstawami.

117. *Uwaga 5ta.* Dla obliczenia bryłowatości kloca ostrosłupowego, nie koniecznie dochodzić potrzeba powierzchni obu jego podstaw. Podstawy te albowiem są sobie podobne (nº 103), dosyć więc mieć wiadome odpowiednie ich boki i powierzchnię jednéj z nich, dolnéj lub górnéj.

Oznaczmy przez P i p dwie podstawy kloca, przez B i b odpowiednie ich boki; to przyjmując podstawę P za wiadomą, będzie:

$$p : P = b^2 : B^2 \text{ a ztąd } p = P \times \frac{b^2}{B^2}$$

Wiadomo z uwagi poprzedzającéj, że:

$$\text{Objętość kloca ostrosłupowego} = \frac{W}{3}(P + p + \sqrt{P \times p})$$

a wstawiając w to wyrażenie wartość za p, będzie:

$$\text{Objętość kloca ostrosł.} = \frac{W}{3}\left(P + P \times \frac{b^2}{B^2} + \sqrt{P \times P \times \frac{b^2}{B^2}}\right)$$

$$= \frac{W}{3}\left(P + P \times \frac{b^2}{B^2} + P \times \frac{b}{B}\right)$$

$$= \frac{WP}{3}\left(1 + \frac{b^2}{B^2} + \frac{b}{B}\right) = \frac{WP}{3}\left(1 \times \frac{b}{B} + \frac{b^2}{B^2}\right)$$

Wzór ten ma tę dogodność, że nie wymaga wyciągania pierwiastku kwadratowego, przez co w zastosowaniu jest daleko łatwiejszy niż podany w uwadze poprzedzającéj.

Twierdzenie.

118. *Przecięcie ostrokręgu płaszczyzną równoodległą od podstawy jest kołem, lecz zawsze od tejże podstawy mniejszém i to co raz bardziéj w miarę tego jak przecięcie jest co raz bliższe wierzchołka.*

Założenie. Niech będzie ostrokrąg ABC (fig. 85) przecięty płaszczyzną ab równoodległą od AB, trzeba dowieść, że przecięcie $adebf$ jest kołem i to mniejszém od $ADEBF$.

Dowodzenie. Na okręgu koła AB obieram dowolnie ilekolwiek punktów D, E, F i t. d. Przez te punkta i oś CS przeprowadzam płaszczyzny CSD, CSE, CSF i t. d. które się przetną z powierzchnią ostrokrężną po prostych CD, CE i CF, z podstawą zaś AB po promieniach SD, SE, SF, a z przecięciem ab po prostych sd, se i sf równoodległych od SD, SE i SF (nº 27).

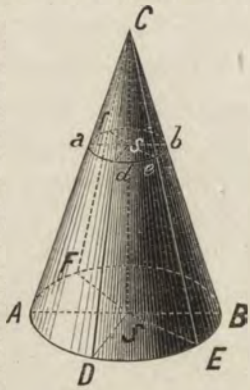


Fig. 85.

Ponieważ sd jest równoodległą od SD, jest więc trójkąt dCs podobny DCS. Dla takiejże przyczyny jest trójkąt eCs podobny ECS i trójkąt fCs podobny FCS. Z podobieństwa trójkątów dCs i DCS wypada, że tak się ma:

$$1) \quad ds : DS = Cs : CS.$$

Z podobieństwa trójkątów eCs i ECS jest również:

$$2) \quad es : ES = Cs : CS.$$

Nakoniec z podobieństwa trójkątów fCs i FCS jest:

$$3) \quad fs : FS = Cs : CS.$$

W proporcyach 1), 2) i 3), drugie stosunki są sobie równe, więc i pierwsze są sobie równe, jest więc:

$$ds : DS = es : ES = fs : FS.$$

W tym ciągu stosunków następniki DS, ES i FS są sobie równe jako promienie jednego koła, a więc i poprzedniki ds, es i fs muszą być także sobie równe.

Punkta więc linii krzywéj $adebf$ są równo oddalone od punktu s wewnątrz niéj znajdującego się, linia więc ta jest okręgiem koła a płaszczyzna $adebf$ kołem.

Uważmy teraz, że w drugim stosunku proporcyi 1) jest poprzednik mniejszy od następnika, to jest $Cs < CS$ jako część od swojéj całości, a więc i w pierwszym stosunku poprzednik, to jest promień ds jest mniejszy od swego następnika, to jest promienia DS, a tém samém koło $adebf$ jest mniejsze od koła $ADBEF$.

Rzeczą jest widoczną, że im przecięcie równoodległe od podstawy, bliższe będzie wierzchołka C, tém też Cs będzie co raz mniejsze od CS, a tém samém i ds co raz mniejsze od DS, a zatém i koło $adebf$ co raz mniejsze od podstawy $ADEBF$. *Przecięcie więc ostrokręgu płaszczyzną równoodległą od podstawy jest i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

119. *Powierzchnia boczna kloca ostrokręgowego prostego, równa się iloczynowi z tworzącéj tegoż kloca przez połowę summy okręgów kół służących mu za podstawy;* albo *równa się iloczynowi z tworzącéj kloca, przez okrąg koła przechodzącego przez środek tworzącéj, równoodlegle od podstaw.*

Założenie. Niech będzie kloc ostrokręgowy $ABDE$ (fig. 86), trzeba dowieść, że jego powierzchnia boczna równa się iloczynowi z tworzącéj np. EB, przez połowę summy okręgów kół AB i DE służących mu za podstawy; albo iloczynowi z tejże saméj tworzącéj, przez okrąg koła HJ przechodzącego przez jéj środek.

Dowodzenie. Na podstawie DE ustawiam ostrokrąg DEC dopełniający dany kloc ostrokręgowy $ABDE$ do całego ostrokręgu ABC. Z punktu B wyprowadzam do

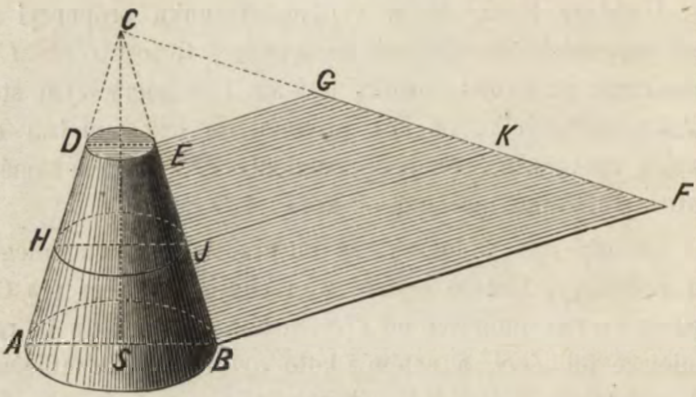


Fig. 86.

BC prostopadłą BF równą okręgowi koła AB i punkt F z punktem C łączę linią prostą. Z punktu E wyprowadzam linią EG prostopadłą do BC i powiadam, że linia EG równa się okręgowi koła DE, albowiem ma się:

$$\text{Okr. } AB : \text{Okr. } DE = AB : DE.$$

Ponieważ zaś trójkąt ACB jest podobny trójkątowi DCE, bo linia DE jest równoodległą od AB; więc ma się:

$$AB : DE = CB : CE.$$

A zatém ma się:

$$\text{Okr. } AB : \text{Okr. } DE = CB : CE.$$

Że zaś jest:

$$CB : CE = BF : EG,$$

bo trójkąt CBF jest podobny trójkątowi CEG, gdyż EG jest równoodległą od BF; więc ma się także:

$$\text{Okr. } AB : \text{Okr. } DE = BF : EG.$$

Lecz z wykreślenia $BF = \text{Okr. } AB$, więc w téj proporcyi poprzedniki są sobie równe, zatém i następniki równe być muszą; jest więc Okr. $DE = EG$, co było do okazania.

Podobnie okazaćby można, że Okr. $HJ = JK$.

Powierzchnia ostrokrężna $ABC = CB \times \frac{\text{Okr. } AB}{2}$ (nº 102), a że Okr. $AB = BF$, więc powierzchnia ostrokrężna $ABC = CB \times \frac{BF}{2} =$ powierzchni trójkąta CBF.

Podobnież powierzchnia ostrokrężna DEC, jako równa $CE \times \frac{\text{Okr. } DE}{2} = CE \times \frac{EG}{2}$, bo Okr. $DE = EG$, równa się powierzchni trójkąta CEG.

Nakoniec powierzchnia kloca ostrokręgowego $ABDE$ równa powierzchni ostrokrężnéj ABC mniéj powierzchnią ostrokrężną DEC; równa powierzchni trójkąta CBF mniéj powierzchnią trójkąta CEG; równa powierzchni trapeza $EBFG = EB\left(\frac{BF+EG}{2}\right)$. A że $BF =$ Okr. AB, a $EG =$ Okr. DE, więc powierzchnia boczna kloca ostrokręg. $ABDE = EB\left(\frac{\text{Okr. } AB + \text{Okr. } DC}{2.}\right)$ Lecz powierzchnia trapeza $EBFG$ równa się także iloczynowi z EB przez JK, więc i powierzchnia kloca ostrokręgowego $ABDE = EB \times JK$, a że $JK =$ Okr. HJ więc powierzchnia boczna kloca ostrokr. $= EB \times$ Okr. HJ. Czyli że *powierzchnia boczna kloca ostrokręgowego prostego i t. d.* co było do okazania.

Uwaga. Oznaczywszy promień podstawy dolnéj kloca ostrokręgowego przez R, promień podstawy górnéj przez r, a tworzącą przez g, będzie wzór ogólny, że:

$$\text{Pow. bocz. kloca ostrokr.} = g\left(\frac{2\pi R + 2\pi r}{2}\right) = g\,\pi\,(R + r).$$

Twierdzenie.

120. *Bryłowatość kloca ostrokręgowego równa się iloczynowi z wysokości tegoż kloca przez summę z podstawy dolnéj, górnéj i średnio-jeometrycznie proporcyonalnéj pomiędzy temi dwiema podstawami.*

Założenie. Niech będzie kloc ostrokręgowy $ABEF$ (fig. 87), trzeba dowieść, że bryłowatość jego równa się iloczynowi z wysokości, którą dla skrócenia oznaczmy W, przez summę z podstawy dolnéj AB, górnéj EF i średnio-jeometrycznie proporcyonalnéj między temi dwiema podstawami.

Dowodzenie. Na podstawie EF ustawiam ostrokrąg EFC, dopełniający dany kloc ostrokręgowy $ABEF$ do całego ostrokręgu ABC. Na téj saméj płaszczyznie na któréj stoi ostrokrąg ABC, ustawiam ostrosłup trójkątny $GHJK$ mający podstawę GHJ = Koł. AB a wysokość którą

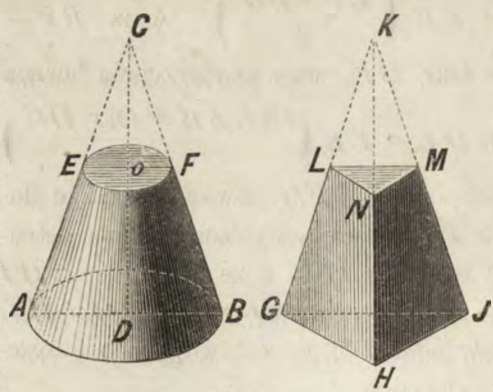


Fig. 87.

oznaczam przez W', równą wysokości ostrokręgu ABC i przypuszczam że płaszczyzna EF równoodległa od podstawy AB jest przedłużona tak, że przecinając ostrosłup $GHJK$, odcina tém samém ostrosłup mniejszy $LMNK$, którego wysokość W'' równa się wysokości ostrokręgu EFC. Wysokość zatém kloca ostrosłupowego $GHJLMN$ równa się wysokości kloca ostrokręgowego $ABEF$ oznaczonéj przez W. Przecięcie LMN, jako równoodległe od GHJ jest trójkątem podobnym trójkątowi GHJ (nº 103) i nadto będzie trójkąt $LMN =$ Koł. EF, a to dla tego, że koła mają się do siebie jak kwadraty ze średnic; będzie więc:

$$1)\quad \text{Koł.}\, AB : \text{Koł.}\, EF = \overline{AB}^2 : \overline{EF}^2.$$

Lecz trójkąt ABC jest podobny trójkątowi EFC, bo EF jest równoodległą od AB; więc ma się:

$$AB : EF = CB : CF$$

a podnosząc wyrazy téj proporcyi do kwadratu, jest:

$$\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2 = \overline{CB}^2 : \overline{CF}^2$$

W téj proporcyi i proporcyi 1) stosunek $\overline{AB}^2 : \overline{EF}^2$ jest wspólny, zatém dwa drugie złożą proporcyę i ma się:

$$a)\quad \text{Koł.}\, AB : \text{Koł.}\, EF = \overline{CB}^2 : \overline{CF}^2.$$

Podobnież z podobieństwa trójkątów GHJ i LMN wypada, że ma się:

$$2)\quad GHJ : LMN = \overline{GH}^2 : \overline{LN}^2.$$

Ponieważ zaś trójkąty GHK i LNK są podobne, bo jest LN równoodległą od GH, więc ma się:

$$GH : LN = KG : KL,$$

a podniósłszy wszystkie wyrazy téj proporcyi do kwadratu, jest:

$$\overline{GH}^2 : \overline{LN}^2 = \overline{KG}^2 : \overline{KL}^2.$$

W téj ostatniéj proporcyi i proporcyi 2), stosunek $\overline{GH}^2 : \overline{LN}^2$ jest wspólny, a więc dwa inne stanowią proporcyę, ma się więc:

$$b) \quad GHJ : LMN = \overline{KG}^2 : \overline{KL}^2.$$

Ponieważ podstawy dolne tak ostrokręgu ABC jak i ostrosłupa $GHJK$, to jest koło AB i trójkąt GHJ są na jednéj płaszczyznie, a ostrokrąg ABC i ostrosłup $GHJK$ mają z wykreślenia równe wysokości, więc wierzchołki ich to jest punkta C i K znajdują się na płaszczyznie równoodległéj od płaszczyzny podstaw; linie więc CB i KG uważać można jako przecięte trzema płaszczyznami od siebie równoodległemi: jedną przechodzącą przez wierzchołki C i K, drugą stanowiącą przecięcia EF i LMN, a trzecią na któréj znajdują się podstawy AB i GHJ, zatém są podzielone przez te płaszczyzny na części proporcyonalne (nº 34); ma się przeto:

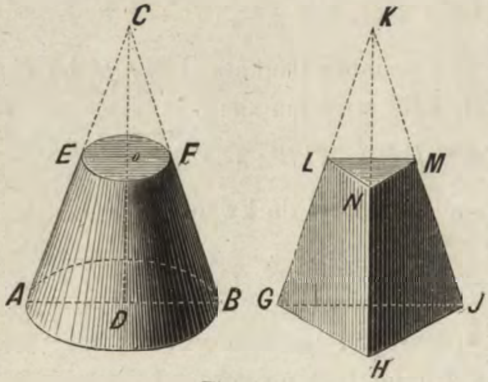


Fig. 87.

$$CB : CF = KG : KL$$

czyli podniósłszy wszystkie wyrazy do kwadratu, jest:

$$\overline{CB}^2 : \overline{CF}^2 = \overline{KG}^2 : \overline{KL}^2.$$

Lecz stosunek $\overline{CB}^2 : \overline{CF}^2$ należy do proporcyi *a*), a stosunek $\overline{KG}^2 : \overline{KL}^2$ do proporcyi *b*), proporcye więc *a*) i *b*) mają drugie stosunki równe, zatém i pierwsze stanowić będą proporcyę, i będzie:

$$\text{Koł. } AB : \text{Koł. } EF = GHJ : LMN.$$

W téj proporcyi trójkąt GHJ = Koł. AB z wykreślenia, czyli poprzedniki są sobie równe, a więc i następniki będą sobie równe i będzie trójkąt LMN = Koł. EF, co było do okazania.

Bryłow. ostrokręgu $ABC = \frac{W'}{3} \times$ Koł. AB (nº 111), a że koło $AB = GHJ$, więc:

Bryłowatość ostrokręgu $ABC = \frac{W'}{3} \times GHJ$ równa bryłowatości ostrosłupa $GHJK$.

Podobnież bryłow. ostrokręgu $EFC = \frac{W''}{3} \times$ Koł. EF, a że koło $EF = LMN$, więc będzie:

Bryłowatość ostrokręgu $EFC = \frac{W''}{3} \times LMN$ równa bryłowatości ostrosłupa $LMNK$.

Bryłowatość kloca ostrokręgowego $ABEF$ równa bryłowatości ostrokręgu ABC mniéj bryłowatością ostrokręgu EFC; równa bryłowatości ostrosłupa $GHJK$ mniéj bryłowatością ostrosłupa $LMNK$; równa bryłowatości kloca ostrosłupowego $GHJLMN$, a tém samém równa

$$\frac{W}{3}\left(GHJ + LMN + \sqrt{GHJ \times LMN}\right) \quad (\text{nº } 116).$$

Wstawiwszy teraz za GHJ jego wartość to jest koło AB, a za LMN także jego wartość to jest koło EF, będzie:

Bryłowatość kloca ostrokręgowego:

$$ABEF = \frac{W}{3}\,(\text{Koł.}\,AB + \text{Koł.}\,EF + \sqrt{\text{Koł.}\,AB \times \text{Koł.}\,EF}).$$

Zatém bryłowatość kloca ostrokręgowego równa się i t. d., co było do okazania.

121. *Uwaga 1sza.* Oznaczywszy promień podstawy dolnéj kloca ostrokręgowego przez R, promień podstawy górnéj przez r, a wysokość kloca przez W, będzie:

$$\text{Bryłow. kloca ostrokr.} = \frac{W}{3}\,(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \times \pi r^2})$$

$$= \frac{W}{3}\,(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 R^2 r^2})$$

$$= \frac{W}{3}\,(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r)$$

$$= \frac{\pi W}{3}\,(R^2 + r^2 + R r).$$

Czyli, że *bryłowatość kloca ostrokręgowego, równa się trzeciéj części iloczynu z przybliżonego stosunku okręgu koła do średnicy, przez wysokość kloca, rozmnożonéj przez summę z kwadratu promienia podstawy dolnéj, z kwadratu promienia podstawy górnéj i z iloczynu tych dwóch promieni.*

122. *Uwaga 2ga.* Professor *Grunert* wynalazł następujące wyrażenie na bryłowatości kloca ostrokręgowego.

Ponieważ $R^2 + r^2 + R r = R^2 + r^2 + Rr + Rr - Rr = R^2 + 2Rr + r^2 - Rr = (R + r)^2 - Rr$ jak również toż samo wyrażenie $R^2 + r^2 + Rr = R^2 + r^2 + Rr - 3R + 3R = R^2 - 2R + r^2 + 3Rr = (R - r)^2 + 3Rr$

a bryłowatość kloca ostrokręgow. $= \frac{\pi W}{3}\,(R^2 + r^2 + Rr)$ (no 121), więc wstawiając za $R^2 + r^2 + Rr$ dwa powyższe wyrażenia będzie:

1) Bryłow. kloca ostrokręg. $=\frac{\pi W}{3}\left\{(R+r)^2-Rr\right\}$ lub

2) „ „ „ $=\frac{\pi W}{3}\left\{(R-r)^2+3\,Rr\right\}$.

Mnożąc wyrażenie 1) przez 3, będzie:

3) 3 Bryłow. kloca ostrokr. $=\frac{\pi W}{3}\left\{3\,(R+r)^2-3\,Rr\right\}$.

Dodając równanie 3) do równania 2) otrzymamy:

4 Bryłow. kloca ostrokr. $=\frac{\pi W}{3}\left\{3\,(R+r)^2+(R-r)^2\right\}$,

a wykonywając wskazane mnożenie, otrzymamy:

4 Bryłow. kloca ostrokr. $=\pi W\,(R+r)^2+\frac{\pi W}{3}\,(R-r)^2$

Dzieląc obie strony tego ostatniego równania przez 4, będzie:

Bryłow. kloca ostrokr. $=\frac{\pi W}{4}(R+r)^2+\frac{\pi W}{12}(R-r)^2$.

Ponieważ $\pi\,(R+r)^2\,W$ jest bryłowatością walca, którego promień podstawy równy $R+r$ a wysokość W, zaś $\pi\,(R-r)^2\,W$ jest bryłowatością walca, którego promień podstawy równy $R-r$ a wysokość W (nº 95); więc położywszy:

$$\pi\,(R+r)^2\,W = Walc.\,(R+r)$$

$$\pi\,(R-r)^2\,W = Walc.\,(R-r)$$ znajdziemy

brył. kloca ostrokr. $=\frac{Walc.\,(R+r)}{4}+\frac{Walc.\,(R-r).}{12.}$

To jest, że *bryłowatość kloca ostrokręgowego, równa się czwartéj części walca, którego promień podstawy, równy jest summie promieni kół będących podstawami kloca ostrokręgowego, więcéj dwunastą częścią walca, którego promień podstawy jest różnicą promieni podstaw tegoż kloca.*

Na mocy tego wyrażenia łatwo ułożyć można tablicę, dla ułatwienia obliczeń bryłowatości kloców ostrokręgowych, dość często wydarzających się w praktyce.

Twierdzenie.

123. *Kloc graniastosłupowy trójkątny, składa się z trzech ostrosłupów trójkątnych, z których każdy ma za podstawę, podstawę kloca, jeden za wysokość jedną, drugi drugą a trzeci trzecią wysokość kloca.*

Założenie. Niech będzie kloc graniastosłupowy trójkątny $ABCDEF$ (fig. 88), trzeba okazać, że on składa się z trzech ostrosłupów trójkątnych, z których każdy będzie miał za podstawę trójkąt ABC, to jest podstawę danego kloca, a wierzchołek jednego będzie w punkcie D, drugiego w punkcie E, trzeciego w punkcie F, czyli że jeden będzie miał za wysokość jedną, drugi drugą, a trzeci trzecią wysokość kloca.

Dowodzenie. Przez punkta A, D i B przeprowadzam płaszczyznę, która się przetnie z płaszczyzną EC po prostéj AD, z płaszczyzną FC po prostéj DB, a z płaszczyzną ABC po prostéj AB i odetnie ostrosłup trójkątny $ABCD$, który mając za podstawę trójkąt ABC a wierzchołek w punkcie D, jest pierwszym ostrosłupem szukanym.

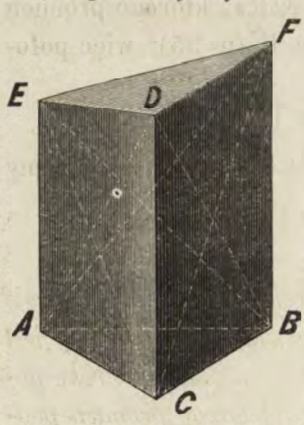


Fig. 88.

Pozostaje więc ostrosłup czworokątny $AEFBD$. Przez proste ED i DB przeprowadzam płaszczyznę, która przetnie się z płaszczyzną $AEFB$

po prostéj EB i podzieli pozostały ostrosłup czworokątny $AEFBD$ na dwa ostrosłupy trójkątne $AEBD$ i $EFBD$. Łączę punkt E z punktem C prostą EC i jest pierwszy z tych dwóch ostrosłupów trójkątnych to jest $AEBD = AEBC$, bo mają podstawę AEB wspólną, wierzchołek jednego jest w punkcie D, a drugiego w punkcie C czyli na prostéj DC równoodległéj od podstawy, wysokości więc mają równe; zamiast przeto ostrosłupa $AEBD$ można wziąść ostrosłup $AEBC$, który znowu można uważać jako mający podstawę ABC, a wierzchołek w punkcie E: jest więc drugim ostrosłupem szukanym.

Pozostał nakoniec ostrosłup trójkątny $EFBD$, który uważam, że ma za podstawę trójkąt DFB a wierzchołek w punkcie E. Łączę punkt F z punktem A prostą FA i jest ostrosłup $DFBE = DFBA$, bo mają podstawę DFB wspólną, a wierzchołki na prostéj EA równoodległéj od podstawy. Zamiast więc pozostałego ostrosłupa $EFBD$ można wziąść ostrosłup $DFBA$, który znowu uważać można, jako mający za podstawę trójkąt AFB a wierzchołek w punkcie D. Łączę punkt F z punktem C prostą FC i jest ostrosłup $AFBD = AFBC$, bo mają podstawę AFB wspólną, a wierzchołki na prostéj DC równoodległéj od podstawy; zamiast więc ostrosłupa $AFBD$, który był równy pozostałemu ostrosłupowi $EFBD$, można wziąść ostrosłup $AFBC$; ten zaś ostatni uważanym być może, jako mający za podstawę trójkąt ABC a wierzchołek w punkcie F, czyli że jest trzecim ostrosłupem szukanym. A zatém *kloc graniastosłupowy trójkątny składa się z trzech ostrosłupów trójkątnych, z których każdy ma za podstawę, podstawę kloca, i t. d.* co było do okazania.

