РОЛЬ ПРОФЕССОРА ВЕЙЕРШТРАССА ВЪ СОВРЕМЕННОМЪ РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ.

(Рѣчь, читанная въ засѣданіи Физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей при Казанскомъ университетѣ 13 октября 1885 г. проф. *А. В. Васильевымъ*).

Главная характеристическая особенность, которою отличается математическій анализъ настоящаго столѣтія отъ анализа XVIII столѣтія, есть безспорно та роль, которую играютъ въ современномъ анализѣ комплексное число, комплексная перемѣнная. Въ XVIII вѣкѣ еще смотрѣли на комплексное число, какъ на символъ, съ которымъ невозможно строго оперировать; смотрѣли на результаты, подобные равенству $\frac{\pi}{2}=\frac{\log\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$, какъ на курьезъ, не имѣющій ни малѣйшаго значенія и только свидѣтельствующій о томъ, какъ осторожно нужно обращаться съ мнимыми числами.

Какую противоположную картину представляетъ анализъ XIX вѣка! На порогѣ новаго вѣка (1799 г.) въ первомъ точномъ доказательствѣ, данномъ теоремѣ о существованіи корня для всякаго алгебраическаго уравненія, «princeps mathematicorum» Гауссъ кладетъ въ основаніе доказательства геометрическое представленіе комплексныхъ чиселъ [1]). Въ 1806 г. Аргандъ [2]) излагаетъ систематически и независимо отъ Гаусса ту-же идею. Наконецъ, въ письмѣ Гаусса къ Бесселю отъ 18 декабря 1811 г. мы находимъ у Гаусса основанія новѣйшей теоріи функцій отъ комплексныхъ чиселъ, нѣсколько позже опять также независимо отъ Гаусса созданной Коши. Въ этомъ замѣчательномъ для Исторіи математики въ XIX столѣтіи письмѣ Гауссъ возстаетъ противъ взгляда математиковъ на комплексныя числа, какъ на ненужный наростъ (Ueberbein). По мнѣнію Гаусса, напротивъ, «мнимыя величины $a+bi$ должны пользоваться въ царствѣ величинъ равными правами съ вещественными, тѣмъ болѣе, что рѣчь идетъ не о практической пользѣ, но объ Анализѣ, какъ о самостоятельной наукѣ. Эта наука можетъ только потерять въ порядкѣ и закругленности отъ оттѣсненія на заднiй планъ фиктивныхъ (fingirte) чиселъ и принуждена будетъ въ такомъ случаѣ на каждомъ шагу придавать общимъ истинамъ тягостныя ограниченія [3])».

Въ этомъ-же письмѣ Гауссъ даетъ опредѣленіе комплекснаго интеграла и высказываетъ теорему о независимости такого интеграла отъ пути интегрированія при условіи, что подъ-интегральная функція между двумя путями не обращается въ безконечность. Эта теорема носитъ названіе теоремы Коши, такъ какъ она была въ первый разъ опубликована французскимъ математикомъ въ 1825 г. [4]), когда письмо Гаусса отъ 1811 г. было скрыто въ архивѣ Бесселя.

Въ цитированныхъ мною мѣстахъ письма Гаусса въ опредѣленныхъ и ясныхъ словахъ высказана та основная мысль, которая служитъ руководящею нитью въ большей части трудовъ XIX вѣка по Математическому Анализу.

Гауссъ, Абель и Якоби, вводя мнимыя величины въ теорію эллиптическихъ функцій, раскрываютъ замѣчательное свойство двоякой періодичности и, пользуясь имъ, даютъ аналитическія выраженія эллиптическихъ функцій. Благодаря введенію тѣхъ-же мнимыхъ величинъ, Коши вноситъ необычайную простоту и стройность въ теорію рядовъ, даетъ массу новыхъ опредѣленныхъ интеграловъ и выводитъ почти всѣ старые, полагаетъ основаніе точной теоріи интегрированія дифференціальныхъ уравненій помощью рядовъ, даетъ теоремы, служащія для вычисленія мнимыхъ корней уравненія и вещественныхъ системы двухъ совокупныхъ уравненій. Съ той-же точки зрѣнія Пюизе изучаетъ алгебраическія функціи, Риманнъ систематизируетъ теорію Абелевыхъ функцій, наконецъ на нашихъ глазахъ Фуксъ и Пуанкаре съ необычайнымъ успѣхомъ двигаютъ впередъ теорію интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій и дарятъ Анализу обширную область новыхъ функцій.

Таковы многоразличные успѣхи, которыми обязанъ Анализъ введенію комплексной перемѣнной въ качествѣ новаго орудія изслѣдованій.