Uwaga 1sza. Fig. 88^a okazuje odcięty pierwszy ostrosłup szukany *abcd*.

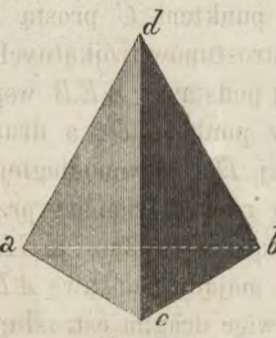


Fig. 88 *a*.

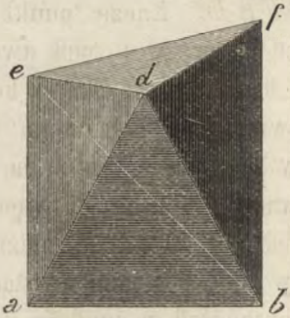


Fig. 88 *b*.

Fig. 88^b okazuje pozostały ostrosłup czworokątny *aefbd*.

Fig. 88^c okazuje pozostały ostrosłup czworokątny *aefbd* rozdzielony na dwa ostrosłupy trójkątne *aebd* i *efbd*.

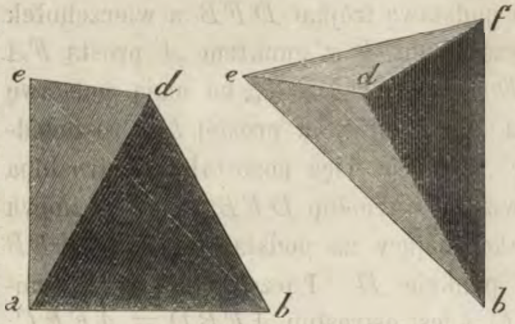


Fig. 88 *c*.

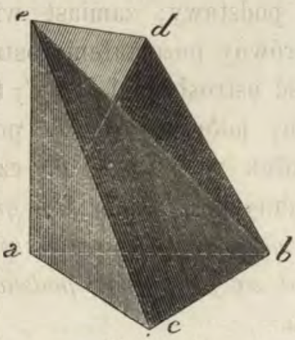


Fig. 88 *d*.

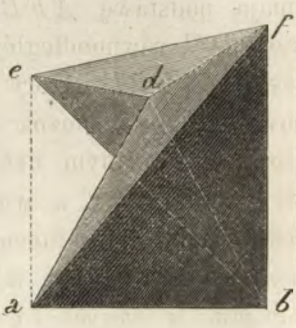


Fig. 88 *e*.

Fig. 88^{d} okazuje zamieniony ostrosłup *a e b d* na jemu równoważny ostrosłup *a e b c* będący drugim ostrosłupem szukanym.

Fig. 88^{e} okazuje zamieniony ostrosłup *e f b d* na jemu równoważny ostrosłup *a f b d*.

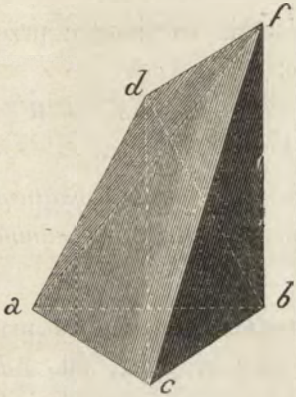


Fig. 88 *f*.

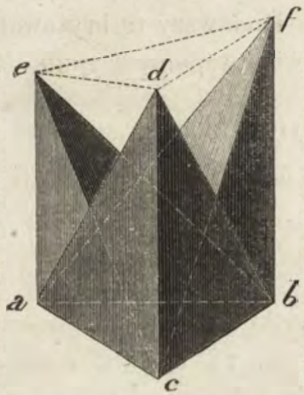


Fig. 88 *g*.

Fig. 88^{f} okazuje zamieniony ostrosłup *a f b d* równoważny ostrosłupowi *e f b d*, na ostrosłup *a f b c* będący trzecim ostrosłupem szukanym; nakoniec:

Fig. 88^{g} okazuje trzy ostrosłupy szukane *a b c d*, *a b c e* i *a b c f* składające bryłowatość danego kloca graniastosłupowego.

124. *Uwaga* $2^{ga.}$ Chciawszy obliczyć bryłowatość kloca graniastosłupowego trójkątnego, potrzeba obliczyć bryłowatość każdego z trzech ostrosłupów trójkątnych na które się kloc rozdziela i bryłowatości te do siebie dodać. Oznaczywszy więc podstawę danego kloca graniastosłupowego trójkątnego przez P, jedną jego wysokość przez W, drugą przez W', trzecią przez W'', będzie:

Bryłowatość 1^{go} ostrosłupa trójkątnego $= P \times \frac{W}{3}$ (n° 108).

„ 2^{go} „ „ $= P \times \frac{W'}{3}$

„ 3^{go} „ „ $= P \times \frac{W''}{3}$

Dodawszy te bryłowatości do siebie i wyjmując przed nawias wspólny czynnik P, będzie:

Bryłow. kloca graniastosł. trójk. $= P \left(\frac{W + W' + W''}{3} \right)$

czyli, że *bryłowatość kloca graniastosłupowego trójkątnego równa się iloczynowi z podstawy przez trzecią część summy trzech jego wysokości.*

125. *Uwaga 3cia.* Jeżeli kloc graniastosłupowy jest prosty jak na fig. 88, każda wtedy jego krawędź, jak AE, CD i BF, jest jedną z trzech jego wysokości; nie przedstawia się więc żadna trudność w ich wymierzeniu, a tém samém obliczeniu bryłowatości danego kloca. Lecz jest zupełnie co innego, kiedy kloc dany jest pochyły (jak np. fig. 89), bo w takim razie jędnę tylko wysokość GJ, jako zewnątrz kloca padającą, wprost za pomocą pionu wymierzyć będzie można; inne zaś jako wewnątrz kloca padające, w ten sposób co pierwsza wymierzyć się nie dadzą, i tylko wyrachowane być muszą. Żeby to uskutecznić oznaczmy krawędź BG przez b, krawędź CD przez b',

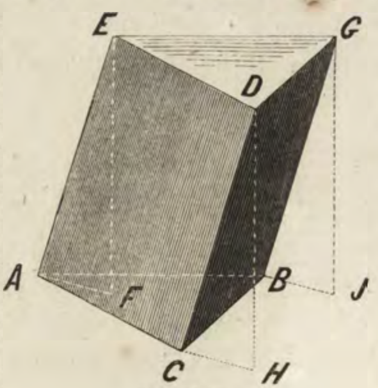


Fig. 89.

krawędź AE przez b'', tudzież wysokość GJ przez w, wysokość DH przez w' i nakoniec wysokość EF przez w''. Z tych sześciu prostych, cztery to jest b, b', b'' i w jako bezpośrednio wymierzyć się dające przyjmiemy za wiadome, a dwie pozostałe to jest w' i w'' na mocy tych wiadomych obliczyć nam będzie potrzeba.

Ponieważ proste AE, CD i BG jako krawędzie kloca, a proste EF, DH i GJ jako prostopadłe do jednéj płaszczyzny, to jest podstawy kloca, są od siebie równoodległe, więc płaszczyzny AEF, CDH i BGJ przez też proste przechodzące są od siebie równoodległe; wspólne zatém przecięcia się tych płaszczyzn z płaszczyzną podstawy kloca, czyli linie AF, CH i BJ są od siebie równoodległe (nº 27): trójkąty przeto AEF, CDH i BGJ mające boki odpowiednie od siebie równoodległe, są sobie podobne a tém samém mają boki odpowiednie proporcyonalne.

Z podobieństwa trójkątów BGJ i CDH wypada:

$$BG : GJ = CD : DH \quad \text{czyli}$$
$$b : w = b' : w' \quad \text{a ztąd}$$
$$w' = \frac{b' w}{b}.$$

Z podobieństwa trójkątów BGJ i AEF wypada:

$$BG : GJ = AE : EF \quad \text{czyli}$$
$$b : w = b'' : w'' \quad \text{a ztąd}$$
$$w'' = \frac{b'' w}{b}.$$

Według poprzedzającéj uwagi bryłowatość kloca graniastosłupowego trójkątnego równa się $P\left(\frac{w + w' + w''}{3}\right)$, albo inaczéj równa $\frac{P}{3}(w + w' + w'')$. Wstawiwszy w to ostatnie wyrażenie za w' i w'' wynalezione ich wartości, będzie:

Bryłow. kloca graniastosł. trójkątn. pochył. $= \frac{P}{3}\left(w + \frac{b'w}{b} + \frac{b''w}{b}\right)$

" " " " " $= \frac{P}{3}\left(\frac{bw + b'w + b''w}{b}\right)$

" " " " " $= \frac{Pw}{3b}(b + b' + b''),$

to jest: że *bryłowatość kloca graniastosłupowego trójkątnego pochyłego równa się iloczynowi z podstawy kloca przez wysokość padającą zewnątrz, podzielonemu przez potrojoną krawędź, z końca której pada wysokość zewnętrzna, a rozmnożonemu przez summę z trzech krawędzi danego kloca.*

Twierdzenie.

126. *Bryłowatość kloca graniastosłupowego trójkątnego, czy prostego czy pochyłego, równa się iloczynowi z jego profilu przez prostą łączącą środki ciężkości obu podstaw, albo prostą przeprowadzoną przez środek ciężkości tegoż profilu równoodlegle od ścian danego kloca a kończącą się na jego podstawach.*

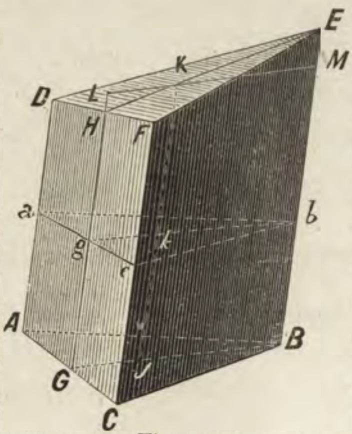


Fig. 90.

Założenie. Niech będzie graniastosłup pochyły $ABCDEF$ (fig. 90), mam dowieść, że jego bryłowatość równa się iloczynowi z profilu abc przez linią KJ przeprowadzoną przez środek ciężkości tegoż profilu, to jest przez punkt k równoodlegle od ścian danego kloca, a kończącą się na jego podstawach.

Dowodzenie. Połączmy punkt G będący środkiem boku AC z punktem B prostą GB, i tę ostatnią podzielmy na trzy równe części. Punkt J znajdujący się w dwóch trzecich częściach od wierzchołka, jest środkiem ciężkości podstawy ABC. Aby znaleźć środek ciężkości profilu abc i drugiéj podstawy DEF, dosyć poprowadzić przez punkt J linię równoodległe od krawędzi danego kloca np. od CF, a punkta przecięcia k i K będą szukanemi środkami ciężkości; jeżeli bowiem poprowadzimy prostą GH równoodległą od AD, która proste ac i DF podzieli na dwie równe części i połączymy punkta przecięcia g i H z punktami b i E prostemi, to pochyłe GB, gb i HE zawarte między równoodległemi GH i BE podzielone będą przez prostą KJ w punktach J, k i K na części proporcyonalne. Skoro więc jak wiemy punkt J jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, to i punkta k i K będą także środkami ciężkości trójkątów abc i DEF. Poprowadźmy wreszcie przez punkt K prostą LM równoodległą od GB, i uważmy dwa trójkąty LKH i MKE. Trójkąty te jako równokątne są podobne i dają:

$$HK : KE = HL : ME, \text{ że zaś jest}$$

z wykreślenia $HK : KE = 1 : 2$,

więc jest i $HL : ME = 1 : 2$

a ztąd 1) $ME = 2\,HL$.

Ponieważ prosta GH dzieli boki nierównoodległe AC i FD trapezu $ACFD$ na połowy, jest więc średnio-arytmetycznie proporcyonalną między AD i CF, a ztąd wypada że:

$$2)\quad 2\,GH = AD + CF.$$

Prosta $KJ = GL$ jako równoodległe zawarte między równoodległemi, a ponieważ:

$$GL = GH + HL, \quad \text{więc i} \quad KJ = GH + HL$$

$$\text{czyli} \quad 2\,KJ = 2GH + 2\,HL$$

a wstawiając za $2\,GH$ wartość z równania 2) jest:

$$3)\quad 2\,KJ = AD + CF + 2\,HL.$$

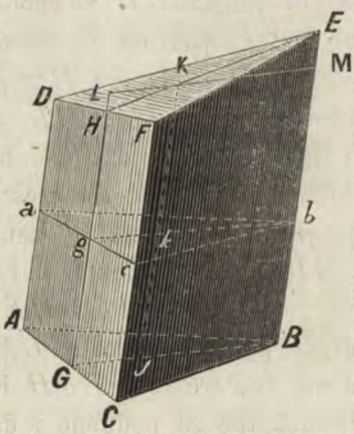


Fig. 90.

Lecz figura pokazuje że jest:

$$JK = BM = BE - ME.$$

Kładąc zaś za ME wartość z 1) jest:

$$4)\quad JK = BE - 2\,HL.$$

Dodając teraz równania 3) i 4) do siebie, będzie:

$$3\,JK = AD + CF + 2\,HL + BE - 2\,HL$$

$$\text{czyli} \quad JK = \frac{AD + CF + BE}{3}$$

Że zaś jest brył. kloca $abcCAB = abc\left(\frac{aA + cC + bB}{3}\right)$

a bryłowatość kloca $abcFDE = abc\left(\frac{aD + cF + bE}{3}\right)$

Zatém bryłowatość kloca

$$ABCDEF = abc\left(\frac{aA + aD + cC + cF + bB + bE}{3}\right)$$

czyli $ABCDEF = \frac{abc\ (AD + CF + BE)}{3}$

A że $JK = \frac{AD + CF + BE}{3}$

jest zatém bryłowatość kloca $ABCDEF = abc \times JK$.

Bryłowatość więc kloca graniastosłupowego trójkątnego czy prostego czy i t. d., co było do okazania.

Twierdzenie.

127. *Bryłowatość kloca graniastosłupowego wielokątnego, równa się iloczynowi z jego profilu przez prostą łączącą środki ciężkości podstaw, albo inaczéj przez prostą poprowadzoną przez środek ciężkości profilu równoodlegle od krawędzi kloca a zawartą między jego podstawami.*

Założenie. Niech będzie kloc graniastosłupowy czworokątny $ABCDabcd$ (fig. 91), mam dowieść że jego bryłowatość równa się iloczynowi z profilu $a'b'c'd'$ przez prostę Kk przechodzącą przez punkt k' środek ciężkości tegoż profilu, równoodlegle od krawędzi kloca danego i opierającą się na jego podstawach, albo przez prostę łączącą środki ciężkości tychże podstaw.

Dowodzenie. Aby znaleźć środki ciężkości profilu i podstaw, poprowadźmy przekątne $d'b'$, DB i db a następnie sposobem wiadomym i wyżéj już podanym, wyznaczmy śro-

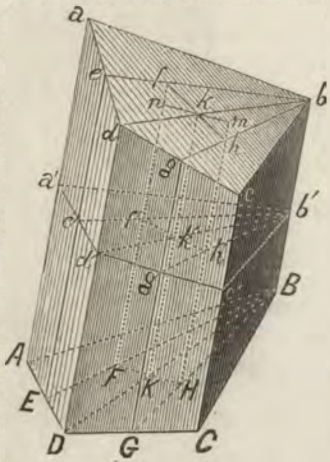


Fig. 91.

dek ciężkości f' trójkąta $a'b'd'$ i środek ciężkości h' trójkąta $d'b'c'$. Poprowadźmy następnie przez punkta f' i h' proste Ff i Hh równoodległe od Bb, a będzie F środkiem ciężkości trójkąta ABD; H środkiem ciężkości trójkąta DBC; zaś f środkiem ciężkości trójkąta abd; h środkiem ciężkości trójkąta dbc. Jeżeli teraz połączymy punkta F i H; f' i h'; f i h prostemi, wyznaczy się środek ciężkości k' profilu $a'b'c'd'$ z proporcyi: $f'k' : k'h' = d'b'c' : a'b'd'$

a poprowadziwszy przez znaleziony ztąd punkt k' prostą Kk równoodległą od Bb, będzie K środkiem ciężkości podstawy $ABCD$, a k środkiem ciężkości podstawy $abcd$.

Przez punkt k poprowadźmy linię mn równoodległą od FH i uważmy dwa trójkąty fkn i mkh. Trójkąty te jako równokątne są podobne i dają:

$$fn : mh = fk : kh$$

A że jest: $fk : kh = f'k' : k'h'$

i nadto $f'k' : k'h' = d'b'c' : a'b'd'$

więc jest: $fn : mh = d'b'c' : a'b'd'$

a ztąd 1) $fn = \dfrac{mh \times d'b'c'}{a'b'd'}$

Figura pokazuje, że jest: $Ff = Fn + fn$, a kładąc w to równanie za fn jego wartość 1) i uważając że $Fn = Kk$ jako równoodległe między równoodległemi, jest:

$$2)\quad Ff = Kk + \frac{mh \times b'\, c'\, d'}{a'\, b'\, d'}.$$

Figura także pokazuje, że jest: $Hh = Hm - mh$, a kładąc Kk za Hm jest:

$$3)\quad Hh = Kk - mh$$

Wiemy z poprzedzającego (nº 126), że:

Bryłowatość kloca $ABDabd = a'\, b'\, d' \times Ff$

a kładąc za Ff wartość 2) jest:

Bryłow. kloca $ABDabd = a'\, b'\, d' \left(Kk + \frac{mh \times b'\, c'\, d'}{a'\, b'\, d'}\right)$

albo wykonywając mnożenie otrzymamy:

$$4)\quad ABDabd = a'\, b'\, d' \times Kk + mh \times b'\, c'\, d'$$

Jest znowu (nº 126): Bryl. kloca $BCDbcd = b'c'd' \times Hh$

a kładąc za Hh wartość 3) i wykonywając mnożenie jest:

5) Bryl. kloc. $BCDbcd = b'\, c'\, d' \times Kk - b'\, c'\, d' \times mh$

Dodając równanie 5) do 4) będzie:

Br. $ABDabd$ + Br. $BCDbcd = a'b'd' \times Kk + mh \times b'c'd' + b'c'd' \times Kk - mh \times b'c'd'$

czyli:

Bryłow. $ABCDabcd = a'b'd' \times Kk + b'c'd' \times Kk = Kk\,(a'b'd' + b'c'd')$

albo nakoniec:

Bryłowatość kloca $ABCDabcd = a'\, b'\, c'\, d' \times Kk.$

Bryłowatość więc kloca graniastosłupowego wielokątnego równa się i t. d. co było do okazania.

128. *Uwaga 1sza.* Chcąc obliczyć bryłowatość jakiegokolwiek kloca wielokątnego, jako to: pięciokątnego, sześciokątnego i t. d., dosyć rozłożyć go na dwa lub więcéj kloców, których bryłowatość już znamy i postępować zupełnie tak samo jak w przypadku powyższym.

129. *Uwaga 2ga.* Tak jak walec uważaliśmy jako graniastosłup mający za podstawę wielokąt o bardzo wielkiéj liczbie bardzo małych boków, tak też kloc walcowy, czyli część walca zawarta między podstawą a przecięciem nierównoodległém od podstawy, uważać można sposobem równie przybliżonym za kloc graniastosłupowy wielokątny o podstawie mającéj bardzo wielką liczbę bardzo małych boków; bryłowatość więc kloca walcowego równać się będzie iloczynowi z jego profilu, czyli przecięcia prostopadłego do osi, przez tęż oś, która jest zarazem linią łączącą środki ciężkości podstaw kloca walcowego.

Twierdzenie.

130. *Bryłowatość bryły utworzonéj obrotem jakiegokolwiek wielokąta, około osi leżącéj na jego płaszczyznie, równa się iloczynowi z profilu téj bryły przez linię, którą w czasie obrotu przebiega środek ciężkości tegoż profilu. Bryła taka zowie się obrotową.*

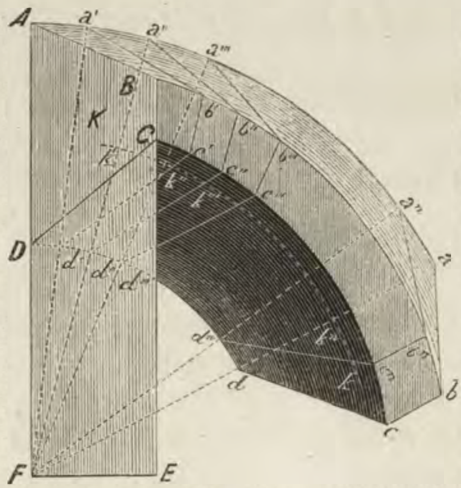


Fig. 92.

Założenie. Niech będzie np. czworokąt $ABCD$ (fig. 92) leżący na płaszczyznie $ABEF$, który obraca się około osi EF, mam dowieść, że bryłowatość bryły $ABCDabcd$ utworzonéj obrotem tego czworokąta równa się iloczynowi z profilu $ABCD$ przez linię Kk, którą w czasie obrotu przebiega punkt K środek ciężkości tegoż profilu.

Dowodzenie. Odcinam na łuku Aa, łuczki Aa', $a'a''$, $a''a'''$ i t. d., tak małe, żeby je można uważać za linie proste i przez oś EF, tudzież punkta a', a'', a'''. . . a^n przeprowadzam płaszczyzny. Płaszczyzny te przetną bryłę daną i utworzą znowu profile $a'\,b'\,c'\,d'$; $a''\,b''\,c''\,d''$; $a'''\,b'''\,c'''\,d'''$. . . $a^n\,b^n\,c^n\,d^n$ które przetną się znowu z łukiem Kk w środkach ciężkości $k'\,k''\,k'''$. . . k^n, a całą bryłę podzielą na małe bryłki jak $ABCDa'\,b'\,c'\,d'$; $a'\,b'\,c'\,d'\,a''\,b''\,c''\,d''$; $a''\,b''\,c''\,d''\,a'''\,b'''\,c'''\,d'''$; i t. d.

Ponieważ łuczki Aa', Bb', Cc', Dd' i t. d. są z przypuszczenia tak małe, że uważane być mogą prawie za linie proste, więc każdą z tych bryłek na które się dana bryła obrotowa rozdzieliła, uważać można za kloc graniastosłupowy wielokątny, a jak w obecnym razie czworokątny. Opierając się więc na tém cośmy już powyżéj (nº 127) dowiedli, będziemy mieli na wyrażenie ich bryłowatości następujące równania:

Brył. $ABCDa'b'c'd' = ABCD \times Kk'$

„ $a'b'c'd'\,a''b''c''d'' = a'b'c'd'' \times k'k'' = ABCD \times k'k''$

„ $a''b''c''d''a'''b'''c'''d''' = a''b''c''d'' \times k''k''' = ABCD \times k''k'''$

„ . . . .

„ . . . .

„ $a^n\,b^n\,c^n\,d^n\,a\,b\,c\,d = a^n b^n c^n d^n \times k^n k = ABCD \times k^n\,k$

które do siebie dodawszy otrzymamy:

Brył. $ABCDabcd = ABCD\,(Kk' + k'k'' + k''k''' \ldots + k^n\,k) = ABCD \times Kk$

Bryłowatość więc bryły utworzonéj obrotem jakiegokolwiek wielokąta i t. d. co było do okazania.

ROZDZIAŁ VI.

O KULI.

131. Jeżeli obracać będziemy półkole około jego średnicy i wystawimy sobie, że ono w każdém położeniu ślad po sobie pozostawia, to powróciwszy do pierwotnego położenia półokrąg dany zakreśli powierzchnię krzywą zwaną *powierzchnią kuli*, a samo półkole bryłę zwaną *kulą*.

Fig. 93.

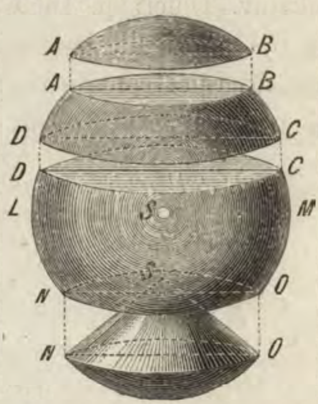


Fig. 93 *a*.

Ponieważ w czasie obrotu półkola około średnicy, żaden punkt półokręgu nie zmienił swéj odległości od środka, więc wszystkie punkta powierzchni kuli są w jednakowéj odległości od punktu wewnątrz kuli znajdującego się. *Kula więc jest to bryła ograniczona powierzchnią krzywą, któréj wszystkie* *punkta są równo oddalone od punktu wewnątrz téj bryły znajdującego się,* zwanego *środkiem kuli.*

Linia prosta idąca od środka kuli do jéj powierzchni, nazywa się *promieniem kuli.* Wszystkie promienie kuli są sobie równe, bo wszystkie punkta powierzchni kuli są równo oddalone od jéj środka. Linia prosta przechodząca przez środek kuli i opierająca się końcami swemi na powierzchni kuli, nazywa się *średnicą* albo *osią kuli.* Każda więc średnica czyli oś kuli składa się z dwóch promieni kuli. Wszystkie zatém średnice czyli osie jednéj kuli są sobie równe.

132. Kule mające promienie równe, są sobie równe.

133. Płaszczyzna mająca jeden tylko punkt wspólny z powierzchnią kuli i więcéj miéć nie mogąca, nazywa się *płaszczyzną styczną.*

134. Część powierzchni kuli jak np. $ABCD$ (fig. 93 i 93[a]) zawarta pomiędzy okręgami dwóch kół AB i DC od siebie równoodległemi nazywa się *pasem kulistym,* a koła AB i DC jego podstawami.

Jeżeli jedna z podstaw pasa kulistego jest styczną z powierzchnią kuli, czyli, jeżeli pas kulisty ma rzeczywiście jedną tylko podstawę jak np. $AGBA$ (fig. 93 i 93[a]), nazywa się wówczas *czaszką.*

135. Część kuli, np. $ABCD$ (fig. 93 i 93[a]), zawarta między dwoma kołami AB i DC od siebie równoodległemi i otoczona pasem kulistym, nazywa się *pniem* albo *klocem kulistym,* zawarta zaś między czaszką i jéj podstawą, jak np. $AGBA$ nazywa się *odcinkiem kuli.*

136. Wysokością pasa lub kloca kulistego jest prostopadła spuszczona z jednéj jego podstawy na drugą, jak np. linia EF (fig. 93 i 93[a]).

Twierdzenie.

137. *Każde przecięcie kuli płaszczyzną jest kołem.*

Założenie. Niech będzie kula przecięta płaszczyzną AB (fig. 94), mam dowieść, że powstałe ztąd przecięcie $ACDBEF$ jest kołem.

Dowodzenie. Na przecięciu tém obieram dowolnie ilekolwiek punktów, np. A, C, D, B, E i F. Ze środka kuli to jest z punktu S spuszczam linię SG prostopadłą na płaszczyznę, $ACDBEF$ i punkta A, C, D, B, E i F z punktami S i G łączę liniami prostemi.

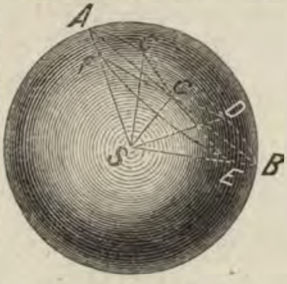


Fig. 94.

Ponieważ punkta A, C, D, B, E i F znajdują się na powierzchni kuli, więc linie SA, SC, SD i t. d. są sobie równe jako promienie kuli (nº 131); a że te linie względem linii SG prostopadłéj do płaszczyzny $ACDBEF$ są pochyłemi, więc ich spodki znajdować się muszą na jednym okręgu koła, którego środkiem jest spodek prostopadłéj SG (nº 13). Przecięcie więc $ACDBEF$ jest kołem, a linia krzywa $ACDBEF$ okręgiem tegoż koła, którego promieniami są linie GA, GC, GD i t. d. A zatém *przecięcie kuli i t. d.* co było do okazania.

Uwaga 1sza. Im bardziéj cięciwa oddala się od środka koła, tém jest mniejszą, a tém samém przecięcie kuli bardziéj oddalone od środka, jest kołem mniejszém od przecięcia bardziéj do środka kuli zbliżonego. Przecięcie kuli przez jéj środek jest kołem największém, i dla tego téż nazywa się *kołem wielkiém.* Każde inne przecięcie kuli nazywa się *kołem małém.* Promień koła wielkiego jest równy promieniowi kuli. Koła wielkie przecinające się z sobą, dzielą się wzajemnie na dwie równe części, ponieważ ich wspólne przecięcie przechodzi przez środek tychże kół i jest dla nich wspólną średnicą.

Każde koło wielkie dzieli kulę i jéj powierzchnię na dwie równe części.

Uwaga 2ga. Linia SG łącząca środek kuli ze środkiem koła małego $ACDBEF$ (fig. 94) jest do płaszczyzny tego koła prostopadłą, a więc nawzajem prostopadła do płaszczyzny koła małego, ze środka tegoż koła wyprowadzona przechodzi przez środek kuli, a przedłużona dostatecznie, przetnie powierzchnię kuli w dwóch punktach i będzie osią kuli.

138. *Biegunem koła* wielkiego czy małego, nazywamy punkt na powierzchni kuli równo oddalony od punktów okręgu tegoż koła. Jeżeli więc ze środka koła, będącego przecięciem kuli, wyprowadzimy do tegoż koła prostopadłą, to ona przejdzie przez środek kuli i będzie osią tejże kuli (fig. 137 *Uwaga 2ga.*), mającą końce równo oddalone od okręgu koła danego, a tém samém będące biegunami tak tego koła jak i wszystkich kół od niego równoodległych. Z tego się okazuje, że każde koło ma na powierzchni kuli dwa bieguny, będące końcami osi kuli przechodzącéj przez środek tegoż koła prostopadle do jego płaszczyzny.

Przez dwa punkta obrane na powierzchni kuli można zawsze przeprowadzić łuk koła wielkiego, gdyż dwa te obrane punkta i środek kuli, stanowią trzy punkta oznaczające położenie płaszczyzny (nº 1).

Jeżeliby dwa punkta na powierzchni kuli były obrane tak, iżby ze środkiem kuli leżały na jednéj linii prostéj będącéj osią kuli, w takim razie moglibyśmy poprowadzić nieskończoną liczbę kół wielkich, których okręgi przez dwa obrane punkta przechodzić będą.

139. Jeżeli przez oś kuli, to jest przez linię GH (fig. 93) przeprowadzimy ilekolwiek kół wielkich np. $GADHCB$ i $GJHK$, których płaszczyzny będą prostopadłe do kół AB i DC, to jest w ogólności do kół prostopadłych do osi GH (nº 47), a tém samém od siebie równoodległych, w takim razie koła $GADHCB$ i $GJHK$ i t. d. zwać się będą *południkami*, a koła od siebie równoodległe jak np. AB, DC i t. d. *równoleżnikami*.

Fig. 93.

Fig. 93 *a*.

140. Przeciąwszy kulę przez jéj środek (fig. 93) płaszczyzną równoodległą od AB lub DC, otrzymamy koło wielkie LM. Ponieważ płaszczyzny południków są, podług poprzedzającego, prostopadłe do płaszczyzny równoleżników, są przeto prostopadłe do płaszczyzny koła wielkiego LM, a więc wspólne przecięcie się południków czyli linia GH jest również prostopadłą do płaszczyzny koła LM (nº 52), czyli prostopadłą do linii LM i JK (nº 7); kąty więc GSL, GSJ, GSM, GSK i t. d. są proste; a że one mają za miary łuki GL, GJ, GM, GK i t. d., przeto łuki te są ćwiartkami a więc mają po 90^0. Punkta zatém G i H od okręgu koła LM, czyli bieguny od okręgu koła wielkiego są odległe o 90^0.

141. Ponieważ płaszczyzny południków są prostopadłe do płaszczyzn równoleżników, więc i łuki tych pierwszych, są do drugich prostopadłe. Na mocy tego nastręcza się łatwy sposób oznaczania na powierzchni kuli, biegunów koła danego; dosyć bowiem z dwóch punktów okręgu koła danego, wyprowadzić dwa łuki kół wielkich do niego prostopadłe, a wspólne przecięcia się tych łuków oznaczą szukane bieguny. Gdy koło dane jest kołem wielkiém, to dla znalezienia jego biegunów, dosyć jest poprowadzić jeden łuk koła wielkiego do niego prostopadły i na nim tak po jednéj jak i drugiéj stronie koła danego odciąć po 90^0.

Odwrotnie, gdyby na powierzchni kuli był oznaczony biegun koła wielkiego, a szło o nakreślenie okręgu tegoż koła, w takim razie z danego bieguna, otwartością cyrkla równą cięciwie 90^0, nakreśliwszy na powierzchni kuli okrąg koła, okrąg ten będzie szukanym okręgiem koła wielkiego.

Do kreślenia okręgów na powierzchni kuli używa się cyrkli zwanych kulistemi, za pomocą których, można zakreślać koła na powierzchni kuli, równie łatwo, jak cyrklami zwyczajnemi na płaszczyznie.

142. Wycinek koła wielkiego kuli, obracając się około jednego ze swych boków, tworzy bryłę zwaną *ostrokręgiem* albo *wycinkiem kulistym*. Tak np. wycinek NSH (fig. 93 i 93^a), przez obrót około boku SH tworzy ostrokrąg kulisty $SNHO$.

Każdy ostrokrąg kulisty jak np. $SNHO$, składa się z odcinka kuli $NHON$ i z ostrokręgu zwyczajnego NSO.

143. Część powierzchni kuli $HDAGJH$ (fig. 93), zawarta pomiędzy dwoma południkami $HDAG$ i HJG

nazywa się *taśmą*. Półokręgi $HDAG$ i HJG ograniczające taśmę nazywają się *bokami taśmy*. Bryła $GSHLDAGJH$ będąca częścią kuli a zawarta pomiędzy dwoma płaszczyznami południków, to jest pomiędzy płaszczyzną $GSHLDA$ i płaszczyzną $GSHJ$ a taśmą $HLDAGJH$ nazywa się *klinem kulistym*.

144. Część powierzchni kuli (fig. 95) jak np. ABC, zawarta pomiędzy trzema łukami kół wielkich nazywa się *trójkątem kulistym*. Łuki AB, BC i AC ograniczające trójkąt kulisty nazywają się jego *bokami*.

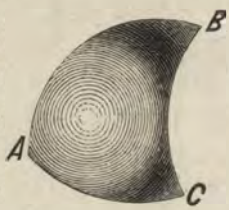


Fig. 95.

Przypuszcza się, że każdy z boków trójkąta kulistego jest zawsze mniejszy od pół okręgu koła. Kąty zawarte pomiędzy płaszczyznami na których leżą boki trójkąta kulistego, są *kątami* tegoż *trójkąta*.

Trójkąt kulisty może być *równoboczny*, *równoramienny* i *różnoboczny*, podobnie jak trójkąt prostokreślny.

145. Wielokąt kulisty $DEFGH$ (fig. 96) jest to część powierzchni kuli zawarta pomiędzy iląkolwiek łukami kół wielkich.

Fig. 96.

Nadmiar trzech kątów trójkąta kulistego nad dwa kąty proste, lub kątów wielokąta kulistego nad dwa kąty proste wzięte tyle razy ile wielokąt ma boków mniéj dwa, nazywa się *przepełnieniem kulistém*. I tak np., jeżeli jeden kąt trójkąta kulistego ma 80^0, drugi 93^0, trzeci 86^0, czyli wszystkie trzy ważą 259°, przepełnieniem więc kulistém będzie w tym razie nadmiar 259° nad 180°, czyli 259°–180° to jest 79°.

Podobnież, jeżeli wszystkie kąty pięciokąta kulistego ważą razem 629°, 16′ i 23″, to przepełnieniem kulistém będzie wówczas, nadmiar 629°, 16′, 23″ nad 180° wzięte razy (5 — 2), czyli będzie 629°, 16′, 23″ — 180° × 3 = 629°, 16′, 23″ — 540° to jest 89°, 16′, 23″.

146. Bryła mająca za podstawę jakikolwiek wielokąt kulisty a za ściany płaszczyzny oparte na bokach tegoż wielokąta i schodzące się w środku kuli, nazywa się *ostrosłupem kulistym*, który podobnie jak ostrosłup zwyczajny, przybiera nazwisko od ilości boków podstawy.

147. Dwa trójkąty kuliste mające kąty i boki odpowiednie równe, lecz w prost przeciwnym kierunku ułożone, nazywają się *symetrycznemi*.

Twierdzenie.

148. *Kąt który tworzą łuki dwóch kół wielkich przecinających się z sobą, jest równy kątowi zawartemu pomiędzy stycznemi, do tych dwóch łuków z ich wspólnego przecięcia się wyprowadzonemi. Kąt ten ma za miarę łuk zakreślony z jego wierzchołka promieniem równym cięciwie 90°.*

Założenie. Niech będą dwa łuki kół wielkich $AGBD$ i $AHCD$ (fig. 97) przecinające się z sobą; mam dowieść, że kąt pomiędzy temi łukami zawarty, będzie równy kątowi zawartemu pomiędzy stycznemi do tych dwóch łuków z ich wspólnego przecięcia się, to jest z punktu A wyprowadzonemi i będzie miał za miarę łuk BC, z punktu A jako z bieguna nakreślony a między łukami $AGBD$ i $AHCD$ zawarty.

Dowodzenie. Prowadzę z punktu A proste AE i AF styczne do łuków $AGBD$ i $AHCD$. Linia AE styczna do łuku $AGBD$ jest prostopadłą do promienia AS i leży z łukiem $AGBD$ na jednéj płaszczyznie; dla podobnéj przyczyny linia AF jest również prostopadłą do promienia AS i leży z łukiem $AHCD$ na jednéj płaszczyznie. Kąt więc EAF jest odpowiedni dwójściennemu pomiędzy płaszczyznami $AGBDA$ i $AHCDA$ (nº 40), a zatém równy kątowi GAH. Z punktu A jako z bieguna, zakreślmy ćwiartką łuk BC; łuk ten będzie miarą kąta GAH, bo łuki AB i AC są z wykreślenia ćwiartkami, kąty więc ASB i ASC są proste; linie zatém SB i SC są prostopadłe do linii AS a tém samém równoodległe od stycznych AE i AF z wykreślenia do linii AS prostopadłych; kąt przeto EAF, równy z poprzedniego kątowi GAH, jest także równy kątowi BSC (nº 33). Lecz kąt BSC, jako mający wierzchołek w środku koła nakreślić się mogącego promieniem SB lub SC ma za miarę cały łuk BC, więc też i jemu równy kąt GAH mieć musi za miarę łuk BC z punktu A jako z bieguna między przedłużonemi jego ramionami AG i AH nakreślony. Czyli *kąt który tworzą łuki dwóch kół wielkich przecinających się z sobą i t. d.* co było do okazania.

Fig. 97.

149. *Wniosek 1szy.* Kąty kuliste przyległe ABD i DBC (fig. 98) ważą dwa kąty proste, bo jeden i drugi są równe kątom odpowiednim dwójściennym zawartym pomiędzy płaszczyznami $ABCF$ i BDF.

Fig. 98.

Dla podobnéj przyczyny, kąty kuliste wierzchołkiem przeciwległe ABD i EBC (fig. 98) są sobie równe, bo jeden i drugi są także równe kątom odpowiednim dwójściennym zawartym pomiędzy płaszczyznami $ABCF$ i $DBEF$.

150. *Wniosek 2gi.* Każdy kąt trójkąta kulistego, mierzyć się daje łukiem koła wielkiego, zakreślonym z wierzchołka kąta danego, jako z bieguna, i zawartym między jego ramionami.

Na téj zasadzie na powierzchni kuli, tak samo jak na płaszczyźnie, można kreślić kąty kuliste, równe kątowi danemu.

Twierdzenie.

151. *W trójkącie kulistym summa dwóch którychkolwiek jego boków, jest większą od boku trzeciego.*

Założenie. Niech będzie trójkąt kulisty ABC (fig. 99), mam dowieść, że summa dwóch jego boków np. AB i BC jest większą od trzeciego boku AC.

Dowodzenie. Niech punkt S będzie środkiem kuli, na powierzchni któréj znajduje się trójkąt kulisty ABC. Połączywszy wierzchołki trójkąta danego, to jest punkta A, B i C z punktem S prostemi AS, BS i CS i wyobraziwszy sobie przez te proste przeprowadzone płaszczyzny, to one utworzą kąt trójścienny mający wierzchołek w środku kuli, a ograniczony kątami płaskiemi ASB,

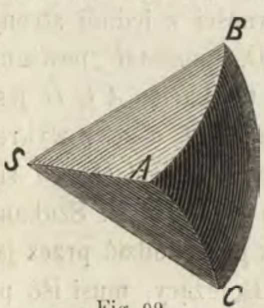


Fig. 99.

ASC i BSC, które mają za miary łuki AB, AC i BC będące właśnie bokami danego trójkąta kulistego. A że w kącie trójściennym summa dwóch którychkolwiek kątów płaskich jest większą od trzeciego (nº 56), zatém i summa miar tych kątów czyli *dwóch boków w trójkącie kulistym jest większą od trzeciego* co było do okazania.

Twierdzenie.

152. *Najkrótszą odległością dwóch punktów na powierzchni kuli jest łuk mniejszy koła wielkiego, też punkta łączący.*

Założenie. Niech będą obrane na powierzchni kuli dwa punkta A i B (fig. 100), mam okazać, że najkrótszą między niemi odległością jest łuk mniejszy koła wielkiego, np. łuk ADB też dwa punkta łączący.

Dowodzenie. Gdyby łuk ADB nie był najkrótszą odległością punktów A i B, to przypuśćmy że najkrótsza odległość tych dwóch punktów przechodziłaby przez punkt C leżący zewnątrz łuku ADB.

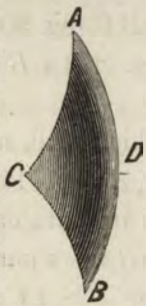


Fig. 100.

Przez punkt C i punkta A i B przeprowadzam łuki kół wielkich, to jest łuki AC i BC i na łuku ADB odcinam łuk $BD = BC$. Z przypuszczenia jest $AC + CB < ADB$; odjąwszy w téj nierówności z jednéj strony CB a z drugiéj BD, pozostać powinno $AC < AD$. Lecz w trójkącie ACB jest $AC + CB > ADB$ (nº 151), a że z wykreślenia $CB = BD$, zatém pozostaje $AC > AD$, co się sprzeciwia poprzedniemu, gdzie było $AC < AD$. Szukana więc najkrótsza odległość nie mogąc przechodzić przez jakikolwiek punkt zewnątrz łuku ADB leżący, musi iść po tym łuku, a ztąd *najkrótsza odległość dwóch punktów na powierzchni kuli i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

153. *Summa boków trójkąta kulistego jest mniejszą od okręgu koła wielkiego czyli od czterech kątów prostych.*

Założenie. Niech będzie trójkąt kulisty ABC (fig. 99), mam dowieść, że summa trzech jego boków $AB+BC+AC$ jest mniejszą od okręgu koła wielkiego, czyli od czterech kątów prostych.

Dowodzenie. Połączmy wierzchołki danego trójkąta to jest punkta A, B i C z punktem S jako ze środkiem kuli prostemi AS, BS i CS i wyobraźmy sobie przez te proste przeprowadzone płaszczyzny. Utworzony ztąd kąt trójścienny, będzie ograniczony kątami płaskiemi ASB, BSC i ASC, których miarami będą łuki AB, BC i AC, to jest boki danego trójkąta kulistego. A że summa kątów płaskich $ASB+BSC+ASC$ jest mniejszą od czterech kątów prostych (nº 58), więc też i summa ich miar to jest łuków $AB+BC+AC$ jest mniejszą od okręgu koła wielkiego czyli od czterech kątów prostych. *Summa więc boków trójkąta kulistego jest mniejszą i t. d.* co było do okazania.

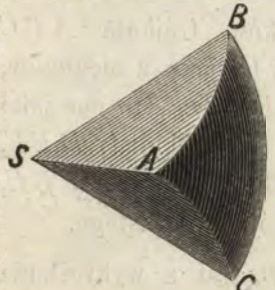


Fig. 99.

Uwaga. Zupełnie tak samo dowieśćby można, że summa boków wielokąta kulistego jest także mniejszą od okręgu koła wielkiego czyli od czterech kątów prostych. Boki albowiem wielokąta kulistego są miarami kątów płaskich ograniczających kąt bryłowy ostrosłupa kulistego, mającego za podstawę dany wielokąt kulisty. A że summa kątów płaskich ograniczających kąt bryłowy jest mniejszą od okręgu koła czyli od czterech kątów prostych (nº 58), więc i summa miar tych kątów czyli boków wielokąta kulistego jest mniejszą od okręgu koła wielkiego czyli od czterech kątów prostych.

Twierdzenie.

154. *Jeżeli na powierzchni kuli, z wierzchołków danego trójkąta kulistego jako z biegunów, zakreślimy łuki kół wielkich, to one utworzą nowy trójkąt kulisty, którego wierzchołki będą biegunami boków trójkąta danego.*

Założenie. Jeżeli z wierzchołków trójkąta ABC (fig. 101) to jest z punktów A, B i C, jako z biegunów, zakreślimy ćwiartkami, łuki EF, FD i DE, to one jako łuki kół wielkich (nº 140), ograniczą trójkąt kulisty DEF, którego wierzchołki D, E i F będą biegunami łuków BC, AC i AB, to jest boków danego trójkąta kulistego.

Dowodzenie. Ponieważ punkt B jest z wykreślenia biegunem łuku DF, jest więc odległość DB równa ćwiartce. Ponieważ znowu punkt C jest również z wykreślenia, biegunem łuku DE, odległość więc DC jest także ćwiartką, a ztąd punkt D będąc od punktów B i C czyli od całego łuku BC odległy o ćwiartkę, jest tegoż łuku biegunem (nº 140).

Fig. 101.

Tak samo dowieść można, że punkt E jest biegunem łuku AC, a punkt F biegunem łuku AB. Czyli, *jeżeli z wierzchołków danego trójkąta kulistego, jako z biegunów zakreślimy i t. d.* co było do okazania.

Trójkąty takie jak ABC i DEF, gdzie wierzchołki jednego są biegunami boków drugiego i wzajemnie, nazywają się *trójkątami biegunowemi*, albo jak się to poniżéj okaże *trójkątami spełniającemi.*

Twierdzenie.

155. *Każdy kąt w trójkącie kulistym ma za miarę pół okręgu koła wielkiego, mniéj bokiem odpowiednim trójkąta biegunowego.*

Założenie. Niech będą trójkąty biegunowe ABC i DEF (fig. 101), mam dowieść, że miarą kąta A, w trójkącie ABC, jest pół okręgu koła wielkiego, mniéj łukiem EF, to jest bokiem odpowiednim trójkąta biegunowego DEF; albo nawzajem, że miarą kąta D, w trójkącie DEF, jest pół okręgu koła wielkiego, mniéj łukiem BC, to jest bokiem odpowiednim trójkąta biegunowego ABC.

Dowodzenie. Przedłużam boki trójkąta ABC do przecięcia się z bokami trójkąta DEF w punktach G, H, J, K, L, M, i uważam:

Co do pierwszego. Punkt A jest biegunem łuku EF, zatém kąt A ma za miarę łuk GH (nº 148). Lecz punkt E jest biegunem łuku LH, więc łuk EH równy ćwiartce koła wielkiego (nº 140). Podobnież punkt F jest biegunem łuku GK, więc łuk GF jest ćwiartką koła wielkiego. A zatém:

1) $EH + GF =$ pół okręgowi koła wielkiego; lecz

$EG + GH = EH$

$HF + GH = GF$, zatém dodając do siebie te dwa ostatnie równania, będzie:

2) $EG + GH + HF + GH = EH + GF$.