Въ исторіи науки постоянно повторяются примѣры пользованія новымъ изобрѣтеннымъ орудіемъ или примѣненія новой идеи во всѣхъ направленіяхъ раньше, чѣмъ создана точная теорія орудія, или строго опредѣлены тѣ предѣлы, въ которыхъ можетъ быть примѣнима извѣстная идея. Это увлеченіе идеею или гипотезою имѣетъ свою хорошую сторону; оно обыкновенно вызываетъ такое количество работъ, какого никогда не вызвалъ-бы мѣрный и осторожный ходъ развитія, не забѣгающій впередъ прежде, чѣмъ сглажены всѣ трудности пути назади. Примѣры, подтверждающіе сказанное, на каждомъ шагу: возьмите увлеченія идеею Дарвина о борьбѣ за существованіе, увлеченія идеею Спенсера и Шеффле объ аналогіи общества и животнаго организма. Приходитъ время, и къ подобнымъ идеямъ начинаютъ относиться съ бо́льшею осторожностью; но тѣмъ не менѣе какъ должна быть всегда благодарна наука этимъ блестящимъ идеямъ и гипотезамъ, которыя заставляли работать, собирать, систематизировать факты именно благодаря своему блеску, сильно дѣйствующему на впечатлительные умы.

То же самое повторялось не разъ и въ Исторіи математики. Мощное содѣйствіе, оказанное Анализомъ безконечно-малыхъ созданію системы міра и теоріи вещества, шли рука объ руку съ самымъ неяснымъ представленіемъ о природѣ того орудія, которымъ работали: безконечно-малаго. Даже Эйлеръ въ своемъ Дифференціальномъ Исчисленіи пишетъ: «Quaerenti ergo quid sit quantitas infinite parva in Mathesi, respondemus eam esse revera $=O$».

То-же самое обстоятельство повторилось и въ теоріи функцій отъ комплексной перемѣнной. Подробности этой теоріи, ея важныя приложенія, были разработаны, когда основанія самой теоріи представлялись еще неясными и неопредѣленными. На вопросъ, что такое функція отъ комплекснаго числа $x+yi$, отвѣты давались различные. Только подъ конецъ своей жизни Коши отвѣчалъ опредѣленно: «всякая величина $u+iv$, гдѣ u и v суть функціи отъ x и y», и придавалъ эпитетъ *моногенныхъ* тѣмъ изъ нихъ, которыя для каждаго значенія перемѣнной $x+iy$ имѣютъ производную, независимую отъ величины $\frac{dy}{dx}$ [5]).

Риманнъ, умъ котораго отличался тѣмъ философскимъ направленіемъ, котораго недоставало Коши, Риманнъ, получившій притомъ математическое образованіе въ Гёттингенской школѣ Гаусса, съ самаго начала своей краткой, но блестящей, научной карьеры задался цѣлью положить «основанія для общей теоріи функцій комплексной перемѣнной». Такое именно заглавіе носитъ его докторская диссертація, представленная Гёттингенскому философскому факультету въ 1851 г. [6]). На этой работѣ вполнѣ отразилось вліяніе той школы, въ которой учился Риманнъ. Гауссъ, какъ видно изъ цитированнаго выше письма, съ присущею ему ясностью созналъ необходимость изложенія Анализа, какъ самостоятельной науки, логически развивающей свои понятія изъ своей собственной сущности. Но въ то же время Гауссъ былъ глубокій геометръ, и его философскій умъ влекъ его и къ отвлеченнымъ вопросамъ о пространствѣ, и къ самостоятельной работѣ для расширенія нашихъ знаній объ окружающемъ насъ мірѣ, къ созданію новыхъ вѣтвей математической физики (земной магнитизмъ). Вліяніе Гаусса въ этихъ направленіяхъ, вліяніе Леженъ-Дирихле, которому такъ много обязана теорія потенціала, не могло не отразиться на Риманнѣ. Ф. Клейнъ высказываетъ въ своей интересной книгѣ: «Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen» мысль, что соображенія, почерпнутыя изъ гидродинамики, и послужили главною основою теоріи Риманна. И дѣйствительно, въ основѣ теоріи Риманна лежитъ уравненіе логариѳмическаго потенціала: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Имъ пользуется Риманнъ для самаго опредѣленія функціи отъ комплексной перемѣнной. Имъ и такъ называемымъ принципомъ Дирихле пользуется Риманнъ для вывода свойствъ функціи отъ комплексной перемѣнной. Основанія, положенныя такимъ образомъ Риманномъ для теоріи функцій отъ комплексной перемѣнной, не отличаются элементарностью; притомъ вопросъ объ условіяхъ примѣненія принципа Дирихле — вопросъ трудный и до сихъ поръ еще не вполнѣ выясненный въ наукѣ.

Теорія функцій отъ комплексной перемѣнной не имѣла такимъ образомъ и послѣ Риманна простыхъ и элементарныхъ основаній. Дать такія основанія теоріи функцій, а слѣдовательно и всему Анализу—такова была цѣль, которую преслѣдовалъ въ теченіе своей ученой дѣятельности одинъ изъ старѣйшихъ и знаменитѣйшихъ современныхъ математиковъ Европы — профессоръ Вейерштрассъ, семидесяти - лѣтнюю годовщину дня рожденія котораго готовится праздновать 31 октября н. с. вся математическая Германія при несомнѣнномъ сочувствіи всѣхъ, кому дороги интересы математической науки.