Z figury się okazuje, że $EG + GH + HF = EF$; wstawiwszy tę wartość w równanie 2), będzie:

$EF + GH = EH + GF$. A że ze zrównania 1):

$EH + GF =$ pół okręgowi koła wielkiego, więc jest

$EF + GH =$ pół okręgowi koła wielkiego, a z tąd:

$GH =$ pół okr. koła wielk. $- EF$.

Fig. 101.

Kąt więc A, jako mający za miarę łuk GH, ma tém samém za miarę pół okręgu koła wielkiego mniéj łukiem EF, to jest bokiem odpowiednim trójkąta biegunowego DEF.

Co do drugiego. Punkt D jest biegunem łuku MJ, zatém kąt D ma za miarę łuk MJ (n° 148). Lecz łuki MC i BJ są ćwiartkami, bo punkt C jest biegunem łuku DME a punkt B biegunem łuku DJF. Jest zatém:

1) $MC + BJ =$ pół okr. koła wielk. Lecz:

$MB + BC = MC$

$CJ + BC = BJ$, dodawszy te dwa ostatnie równania,

będzie: $MB + BC + CJ + BC = MC + BJ$

że zaś $MB + BC + CJ = MJ$

zatém $MJ + BC = MC + BJ$.

Lecz jak się wyżéj 1) okazało:

$$MC + BJ = \text{pół okręgu koła wielkiego,}$$

jest więc $MJ + BC =$ pół okręgu koła wielkiego,

a ztąd: $MJ =$ pół okręgu koła wielkiego $- BC$.

Czyli że kąt D, jako mający za miarę łuk MJ, ma tém samém za miarę pół okręgu koła wielkiego mniéj łukiem BC, to jest bokiem odpowiednim trójkąta biegunowego ABC.

Dla kątów B, E, C i F służy zupełnie ten sam dowód. *Każdy więc kąt w trójkącie kulistym ma za miarę i t. d.* co było do okazania.

156. *Wniosek 1szy. Summa trzech kątów trójkąta kulistego, jest mniejszą od sześciu a większą od dwóch kątów prostych.* Jest mniejszą od sześciu kątów prostych, bo każdy kąt trójkąta kulistego waży mniéj niż pół okręgu koła, a więc wszystkie trzy kąty ważyć będą mniéj niż trzy półokręgi koła, to jest mniéj jak sześć kątów prostych. Jest zaś większą od dwóch kątów prostych, bo każdy kąt trójkąta kulistego ma za miarę pół okręgu koła, mniéj bokiem trójkąta biegunowego; wszystkie więc trzy kąty ważą trzy półokręgi koła, to jest sześć kątów prostych mniéj trzema bokami trójkąta biegunowego. A że trzy boki trójkąta biegunowego, jako zawsze trójkąta kulistego, ważą mniéj niż cztery kąty proste (nº 153), więc summa trzech kątów trójkąta kulistego waży sześć kątów prostych, mniéj ilość mniejszą od czterech kątów prostych, czyli waży więcéj niż dwa kąty proste.

Wartość zatém trzech kątów trójkąta kulistego nie jest ilością stałą, jak w trójkątach prostokreślnych; lecz zmienną zawartą w granicach od dwóch do sześciu kątów prostych i niemogącą równać się żadnéj z tych granic. Wypada ztąd, że trójkąty kuliste mogą być nie tylko *jedno-prostokątne* lub *jedno-rozwartokątne* jak trójkąty prostokreślne, ale mogą być także *dwu-prostokątne* lub *dwu-rozwartokątne*, lub wreszcie *trzy-prostokątne* lub *trzy-rozwartokątne*.

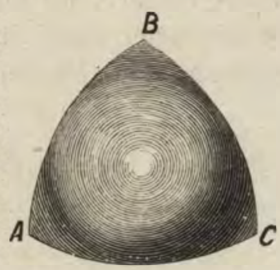


Fig. 102.

157. *Wniosek 2gi. W trójkącie dwu-prostokątnym ABC* (fig. 102), *przecięcie się dwóch boków AB i BC prostopadłych do boku trzeciego AC, czyli punkt B, jest biegunem tegoż boku AC* (nº 141), *a tém samém łuki AB i BC mają po ćwiartce.*

158. *Wniosek 3ci.* Poprowadziwszy dwa południki *ACBD* i *CEDF* (fig. 103) do siebie prostopadłe, tudzież koło wielkie *AEBF* prostopadłe do płaszczyzn tychże południków, to cała powierzchnia kuli podzieli się na ośm równych części, z których każda jak np. *ACE*, *CEB*, *BED* i t. d. jest trójkątem kulistym trzy-prostokątnym; zatém *trójkąt kulisty trzy-prostokątny jest ósmą częścią powierzchni kuli.*

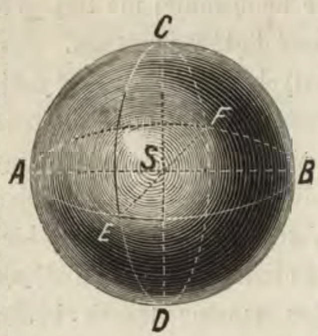


Fig. 103.

W trójkącie kulistym trzy-prostokątnym wierzchołek każdego kąta jest biegunem boku jemu przeciwległego, a tém samém każdy bok tego trójkąta jest ćwiartką.

159. *Wniosek 4ty.* W trójkącie kulistym ABC (fig. 101), jest (nº 155):

Kąt $A = 180^0 - EF$ czyli $A + EF = 180^0$
„ $B = 180^0 - DF$ „ $B + DF = 180^0$
„ $C = 180^0 - DE$ „ $C + DE = 180^0$

w trójkącie kulistym DEF jest podobnież:

Kąt $D = 180^0 - BC$ czyli $D + BC = 180^0$
„ $E = 180^0 - AC$ „ $E + AC = 180^0$
„ $F = 180^0 - AB$ „ $F + AB = 180^0$

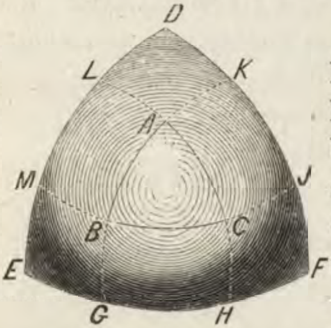


Fig. 101.

A ztąd widzimy, że w trójkątach biegunowych, kąty trójkąta kulistego z odpowiedniemi bokami trójkąta biegunowego spełniają się do 180^0 czyli do dwóch kątów prostych. Z téj to przyczyny trójkąty biegunowe nazywają się inaczéj *trójkątami spełniającemi.*

160. Ponieważ trójkąty kuliste na powierzchni jednéj kuli lub kul sobie równych nakreślone, dają się jeden na drugi przenosić, tak samo jak trójkąty prostokreślne; ponieważ daléj, boki trójkąta kulistego są miarami kątów płaskich kąta trójściennego mającego wierzchołek w środku kuli a za podstawę tenże trójkąt kulisty, nadto i kąty trójkąta kulistego są kątami odpowiedniemi dwójściennym tegoż kąta trójściennego: więc wszystkie twierdzenia o trójkątach prostokreślnych i o kątach trójściennych stosują się w zupełności do trójkątów kulistych. Trójkąty zatém kuliste położone na jednéj kuli lub na kulach sobie równych, są sobie równe:

a) *Kiedy mają po dwa boki równe i po kącie między niemi zawartym równym.*

b) *Kiedy mają po jednym boku i po dwa kąty przy nim leżące równe.*

c) *Kiedy mają po trzy boki odpowiednie równe i t. d.*

Następnie, że np. w trójkącie kulistym:

d) *Summa boków obejmujących jest większą od objętych.*

e) *Naprzeciwko kątów równych leżą boki równe i t. d.*

Wszystkie te i tym podobne twierdzenia dowodzić można albo tak samo jak w trójkątach prostokreślnych, albo też za pomocą kątów trójściennych mających wierzchołki w środku kuli lub kul sobie równych, a za podstawy trójkąty kuliste. Dowodzenia więc te opuszczają się jako proste powtarzanie rzeczy już znanych.

Twierdzenie.

161. *Dwa trójkąty kuliste na powierzchni jednéj kuli lub dwóch kul równych leżące a mające po trzy kąty odpowiednie równe, mają i boki odpowiednie równe, a tém samém są sobie równe.*

Założenie. Niech będą dwa trójkąty kuliste ABC i abc (fig. 104) na powierzchniach kul równych nakreślone, w których zakładam, że kąt $A=a$, kąt $B=b$ i kąt $C=c$; mam dowieść, że będzie bok $AB=ab$, bok $BC=bc$ i bok $AC=ac$, czyli, że trójkąt $ABC=abc$.

Dowodzenie. Kreślę trójkąty DEF i def spełniające się z danemi trójkątami ABC i abc.

Ponieważ trójkąty ABC i abc mają z założenia kąty odpowiednie równe, więc i spełnienia tych kątów czyli boki trójkątów spełniających DEF i def są sobie ró-

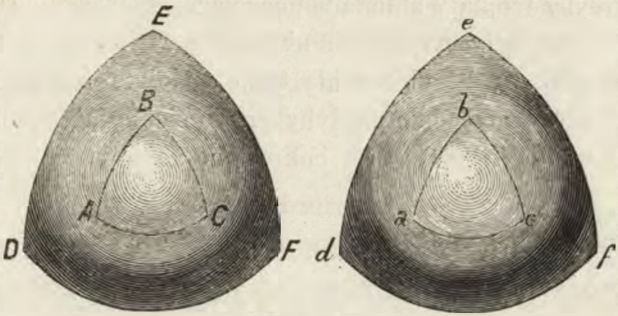


Fig. 104.

wne (nº 159). Jest więc $DE=de$, $EF=ef$ i $DF=df$, a tém samém trójkąty kuliste DEF i def mając po trzy boki równe są sobie równe (nº 160[c]), zatém mają i kąty odpowiednie równe. Jest więc kąt $D=d$, kąt $E=e$ i kąt $F=f$. Skoro trójkąty DEF i def mają po trzy kąty odpowiednie równe, to i spełnienia tych kątów czyli boki trójkątów ABC i abc są sobie równe. Trójkąty więc ABC i abc mając teraz po trzy boki odpowiednie równe są sobie równe (nº 160[c]). A zatém *dwa trójkąty kuliste na powierzchni jednéj kuli lub kul równych leżące i t.d.* co było do okazania.

Uwaga. Twierdzenie to nie miało miejsca w trójkątach prostokreślnych, w których za równością kątów idzie tylko proporcyonalność boków a nie koniecznie ich równość. Dostateczne jednak zastanowienie się pokaże nam, że mimo to w twierdzeniach tych zachodzi pewien związek, albowiem w tém jak i we wszystkich innych twierdzeniach, przypuszczamy trójkąty kuliste nakreślone na powierzchni jednéj kuli lub kul sobie równych. Trójkąty więc kuliste mające po trzy kąty równe, mają rzeczywiście boki odpowiednie proporcyonalne, które jako łuki kół wielkich mając się do siebie jak ich promienie, są sobie równe.

Gdyby trójkąty kuliste mające kąty odpowiednie równe, nakreślone były na kulach nierównéj wielkości, w takim razie trójkąty byłyby sobie tylko podobne a nie równe, i boki ich odpowiednie miałyby się do siebie jak promienie kul, na których te trójkąty nakreślone zostały.

Twierdzenie.

162. *Dwa trójkąty kuliste symetryczne są sobie równe co do powierzchni.*

Założenie. Niech będą dwa trójkąty kuliste i symetryczne ABC i abc (fig. 105), mam dowieść że są sobie równe co do powierzchni.

Dowodzenie. Wyobraźmy sobie, że przez trzy punkta A, B i C przeprowadzoną jest płaszczyzna, któréj przecięcie się z kulą będzie kołem małém. Niech punkt D będzie biegunem tego koła leżącym po téjże saméj stronie środka. Przez punkt D i punkta A, B i C przeprowadzam łuki kół wielkich to jest łuki DA, DB i DC; które, jako odległości okręgu koła od bieguna są sobie równe (nº 138), i jest $DA = DB = DC$.

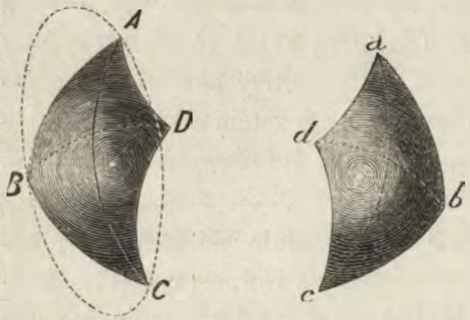


Fig. 105.

Przy łuku cb i przy punkcie b kreślę kąt $cbd = CBD$ i robię łuk $bd = BD$, nadto przez punkta d i c tudzież d i a przeprowadzam łuki kół wielkich, to jest łuki dc i da. Uważam następnie dwa trójkąty kuliste BCD i bcd, które mają bok $BC = bc$ z założenia (nº 147), bok $BD = bd$ i kąt

$CBD = cbd$ z wykreślenia, więc są sobie równe (nº 160 c). Nadto trójkąt BCD jest równoramienny, bo $DB = DC$, zatém i trójkąt bcd jest także równoramienny, i ma bok $db = dc$. Dwa więc te trójkąty, z przyczyny że są równoramienne, tak obrócone być mogą, że do siebie przystaną.

Dla podobnéj przyczyny, trójkąt $DBA = dba$, bo jest bok $DB = db$ z wykreślenia, bok $AB = ab$ z założenia i kąt $DBA = dba$. Cały bowiem kąt $ABC = abc$ z założenia (nº 147), że zaś $DBC = dbc$ z wykreślenia, więc i reszty są sobie równe, to jest kąt $DBA = dba$. Nadto trójkąty te są równoramienne, jest więc $db = da$, bo z wykreślenia $DB = DA$.

Nakoniec tak samo dowieśćby można, że trójkąty DAC i dac mając po dwa boki równe i po kącie między niemi zawartym równym, są sobie równe i że są równoramienne.

Z figury się okazuje, że czworokąt kulisty $ABCD = ABC + ACD$ albo równy $ABD + DBC$, z czego wypada, że:

$$ABC + ACD = ABD + DBC$$

a ztąd:

$$1)\quad ABC = ABD + DBC - ACD$$

Podobnież czworokąt kulisty $abcd = abc + acd$ albo równy $abd + dbc$, zkąd:

$$abc + acd = abd + dbc$$

z czego znowu:

$$2)\quad abc = abd + dbc - acd.$$

W równaniach 1) i 2) drugie strony są sobie równe, bo $ABD = abd$, $DBC = dbc$ i $ACD = acd$ z dowiedzenia, więc i pierwsze są także równe. Jest więc trójkąt $ABC = abc$. Zatém *dwa trójkąty kuliste symetryczne i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

163. *Powierzchnia kuli równa się iloczynowi z okręgu koła wielkiego przez oś, albo też powierzchni czterech kół wielkich.*

Założenie. Niech będzie kula S (fig. 106), mam dowieść, że jéj powierzchnia równa się iloczynowi z okręgu koła wielkiego przez oś CD, albo że jest równą powierzchni czterech kół wielkich.

Dowodzenie. Kulę uważamy jako utworzoną przez obrót półkola około swojéj średnicy (nº 131), a że półkole można uważać jako pół wielokąta foremnego o bardzo wielkiéj liczbie bardzo małych boków, więc kulę można uważać także jako utworzoną przez obrót połowy wielokąta foremnego o bardzo wielkiéj liczbie bardzo małych boków, z których każdy, w czasie obrotu utworzy powierzchnię boczną kloca ostrokręgowego.

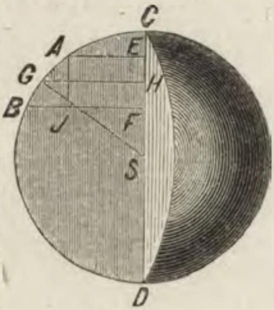


Fig. 106.

Tym sposobem powierzchnię kuli uważać można jako złożoną z samych powierzchni bocznych, nieskończenie płaskich, kloców ostrokręgowych. Chciawszy więc dojść powierzchni kuli, potrzeba dojść powierzchni bocznéj każdego z tych kloców, a ich summa wskaże powierzchnię danéj kuli.

Niech AB oznacza część półokręgu koła $CABD$, którą z bardzo małém uchybieniem uważać możemy za linię prostą i podzielmy ją w punkcie G na dwie równe części. Z punktów A, G i B prowadzę linie AE, GH i BF prostopadłe do średnicy CD. Linie więc AE i BF będą promieniami kół służących za podstawy jednemu z owych nieskończenie płaskich kloców ostrokrężnych, a linia GH będzie promieniem koła przechodzącego przez środek tworzącéj tego kloca ostrokrężnego równoodlegle od jego podstaw. Nadto z punktu A spuszczam linię AJ prostopadłą do BF, a więc i do GH, i uważam dwa trójkąty AJB i GHS, które mają bok AJ prostopadły do GH z wykreślenia, bo BJ prostopadły do HS, bo z wykreślenia BF prostopadłe do HS i nakoniec bok AB prostopadły do GS, bo GS jest to promień przechodzący z wykreślenia przez środek boku AB. Zatém dwa te trójkąty mając boki do siebie prostopadłe, są sobie podobne i mają boki odpowiednie proporcyonalne; będzie się więc miało: $AB : AJ$, a że $AJ = EF$, zatém:

$$AB : EF = GS : GH$$

Wiadomo, że okręgi kół mają się do siebie jak promienie, ma się przeto:

$$\text{Okr. } GS : \text{Okr. } GH = GS : GH$$

W tych dwóch proporcyach drugie stosunki są sobie równe, więc i pierwsze stanowić będą proporcyę, czyli będzie:

$$AB : EF = \text{Okr. } GS : \text{Okr. } GH, \quad \text{a ztąd:}$$

$$AB \times \text{Okr. } GH = \text{Okr. } GS \times EF$$

Lecz $AB \times$ Okr. GH oznacza powierzchnię boczną kloca ostrokrężnego nieskończenie płaskiego, którego tworzącą jest AB (nº 119). Zatém widzimy, że powierzchnia boczna jednego z owych nieskończenie płaskich kloców ostrokręgowych, składających powierzchnię kuli, równa się iloczynowi z Okr. GS, to jest z okręgu koła wielkiego, przez EF, to jest przez cząstkę osi kuli będącą wysokością tegoż kloca ostrokręgowego.

Podobnież dowiedlibyśmy o powierzchni każdego innego z takich kloców ostrokrężnych, że się równa iloczynowi z okręgu koła wielkiego przez odpowiednią cząstkę osi kuli stanowiącą jego wysokość. Żeby więc mieć powierzchnię danéj kuli, potrzeba te wszystkie iloczyny dodać do siebie, a zważywszy że one mają czynnik wspólny, dosyć będzie ten wspólny czynnik to jest okrąg koła wielkiego pomnożyć przez summę pozostałych czynników, to jest przez summę cząstek osi, składających całą oś kuli. A zatém *powierzchnia kuli równa się okręgowi koła wielkiego i t. d.* co było do okazania.

Nazwawszy promień kuli przez r, to okrąg koła wielkiego będzie równy $2\pi r$, a oś kuli równa $2r$, powierzchnia zaś kuli jako równa okręgowi koła wielkiego rozmnożonemu przez oś kuli, będzie równa $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$. A że πr^2 oznacza powierzchnię koła wielkiego, zatém powierzchnia kuli jako równa $4\pi r^2$, *równa się powierzchni czterech kół wielkich.*

Uwaga. Przez obrót około średnicy połowy wielokąta foremnego o bardzo wielkiéj liczbie bardzo małych boków, widzieliśmy utworzoną bryłę, którą z małém uchybieniem za kulę uważać można, a która jest ograniczoną powierzchniami bocznemi nieskończenie płaskich kloców ostrokrężnych; przy biegunach zaś dwoma powierzchniami ostrokrężnemi, jeżeli wielokąt tworzący jest o parzystéj liczbie boków.

Przy dochodzeniu powierzchni téj bryły, okazaliśmy czemu się równa powierzchnia boczna każdego ze składających ją kloców ostrokręgowych, nie wspominając nic o dwóch powierzchniach ostrokręgowych przy samych biegunach będących, a to dla tego, że powierzchnię ostrokrężną uważać można jako powierzchnię boczną kloca ostrokręgowego, którego jedna podstawa jest rzeczywistą a druga równą zeru.

I tak np. powierzchnia boczna kloca ostrokręgowego równa się iloczynowi z tworzącéj przez okrąg koła, przechodzący przez środek tejże tworzącéj, równoodlegle od podstaw (nº 119). Tak samo, biorąc powierzchnię ostrokrężną za powierzchnię kloca ostrokręgowego, będzie powierzchnia boczna ostrokręgu równa iloczynowi z tworzącéj przez okrąg koła równoodległego od podstawy i przechodzącego przez środek tejże tworzącéj; lecz okrąg ten równa się połowie okręgu podstawy, bo okręgi kół mają się do siebie jak promienie, zatém powierzchnia boczna ostrokręgu równa iloczynowi z tworzącéj przez połowę okręgu podstawy, czyli całemu okręgowi podstawy przez połowę tworzącéj, jak to już i powyżéj (nº 102) okazaliśmy. Dla téj to właśnie przyczyny, powierzchnię kuli uważaliśmy jako złożoną z samych powierzchni bocznych kloców ostrokręgowych.

164. *Wniosek 1szy.* Dla dojścia całéj powierzchni kuli dodawaliśmy powierzchnie boczne wszystkich kloców ostrokręgowych ją składających. Lecz gdybyśmy zamiast dodania wszystkich, dodali ich tylko pewną liczbę, otrzymalibyśmy część powierzchni kuli zwaną pasem kulistym. Ztąd *powierzchnia pasa kulistego równa się iloczynowi z okręgu koła wielkiego przez swoją wysokość.*

165. *Wniosek 2gi.* Ponieważ czaszka jest to pas kulisty tylko o jednéj podstawie, a więc *powierzchnia czaszki równa się także iloczynowi z okręgu koła wielkiego przez jéj wysokość.*

Twierdzenie.

166. *Taśma tak się ma do powierzchni kuli jak kąt téj taśmy do czterech kątów prostych, albo jak łuk mierzący kąt taśmy do okręgu koła wielkiego.*

Założenie. Niech będzie taśma $CAEBC$ (fig. 107), mam dowieść, że ona ma się do powierzchni kuli jak kąt CAE do czterech kątów prostych, albo jak łuk CE będący miarą kąta CAE do okręgu koła wielkiego CD.

Dowodzenie. Podzielmy okrąg koła wielkiego CD na pewną liczbę równych części, np. na 32 i przypuśćmy, że łuk CE ma takich części 7. Przez punkta podziału okręgu koła CD i bieguny A i B poprowadźmy płaszczyzny, to one przeciąwszy się wzajemnie podług osi AB przetną powierzchnię kuli po południkach i podzielą ją na 32 taśm, to jest na tyle, na ile równych części podzielony został okrąg koła CD.

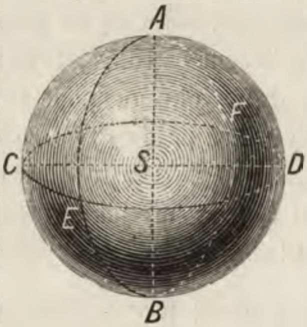


Fig. 107.

Ponieważ miarą kąta zawartego między dwoma południkami, czyli kąta taśmy jest łuk koła wielkiego między bokami taśmy zawarty (nº 148), a łuki te, z powodu podziału okręgu koła CD, są sobie równe, wszystkie więc kąty taśm a następnie i wszystkie 32 taśm są sobie równe. Taśma więc $CAEBC$ zawiera w sobie 7 takich taśm, jakich 32 składają powierzchnię kuli; ma się zatém:

1) $CAEBC$: Powierzchni kuli $=$ 7 : 32

i podobnież łuk CE ma takich części 7, jakich okrąg koła CD ma 32, zatém:

$$2)\quad CE : \text{Okręgu koła} = 7 : 32.$$

W proporcyi 1) i 2) drugie stosunki są równe, zatém i pierwsze złożą proporcyę, i będzie:

$$CAEBC : \text{Powierzchni kuli} = CE : \text{Okręgu koła } CD$$

A że łuk CE jest miarą kąta CAE (nº 148), a okrąg koła CD miarą czterech kątów prostych; ma się więc także:

$$CAEBC : \text{Powierzchni kuli} = CAE : 4^{ch} \text{ kątów prostych.}$$

Gdyby łuk CE nie był współmierny z okręgiem koła CD, to tak samo jak o kątach dwuściennych (nº 44) dowiedlibyśmy egzystencyi założonéj proporcyi. A więc *taśma tak się ma do powierzchni kuli i t. d.* co było do okazania.

167. *Wniosek 1szy. Powierzchnie taśm mają się do siebie jak ich kąty.*

Nazwawszy powierzchnię jednéj taśmy przez P a jéj kąt przez A, powierzchnię drugiéj taśmy przez P' a jéj kąt przez A', to będzie się miało:

$$P : \text{Powierzchni kuli} = A : 4^{ch} \text{ kątów prostych, i}$$

$$P' : \text{Powierzchni kuli} = A' : 4^{ch} \text{ kątów prostych.}$$

W tych dwóch proporcyach następniki jednéj proporcyi są równe następnikom drugiéj, więc poprzedniki złożą proporcyę, i będzie:

$$P : P' = A : A'.$$

168. *Wniosek 2gi.* Wziąwszy za jedność do mierzenia powierzchni wielokątów kulistych, trójkąt kulisty trzyprostokątny, który jest (nº 158) $\frac{1}{8}$ częścią powierzchni kuli, powierzchnia ta wyraża się przez 8.

Oznaczywszy teraz powierzchnię taśmy przez P, a jéj kąt przez A, będzie podług poprzedzającego (nº 166):

$$P : 8 = A : 4$$

czyli:

$$P : 2 = A : 1$$

zkąd:

$$P = 2A$$

to jest, *powierzchnia taśmy równa się dwa razy wziętemu jéj kątowi.*

Uwaga. Używając tego wyrażenia, pamiętać należy, że w niém są dwie jednostki porównania, to jest trójkąt trzyprostokątny czyli $\frac{1}{8}$ część powierzchni kuli i kąt prosty czyli 90°. Dla tego wyrażenie to wysłowićby się jeszcze dało w ten sposób: *Powierzchnia taśmy zawiera w sobie tyle trójkątów kulistych trzyprostokątnych lub części jednego z nich, ile dwa razy wzięty kąt taśmy zawiera w sobie kątów prostych lub części kąta prostego.*

Wysłowienie to da się wyrazić przez proporcyę:

$$P : 1 = 2A : 90^\circ$$

Tak np., gdyby kąt taśmy był równy 60°, toby się miało:

$$P : 1 = 2 \times 60 : 90$$

zkąd:

$$P = \frac{2 \times 60}{90} = \frac{120}{90} = \frac{4}{3}$$ trójkąta kulistego trzyprostokątnego wziętego za jedność.

Ponieważ trójkąt kulisty trzyprostokątny jest $\frac{1}{8}$ częścią powierzchni kuli (nº 158), a okazało się że $P = \frac{4}{3}$ tego trójkąta, to toż P względem całéj powierzchni kuli będzie ośm razy mniejsze, czyli będzie:

$$P = \frac{4}{3 \times 8} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \text{ całéj powierzchni kuli.}$$

Do tego samego wypadku przyjść można na mocy powyższego twierdzenia (nº 166), porównywając taśmę wprost z powierzchnią kuli, która się równa $4\pi r^2$ (nº 163). Ma się albowiem:

$$P : 4\pi r^2 = 60 : 360$$

czyli:

$$P : 4\pi r^2 = 1 : 6$$

zkąd:

$$P = \frac{4\pi r^2}{6} = \frac{2}{3}\pi r^2$$

Lecz kiedy $4\pi r^2$ oznacza całą powierzchnię kuli, to πr^2 oznacza $\frac{1}{4}$ część tejże powierzchni, a że z ostatniego równania $P = \frac{2}{3}\pi r^2$, więc jest równe $\frac{2}{3}$ z $\frac{1}{4}$ czyli $\frac{2}{12}$ albo $\frac{1}{6}$ powierzchni kuli.

169. *Wniosek 3ci.* Poprowadziwszy na powierzchni kuli dwa południki, których płaszczyzny są do siebie prostopadłe, to na powierzchni kuli utworzą się taśmy mające kąty proste:

Oznaczywszy powierzchnię takiéj taśmy przez P, będzie:

$$P : 4\pi r^2 = 90 : 360$$

albo:

$$P : 4\pi r^2 = 1 : 4$$

zkąd:

$$P = \frac{4\pi r^2}{4} = \pi r^2$$

to jest, że *taśma prostokątna równa się powierzchni koła wielkiego i jest $\frac{1}{4}$ częścią całéj powierzchni kuli.*

170. *Wniosek* 4^{ty}. Porównywając taśmę prostokątną z trójkątem kulistym trzyprostokątnym wziętym za jedność, będzie podług wniosku 2^{go} (nº 168):

$$P : 1 = 2A : 90$$

albo:

$$P : 1 = 2 \times 90 : 90$$

albo nakoniec:

$$P : 1 = 2 : 1$$

zkąd:

$$P = 2$$

czyli, że *taśma prostokątna ma powierzchnią równą dwóm trójkątom trzyprostokątnym wziętym za jedność.*

Rzeczywiście, jeżelibyśmy kulę przeciętą dwoma południkami do siebie prostopadłemi, przecięli jeszcze kołem wielkiém prostopadłém do wspólnéj osi południków, wówczas, jak wiadomo (nº 158), cała powierzchnia kuli podzieli się na ośm trójkątów trzyprostokątnych, z których dwa którekolwiek składać będą taśmę prostokątną.

171. *Wniosek 5^ty.* Oznaczywszy powierzchnię taśmy prostokątnéj przez P', jéj kąt przez A' i biorąc taśmę prostokątną za jedność do mierzenia powierzchni kulistych, a kąt prosty, jak zwykle, za jedność do mierzenia kątów, będziemy mieli (n° 167):

$$P : P' = A : A'$$

albo:

$$P : 1 = A : 1$$

zkąd:

$$P = A$$

czyli, że *powierzchnia taśmy równa się jéj kątowi, jeżeli taśma prostokątna uważana jest za jedność.*

W saméj rzeczy okazaliśmy (n° 168), że kiedy trójkąt kulisty trzyprostokątny wzięty jest za jednośc, to $P = 2A$; a że taśma prostokątna jest dwa razy większą od trójkąta trzyprostokątnego (n° 170), więc stosunek do jedności dwa razy większéj, jest dwa razy mniejszy, i dla tego P nie jest już równe $2A$, jak w porównaniu z trójkątem trzyprostokątnym, lecz tylko równe A.

Twierdzenie.

172. *Powierzchnia jakiegokolwiek trójkąta kulistego równa się przepełnieniu kulistemu.*

Założenie. Niech będzie trójkąt kulisty ABC (fig. 108), potrzeba dowieść, że jego powierzchnia równa się nadmiarowi jego trzech kątów A, B i C nad dwa kąty proste.

Dowodzenie. Przez punkta A i B, A i C oraz C i B przeprowadzam koła wielkie (n° 138) $ABabA$, $ACacA$ i $CBcbC$, czyli dopełniam okręgi kół wielkich, których łuki AB, AC i CB stanowią boki danego trójkąta kulistego ABC i uważam że $ABa = Bab$ jako półokręgi jednego koła; odjąwszy więc od obydwóch wspólny łuk Ba, pozostanie $AB = ab$.

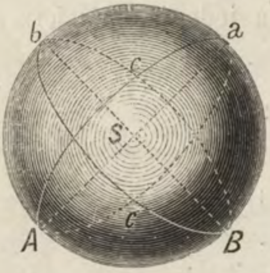


Fig. 108.

Podobnież jest $ACa = Cac$ jako półokręgi jednego koła, a odjąwszy od obydwóch wspólny łuk Ca, pozostanie $AC = ac$. Tak samo okazać można, że jest $CB = cb$. Więc dwa trójkąty symetryczne ABC i abc mające po trzy boki odpowiednie równe, są sobie równe (nº 162).

Koło $ABabA$ podzieliło kulę S na dwie półkule: wierzchnią i spodnią.

Powierzchnia półkuli wierzchniéj składa się z taśmy $ABaCA$, z trójkąta kulistego aCb i z trójkąta kulistego AbC, jest więc:

1) Pow. półkuli wierz. = taśmie $ABaCA + aCb + AbC$

Lecz trójkąt kulisty aCb równy jest taśmie $CbcaC$, któréj część bca, jak to figura pokazuje, leży na półkuli spodniéj, mniéj trójkątem kulistym abc; a że $abc = ABC$ z dowiedzenia, więc jest:

2) aCb = taśmie $CbcaC - ABC$

Tak samo trójkąt kulisty

3) AbC = taśmie $AbCBA - ABC$

Wstawiając w równanie 1) za aCb i za AbC ich wartości 2) i 3), będzie:

4) Powierzchnia półkuli wierzchniéj =
= taśmie $ABaCA$ + taś. $CbcaC - ABC$ + taś. $AbCBA - ABC$

Lecz wiadomo, że uważając trójkąt kulisty trzyprostokątny za jedność do mierzenia powierzchni kulistych, powierzchnia kuli wyraża się przez 8 (n° 158), jest zatém:

5) Powierzchnia pół kuli $= 4$
6) Powierzchnia taśmy $ABaCA = 2A$ (n° 168)
7) „ „ $CbcaC = 2C$ „
8) „ „ $AbCBA = 2B$ „

W równaniu więc 4) położywszy zamiast powierzchni pół kuli, powierzchni taśmy $ABaCA$, powierzchni taśmy $CbcaC$ i powierzchni taśmy $AbCBA$, ich wartości 5), 6), 7) i 8), to będzie:

$$4 = 2A + 2C + 2B - 2ABC$$

Przenosząc w tém ostatniém równaniu $(-2ABC)$ na pierwszą, a 4 na drugą stronę, będzie:

$$2ABC = 2A + 2B + 2C - 4$$

czyli:

$$ABC = A + B + C - 2$$

Oznaczywszy powierzchnię jakiegokolwiek trójkąta kulistego, np. trójkąta ABC przez T, otrzymamy:

$$T = A + B + C - 2.$$

W tém ostatniém równaniu A, B i C oznaczają w ogólności trzy kąty danego trójkąta kulistego, a 2, są to dwa kąty proste czyli 180°.

Lecz $A+B+C > 180^0$ (n° 156), a więc $A+B+C - 180^0$ oznacza przepełnienie kuliste.

Zatém *powierzchnia jakiegokolwiek trójkąta kulistego ma za miarę i t. d.* co było do okazania.

173. *Wniosek.* Oznaczywszy powierzchnie dwóch trójkątów kulistych przez T i t, a ich kąty przez A, B, C i a, b, c, będzie:

$$T = A + B + C - 180^0$$
$$t = a + b + c - 180^0$$

a ztąd:

$$T : t = A + B + C - 180^0 : a + b + c - 180^0$$

Przypuściwszy że t jest trójkąt kulisty trzy-prostokątny wzięty za jedność, będzie:

$$T : 1 = A + B + C - 180^0 : 90^0 + 90^0 + 90^0 - 180^0$$

czyli:

$$T : 1 = A + B + C - 180^0 : 90^0$$

Co pokazuje, że *trójkąt kulisty jakikolwiek ma się do trójkąta kulistego trzyprostokątnego, wziętego za jedność, jak przepełnienie kuliste do kąta prostego czyli do 90⁰;* albo, że *trójkąt kulisty jakikolwiek ma w sobie tyle trójkątów kulistych trzyprostokątnych wziętych za jedność, lub tyle części takiego trójkąta, ile przepełnienie kuliste ma w sobie kątów prostych lub części kąta prostego.*

Z ostatniéj proporcyi wypada:

$$T = \frac{A + B + C - 180^0}{90^0}$$

Weźmy dla objaśnienia, że:

Kąt $A = 67^0,\ 9',\ 14''$
„ $B = 70^0,\ 5',\ 24''$
„ $C = 55^0,\ 4',\ 16''$

Zatém:

$$A + B + C = 67^0, 9', 14'' + 70^0, 5', 24'' + 55^0, 4', 16'' = 192^0, 18', 54''$$

Więc:

$$A + B + C - 180^0 = 192^0, 18', 54'' - 180^0 = 12^0, 18', 54''$$

Te $12^0, 18', 54''$, czyli przepełnienie kuliste, wyrazić mogę albo w stopniach a wtenczas i kąt prosty wyrazi się w stopniach, albo w minutach a wtenczas i kąt prosty wyrazić potrzeba w minutach, albo nakoniec w sekundach, a wtenczas i kąt prosty również w sekundach wyrażony być winien. I tak $12^0, 18', 54'' = 12{,}315$ stopni, albo równe 738,9 minut, albo nakoniec równe 44334 sekund, a ztąd powierzchnia trójkąta kulistego, czyli:

$$T = \frac{12{,}315}{90} = \frac{738{,}9}{90 \times 60} = \frac{44334}{90 \times 60 \times 60} = \frac{277}{2000} \text{ części}$$

trójkąta kulistego trzy-prostokątnego, a tém samém:

$$T = \frac{277}{2000 \times 8} = \frac{277}{16000} \text{ całéj powierzchni kuli (n° 158),}$$

a że powierzchnia kuli równa $4\pi r^2$ (n° 163), więc:

$$T = \frac{277 \times 4\pi r^2}{16000} = \frac{277\,\pi r^2}{4000}$$

Przypuszczając np. $r = 2$ cale, będzie:

$$T = \frac{277 \times 3{,}14 \times 4}{4000} = \frac{277 \times 3{,}14}{1000} =$$

$$= \frac{869{,}78}{1000} = 0{,}86978 \text{ cali kwadr.}$$

Twierdzenie.

174. *Powierzchnia wielokąta kulistego równa się nadmiarowi summy kątów tegoż wielokąta nad dwa kąty proste wzięte tyle razy, ile wielokąt ma boków mniéj dwa, czyli równa przepełnieniu kulistemu.*

Założenie. Niech będzie pięciokąt kulisty $ABCDE$ (fig. 109), potrzeba dowieść, że jego powierzchnia równa się nadmiarowi summy kątów A, B, C, D i E nad dwa kąty proste wzięte tyle razy, ile wielokąt dany ma boków, mniéj dwa, to jest wzięte trzy razy; czyli mam dowieść, że powierzchnia pięciokąta kulistego $ABCDE = A + B + C + D + E - 3 \times 2$ kąty proste, czyli mniéj 3×180^0.

Dowodzenie. Z punktu A prowadzę w wielokącie danym tyle łuków wielkich przekątnych ile się da, to jest dwa AC i AD. Łuki te podzielą pięciokąt dany na trzy trójkąty kuliste ABC, ACD i ADE. Chciawszy więc obliczyć powierzchnię danego pięciokąta kulistego, potrzeba naprzód obliczyć powierzchnię każdego ze składających go trójkątów i te powierzchnie dodać do siebie.

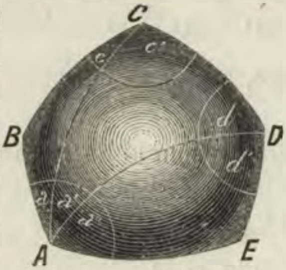


Fig. 109.

Pow. trójk. kulis. $ABC = a + B + c - 180^0$ (nº 172)

„ „ „ $ACD = a' + c' + d - 180^0$ „

„ „ „ $ADE = a'' + d' + E - 180^0$ „

A zatém $ABC + ACD + ADE$ czyli powierzchnia

$$ABCDE = a + B + c + a' + c' + d + a'' + d' + E - 180^0 - 180^0 - 180^0$$

A że:

$$a + a' + a'' = A$$
$$c + c' = C$$
$$d + d' = D$$
$$-180^0 - 180^0 - 180^0 = -3 \times 180^0$$

zatém:

Powierzch. $ABCDE = A + B + C + D + E - 3 \times 180^0$

To jest, że *powierzchnia wielokąta kulistego równa się i t. d.* co było do okazania.

175. *Wniosek.* Oznaczywszy powierzchnię jakiegokolwiek wielokąta, np. pięciokąta kulistego przez W, jego zaś kąty przez A, B, C, D i E, i oznaczywszy również powierzchnię trójkąta kulistego trzyprostokątnego przez t, a jego kąty przez a, b i c, będzie:

$$W = A + B + C + D + E - 3 \times 180^0$$

$$t = a + b + c - 180^0$$

a więc:

$$W : t = A+B+C+D+E-3 \times 180^0 : 90^0 + 90^0 + 90^0 - 180^0$$

czyli:

$$W : 1 = A+B+C+D+E - 3 \times 180^0 : 90^0$$

To jest, że *wielokąt kulisty tak się ma do trójkąta kulistego trzyprostokątnego wziętego za jedność, jak nadmiar summy wszystkich kątów tegoż wielokąta nad dwa kąty proste wzięte tyle razy, ile wielokąt ma boków, mniéj dwa, do kąta prostego to jest do 90°*, czyli, co na jedno wychodzi, że *powierzchnia wielokąta kulistego zawiera w sobie tyle trójkątów trzyprostokątnych wziętych za jedność, lub części tego trójkąta, ile nadmiar summy wszystkich kątów wielokąta nad dwa kąty proste wzięte tyle razy, ile wielokąt ma boków mniéj dwa, zawiera w sobie kątów prostych lub części kąta prostego.*

Z proporcyi ostatniéj wypada:

$$W = \frac{A + B + C + D + E - 3 \times 180^0}{90^0}$$

Dla przykładu weźmy:

$$A = 140^0\ 12'\ 16''$$
$$B = 117^0\ 34'\ —$$
$$C = 143^0\ 18'\ 54''$$
$$D = 156^0\ 30'\ 28''$$
$$E = 132^0\ —\ 46''$$

Zatém: $A + B + C + D + E =$

$$140^0\,12'\,16'' + 117^0\,34' + 143^0\,18'\,54'' + 156^0\,30'\,28'' + 132^0\,46''$$
$$= 689^0\ 36'\ 24''$$

Więc $A + B + C + D + E - 3 \times 180^0 =$

$$689^0\ 36'\ 24'' - 540 = 149^0\ 36'\ 24'' = 538584''$$

a tém samém:

$$W = \frac{538584}{90 \times 60 \times 60} = \frac{22441}{90 \times 30 \times 5} = \frac{22441}{13500} = 1\tfrac{8941}{13500}$$

trójkąta kulistego wziętego za jedność.

Odnosząc zaś powierzchnię danego wielokąta czyli W do powierzchni całéj kuli, która jest ośm razy większą od powierzchni trójkąta kulistego trzyprostokątnego (n° 158), będzie:

$$W = \frac{22441}{13500 \times 8} = \frac{22441}{108000} \text{ części całéj powierzchni kuli.}$$

A że powierzchnia kuli równa się $4\pi r^2$ (n° 163), więc jest:

$$W = \frac{22441 \times 4\pi r^2}{108000} = \frac{22441\,\pi r^2}{27000.}$$

Przypuszczając wreszcie że promień kuli czyli r, równy np. 3 cale, będzie:

$$W = \frac{22441 \times 3{,}14 \times 9}{27000} = \frac{22441 \times 3{,}14}{3000} = \frac{70464{,}74}{3000} =$$
$$= 23{,}48824 \text{ cali kwadratowych.}$$

Uwaga 1sza. Z rozwiązania tak tego, jak w poprzedzającém twierdzeniu (nº 173) przykładu, widzimy, że dla otrzymania powierzchni czy trójkąta czy wielokąta kulistego, trzeba przepełnienie kuliste, trójkąta czy wielokąta kulistego, dzielić przez kąt prosty wyrażony w stopniach, minutach lub sekundach, a to stosownie do tego w czém jest wyrażone przepełnienie kuliste.

Uwaga 2ga. Twierdzenia na powierzchnię taśmy, trójkąta i wielokąta kulistego, z powodu krótkości przyjętego powszechnie wyrażenia, zdają się być na pozór z prawdą sprzeczne, bo niepodobna wyobrazić sobie, aby jakabądź powierzchnia równała się miarze kątowéj. Lecz niepodobieństwo znika natychmiast, jak tylko weźmiemy na uwagę, co się już tyle razy wspomniało, że przy oznaczaniu powierzchni kulistych zachodzą dwie jedności, to jest trójkąt kulisty trzyprostokątny i kąt prosty, a cośmy po szczególe (nº 168, 173 i 175) objaśnili.

Twierdzenie.

176. *Bryłowatość kuli równa iloczynowi z jéj powierzchni przez trzecią część promienia.*

Dowodzenie. Jeżelibyśmy na powierzchni kuli nakreślili sieć trójkątów kulistych, tak iżby one zajęły całą powierzchnię kuli i były tak małe, że mogłyby być, bez widocznego uchybienia uważane za trójkąty prostokreślne, i jeżeli wyobrazilibyśmy sobie wierzchołki tych trójkątów połączone ze środkiem kuli liniami prostemi; wówczas cała kula podzieliłaby się na tyle ostrosłupków trójkątnych mających wierzchołki w środku kuli, ile trójkącików pomieściłoby się na powierzchni kuli. Każdy taki ostrosłupek miałby za podstawę jeden z trójkącików składających powierzchnię kuli, a za wysokość promień kuli. Chciawszy więc obliczyć bryłowatość kuli, potrzeba obliczyć bryłowatość każdego z tych ostrosłupków składających kulę i te bryłowatości dodać do siebie.

Bryłowatość jednego z takich ostrosłupków równać się będzie $\frac{1}{3}$ wysokości czyli $\frac{1}{3}$ promienia kuli rozmnożonéj przez podstawę (nº 108).

Bryłowatość drugiego równać się także będzie $\frac{1}{3}$ promienia rozmnożonéj przez podstawę drugiego; trzeciego $\frac{1}{3}$ promienia przez podstawę trzeciego i t. d.

Dodawszy teraz wszystkie ostrosłupki do siebie, otrzymamy bryłowatość kuli, a dodawszy iloczyny cząstkowe wyrażające bryłowatości ostrosłupków, mieć będziem we wszystkich wspólny czynnik $\frac{1}{3}$ promienia, a summa innych czynników stanowić będzie powierzchnię kuli. A zatém *bryłowatość kuli równa się iloczynowi z jéj powierzchni i t. d.* co było do okazania.

Wiadomo, że powierzchnia kuli któréj promień jest r, równa się $4\pi r^2$ (nº 163), chciawszy zatém mieć bryłowatość kuli, potrzeba $4\pi r^2$ pomnożyć przez $\frac{r}{3}$ co daje $\frac{4}{3}\pi r^3$. Jest więc *bryłowatość kuli równa iloczynowi z jéj powierzchni przez trzecią część promienia, albo równa* $\frac{4}{3}\pi r^3$.