Первыя ученыя работы проф. Вейерштрасса, получившаго, подобно знаменитымъ математикамъ XVII столѣтія Ферма и Лопиталю, первоначально юридическое образованіе, были посвящены теоріи абелевыхъ и эллиптическихъ функцій. Въ теорію этихъ функцій Вейерштрассъ ввелъ новый элементъ; вмѣсто Якобіевыхъ функцій *тета* онъ основалъ какъ теорію эллиптическихъ, такъ и теорію абелевыхъ функцій на изученіи функцій, представляющихся абсолютно сходящимися степенными строками для всѣхъ значеній аргумента. Въ тѣсной связи съ этимъ первымъ результатомъ, опубликованнымъ въ мемуарѣ: «Theorie der Abelschen Functionen» (Crelle's Jour. Bd. 51) [7]) и сразу выдвинувшимъ Вейерштрасса въ первый рядъ между современными математиками, находится созданная Вейерштрассомъ теорія аналитическихъ функцій.

Исходнымъ пунктомъ въ этой теоріи служитъ абсолютно-сходящаяся степенная строка (Potenzreihe). Если строка сходима для всѣхъ значеній комплексной перемѣнной, то она представляетъ собою аналитическую функцію, имѣющую характеръ цѣлой; если-же строка сходима только внутри извѣстнаго круга съ центромъ a, то она представляетъ собою одинъ элементъ аналитической функціи (Functionenelement) $f(x, a)$. Для каждой точки b, лежащей внутри круга сходимости, могутъ быть вычислены значенія функціи и всѣхъ ея производныхъ и слѣдовательно по теоремѣ Тайлора можетъ быть выведена другая степенная строка, кругъ сходимости которой будетъ выходить за предѣлы перваго. Эта новая степенная строка, новый элементъ функціи, называется продолженіемъ (Fortsetzung) перваго и обозначается $f(x, a, b)$. Ясно, что изъ одного элемента $f(x, a)$ могутъ быть выведены строки, подобныя $f(x, a, b)$ въ безконечномъ числѣ; изъ каждой изъ этихъ строкъ—новыя строки въ безконечно-большемъ числѣ $f(x, a, b, c)$ и т. д.

Совокупность всѣхъ этихъ строкъ, всѣхъ элементовъ, получающихся продолженіемъ изъ одного первоначальнаго или основнаго и составляетъ *аналитическую функцію*.

Изъ этого краткаго указанія [8]) видно, какъ ясно и просто основаніе теоріи функцій Вейерштрасса. Вмѣсто опредѣленій функціи общихъ и неопредѣленныхъ, Вейерштрассъ выходитъ изъ степенной строки, представляющей обобщеніе цѣлаго полинома; для него только тогда функція можетъ быть предметомъ изученія въ Анализѣ—аналитическою функціею, когда она можетъ быть представлена подъ видомъ степенной строки, мѣняющей впрочемъ коеффиціенты при измѣненіи значеній перемѣнной.

Въ этомъ отношеніи Вейерштрассъ является прямымъ послѣдователемъ Лагранжа. Безсмертный авторъ «Théorie des fonctions analytiques» сдѣлалъ попытку, основавъ весь анализъ на теоріи разложенія функцій въ строки, привести его такимъ образомъ къ алгебраическому Анализу конечныхъ количествъ; но теоріи Лагранжа не достаетъ общности и строгости, такъ какъ онъ разсматривалъ только строки, расположенныя по степенямъ вещественной перемѣнной и не обращалъ должнаго вниманія на условія сходимости. Для

Вейерштрасса—основаніе теоріи функцій также степенная строка, но эта строка должна быть сходящаяся и потому имѣетъ значеніе только въ извѣстномъ кругѣ сходимости. Вейерштрассу удалось такимъ образомъ точно и ясно обосновать теорію функцій отъ комплексной перемѣнной, блестящіе успѣхи которой кладутъ рѣзкій отпечатокъ на всю современную математику. Ему удалось создать теорію, которая своею осязательностью и простотою рѣзко отличается отъ теорій Риманна и Коши, основанныхъ или на опредѣленіи функціи, неуловимомъ по своей общности или на уравненіи съ частными производными, отчасти даже (какъ у Риманна) на соображеніяхъ, почерпнутыхъ изъ геометріи положенія. Ему удалось такимъ образомъ на дѣлѣ систематически оправдать мысль Гаусса о самостоятельности Анализа, какъ науки.

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

ПРИМѢЧАНІЯ.

[1]) Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse (Werke Bd. III p. 1).

[2]) Essai sur une manière de représenter bes quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Paris. 1806. (перепечатано въ 1874 г.).

[3]) Gauss und Bessel. Briefwechsel. Herausgegeben auf Veranlassug der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften. Leipzig. 1880. S. 156.

[4]). Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires. 1825.

[5]) Exercices d'Analyse et de Physique mathématique 1847. T. 4. Sur les fonctions des quantités géometriques. 2) Sur les différentielles de quantités algebriques ou géometriques et sur les derivées des fonctions de ces quantités.

Sur les fonctions de variables imaginaires. Comptes rendus 1851. 1 Sem. p. 160.