177. *Wniosek 1szy.* W podobny sposób okazać można, że:

a) *Bryłowatość ostrosłupa kulistego równa się iloczynowi z trzeciéj części promienia kuli przez powierzchnię trójkąta lub wielokąta kulistego służącego mu za podstawę.*

b) *Bryłowatość ostrokręgu kulistego równa się iloczynowi z trzeciéj części promienia kuli przez powierzchnię czaszki służącéj mu za podstawę.*

c) *Bryłowatość klina kulistego równa się iloczynowi z trzeciéj części promienia kuli przez taśmę służącą mu za podstawę.*

178. *Wniosek 2gi.* Oznaczywszy bryłowatość jednego ostrosłupa kulistego przez O, jego podstawę przez P, bryłowatość drugiego ostrosłupa przez o, jego podstawę przez p, a promień kuli, któréj częściami są te ostrosłupy przez r, będzie podług powyższego (nº 177a).

$$O = \tfrac{1}{3}\, r \times P \qquad\qquad o = \tfrac{1}{3}\, r \times p$$

a ztąd:

$$O : o = \tfrac{1}{3}\, r \times P : \tfrac{1}{3}\, r \times p$$

podzieliwszy wyrazy drugiego stosunku przez $\frac{1}{3}\, r$, będzie:

$$O : o = P : p.$$

To jest: że *w jednéj kuli lub w kulach sobie równych, ostrosłupy kuliste mają się do siebie jak trójkąty lub wielokąty kuliste służące im za podstawy.*

Jeżeli więc podstawy dwóch ostrosłupów kulistych są sobie równe, to i ostrosłupy są sobie równe, a tém samém i kąty bryłowe przy ich wierzchołkach położone są sobie równe; i nawzajem, jeżeli kąty bryłowe położone przy wierzchołkach ostrosłupów kulistych są sobie równe, to i ostrosłupy i podstawy tych ostrosłupów są także sobie równe. A z tego wypada, że na ile części równych podzieli się kąt bryłowy będący przy wierzchołku ostrosłupa kulistego, na tyle też równych części podzieli się i podstawa tegoż ostrosłupa; z czego znów wypada, że *kąty bryłowe przy wierzchołkach ostrosłupów kulistych, jednéj kuli lub kul sobie równych, mają się do siebie jak podstawy tychże ostrosłupów.*

179. *Wniosek 3ci.* Ostrosłup kulisty mający za podstawę trójkąt kulisty trzyprostokątny, jest otoczony trzema płaszczyznami wzajemnie do siebie prostopadłemi. Kąt trójścienny, przy wierzchołku tego ostrosłupa położony, który *kątem bryłowym prostym* nazwać można, użytym być może za miarę czyli za jedność do mierzenia wszelkich innych kątów bryłowych. I tak oznaczywszy kąt bryłowy jakiegokolwiek ostrosłupa kulistego, przy jego wierzchołku położony przez K, powierzchnię wielokąta służącego mu za podstawę przez P; oznaczywszy również kąt bryłowy prosty przez S, a powierzchnię trójkąta kulistego trzyprostokątnego przez T, będzie:

$$K : S = P : T$$

biorąc zaś S jako jedność do mierzenia kątów bryłowych, a T jako jedność do mierzenia powierzchni kulistych, będzie:

$$K : 1 = P : 1$$

zkąd:

$$K = P$$

Czyli, że *kąt bryłowy przy wierzchołku ostrosłupa kulistego położony, równa się powierzchni wielokąta będącego podstawą tegoż ostrosłupa*, to jest: *jaką częścią trójkąta trzy-prostokątnego jest wielokąt kulisty będący podstawą ostrosłupa kulistego, taką częścią kąta bryłowego prostego jest kąt bryłowy będący przy wierzchołku tegoż ostrosłupa kulistego.*

Jeżeli więc przypuścimy, że $P = \frac{2}{3}$, to jest, że równe $\frac{2}{3}$ trójkąta kulistego trzyprostokątnego, to i K jest $\frac{2}{3}$ kąta bryłowego prostego.

180. *Wniosek 4ty.* Tak samo jak o ostrosłupach kulistych okazać można, że *w jednéj kuli lub w kulach sobie równych, ostrokręgi kuliste mają się do siebie jak czaszki służące im za podstawy.*

Oznaczywszy jeden ostrokrąg kulisty przez O, czaszkę służącą mu za podstawę przez C, jéj wysokość przez W; drugi ostrokrąg przez o, czaszkę służącą mu za podstawę przez c, jéj wysokość przez w, a promień kuli przez r, będzie (nº 165):

$$C = 2\pi r \times W \qquad\qquad c = 2\pi r \times w$$

a ztąd:

$$O : o = 2\pi r \times W : 2\pi r \times w$$

Podzieliwszy w téj ostatniéj proporcyi, wyrazy drugiego stosunku przez $2\pi r$, będzie:

$$O : o = W : w.$$

To jest, że *ostrokręgi kuliste mają się jeszcze do siebie, jak wysokości czaszek służących im za podstawy.*

181. *Wniosek 5ty. W jednéj kuli lub w kulach sobie równych, kliny kuliste mają się do siebie jak taśmy służące im za podstawy.*

182. *Wniosek 6ty. Klin kulisty ma się do swéj kuli, jak taśma będąca podstawą klina kulistego do powierzchni kuli.* A że taśma ma się do powierzchni kuli, jak kąt taśmy do czterech kątów prostych (nº 166), więc *ma się klin kulisty do swéj kuli, jak kąt taśmy służącéj za podstawę temu klinowi do czterech kątów prostych.*

Twierdzenie.

183. *Jeżeli prostą długości ograniczonéj, weźmiemy za tworzącą i obracać ją będziemy około innéj prostéj na tejże saméj płaszczyznie leżącéj, wziętéj za oś, to powierzchnia przez obrot téj tworzącéj powstała, równać się będzie iloczynowi z okręgu koła mającego za promień prostopadłą do tworzącéj ze środka jéj wyprowadzoną a kończącą się na osi,* *przez część tejże osi zawartą między prostopadłemi z końców tworzącéj na oś spuszczonemi.*

Tu mogą być trzy przypadki, to jest:

1° *Albo tworząca może być równoodległą od osi.*

2° *Albo tworząca może się jednym końcem dotykać osi.*

3° *Albo wreszcie tworząca może mieć względem osi położenie jakiekolwiek.*

Założenie. Co do 1go. Niech będzie (fig. 110) prosta AB tworząca, obracająca się około osi PQ i od niéj równoodległa; potrzeba dowieść, że powierzchnia przez obrot prostéj AB powstała, równać się będzie iloczynowi z okręgu koła mającego za promień linię CD prostopadłą do prostéj AB i ze środka jéj wyprowadzoną, a kończącą się na osi PQ, przez część osi GH zawartą pomiędzy prostopadłemi AG i BH z końców tworzącéj AB na oś PQ spuszczonemi.

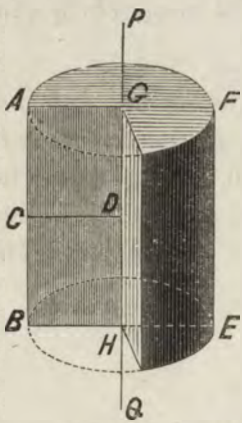


Fig. 110.

Dowodzenie. Ponieważ tworząca AB jest z założenia równoodległą od osi PQ, to ona zakreśli powierzchnię boczną walca prostego $ABEF$, którego wysokością jest linia GH, a podstawami koła AF i BE mające za promienie linie AG i BH. Powierzchnia ta równa się okręgowi koła BH rozmnożonemu przez GH (nº 78), a że $BH = CD$, zatém powierzchnia AB=Okr. koła $CD \times GH$.

Założenie. Co do 2go. Niech tworząca AB (fig. 111), dotyka się jednym końcem swoim np. A osi PQ, to zawsze dowieść potrzeba, że powierzchnia utworzona przez obrot prostéj AB około osi PQ równa się okręgowi koła mającemu za promień prostę CD prostopadłą do tworzącéj AB i z jéj środka C wyprowadzoną aż do spotkania się z osią PQ w punkcie D, rozmnożonemu przez część osi AF zawartą między punktem A a prostopadłą BF z końca tworzącéj AB, to jest z punktu B na oś PQ spuszczoną.

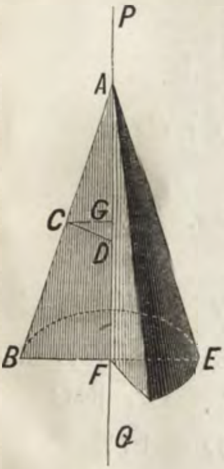


Fig. 111.

Dowodzenie. Ponieważ tworząca AB dotyka się jednym końcem, to jest punktem A osi PQ, to ona w czasie obrotu zakreśli powierzchnię boczną ostrokręgu prostego BAE, którego wysokością jest AF, a podstawą koło BE mające za promień BF. Powierzchnia więc AB, jako powierzchnia boczna ostrokręgu prostego równa jest $\frac{AB}{2} \times$ Okr. BF (n° 102) albo równa $AB \times \frac{\text{Okr. } BF}{2.}$

Lecz poprowadziwszy CG równoodległą od BF, z podobieństwa trójkątów ACG i ABF wypada:

$$AC : AB = CG : BF$$

a że AC jest z wykreślenia połową AB, więc i CG jest połową BF, zatém Okrąg $CG = \frac{\text{Okr. } BF}{2}$, bo okręgi kół mają się do siebie jak promienie.

Poprzednio było:

$$\text{Powierzchnia } AB = AB \times \frac{\text{Okr. } BF}{2}$$

jest więc teraz:

1) Powierzchnia $AB = AB \times$ Okr. CG.

Dwa trójkąty ABF i DCG mają boki odpowiednie do siebie prostopadłe, to jest bok AB do CD, bok AF do CG i bok BF do GD, są więc sobie podobne, a zatém ma się:

$$AB : AF = CD : CG$$

lecz:

$$CD : CG = \text{Okr.}\ CD : \text{Okr.}\ CG$$

więc:

$$AB : AF = \text{Okr.}\ CD : \text{Okr.}\ CG$$

zkąd:

$$AB \times \text{Okr.}\ CG = \text{Okr.}\ CD \times AF$$

W równanie 1) wstawiwszy za $AB \times$ Okr. CD dopiero co wynalezioną wartość Okr. $CD \times AF$, jest:

$$\text{Powierzchnia}\ AB = \text{Okr.}\ CD \times AF.$$

Założenie. Co do 3go. Niech tworząca AB (fig. 112), ma jakiekolwiek położenie względem osi PQ, trzeba również dowieść, że powierzchnia utworzona przez obrot prostéj AB równa się okręgowi koła mającemu za promień prostą CD prostopadłą do tworzącéj AB i z jéj środka C wyprowadzoną aż do spotkania się z osią PQ w punkcie D, rozmnożonemu przez część osi EF zawartą między prostopadłemi AE i BF z końców tworzącéj AB, to jest z punktów A i B na oś PQ spuszczonemi.

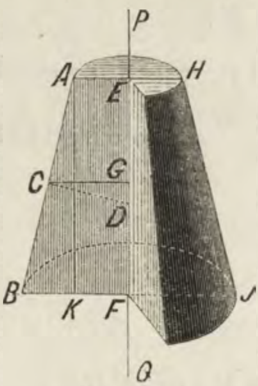


Fig. 112.

Dowodzenie. Linia AB, mając jakiekolwiek położenie względem osi PQ, utworzy przez swój obrot powierzchnię boczną kloca ostrokręgowego prostego $ABJH$ mającego za podstawy koła AH i BJ mające promieniami proste AE i BF.

Jeżeli z punktu C poprowadzimy linię CG prostopadłą do PQ a więc równoodległą od AE i BF, jest powierzchnia kloca ostrokręgowego prostego, czyli:

1) Pow. AB = Okr. $CG \times AB$ (nº 119).

Przez punkt A prowadzę prostą AK równoodległą od PQ, i uważam dwa trójkąty ABK i DCG, które mają boki do siebie prostopadłe, to jest bok AB prostopadły do CD, bok AK do CG i bok BK do GD, są więc sobie podobne, a zatém ma się $AB : AK$, a że $AK = EF$, więc:

$$AB : EF = CD : CG$$

lecz:

$$CD : CG = \text{Okr. } CD : \text{Okr. } CG$$

zatém:

$$AB : EF = \text{Okr. } CD : \text{Okr. } CG$$

zkąd:

$$\text{Okr. } CG \times AB = \text{Okr. } CD \times EF.$$

Wstawiwszy w równanie 1) za okrąg $CG \times AB$ dopiero co wynalezioną wartość Okr. $CD \times EF$, jest:

$$\text{Pow. } AB = \text{Okr. } CD \times EF.$$

A więc w każdym razie, *jeżeli prostą długości ograniczonéj weźmiemy za tworzącą i t. d.* co było do okazania.

Twierdzenie.

184. *Objętość bryły utworzonéj przez obrot trójkąta około osi leżącéj na jego płaszczyznie i przechodzącéj przez jego wierzchołek, równa się iloczynowi z powierzchni jaką zakre-*

śli podstawa obracającego się trójkąta przez trzecią część jego wysokości.

Tu mogą być cztery przypadki:

1° *Albo obracający się trójkąt, opiera się całym swym bokiem o oś i wysokość jego pada na samą podstawę.*

2° *Albo opierając się bokiem swym o oś, ma wysokość padającą na przedłużoną podstawę.*

3° *Albo podstawa obracającego się trójkąta ma jakiekolwiek do osi położenie.*

4° *Albo nakoniec, obracający się trójkąt ma podstawę od osi równoodległą.*

Co do 1go. Jeżeli wysokość AD (fig. 113), pada na podstawę obracającego się trójkąta to jest na BC, to spuściwszy z punktu B prostę BE prostopadłą do AC, trójkąt ABC w obrocie swoim około osi PQ, utworzy bryłę równą summie dwóch ostrokręgów prostych, mających wspólną

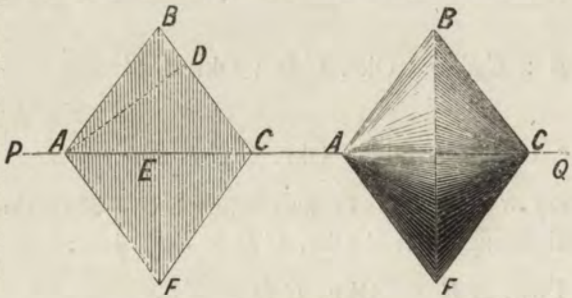


Fig. 113.

podstawą koło BF zakreślone promieniem BE, a za wysokości proste AE i EC.

Bryłow. Ostrokr. $BFA = \frac{1}{3}\pi\,\overline{BE}^2 \times AE$ (no 111)

Bryłow. Ostrokr. $BFC = \frac{1}{3}\pi\,\overline{BE}^2 \times EC$

1) Objętość bryły $ABCF =$

$=$ Brył. Ostrokr. BFA + Brył. Ostrokr. $BFC =$

$$= \tfrac{1}{3}\pi \overline{BE}^2 \times AE + \tfrac{1}{3}\pi \overline{BE}^2 \times EC =$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi \overline{BE}^2 (AE + EC) = \tfrac{1}{3}\pi \overline{BE}^2 \times AC =$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi \times BE \times BE \times AC.$$

Powierzchnia ostrokręgowa zakreślona podstawą BC równa się połowie okręgu BE rozmnożonéj przez tworzącą BC (n° 102), to jest:

$$\text{Pow. } BC = \pi BE \times BC$$

a mnożąc obie strony tego równania przez $\frac{1}{3} AD$, będzie:

$$2) \quad \text{Pow. } BC \times \tfrac{1}{3} AD = \tfrac{1}{3}\pi \times BE \times BC \times AD.$$

W trójkącie ABC iloczyn z $AC \times BE$, tak samo jak iloczyn z $BC \times AD$, to jest iloczyn z podstawy przez wysokość, oznacza podwójną powierzchnię jednego trójkąta ABC; więc te dwa iloczyny są sobie równe, czyli jest:

$$BE \times AC = BC \times AD.$$

Rozmnożywszy obie strony tego równania przez $\frac{1}{3}\pi \times BE$ otrzymamy:

$$\tfrac{1}{3}\pi \times BE \times BE \times AC = \tfrac{1}{3}\pi \times BE \times BC \times AD.$$

Lecz $\frac{1}{3}\pi \times BE \times BE \times AC$ jest prawą stroną równania 1) a $\frac{1}{3}\pi \times BE \times BC \times AD$ jest prawą stroną równania 2); więc w równaniach 1) i 2) drugie strony są sobie równe, zatém i pierwsze strony są także sobie równe. Jest więc:

$$\text{Objętość bryły } ABCF = \text{Pow. } BC \times \tfrac{1}{3} AD.$$

Co do 2go. Jeżeli wysokość AD (fig. 114), pada na przedłużoną podstawę BC, to spuściwszy prostą BE prostopadłą do osi PQ, trójkąt ABC w obrocie swoim utworzy bryłę $ABCF$ równą różnicy dwóch ostrokręgów pro-

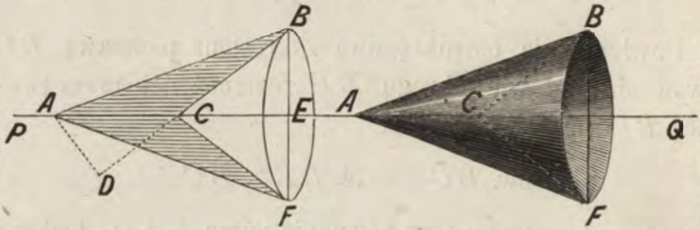


Fig. 114.

stych FAB i FCB mających wspólną podstawę koło BF zakreślone promieniem BE a za wysokości proste AE i CE.

Bryłow. Ostrokr. $BFA = \frac{1}{3}\pi \times \overline{BE}^2 \times AE$ (nº 111)

Bryłow. Ostrokr. $BFC = \frac{1}{3}\pi \times \overline{BE}^2 \times CE.$

1) Objętość bryły $ABCF =$

$= $ Brył. Ostrokr. BFA — Bryłow. Ostrokr. $BFC =$

$$= \frac{1}{3}\pi \times \overline{BE}^2 \times AE - \frac{1}{3}\pi \times \overline{BE}^2 \times CE =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times \overline{BE}^2 (AE - CE) = \frac{1}{3}\pi \times \overline{BE}^2 \times AC =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \times BE \times BE \times AC$$

Powierzchnia ostrokręgowa zakreślona podstawą BC równa się połowie okręgu BE rozmnożonéj przez BC (nº 102), to jest:

$$\text{Pow. } BC = \pi \times BE \times BC$$

Rozmnożywszy obie strony tego równania przez $\frac{1}{3}AD$, będzie:

2) Pow. $BC \times \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}\pi \times BE \times BC \times AD$

Lecz tak samo i dla téj saméj przyczyny jak w poprzedzającym przypadku, jest:

$$AC \times BE = BC \times AD$$

Rozmnożywszy obie strony tego równania przez $\frac{1}{3}\pi \times BE$ otrzymamy:

$$\tfrac{1}{3}\pi \times BE \times BE \times AC = \tfrac{1}{3}\pi \times BE \times BC \times AD$$

Z czego okazuje się, że drugie strony w równaniach 1) i 2) są sobie równe, a zatém i pierwsze ich strony są także sobie równe; czyli jest:

Objętość bryły $ABCF =$ Pow. $BC \times \frac{1}{3} AD$.

Co do 3go. Jeżeli podstawa trójkąta ABC to jest prosta BC (fig. 115), ma jakiekolwiek położenie względem osi PQ, to przedłużywszy tęż podstawę BC aż do przecięcia się z osią PQ w punkcie E, bryła $BCAFG$ utworzona przez obrot trójkąta ABC, równać się będzie różnicy brył $BEGA$ i $CEFA$.

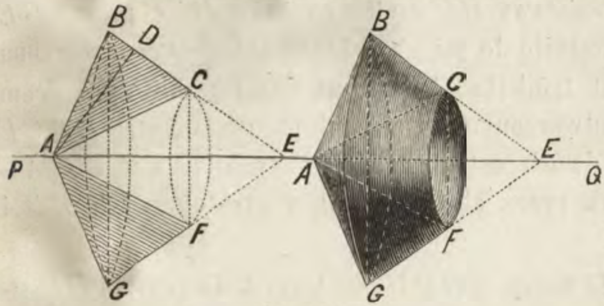


Fig. 115.

Lecz podług przypadku 1go

Objętość bryły $BEGA =$ Pow. $BE \times \frac{1}{3} AD$.

Objętość bryły $CEFA =$ Pow. $CE \times \frac{1}{3} AD$.

Obj. bryły $BCAFG =$ Obj. bryły $BEGA -$ obj. br. $CEFA =$

$= $ Pow. $BE \times \frac{1}{3} AD -$ Pow. $CE \times \frac{1}{3} AD =$

$= ($Pow. $BE -$ Pow. $CE) \frac{1}{3} AD$

a że jak okazuje figura:

$$\text{Pow. } BE - \text{Pow. } CE = \text{Pow. } BC$$

więc:

$$\text{Objętość bryły } BCAFG = \text{Pow. } BC \times \tfrac{1}{3} AD.$$

Nakoniec, co do 4^{go}. Jeżeli trójkąt ABC (fig. 116*), ma podstawę BC równoodległą od osi PQ, to spuściwszy

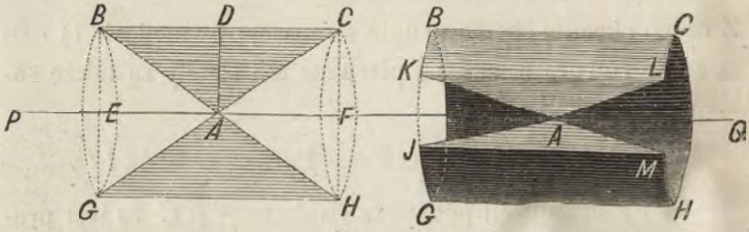


Fig. 116.

z końców podstawy BC czyli z punktów B i C proste BE i CF prostopadłe do osi PQ, bryła $BCAGH$ utworzona przez obrot trójkąta ABC jest różnicą między walcem $GBCH$ utworzonym przez obrot prostokąta $EBCF$ a summą dwóch ostrokręgów prostych GAB i HAC utworzonych przez obrot trójkątów prostokątnych EBA i FCA.

$$\text{Objętość walca } GBCH = \text{Pow. koła } GB \times EF =$$
$$= \pi \overline{BE}^2 \times EF = \tfrac{3}{3} \pi \overline{BE}^2 \times EF \quad (\text{n}^\circ\ 95).$$

$$\text{Objęt. ostrokr. } GAB = \tfrac{1}{3} \text{ Pow. koła } GB \times EA =$$
$$= \tfrac{1}{3} \pi \overline{BE}^2 \times EA \quad (\text{n}^\circ\ 111)$$

$$\text{Objęt. ostrokr. } HAC = \tfrac{1}{3} \text{ Pow. koła } HC \times AF =$$
$$= \tfrac{1}{3} \pi \overline{FC}^2 \times AF$$

a że $FC = BE$, więc:

*) Część $JKLM$ została wyciętą dla pokazania wewnętrznego kształtu bryły.

Objętość ostrokręgu $HAC = \frac{1}{3}\pi \overline{BE}^2 \times AF$

zatém:

Objęt. ostrokr. GAB + Objęt. ostrokr. $HAC =$

$$= \frac{1}{3}\pi \overline{BE}^2 \times EA + \frac{1}{3}\pi \overline{BE}^2 \times AF =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \overline{BE}^2 (EA + AF) = \frac{1}{3}\pi \overline{BE}^2 \times EF.$$

Ponieważ zaś, jak się wyżéj okazało:

Objętość bryły $BCAGH =$

$=$ Objęt. wal. $GBCH -$(Obj. ostrokr. GBA + Obj. ostrokr. HAC)

więc wstawiwszy za objętość walca $GBCH$ i za summę objętości ostrokręgów GBA i HAC ich wartości, jest:

1) Objętość bryły $BCAGH =$

$$= \frac{3}{3}\pi \overline{BE}^2 \times EF - \frac{1}{3}\pi \overline{BE}^2 \times EF = \frac{2}{3}\pi \overline{BE}^2 \times EF.$$

Powierzchnia walcowa zakreślona przez obrot podstawy BC około PQ równa się iloczynowi z okręgu koła BG przez wysokość EF (nº 78), czyli:

$$\text{Pow. } BC = 2\pi BE \times EF$$

Rozmnożywszy obie strony tego równania przez $\frac{1}{3} BE$, jest:

$$\text{Pow. } BC \times \frac{1}{3} BE = \frac{2}{3}\pi \overline{BE}^2 \times EF$$

W tém równaniu i w równaniu 1) drugie strony są sobie równe, zatém i pierwsze są także sobie równe, czyli jest:

Objętość bryły $BCAGH =$ Pow. $BC \times \frac{1}{3} BE$

a że $BE = AD$, więc:

Objętość bryły $BCAGH =$ Pow. $BC \times \frac{1}{3} AD$.

Tak więc w każdym razie *objętość bryły utworzonéj przez obrot trójkąta około osi i t. d.*, co było do okazania.

Twierdzenie.

185. *Objętość bryły zakreślonéj obrotem odcinka koła wielkiego około średnicy, równa się szóstéj części walca mającego za promień podstawy cięciwę obracającego się odcinka, a za wysokość część średnicy zawartą pomiędzy prostopadłemi z końców tejże cięciwy na średnicę spuszczonemi.*

Założenie. Jeżeli odcinek $AGBA$ (fig. 117), obracać będziemy około prostéj DS, to bryła $BAGBKLJK$ obrotem tego odcinka zakreślona, równać się będzie $\frac{1}{6}$ części walca mającego za promień podstawy cięciwę AB, a za wysokość EF, to jest część średnicy zawartą pomiędzy dwoma prostopadłemi AF i BE, z końców cięciwy AB na średnicę spuszczonemi.

Dowodzenie. Prowadzę promienie AS, BS, KS, JS i nadto promień GS prostopadły do cięciwy AB, a więc dzielący ją w punkcie C na dwie równe części.

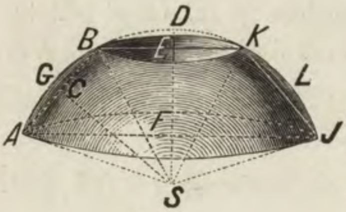


Fig. 117.

Bryła zakreślona obrotem wycinka $AGBS$ około średnicy jest różnicą pomiędzy ostrokręgiem kulistym $ABDKJS$ a takimże ostrokręgiem $BDKS$.

Bryło. ostrokr. kulis. $ABDKJS$ = czaszce $ABDKJ \times \frac{1}{3} AS$ (n° 177 b)
Bryłow. ostrokr. kulist. $BDKS$ = czaszce $BDK \times \frac{1}{3} AS$

Objętość bryły $AGBSKLJ$ =
= Brył. ostrkr. kul. $ABDKJS$ – Brył. ostrkr. kul. $BDKS$ =
= czaszce $ABDKJ \times \frac{1}{3} AS$ – czaszką $BDK \times \frac{1}{3} AS$ =
= (czaszce $ABDKJ$ – czaszką BDK) $\frac{1}{3} AS$ =
= Powierzchni pasa kulistego $AGBKLJ \times \frac{1}{3} AS$.

Pow. pasa kulis. $AGBKLJ$ = Okr. koła $AS \times EF =$
$= 2\pi AS \times EF$ (nº 165)

zatém:

1) Objęt. bryły $AGBSKLJ = 2\pi AS \times EF \times \frac{1}{3} AS =$
$= \frac{2}{3} \pi \overline{AS}^2 \times EF.$

Bryła $ABSKJ$ utworzona przez obrot trójkąta ABS około prostéj DS równa się powierzchni AB rozmnożonéj przez $\frac{1}{3}$ CS (nº 184, Przypadek 3), czyli:

Objętość bryły $ABSKJ$ = Pow. $AB \times \frac{1}{3} CS$

lecz powierzchnia AB jako utworzona przez obrot prostéj AB długości ograniczonéj, około osi DS, równa się Okr. koła SC rozmnożonemu przez EF (nº 183, Przypadek 3); czyli:

Pow. AB = Okr. koła $SC \times EF = 2\pi SC \times EF$

zatém:

2) Objęt. bryły $ABSKJ = 2\pi SC \times EF \times \frac{1}{3} SC =$
$= \frac{2}{3} \pi \overline{SC}^2 \times EF.$

A że bryła $BAGBKLJK$ zakreślona obrotem odcinka $AGBA$ jest równa bryle $AGBSKLJ$ mniéj bryłą $ABSKJ$, wstawiwszy więc za te bryły ich wartości 1) i 2), będzie:

Objętość bryły $BAGBKLJK =$

$$= \frac{2}{3}\pi \overline{AS}^2 \times EF - \frac{2}{3}\pi \overline{SC}^2 \times EF = \frac{2}{3}\pi (\overline{AS}^2 - \overline{SC}^2) EF.$$

W trójkącie prostokątnym ASC jest:

$$\overline{AS}^2 - \overline{SC}^2 = \overline{AC}^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4}$$

wstawiwszy więc w ostatnie równanie za $\overline{AS}^2 - \overline{SC}^2$ dopiero co wynalezioną wartość $\frac{\overline{AB}^2}{4}$, jest:

Objętość bryły $BAGBKLJK =$

$$= \tfrac{2}{3}\pi \times \frac{\overline{AB}^2}{4} \times EF = \tfrac{2}{12}\pi \overline{AB}^2 \times EF = \tfrac{1}{6}\pi \overline{AB}^2 \times EF$$

a że $\pi \overline{AB}^2 \times EF$ oznacza bryłowatość walca, którego promień podstawy jest AB a wysokość EF (nº 95), więc *objętość bryły zakreślonéj obrotem odcinka koła wielkiego i.t.d.*, co było do okazania.

Twierdzenie.

186. *Bryłowatość kloca kulistego równa się połowie summy objętości dwóch walców, z których każdy ma za wysokość, wysokość tegoż kloca, a za podstawy, jeden dolną a drugi górną podstawę kloca, powiększonéj objętością kuli mającéj za promień połowę wysokości kloca danego.*

Założenie. Niech będzie kloc kulisty $EHABKF$ (fig. 118), potrzeba dowieść, że jego bryłowatość równa się połowie summy bryłowatości dwóch walców, z których każdy mieć będzie za wysokość DG, to jest wysokość kloca, a za podstawy, jeden koło EF podstawę dolną, drugi koło AB podstawę górną kloca, powiększonéj kulą mającą za promień połowę linii DG, to jest połowę wysokości kloca.

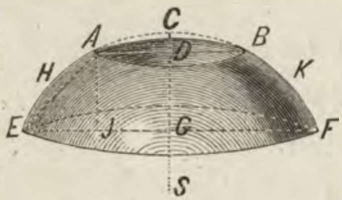


Fig. 118.

Dowodzenie. Podług poprzedzającego twierdzenia (nº 185), objętość bryły utworzonéj przez obrot odcinka $AHEA$ około średnicy, czyli:

1) Objętość bryły $AEHABKFB = \tfrac{1}{6}\pi \overline{AE}^2 \times DG$

Objętość kloca ostrokręgowego $EABF =$

$$= \tfrac{1}{3}\pi DG(\overline{EG}^2 + \overline{AD}^2 + EG \times AD) \quad (\text{n}^\text{o}\ 120).$$

W tém ostatniém równaniu na prawéj stronie jeden czynnik $\frac{1}{3}\pi\, DG$ podzieliwszy przez 2, a drugi czynnik będący w nawiasie, to jest $\overline{EG}^2 + \overline{AD}^2 + EG \times AD$ pomnożywszy przez 2, iloczyn się nie zmieni i będzie:

2) Objętość kloca ostrokręgowego $EABF =$

$$= \tfrac{1}{6}\pi\, DG\, (2\,\overline{EG}^2 + 2\,\overline{AD}^2 + 2\, EG \times AD)$$

A że objętość kloca kulistego $EHABKF$, jak figura okazuje, równa się bryle $AEHABKFB$ więcéj klocem ostrokręgowym $EABF$, więc dodając do siebie równania 1) i 2), otrzyma się:

3) Objętość kloca kulistego $EHABKF =$

$=$ Objęt. bryły $AEHABKFB$ + Obj. kloc. ostrkr. $EABF =$

$$= \tfrac{1}{6}\pi\, \overline{AE}^2 \times DG + \tfrac{1}{6}\pi\, DG\, (2\,\overline{EG}^2 + 2\,\overline{AD}^2 + 2\, EG \times AD) =$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi\, DG\, (\overline{AE}^2 + 2\,\overline{EG}^2 + 2\,\overline{AD}^2 + 2\, EG \times AD).$$

Poprowadziwszy linię AJ równoodległą od DG, to w trójkącie prostokątnym AJE, jest:

$$\overline{AE}^2 = \overline{EJ}^2 + \overline{AJ}^2$$

lecz:

$$EJ = EG - AD \quad \text{a} \quad AJ = DG$$

więc:

$$\overline{AE}^2 = (EG - AD)^2 + \overline{DG}^2 = \overline{EG}^2 + \overline{AD}^2 - 2\, EG \times AD + \overline{DG}^2$$

Wyrażenie to kładąc zamiast $\overline{AE}^2$ w równanie 3), jest:

Objętość kloca kulistego $EHABKF =$

$$= \tfrac{1}{6}\pi\, DG\, (\overline{EG}^2 + \overline{AD}^2 - 2\, EG \times AD + \overline{DG}^2 + 2\,\overline{EG}^2 + 2\,\overline{AD}^2 + 2\, EG \times AD) =$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi\, DG\, (3\,\overline{EG}^2 + 3\,\overline{AD}^2 + \overline{DG}^2) =$$

$$=\tfrac{3}{6}\pi\,\overline{EG}^2\times DG+\tfrac{3}{6}\pi\,\overline{AD}^2\times DG+\tfrac{1}{6}\pi\,\overline{DG}^3=$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\,\overline{EG}^2\times DG+\tfrac{1}{2}\pi\,\overline{AD}^2\times DG+\tfrac{4}{24}\pi\,\overline{DG}^3=$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\,\overline{EG}^2\times DG+\tfrac{1}{2}\pi\,\overline{AD}^2\times DG+\tfrac{4}{3}\pi\times\frac{\overline{DG}^3}{8}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\,\overline{EG}^2\times DG+\tfrac{1}{2}\pi\,\overline{AD}^2\times DG+\tfrac{4}{3}\pi\times\left(\frac{DG}{2}\right)^3$$

Lecz $\pi\,\overline{EG}^2\times DG$ oznacza bryłowatość walca mającego za podstawę koło EG a za wysokość DG, tak jak $\pi\,\overline{AD}^2\times DG$ oznacza bryłowatość walca, którego podstawą jest koło AD a wysokością DG (nº 95), zaś $\tfrac{4}{3}\pi\times\left(\frac{DG}{2}\right)^3$ oznacza bryłowatość kuli, której promieniem jest $\frac{DG}{2}$ (nº 176); więc *bryłowatość kloca kulistego równa się i t. d.* co było do okazania.

187. *Wniosek.* Jeżelibyśmy przypuścili że jedna podstawa kloca kulistego jest *zero*, czyli że kloc kulisty zamienił się na odcinek kuli, to w takim razie, we wzorze:

Objętość kloca kulistego =

$$=\tfrac{1}{2}\pi\,\overline{EG}^2\times DG+\tfrac{1}{2}\pi\,\overline{AD}^2\times DG+\tfrac{4}{3}\times\left(\frac{DG}{2}\right)^3$$

położywszy np. $AD=o$ (fig. 118), będziemy mieli:

Objętość odcinka kuli $EHOKFE$ =

$$=\tfrac{1}{2}\pi\,\overline{EG}^2\times DG+\tfrac{4}{3}\times\left(\frac{DG}{2}\right)^3$$

To jest, że *objętość odcinka kuli równa się połowie walca mającego za podstawę i za wysokość, podstawę i wysokość odcinka, powiększonéj kulą mającą za promień połowę wysokości tegoż odcinka.*

ROZDZIAŁ VII.

O PODOBIEŃSTWIE WIELOŚCIANÓW.

---

188. *Wielościany są podobne, gdy mają podstawy podobne i jednakową liczbę wierzchołków ułożonych w ten sposób, że połączywszy je z trzema odpowiedniemi wierzchołkami podstaw, utworzą się ostrosłupy trójkątne podobne.*

Jak w Planimetryi z warunków podobieństwa trójkątów, przechodzi się do podobieństwa wielokątów, tak też i tu warunki podobieństwa ostrosłupów trójkątnych posłużą nam do poznania własności wielościanów podobnych. Zanim więc mówić będziemy o podobieństwie wielościanów, rozbierzemy warunki podobieństwa ostrosłupów trójkątnych.

189. *Ostrosłupy trójkątne są podobne wtenczas, kiedy mają krawędzie odpowiednie proporcyonalne i jednakowym porządkiem ułożone.* A z tego wypada, że ostrosłupy trójkątne podobne, mają ściany odpowiednie podobne, kąty bryłowe odpowiednie równe a więc i nachylenie się ścian odpowiednich jednakowe.

Dwa ostrosłupy trójkątne lub dwa wielościany podobne trzeciemu, są sobie podobne.

190. *Punktami odpowiedniemi* wielościanów podobnych nazywamy punkta wyznaczone przez wierzchołki dwóch ostrosłupów podobnych i podobnie ułożonych.

191. *Liniami odpowiedniemi* w wielościanach podobnych nazywamy proste łączące punkta odpowiednie.

192. *Przecięciami odpowiedniemi* w wielościanach podobnych nazywamy przecięcia przechodzące przez trzy punkta odpowiednie.

Znak podobieństwa jest taki: $\backsim$

Twierdzenie.

193. *W każdym ostrosłupie płaszczyzna równoodległa od podstawy, odetnie od całego ostrosłupa, ostrosłup podobny danemu.*

Założenie. Niech będzie naprzykład ostrosłup pięciokątny $ABCDEF$ (fig. 119), mam dowieść, że przecięcie $abcde$ równoodległe od podstawy $ABCDE$, odetnie od całego ostrosłupa, ostrosłup $abcdeF$ podobny danemu.

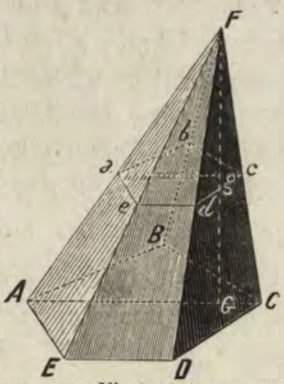


Fig. 119.

Dowodzenie. Ponieważ płaszczyzna $abcde$ jest równoodległą od podstawy $ABCDE$, więc przecięcia się tych dwóch płaszczyzn z trzecią np. z płaszczyzną AFB, to jest proste AB i ab są od siebie równoodległe (n° 27). Dla podobnéj przyczyny jest BC równoodległe od bc, CD od cd i t. d., a tém samém trójkąt $AFB \backsim aFb$, trójkąt $BFC \backsim bFc$, trójkąt $CFD \backsim cFd$ i t. d.

Z podobieństwa trójkątów AFB i aFb wypada:

1) $AF : aF = AB : ab = FB : Fb.$

Z podobieństwa trójkątów BFC i bFc wypada:

2) $FB : Fb = BC : bc = FC : Fc$

Z podobieństwa trójkątów CFD i cFd wypada:

3) $FC : Fc = CD : cd = FD : Fd$ i t. d.

Z powodu stosunków wspólnych, wszystkie stosunki ciągi 1), 2), 3) i t. d. składające są sobie równe, a że poprzedniki tych stosunków są to krawędzie danego ostrosłupa $ABCDEF$, a następniki są krawędziami ostrosłupa odciętego $abcdeF$, wszystkie więc krawędzie ostrosłupa $ABCDEF$ są proporcyonalne do krawędzi ostrosłupa $abcdeF$ i jednakowo ułożone, dwa więc te ostrosłupy są sobie podobne (nº 189). A zatém: *w każdym ostrosłupie płaszczyzna równoodległa i t. d.*, co było do okazania.

194. *Wniosek 1szy.* Przez proste AF i FG przeprowadziwszy płaszczyznę (nº 3), ta przetnie się z podstawą $ABCDE$ po prostéj AG (nº 4), a z płaszczyzną $abcde$ po prostéj ag równoodległéj od AG (nº 27); więc dwa trójkąty AFG i aFg są sobie podobne, a zatém ma się:

$$AF : aF = FG : Fg.$$

To jest: że *w dwóch ostrosłupach podobnych, wysokości są proporcyonalne do krawędzi tychże ostrosłupów.*

195. *Wniosek 2gi.* Ponieważ ma się:

$$FG : Fg = AF : aF = CF : cF \quad \text{i t. d.},$$

więc: *w ostrosłupie płaszczyzna równoodległa od podstawy, dzieli wysokość i krawędzie tego ostrosłupa na części proporcyonalne.*

Twierdzenie.

196. *Dwa ostrosłupy trójkątne, mające po dwie ściany odpowiednie podobne jednakowo ułożone i po kącie dwuściennym między temi ścianami zawartym równym, są sobie podobne.*

Założenie. Niech będą dwa ostrosłupy trójkątne (fig. 120), $ABCD$ i $abcd$, w których zakładam, że ściana $ABD \backsim abd$, ściana $ACD \backsim acd$ i jednakowo są ułożone, nadto, że kąt dwuścienny między temi ścianami zawarty, to jest kąt $BADC = badc$; mam dowieść, że te dwa ostrosłupy są sobie podobne.

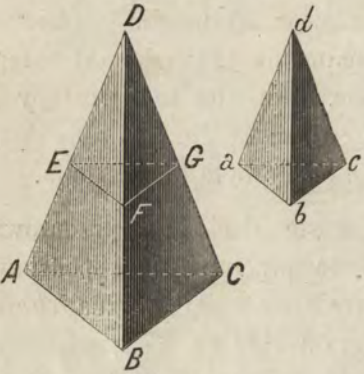


Fig. 120.

Dowodzenie. Na boku DA od punktu D odcinam $DE = da$ i przez punkt E prowadzę płaszczyznę EFG równoodległą od ABC; więc jest trójkąt $EDF \backsim ADB$, a że z założenia trójkąt $ADB \backsim adb$, zatém jest także trójkąt $EDF \backsim adb$. Ma się więc:

$$ED : ad = EF : ab = DF : db$$

A że z wykreślenia $ED = ad$, więc jest i $EF = ab$ i $DF = db$. Zatém dwa trójkąty EDF i adb mające po trzy boki równe, są sobie równe.

Podobnież jest trójkąt $EDG \backsim ADC$, a że z założenia trójkąt $ADC \backsim adc$, więc jest trójkąt $EDG \backsim adc$. Z wykreślenia zaś jest $ED = ad$, zatém podobnie jak poprzednio, okaże się, że jest trójkąt $EDG = adc$. Dwa przeto ostrosłupy trójkątne $EFGD$ i $abcd$ mają ścianę $EDF = adb$, ścianę $EDG = adc$ z dowiedzenia i po kącie dwuściennym $FEDG$ czyli $BADC$ i $badc$ między temi ścianami zawartym z założenia równym, są więc sobie równe (nº 59), a zatém i podobne.

Lecz ostrosłup $EFGD$ jako część odcięta od ostrosłupa $ABCD$ płaszczyzną EFG równoodległą od ABC

jest podobny ostrosłupowi $ABCD$ (nº 193), a że ostrosłup $EFGD$, jak się okazało, jest podobny ostrosłupowi $abcd$, więc jest i ostrosłup $ABCD \backsim abcd$. A zatém: *dwa ostrosłupy trójkątne mające po dwie ściany odpowiednie podobne i t. d.*, co było do okazania.

Twierdzenie.

197. *Dwa ostrosłupy trójkątne mające po jednéj ścianie podobnéj i po dwa kąty dwuścienne przy tejże ścianie równe i jednakowo ułożone, są sobie podobne.*

Założenie. Niech będą dwa ostrosłupy trójkątne (fig. 120) $ABCD$ i $abcd$, w których zakładam, że ściana $ADC \backsim adc$ i że kąt dwuścienny $BADC = badc$ i $BCDA = bcda$; mam dowieść, że te dwa ostrosłupy są sobie podobne.

Dowodzenie. Na prostéj AD od punktu D odcinam część $DE = da$ i przez punkt E prowadzę płaszczyznę EFG równoodległą od ABC; jest więc ostrosłup trójkątny $EFGD \backsim ABCD$ (nº 193), a więc nachylenia się ścian odpowiednich mają jednakowe (nº 189), zatém kąt dwuścienny $FEDG = BADC$, a że z założenia $BADC = badc$, przeto i $FEDG = badc$ i również kąt dwuścienny $FGDE = BCDA$; a że z założenia $BCDA = bcda$, więc jest kąt $FGDE = bcda$. Trójkąt $EDG \backsim ADC$, bo prosta EG równoodległa od AC, a ponieważ trójkąt $ADC \backsim adc$ z założenia, więc i trójkąt $EDG \backsim adc$. Z wykreślenia $ED = ad$, przeto trójkąt $EDG = adc$. Zatém dwa ostrosłupy trójkątne $EFGD$ i $abcd$, mające po jednéj ścianie równéj i po dwa kąty dwuścienne przy téj ścianie leżące równe, są sobie równe (nº 60), a więc i podobne, a że ostrosłup $EFGD$

był także podobny ostrosłupowi $ABCD$, więc jest i ostrosłup $ABCD \backsim abcd$. Czyli *dwa ostrosłupy trójkątne mające po jednéj ścianie podobnéj i t. d.*, co było do okazania.

Wniosek. Dwa ostrosłupy trójkątne mające po kącie trójściennym odpowiednim równym i po trzy ściany odpowiednie też kąty ograniczające podobne i jednakowo ułożone, są sobie podobne. Kiedy bowiem mają po kącie trójściennym równym, to mają i nachylenia się ścian odpowiednich jednakowe (n° 61), a tém samém sprowadzają się do jednego z dwóch poprzedzających przypadków (n° 196 i 197).

Twierdzenie.

198. *Wielościany podobne mają krawędzie i przekątne odpowiednie proporcyonalne i ściany odpowiednie podobne.*

Założenie. Niech będą dwa wielościany podobne $ABCDEFGH$ i $abcdefgh$ (fig. 121), mam dowieść że one mają krawędzie i przekątne odpowiednie proporcyonalne i ściany odpowiednie podobne.

Dowodzenie. Poprowadźmy przekątne AH, AF, DE, DF, CE, CH i CF, oraz odpowiednie im ah, af, de, df, ce, ch i cf. Ostrosłupy $EFHA$ i $efha$ jako też $EFHD$ i $efhd$ są podobne jako wyznaczające wierzchołki A i D oraz a i d w wielościanach po-

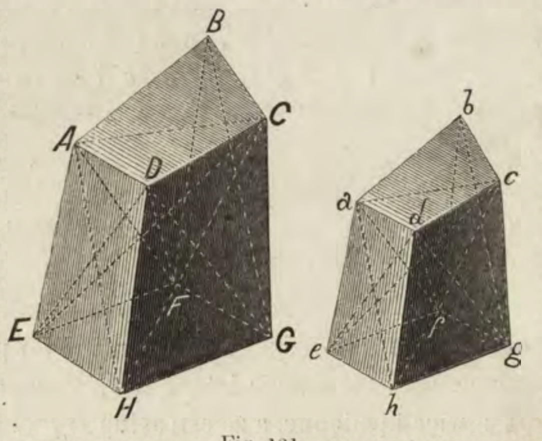


Fig. 121.

dobnych (n° 188), a tém samém ściana $AFH \backsim afh$, ściana $DFH \backsim dfh$, kąt dwuścienny $DFHE = dfhe$ i $AFHE = afhe$ (n° 189). A zatém:

$$DFHE - AFHE = dfhe - afhe$$

czyli kąt dwuścienny

$$DFHA = dfha.$$

Dwa więc ostrosłupy trójkątne $ADFH$ i $adfh$ mające po dwie ściany odpowiednie podobne i po kącie dwuściennym między niemi zawartym równym, są podobne (n° 196), a z ich podobieństwa wypada, że tak się ma:

$$AH : ah = DF : df = AD : ad \quad \text{i t. d.}$$

Tak samo uważając ostrosłupy trójkątne podobne $EFHC$ i $efhc$ oraz $EFHA$ i $efha$ i t. d., dowiedziemy, że ma się:

$$AC : ac = CE : ce = AD : ad \quad \text{i t. d.}$$

W dwóch powyższych ciągach, stosunek $AD : ad$ jest wspólny, a ztąd wszystkie stosunki ciągi te składające są sobie równe, a zatém krawędzie i przekątne w wielościanach podobnych są proporcyonalne.

Podobieństwo ścian odpowiednich w danych dwóch wielościanach, wypada z proporcyonalności krawędzi i przekątnych odpowiednich, te bowiem wyznaczają trójkąty podobne ADC i adc, ABC i abc i t. d., a z trójkątów podobnych tworzą się wielokąty podobne czyli odpowiednie ściany danych wielościanów. *Dwa więc wielościany podobne mają krawędzie i t. d.* co było do okazania.

199. *Wniosek 1szy.* Wielościany podobne dadzą się rozdzielić na jednakową liczbę ostrosłupów trójkątnych podobnych i podobnie ułożonych. Krawędzie bowiem ostrosłupów trójkątnych składających te wielościany, są krawędziami lub przekątnemi tychże wielościanów, a jako takie są proporcyonalne i dają ostrosłupy trójkątne podobne (nº 189).

200. *Wniosek 2gi.* Z podobieństwa ostrosłupów trójkątnych składających wielościany podobne, wypada, że w wielościanach podobnych kąty bryłowe i dwuścienne jednego wielościanu są równe odpowiednim kątom bryłowym i dwuściennym drugiego.

Twierdzenie.

201. *Ostrosłupy trójkątne mające po kącie bryłowym równym, mają się do siebie jak iloczyny z krawędzi tychże kątów.*

Założenie. Niech będą np. dwa ostrosłupy trójkątne $ABCD$ i $abcd$ (fig. 122), mające po kącie trójściennym D i d równym, mam dowieść, że będzie się miał ostrosłup $ABCD : abcd = AD \times BD \times CD : ad \times bd \times cd$.