Sur les fonctions monotypiques et monogènes. Ibidem. p. 484. Подробное изложеніе взглядовъ Коши въ разныя эпохи на комплексныя числа и ихъ функціи можно найти у Casorati: Teorica delle funzioni di variabili complesse. p. 64—72.

[6]) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse (Inauguraldissertation. Göttingen. 1851). (Werke p. 1).

[7]) См. также Beitrag zur Theorie der Abel'schen Functionen. Braunsberg 1849. Zur Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle's J. Bd. 47.

[8]) Желающихъ болѣе подробно ознакомиться съ теоріею аналитическихъ функцій Вейерштрасса отсылаемъ къ изложенію ея, сдѣланному проф. Пинкерле

(Pincherle) въ Giornale di mathematiche, vol. XVIII.—Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. C. Weierstrass.

См. также. Rausenberger. Theorie der eindeutigen periodischen Functionen. 1884.

ДѢЯТЕЛЬНОСТЬ РУССКИХЪ УЧЕНЫХЪ ОБЩЕСТВЪ ВЪ ОТНОШЕНІИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ ВЪ 1884 ГОДУ.

Московское Математическое Общество.

Московское Математическое Общество—первое по времени основанія изъ русскихъ математическихъ обществъ—состоитъ при Московскомъ Университетѣ. Оно образовалось во второй половинѣ 60-тыхъ годовъ изъ кружка любителей математическихъ наукъ, составившагося въ концѣ 1864 года въ Москвѣ. Такъ какъ въ этомъ случаѣ утвержденіе Устава Общества и открытіе его дѣйствій были только актами оффиціальнаго признанія того, что уже существовало на дѣлѣ ранѣе, то для ознакомленія съ условіями, породившими существованіе Общества, и съ цѣлями, ему поставленными, необходимо обратиться къ первой фазѣ его существованія то-есть къ существованію въ видѣ кружка. Вотъ что читаемъ мы по этому поводу во Введеніи къ первому тому Математическаго Сборника, представлявшему собраніе трудовъ кружка за два первые года его существованія и вышедшему въ свѣтъ въ 1866 году.

«Несомнѣнно, что успѣхамъ ученыхъ занятій чрезвычайно много способствуютъ собранія лицъ, посвятившихъ себя изученію одной, или нѣсколькихъ сродныхъ между собою наукъ: при такомъ взаимномъ общеніи ученыхъ поддерживается съ одной стороны интересъ къ занятіямъ, съ другой стороны самыя занятія облегчаются, вслѣдствіе выгоднаго распредѣленія ихъ, вслѣдствіе полезныхъ указаній, различныхъ воззрѣній на предметъ и т. п. Подтвержденіе этого можно видѣть въ многочисленности ученыхъ обществъ и съѣздовъ, число которыхъ увеличивается съ каждымъ годомъ, и въ обиліи ученыхъ корреспонденцій, которыми наполняются періодическія изданія. Если это справедливо вообще для всѣхъ наукъ, то едва ли не болѣе всего справедливо для наукъ математическихъ, особаго рода трудности которыхъ дѣлаютъ часто весьма важнымъ всякое даже незначительное замѣчаніе; извѣстно, что математическія науки развиваются особенно успѣшно тамъ, гдѣ существуетъ наиболѣе средствъ для сношеній между учеными».

«Московскіе математики уже давно сознавали необходимость соединиться для общаго труда. Многіе изъ нихъ присоединялись къ Московскому Обществу Испытателей Природы и изрѣдка помѣщали свои статьи въ его Бюллетенѣ: но этимъ цѣль не достигалась, потому что математическая спеціальность далеко не въ характерѣ занятій этого Общества».

«Въ случаѣ недоразумѣній или затрудненій чаще всего обращались къ покойному профессору Николаю Дмитріевичу Брашману, замѣчательная любовь котораго къ наукѣ извѣстна не одному Московскому Университету; у него находили и радушный пріемъ, и полезный совѣтъ, и необходимыя литературныя пособія, благодаря его богатой математической библіотекѣ. Когда Н. Д. Брашманъ окончилъ службу при Московскомъ Университетѣ (въ 1864 году), то, по его мысли, преподаватели математическихъ наукъ въ Университетѣ и нѣкоторыя другія лица положили собираться у него по одному разу въ мѣсяцъ для ученыхъ математическихъ бесѣдъ. Такимъ образомъ возникъ небольшой кружокъ, который составляли первоначально слѣдующія лица: Н. Д. Брашманъ, А. Ю. Давидовъ, Ѳ. А. Бредихинъ, Н. А. Любимовъ, Ѳ. А. Слудскій, В. Я. Цингеръ, М. Ѳ. Хандриковъ, К. А. Рачинскій, Н. Н. Алексѣевъ, А. В. Лѣтниковъ, К. М. Петерсонъ и Р. О. Блажеевскій; въ послѣдствіи къ нимъ присоединились: Н. В. Бугаевъ, кн. С. С. Урусовъ, Е. Ѳ. Сабининъ и С. А. Юрьевъ».

«Цѣль дѣятельности кружка заключается во взаимномъ вспомоществованіи при занятіяхъ математическими науками. Для достиженія этой цѣли каждый изъ членовъ избираетъ себѣ извѣстный отдѣлъ науки и обязуется ежегодно, въ заранѣе опредѣленные сроки, представлять сообщенія по своему отдѣлу; сообщенія могутъ состоять, какъ изъ самостоятельныхъ изслѣдованій, такъ и изъ отчетовъ о новѣйшихъ успѣхахъ науки. Этимъ путемъ значительно облегчается необходимый для каждаго и часто не легкій трудъ слѣдить за обширною математическою литературою: благодаря распредѣленію этого труда, всѣ члены знакомятся съ успѣхами по каждому отдѣлу науки чрезъ посредство спеціалиста, имѣющаго всегда болѣе возможности объяснить и устранить всякаго рода затрудненія».

«Такимъ образомъ уже два года, въ періоды отъ сентября до апрѣля мѣсяца, происходятъ ежемѣсячныя собранія для математическихъ бесѣдъ» (стр- VII—IX).

Являясь прототипомъ для русскихъ математическихъ обществъ, образовавшихся впослѣдствіи или самостоятельно (Харьковское Математическое Общество) или въ видѣ секцій при Обществахъ Естествоиспытателей (Казанское и Новороссійское), Московское Математическое Общество имѣло, по мнѣнію нѣкоторыхъ, то же значеніе также и по отношенію къ Французскому Математическому Обществу. Это мнѣніе основано, впрочемъ, на недоразумѣніи. Невольнымъ виновникомъ послѣдняго была рѣчь Шаля, произнесенная имъ при представленіи въ Парижскую Академію Наукъ 1-го нумера Бюллетеня Французскаго Общества (см. выше стр. 81—82). Въ этой рѣчи, говоря объ уже существующихъ математическихъ Обществахъ, Шаль называетъ также и Московское, но тутъ-же онъ совершенно опредѣленного воритъ, что прототипомъ для Французскаго Математическаго Общества послужило такое-же Общество въ Лондонѣ или даже черезъ посредство послѣдняго само Лондонское Астрономическое Общество.

Органомъ Московскаго Математическаго Общества, предназначеннымъ почти исключительно для помѣщенія работъ его членовъ, служитъ «Математическій Сборникъ», котораго въ текущемъ году выходитъ уже XII-ый томъ. Такъ какъ протоколы Общества не печатаются, то единственнымъ источникомъ для сужденія о его дѣятельности является содержаніе его органа, къ которому поэтому мы и должны обратиться, чтобы добыть свѣдѣнія, касающіяся дѣятельности Общества въ 1884 году.

Кромѣ указаннаго сейчасъ главнаго источника въ нашемъ распоряженіи находится еще краткій Отчетъ Общества Университету, при которомъ оно состоитъ. Вотъ этотъ Отчетъ. «Въ 1884 году засѣданія математическаго общества происходили въ зданіи университета. На этихъ засѣданіяхъ дѣлались сообщенія членами общества по разнымъ отдѣламъ чистой и прикладной математики. Общество докончило изданіе XI тома Математическаго Сборника и приступило къ печатанію XII тома. Средства общества состояли изъ правительственной субсидіи въ 1000 (тысячу) рублей. Въ члены общества избранъ Александръ Николаевичъ Мясоѣдовъ.» *)

Въ вышедшихъ въ 1884 году двухъ выпускахъ (третьемъ и четвертомъ) XI тома Математическаго Сборника помѣщены слѣдующія статьи. *А. В. Лѣтникова.* «Объ опредѣленныхъ интегралахъ, со-

*) Рѣчь и отчетъ, читанныя въ торжественномъ собраніи Императорскаго Московскаго Университета 12-го января 1885 года. Стр. 110.

держащихъ функціи, удовлетворяющія гипергеометрическому уравненію» (стр. 327—415). *Н. В. Бугаева.* «Нѣкоторыя приложенія теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи функцій прерывныхъ.— Общіе числовые законы, вытекающіе изъ непосредственнаго разсмотрѣнія функцій Якоби» (стр. 415—457). *Ѳ. Е. Орлова.* «О квадратурѣ рулеттъ» (стр. 457—515). *Н. В. Бугаева.* «Нѣкоторыя приложенія теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи функцій прерывныхъ.—Общіе числовые законы, вытекающіе изъ разсмотрѣнія нѣкоторыхъ эллиптическихъ функцій» (стр. 515—603). *П. Назимова.* «О суммѣ чиселъ взаимно простыхъ съ даннымъ числомъ N и не превышающихъ другое число P» (стр. 603—611). *Н. Е. Жуковскаго.* «Выводъ основныхъ формулъ теоріи упругости» (стр. 611—616). *А. Мясоѣдова.* «Двѣ теоремы высшей алгебры» (стр. 616—632). *А. П. Минина.* «О наименьшемъ числѣ, имѣющемъ данное число дѣлителей» (стр. 632—638). Кромѣ того изъ статей, печатаемыхъ въ текущемъ году въ XII томѣ, помѣчены, какъ читанныя въ засѣданіяхъ Общества въ 1884 году, слѣдующія. *Мясоѣдова.* «Непосредственные способы опредѣленія низшаго предѣла положительныхъ корней и предѣловъ отрицательныхъ корней алгебраическаго уравненія» (стр. 22—42). *П. А. Некрасова.* «Рядъ Лагранжа и приближенныя выраженія функцій весьма большихъ чиселъ» (стр. 49—189). *П. А. Некрасова.* «Опредѣленіе неизвѣстныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ при весьма большемъ числѣ неизвѣстныхъ» (стр. 189—204).