Dowodzenie. Na odpowiednich krawędziach ostrosłupa większego to jest na prostych AD, BD i CD odcinam części ED, FD i GD równe krawędziom ad, bd i cd i prowadzę płaszczyzny EFG, AFG i AGB. Płaszczyzny te utworzą ostrosłupy trójkątne $EFGD$, $AFGD$ i $AGBD$.

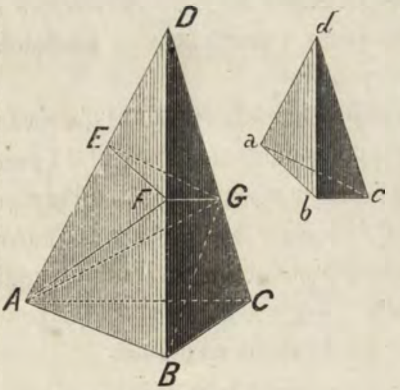


Fig. 122.

Ostrosłupy $ABCD$ i $AGBD$ można uważać, że mają wierzchołek wspólny w punkcie B, a wtenczas podstawy ich będą trójkąty ACD i AGD leżące na jednéj płaszczyznie ACD, zatém ostrosłupy te mają się do siebie jak podstawy (nº 110), to jest ma się:

$$ABCD : AGBD = ACD : AGD$$

a że trójkąt

$$ACD : AGD = CD : GD \text{ czyli do } cd,$$

bo $CD = cd$ z wykreślenia, więc jest:

$$1) \quad ABCD : AGBD = CD : cd$$

Podobnież ostrosłupy $AGBD$ i $AFGD$ mające wierzchołek wspólny w punkcie G a podstawy ABD i AFD na jednéj płaszczyznie ABD, mają się do siebie jak podstawy, czyli ma się: $AGBD : AFGD = ABD : AFD$

a że: $ABD : AFD = BD : FD$ czyli do bd, więc jest:

$$2) \quad AGBD : AFGD = BD : bd$$

Nakoniec ostrosłupy $AFGD$ i $EFGD$ mające wierzchołek wspólny w punkcie G a podstawy AFD i EFD na jednéj płaszczyznie ABD, mają się do siebie jak podstawy,

czyli $AFGD : EFGD = AFD : EFD$

a że znowu: $AFD : EFD = AD : ED$ czyli do ad, więc ma się:

$$3) \quad AFGD : EFGD = AD : ad$$

Proporcye 1), 2) i 3) mnożąc przez siebie i wyrazy pierwszego stosunku dzieląc przez ich wspólne czynniki, będzie:

$$ABCD : EFGD = AD \times BD \times CD : ad \times bd \times cd$$

Lecz trójkąt $EDF = adb$ dla tego, że bok $ED = ad$ i bok $FD = bd$ z wykreślenia a kąt EDF czyli $ADB = adb$ z założenia. Dla podobnéj przyczyny trójkąt $FDG = bdc$ i trójkąt $EDG = adc$. Dwa więc ostrosłupy trójkątne $EFGD$ i $abcd$ mające po trzy ściany równe są sobie równe (n° 61). Wstawiwszy więc w ostatniéj proporcyi zamiast ostrosłupa $EFGD$ jemu równy $abcd$, jest:

$$ABCD : abcd = AD \times BD \times CD : ad \times bd \times cd.$$

Czyli: *ostrosłupy trójkątne mające po kącie bryłowym równym i t. d.*, co było do okazania.

Twierdzenie.

202. *Ostrosłupy trójkątne podobne mają się do siebie jak sześciany z krawędzi odpowiednich.*

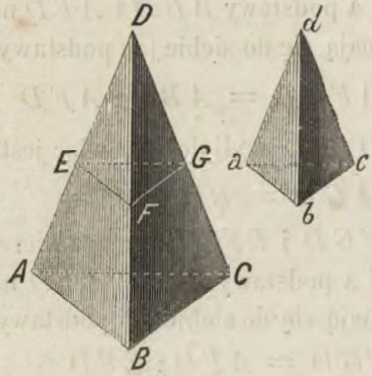


Fig. 123.

Założenie. Niech będą dwa ostrosłupy podobne $ABCD$ i $abcd$ (fig. 123), mam dowieść, że one mają się do siebie jak sześciany z krawędzi odpowiednich, to jest np. jak $\overline{AD}^3 : \overline{ad}^3$.

Dowodzenie. Ponieważ ostrosłupy $ABCD$ i $abcd$ są sobie podobne, więc mają kąty bryłowe odpowiednie równe (n° 189); jest więc kąt trójścienny $D = d$. A zatém ma się (n° 201):

$$ABCD : abcd = AD \times BD \times CD : ad \times bd \times cd,$$

a że (n° 189):

$$BD : bd = AD : ad$$
$$CD : cd = AD : ad$$

mnożąc przeto te trzy proporcye przez siebie i wyrazy odpowiednie dzieląc przez ich wspólne czynniki, jest:

$$ABCD : abcd = \overline{AD}^3 : \overline{ad}^3$$

Czyli, że *ostrosłupy trójkątne i t. d.*, co było do okazania.

Twierdzenie.

203. *Wielościany podobne mają się do siebie jak sześciany z krawędzi odpowiednich.*

Dowodzenie. Wiadomo, że wielościany podobne składają się z jednakowéj liczby ostrosłupów trójkątnych podobnych i podobnie ułożonych (nº 199).

Oznaczywszy więc jeden wielościan przez W a wielościan jemu podobny przez w, oznaczywszy również ostrosłupy składające wielościan W przez O, O', O'', O'''... i t. d., a ich krawędzie odpowiednie przez K, K', K'', K'''... i t. d., i nakoniec oznaczywszy ostrosłupy składające wielościan w przez o, o', o'', o'''... i t. d., a ich krawędzie odpowiednie przez k, k', k'', k'''... i t. d., będzie:

$$1)\quad \left\{ \begin{array}{lllllll} O & : & o & = & K^3 & : & k^3 \\ O' & : & o' & = & K'^3 & : & k'^3 \\ O'' & : & o'' & = & K''^3 & : & k''^3 \\ O''' & : & o''' & = & K'''^3 & : & k'''^3 \text{ i t. d.} \end{array} \right.$$

A że krawędzie ostrosłupów O, O', O'', O''' i t. d. jako téż ostrosłupów o, o', o'', o''' i t. d. są krawędziami lub przekątnemi odpowiedniemi w wielościanach podobnych W i w, a zatém (nº 198), ma się:

$$K : k = K' : k' = K'' : k'' = K''' : k''' \text{ i t. d.}$$

a tém samém:

$$K^3 : k^3 = K'^3 : k'^3 = K''^3 : k''^3 = K'''^3 : k'''^3 \text{ i t. d.}$$

A więc w proporcyach 1) drugie stosunki są sobie równe, zatém i pierwsze, są także sobie równe, czyli ma się:

$$O : o = O' : o' = O'' : o'' = O''' : o''' \text{ i t. d.}$$

W tym ciągu stosunków, ma się summa poprzedników do summy z następników, jak którykolwiek poprzednik do swego następnika; czyli będzie:

$$O+O'+O''+O'''+\ldots \text{i t. d} : o+o'+o''+o'''+\ldots \text{i t. d.} = O : o$$

a że:

$$O : o = K^3 : k^3$$

więc będzie:

$$O+O'+O''+O'''+ \text{i t. d.} : o+o'+o''+o'''+ \text{i t. d.} = K^3 : k^3.$$

Lecz:

$$O+O'+O''+O'''+ \text{i t. d.} = W$$

zaś:

$$o+o'+o''+o'''+ \text{i t. d.} = w$$

Przeto jest:

$$W : w = K^3 : k^3 \text{ lub jak } K'^3 : k'^3 = K''^3 : k''^3 \text{ i t. d.}$$

To jest, że *wielościany podobne mają się i t.d.*, co było do okazania.

204. *Walce lub ostrokręgi są sobie podobne wtenczas, kiedy mają nachylenia osi do podstaw jednakowe i kiedy też osi są proporcyonalne do średnic lub promieni podstaw.*

205. *Wszystkie kule są sobie podobne.*

Twierdzenie.

206. *Walce lub ostrokręgi podobne mają się do siebie jak sześciany ze średnic podstaw lub z osi.*

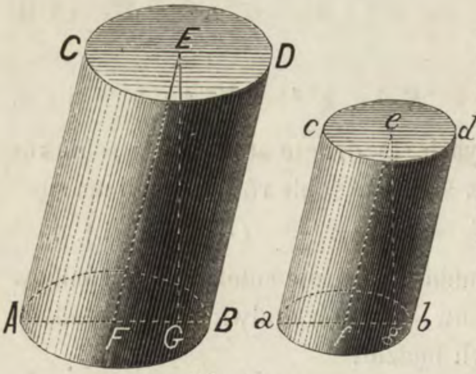


Fig. 124.

Założenie. Niech będą np. dwa walce podobne $ABCD$ i $abcd$ (fig. 124), mam dowieść, że one mają się do siebie jak sześciany ze średnic podstaw.

Dowodzenie. Z punktów E i e spuszczam proste EG i eg prostopadłe do podstaw AB i ab przez co utworzą się dwa trójkąty podobne EFG i efg, bo mają kąt $F=f$, gdyż walce $ABCD$ i $abcd$ z założenia są sobie podobne (nº 204), i kąt $G = g$ jako kąty proste.

Koła mają się do siebie jak kwadraty ze średnic, a więc ma się:

$$1)\quad \text{Koło } AB : \text{Koła } ab = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$$

Z podobieństwa trójkątów EFG i efg wypada, że ma się:

$$EG : eg = EF : ef$$

a że: $EF : ef = AB : ab$ (nº 204)

więc:

$$2)\quad EG : eg = AB : ab$$

Mnożąc proporcye 1) i 2) przez siebie, jest:

$$3)\quad \text{Koło } AB \times EG : \text{Koła } ab \times eg = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$$

Lecz Koło $AB \times EG$ oznacza objętość walca $ABCD$ (nº 95), tak samo jak Koło $ab \times eg$ objętość walca $abcd$, zatém ma się:

$$4)\quad ABCD : abcd = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$$

A że ma się:

$$AB : ab = FE : fe$$

czyli:

$$5)\quad \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3 = \overline{FE}^3 : \overline{fe}^3$$

W proporcyach więc 4) i 5) stosunek $\overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$ jest wspólny, zatém ma się także:

$$ABCD : abcd = \overline{FE}^3 : \overline{fe}^3.$$

Czyli, że *walce podobne mają się do siebie i t. d.*, co było do okazania.

Gdybyśmy w proporcyi 3) wyrazy pierwszego stosunku podzielili przez 3, to mielibyśmy:

$$\frac{\text{Koło } AB \times EG}{3} : \frac{\text{Koła } ab \times eg}{3} = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3.$$

Lecz Koło $\frac{AB \times EG}{3}$ tak samo jak Koło $\frac{ab \times eg}{3}$ oznaczają objętości ostrokręgów (nº 111), zatém *ostrokręgi podobne mają się do siebie i t.d.*, co także było do okazania.

207. Oznaczywszy promień jednéj kuli przez R a drugiéj przez r, bryłowatość pierwszéj przez K, drugiéj przez k, powierzchnię pierwszéj kuli przez P, drugiéj przez p, nakoniec okrąg koła wielkiego pierwszéj kuli przez O, a drugiéj przez o, będzie:

$$O = 2\pi R, \qquad o = 2\pi r$$
$$P = 4\pi R^2, \qquad p = 4\pi r^2$$
$$K = \tfrac{4}{3}\pi R^3, \qquad k = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

a ztąd:

$$1)\quad O : o = 2\pi R : 2\pi r$$
$$2)\quad P : p = 4\pi R^2 : 4\pi r^2$$
$$3)\quad K : k = \tfrac{4}{3}\pi R^3 : \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Wyrazy drugiego stosunku w proporcyi 1) podzieliwszy przez 2π, w proporcyi 2) przez 4π, a nakoniec w proporcyi 3) przez $\frac{4}{3}\pi$, będzie:

$$O : o = R : r$$
$$P : p = R^2 : r^2$$
$$K : k = R^3 : r^3$$

Czyli, że *okręgi kół wielkich mają się do siebie jak promienie kul, powierzchnie kul jak kwadraty, i nakoniec kule jak sześciany z tychże promieni.*

ROZDZIAŁ VIII.

ZADANIA TEORETYCZNE I PRAKTYCZNE.

1° TEORETYCZNE.

1. Przez punkt dany poprowadzić linię prostą, którąby się przecięła z dwiema innemi prostemi nie leżącemi na jednéj płaszczyznie.

2. Linia prosta równo nachylająca się do trzech prostych przechodzących przez jéj spodek i na jednéj płaszczyznie leżących, jest do tejże płaszczyzny prostopadłą.

3. Jakie jest miejsce jeometryczne *) punktów w przestrzeni równooddalonych od trzech punktów nie leżących na jednéj linii prostéj?

4. Poprowadzić od linii danéj, równoodległą, którąby się przecięła z dwiema prostemi nie leżącemi na jednéj płaszczyznie.

5. Linia i płaszczyzna prostopadłe do jednéj prostéj, są od siebie równoodległe.

---

*) Miejscem jeometryczném nazywa się zbiór punktów ułożonych według pewnego prawa. I tak np. można powiedzieć, że okrąg koła jest to miejsce jeometryczne punktów równo oddalonych od punktu danego.

Podobnież miejsce jeometryczne punktów równooddalonych od końców danéj prostéj, jest prostopadła do téj prostéj z jéj środka wyprowadzona i t. p.

6. Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę równoodległą od drugiéj prostéj danéj.

7. Jeżeli dwie płaszczyzny równoodległe będą przecięte trzecią płaszczyzną, to kąty dwuścienne ostre, tak samo jak kąty dwuścienne rozwarte, będą między sobą równe, a każdy ostry z rozwartym ważyć będą dwa kąty proste.

8. Kąty dwuścienne mające krawędzie równoodległe są sobie równe lub spełniają się do dwóch kątów prostych, gdy w pierwszym razie mają ściany od siebie równoodległe, a w drugim do siebie prostopadłe.

9. Dwie płaszczyzny prostopadłe do trzeciéj, przechodzące przez dwie proste od siebie równoodległe, są między sobą równoodległe. A ztąd rzuty *) dwóch prostych równoodległych, są od siebie równoodległe.

10. Jeżeli prosta jest prostopadłą do płaszczyzny danéj, rzut téj prostéj na inną płaszczyznę przecinającą się z płaszczyzną daną jest prostopadły do wspólnego przecięcia się tych płaszczyzn.

11. Jakie jest miejsce jeometryczne punktów równooddalonych od dwóch płaszczyzn przecinających się z sobą?

12. Jakie jest miejsce jeometryczne punktów równooddalonych od trzech ścian kąta trójściennego?

13. Jakie jest miejsce jeometryczne punktów równooddalonych od trzech krawędzi kąta trójściennego?

---

*) *Rzutem punktu* nazywa się spodek prostopadłéj z tego punktu na płaszczyznę daną spuszczonéj.

Jeżeli przez prostę daną poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny danéj, to wspólne przecięcie się tych płaszczyzn będzie *rzutem prostéj* danéj. Albo inaczéj, rzutem prostéj danéj jest miejsce jeometryczne spodków prostopadłych spuszczonych z punktów danéj prostéj na płaszczyznę daną.

14. Płaszczyzny prostopadłe do ścian kąta trójściennego przechodzące przez krawędzie tymże ścianom przeciwległe, przecinają się w jednéj linii prostéj.

15. Przeciąć kąt bryłowy czworościenny jakikolwiek płaszczyzną, tak aby przecięcie było równoległobokiem.

16. Nakreślić czworościan, znając położenie jednego punktu z każdéj krawędzi.

17. Nakreślić sześcian, mając długość jego przekątnéj.

18. Wyznaczyć wszystkie części sześcianu wystawionego na prostéj równéj summie dwóch innych prostych danych.

19. Wyznaczyć wszystkie części sześcianu wystawionego na summie 3^{ch}, 4^{ch} lub n prostych danych.

20. Znaleźć w liniach prostych stosunek prostopadłościanu $A \times B \times C$ do prostopadłościanu $a \times b \times c$.

21. Nakreślić kulę przechodzącą przez trzy punkta dane, i styczną do płaszczyzny danéj.

22. Nakreślić kulę przechodzącą przez trzy punkta dane, i styczną do kuli danéj.

23. Wystawić walec, mający wysokość równą danéj, i w którymby powierzchnia boczna równą była summie dwóch podstaw.

24. Nakreślić ostrokrąg, styczny do kuli danéj, i któregoby objętość miała się do objętości kuli jak 3 do 1.

25. Mając daną krawędź czworościanu foremnego, wynaleźć objętość ośmiościanu, mającego swoje wierzchołki w środkach krawędzi tegoż czworościanu.

26. Z danéj krawędzi sześcianu, wyznaczyć objętość ośmiościanu, mającego swoje wierzchołki w środkach ścian tegoż sześcianu.

27. Z danéj krawędzi ośmiościanu foremnego wyznaczyć objętość sześcianu, mającego swoje wierzchołki w środkach ścian tegoż ośmiościanu.

28. Z danéj krawędzi sześcianu wyznaczyć objętość czworościanu foremnego utworzonego z połączenia przekątnemi wierzchołków przeciwległych sześciu jego ścian.

29. Z danéj krawędzi czworościanu foremnego, wyznaczyć objętość sześcianu utworzonego przez płaszczyzny poprowadzone przez każdą z sześciu krawędzi tegoż czworościanu równoodlegle od krawędzi im nie przyległych.

30. Mając jedną z krawędzi dwudziestościanu foremnego, wyznaczyć jego powierzchnię.

31. Nakreślić trójkąt kulisty, mając dane jego trzy boki.

32. Nakreślić trójkąt kulisty, mając dane jego trzy kąty.

33. Nakreślić trójkąt kulisty, mając dany jeden kąt, bok przyległy i summę dwóch innych boków.

34. Nakreślić trójkąt kulisty, mając dany jeden bok, kąt przyległy i summę dwóch innych kątów.

35. Mając dany: jeden kąt, bok przyległy i różnicę dwóch innych boków, wykreślić trójkąt kulisty.

36. Mając dany: jeden bok, kąt przyległy i różnicę dwóch innych kątów, wykreślić trójkąt kulisty.

37. Dany wielokąt kulisty zamienić na trójkąt jemu równoważny.

38. Wykreślić czworokąt kulisty równoboczny, mając dany jego kąt i powierzchnię.

2° PRAKTYCZNE.

1. Mając długość trzech krawędzi prostopadłościanu $a = 3,3$ stóp, $b = 4,4$ st., $c = 5,5$ st., znaleźć jego powierzchnię boczną B, całkowitą C i objętość $Ob.$

(B=84,7 st.□; C=113,74 st.□; $Ob.$=79,86 st. kub.).

2. Mając powierzchnię sześcianu równą 15,36 st.□, znaleźć jego objętość $Ob.$

($Ob.$ = 4,096 st. kub.).

3. Ile osób przez dzień jeden wyżyć może, bez uduszenia się, w sali mającéj 12,5 metr. długości, 6 metr. szerokości i 3,2 metr. wysokości, wiedząc że człowiek potrzebuje dziennie 4 metry kub. powietrza.

(Liczba osób = 60).

4. Mając daną średnicę kloca dębowego = 0,3 metra, długość = 2,5 metr. i ciężkość gatunkową drzewa dębowego = 1,17, znaleźć jego objętość $Ob.$ i ciężar W w kilogramach.

($Ob.$ = 0,176625 metr. kub. = 176,625 decim. kub.; W = 206,65125 kilogr).

5. Mając dany bok podstawy graniastosłupa sześciokątnego foremnego równy 4 st. i wysokość tegoż graniastosłupa równą 8 st., wynaleźć jego powierzchnię boczną B, całkowitą C, i objętość $Ob.$).

(B = 192 st.□; C = 275,136 st.□; $Ob.$ = 332,544 stóp kubicznych.).

6. Znaleźć powierzchnię boczną B, całkowitą C i objętość $Ob.$ ostrosłupa czworokątnego foremnego, wiedząc że bok podstawy = 6 stóp, a wysokość ostrosłupa = 4 st.

(B = 60 st.□; C = 96 st.□; $Ob.$ = 48 st. kub.).

7. Znaleźć powierzchnię boczną B i całkowitą C kloca ostrosłupowego czworokątnego foremnego, wiedząc że bok podstawy dolnéj = 28 cali, górnéj 22 cale, a krawędź 5 cali.

(B = 400 cali □; C = 1668 cali □).

8. Znaleźć objętość kloca ostrosłupowego czworokątnego foremnego, wiedząc że bok podstawy dolnéj = 5 cali, górnéj 2 cale, a wysokość 17,01 cala.

$Ob.$ = 221,13 cali).

9. Znaleźć objętość kloca ostrosłupowego wielokątnego, wiedząc że jego wysokość = 9,6 stóp, podstawa mniejsza równa 2,25 st. □, i stosunek boku téj podstawy z odpowiednim bokiem podstawy większéj równy 3 : 4.

(Oznaczywszy przez x powierzchnię podstawy większéj, mamy najprzód $x : 2{,}25 = 4^2 : 3^2$, zkąd $x = 4$. Objętość więc szukana będzie:

$$\tfrac{1}{3}\left(4 + 2{,}25 + \sqrt{4 \times 2{,}25}\right) 9{,}6 = 29{,}6 \text{ st. kub.}).$$

10. Znaleźć objętość $Ob.$ kloca graniastosłupowego trójkątnego, wiedząc że jego podstawa = 21 calom □; odległość pierwszego wierzchołka od tejże podstawy $a = 7{,}7$; drugiego $b = 2{,}2$; trzeciego $c = 5{,}5$.

($Ob.$ = 107,8 st. kub.).

11. Znaleźć powierzchnię boczną B, całkowitą C i objętość $Ob.$ walca prostego, wiedząc że okrąg jego podstawy = 62,8 cali, a wysokość 22 cale.

(B = 1381,6 st.□; C = 2009,6 st.□; $Ob.$ = 6908 stóp kubicznych).

12. Znaleźć powierzchnię boczną B, powierzchnię całą C i objętość $Ob.$ ostrokręgu prostego, którego tworząca równa 5 stóp, a wysokość 4 stopy.
($B = 47,1$ st. □; $C = 75,52$ st. □; $Ob. = 37,68$ stóp kubicznych).

13. Znaleźć powierzchnię boczną kloca ostrokręgowego, wiedząc że promień podstawy górnéj = 3 stopy, dolnéj 5 stóp, a tworząca 7 stóp.
(Pow bocz. = 175,84 stóp □).

14. Znaleźć objętość $Ob.$ kloca ostrokręgowego, wiedząc że promień podstawy górnéj = 3 stopy, dolnéj 5 stóp, a tworząca 7 stóp.
($Ob. = 344,03096$ st. kub.).

15. Znaleźć promień r i powierzchnię P kuli ziemskiéj, wiedząc że czwarta część jéj południka = 10 milionów metrów.
($r = 6366200$ metrów.
$P = 509296000$ milionów metrów □).

16. Jaka jest objętość $Ob.$ kuli ziemskiéj w myriametrach kubicznych i ciężkość jéj g w kilogramach, wiedząc że obwód jéj = 40 milionów metrów, a średnia ciężkość gatunkowa = 4,5.
($Ob. = 1080759000$ myriametrów kubicznych.
$g = 4863420000000000000000000$ kilogramów).

17. Znaleźć promień kuli r, któréj powierzchnia równa 728,4926 stóp.
($r = 7,61$ stopy).

18. Znaleźć promień kuli r mając jéj objętość równą 904,32 cali kub.
($r = 6$ cali).

19. Znaleźć powierzchnię trójkąta kulistego, którego kąt $A = 85^0 + 17'$; $B = 103^0 + 35'$; $C = 67^0 + 49'$ a promień kuli = 3 stóp.

(Szukana powierzchnia = 12,0576 stóp □).

20. Znaleźć objętość kuli opisanéj na sześcianie, którego krawędź = 2 stóp.

(Szukana objętość = 21,67404184 st. kub.).

21. Znaleźć objętość kloca kulistego, wiedząc że promień podstawy większéj R = 5 stóp, promień podstawy mniejszéj r = 3 st. a wysokość jego w = 4 st.

(Szukana objętość = 247,01 st. kub.).

KONIEC.

Krysiński — KURS SOLIDOMETRYI