Обѣ статьи проф. *Бугаева*, какъ видно между прочимъ и изъ ихъ заглавій, принадлежатъ къ серіи статей, названной авторомъ «Нѣкоторыя приложенія теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи функцій прерывныхъ». Первая изъ статей этой серіи появилась въ предыдущемъ выпускѣ (второмъ) XI тома Математическаго Сборника, вышедшемъ въ 1883 году. Эта статья озаглавлена «Частные числовые законы, вытекающіе изъ разсмотрѣнія эллиптическихъ постоянныхъ». Такъ какъ вступительныя въ эту статью слова автора бросаютъ свѣтъ на общія задачи предпринятаго имъ капитальнаго труда, а также отчасти и на руководящія при его выполненіи идеи, то мы считаемъ небезполезнымъ привести ихъ здѣсь вполнѣ. «Въ настоящей статьѣ мы излагаемъ различные частные случаи приложенія теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи функцій числовыхъ. Названіе теоріи числовыхъ или теоріи прерывныхъ функцій какъ болѣе общее мы предпочитаемъ названію теоріи чиселъ. Рядомъ со многими новыми теоремами, мы въ интересахъ самой системы изложенія не могли совершенно обойти нѣкоторыхъ предложеній, которыя уже были высказаны другими. Мы старались указать всякій разъ на эти теоремы, хотя бы онѣ были предложены безъ доказательства. Всѣ числовые законы, при которыхъ нѣтъ указаній, по всей вѣроятности, появляются въ первый разъ. Не ручаемся за полноту этихъ указаній, ибо для нихъ нужно затратить болѣе времени и имѣть подъ руками болѣе литературныхъ пособій, нежели тѣ, какими я располагаю. Мы старались только уяснить общій характеръ безконечнаго разнообразія приложеній теоріи эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ и на примѣрахъ указать на главные основные типы подобныхъ приложеній. Вмѣстѣ съ этимъ мы имѣли въ виду значительно облегчить самый способъ полученія этихъ предложеній при помощи различныхъ вспомогательныхъ теоремъ теоріи числовыхъ интеграловъ по дѣлителямъ» (стр. 201—202). Эти новые труды автора, заслужившаго уже извѣстность въ наукѣ, какъ и прежнія его работы по Теоріи Чиселъ, замѣчательны по плодотворности положенныхъ въ основаніе идей и обилію чрезвычайно важныхъ, иногда даже совершенно неожиданныхъ слѣдствій и результатовъ. Многія теоремы, передъ доказательствомъ которыхъ останавливались первостепенные математики современной Европы, легко и просто выводятся изъ принятыхъ нашимъ авторомъ основныхъ принциповъ.

Предметъ первой изъ названныхъ выше статей г. Бугаева опредѣляется авторомъ въ слѣдующихъ выраженіяхъ: «Общими мы называемъ такіе числовые законы, которые зависятъ отъ перемѣнныхъ количествъ. Придавая этимъ перемѣннымъ различныя значенія, можно получать различные частные числовые законы. Такіе общіе законы можно получать какъ изъ Якобіевыхъ такъ и изъ эллиптическихъ функцій. Мы разсмотримъ тѣ законы, которые получаются изъ непосредственнаго разсмотрѣнія функцій Якоби» (стр. 415). Такихъ законовъ въ разсматриваемой статьѣ авторъ выводитъ четыре. Первый

$$\begin{aligned}&\sum\nolimits_n 2_1(\delta)\, \sin dx - 2\cos x \sum\nolimits_{n-1} 2_1(\delta)\, \sin dx + \\ &+ 2\cos 2x \sum\nolimits_{n-2^2} 2_1(\delta)\, \sin dx + \ldots + \\ &+ 2(-1)^{\mu} \cos \mu x \sum\nolimits_{n-\mu^2} 2_1(\delta)\, \sin dx + \ldots = \\ &= (-1)^{1+\sqrt{n}} \left(E\sqrt{n} - E\sqrt{n-1}\right)\sqrt{n}\, \sin(x\sqrt{n}) \text{ *)}.\end{aligned}$$

*) Здѣсь $2_1(\delta) = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{\delta - 1}\right)$.

Онъ полученъ изъ разсмотрѣнія выраженія

$$\frac{d\,lg\,\theta\,(u)}{du}.$$

Второй законъ

$$sin\,x\sum_{n} sin\,2\,dx - sin\,3\,x\sum_{n-1} sin\,2\,dx + sin\,5x\sum_{n-3} sin\,2\,dx + \ldots +$$
$$+ (-1)^{\mu}\,sin\,(2\mu+1)\,x\sum_{n-\frac{\mu\,(\mu+1)}{2}} sin\,2\,dx + \ldots = 0 \text{ или}$$

$$\frac{(-1)^{\nu}}{4}[(2\nu+1)\,cos\,(2\nu+1)\,x - \frac{cos\,x}{sin\,x}\,sin\,(2\nu+1)\,x].$$

Выведенъ изъ разсмотрѣнія выраженія

$$\frac{d\,lg\,H\,(u)}{du}.$$

Третій законъ

$$B_n - 2\,B_{n-1}\,cos\,x + 2\,B_{n-2^2}\,cos\,2\,x - 2\,B_{n-3^2}\,cos\,3\,x + \ldots$$
$$= 2(-1)^{n+1}\,(E\sqrt{n} - E\sqrt{n-1})n\,cos\,(x\sqrt{n}).$$

Полученъ изъ разсмотрѣнія выраженія

$$\frac{d\,lg\,\theta\,(u)}{dq}.$$

Наконецъ, четвертый законъ

$$C_n\,sin\,x - C_{n-1}\,sin\,3\,x + C_{n-3}\,sin\,5\,x - C_{n-6}\,sin\,7\,x + \ldots +$$
$$+ (-1)^{\nu}\,C_{n-\frac{\nu(\nu+1)}{2}}\,sin\,(2\nu+1)x + \ldots = 0 \text{ или}$$

$$(-1)^{1+\nu}\frac{\nu\,(\nu+1)}{2}\,sin\,(2\nu+1)x.$$

Полученъ изъ разсмотрѣнія выраженія

$$\frac{d\,lg\,H\,(u)}{dq}.$$

За выводомъ каждаго изъ этихъ общихъ числовыхъ законовъ слѣдуетъ выводъ болѣе или менѣе значительнаго числа заключающихся въ немъ частныхъ. Съ особенными подробностями въ этомъ отношеніи авторъ останавливается на первомъ общемъ числовомъ законѣ.

Вторая изъ названныхъ выше статей г. Бугаева также занимается общими числовыми законами, но уже вытекающими изъ разсмотрѣнія, какъ сказано въ заглавіи, «нѣкоторыхъ» эллиптическихъ функцій. Она состоитъ изъ слѣдующихъ трехъ отдѣловъ. Первый — «Общіе числовые законы, вытекающіе изъ разсмотрѣнія тригонометрическихъ разложеній эллиптическихъ функцій» (стр. 515 — 576). Второй — «Общіе числовые законы, выводимые при помощи дифференцированія эллиптическихъ функцій» (стр. 577—584). Третій — «Общіе числовые законы, вытекающіе изъ взаимнаго сопоставленія эллиптическихъ функцій и функцій Якоби» (стр. 584—596). Всего общихъ числовыхъ законовъ выведено въ разсматриваемой статьѣ 27. Изъ нихъ 18 относятся къ первому отдѣлу, 3 ко второму и 6 къ третьему. Какъ и въ предыдущей статьѣ авторъ выводитъ также и нѣкоторые изъ частныхъ числовыхъ законовъ, содержащихся въ найденныхъ общихъ. Всего такихъ законовъ во всѣхъ трехъ отдѣлахъ статьи выведено 96. Весьма интересны заключающія статью общія указанія. Приводимъ ихъ вполнѣ. «Изъ предложенныхъ примѣровъ мы видимъ, какое безконечное разнообразіе общихъ числовыхъ законовъ можно получить изъ разсмотрѣнія различныхъ эллиптическихъ функцій. «Каждая эллиптическая функція въ отдѣльности, каждая комбинація ихъ можетъ послужить источникомъ общихъ числовыхъ законовъ. Изъ этихъ законовъ можно получать новые общіе законы еще путемъ ихъ взаимной комбинаціи.

«Каждый общій законъ кромѣ того можетъ дать множество общихъ и частныхъ числовыхъ законовъ *a) какъ замѣною одного перемѣннаго другимъ новымъ перемѣннымъ такъ и замѣною его какою-нибудь постоянною величиною; b) дифференцированіемъ и интегрированіемъ по данному перемѣнному; c) сравненіемъ коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ перемѣннаго и d) всѣми этими пріемами, примѣняемыми совмѣстно.* «Эти законы подлежатъ также всѣмъ тѣмъ аналитическимъ и числовымъ преобразованіямъ, которыя допускаются свойствами входящихъ въ нихъ аналитическихъ и числовыхъ функцій. Частные числовые законы сами могутъ послужить основаніемъ для различныхъ выводовъ какъ въ области теоріи прерывныхъ функцій вообще, такъ и въ области теоріи чиселъ или неопредѣленнаго анализа въ частности. Примѣры такихъ приложеній были даны знаменитымъ математикомъ Ліувиллемъ большею частью безъ доказательства. Новыхъ сторонъ для изслѣдованія, конечно, является очень много. Мы останавливаемся пока, имѣя въ виду ограничить область изслѣдованія вопросами о различныхъ числовыхъ законахъ для того, чтобы нагляднѣе выяснить всѣ особенности изложенныхъ нами методовъ» (стр. 595—596).

Предметъ статьи проф. *Лѣтникова*, заглавіе которой мы привели выше, состоитъ въ слѣдующемъ. «Въ предлагаемомъ ниже изслѣдованіи», говоритъ авторъ, «я указываю читателю на новый шагъ, который можетъ быть сдѣланъ въ объединеніи многихъ результатовъ въ области опредѣленныхъ интеграловъ» (стр. 328). Далѣе авторъ даетъ слѣдующій общій очеркъ содержанія своей работы. «Способъ изслѣдованія, мною предлагаемый, кажется мнѣ заслуживающимъ вниманія не только по доставленнымъ имъ новымъ результатамъ, но и по мысли, служащей ему основаніемъ, которая, сколько я знаю, не была еще высказываема. Извѣстно, что сродство между нѣкоторыми функціями становится всего явственнѣе, если мы имѣемъ возможность опредѣлить ихъ какъ частныя рѣшенія одного и того-же дифференціальнаго уравненія, помощью котораго иногда легко открывается, какими общими свойствами обладаютъ функціи, съ виду весьма различныя. Помощію символовъ междупредѣльныхъ производныхъ съ произвольнымъ указателемъ возможно иногда весьма разнообразныя по виду и даже по свойствамъ своимъ частныя рѣшенія одного дифференціальнаго уравненія соединять въ одномъ общемъ выраженіи. Разсматривая интегралы, содержащіе подобныя общія выраженія частныхъ рѣшеній одного дифференціальнаго уравненія, и назначая предѣлами интегрированія тѣ особыя значенія перемѣннаго независимаго, въ промежуткѣ между которыми взятое нами выраженіе представляетъ одно и то же частное рѣшеніе, оказывается иногда возможнымъ получить для такихъ интеграловъ также общія выраженія или формулы. Такого рода общія формулы будутъ заключать въ себѣ многіе частные случаи, такъ какъ онѣ будутъ приложимы ко многимъ видамъ частныхъ рѣшеній разсматриваемаго дифференціальнаго уравненія, и этимъ путемъ можно будетъ обнаружить сродство между такими опредѣленными интегралами, которые по внѣшнему виду не имѣютъ иногда почти никакого сходства. Мало того, какъ это увидимъ далѣе, выводы этого рода откроютъ намъ ближайшимъ образомъ, для какихъ именно видовъ опредѣленныхъ интеграловъ, содержащихъ частныя рѣшенія одного дифференціальнаго уравненія, могутъ быть найдены конечныя выраженія помощью извѣстныхъ намъ функцій, и такіе виды интеграловъ этого класса требуютъ для своего выраженія новыхъ еще не изслѣдованныхъ функцій. Эта возможность указанія границъ въ изысканіяхъ извѣстнаго рода, по крайней мѣрѣ для даннаго состоянія научнаго знанія, можетъ предостеречь изслѣдователя отъ многихъ безплодныхъ попытокъ. Въ настоящей статьѣ я останавливаюсь на разсмотрѣніи нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ, зависящихъ отъ функцій, удовлетворяющихъ извѣстному дифференціальному уравненію:

$$(x-a)(x-b)\frac{d^2y}{dx^2}+(c+hx)\frac{dy}{dx}+ky=0.$$

Это дифференціальное уравненіе (или его частные случаи) имѣетъ частными рѣшеніями многіе виды функцій, между которыми наиболѣе замѣчательныя суть функціи тригонометрическія и сферическія; кромѣ этихъ функцій то же уравненіе допускаетъ частными рѣшеніями еще многія другія функціи, имѣющія съ поименованными болѣе или менѣе близкое родство. Особыми значеніями перемѣннаго независимаго или особыми точками этого дифференціальнаго уравненія будутъ, какъ извѣстно, величины $-\infty$, a, b, и $+\infty$» (стр. 328—330).

Авторъ указываетъ далѣе четыре частныя рѣшенія взятаго имъ дифференціальнаго уравненія, существующія одно въ области количества a, два въ области количества b и одно для $x=\infty$. Обозначивши ихъ соотвѣтственно черезъ Y_a, Y_b, и Y_∞, онъ останавливается на опредѣленныхъ интегралахъ

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n Y_a\,dx,$$

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n Y_b\,dx \text{ и } \int_b^{+\infty} (x-a)^m (x-b)^n Y_b\,dx,$$

$$\int_b^{+\infty} (x-a)^m (x-b)^n Y_\infty\,dx,$$

какъ на такихъ, для которыхъ возможно нахожденіе общихъ выраженій. «Каждый изъ указанныхъ интеграловъ», говоритъ онъ по ихъ поводу, «представитъ нѣсколько частныхъ случаевъ, такъ какъ частныя рѣшенія Y_a, Y_b и Y_∞ могутъ быть функціями тригонометрическими, гиперболическими, сферическими, гипергеометрическими рядами вообще, полными эллиптическими интегралами и другими Такимъ образомъ мы найдемъ, что многіе опредѣленные интегралы частью извѣстные, частью новые, будутъ заключаться въ одной общей формулѣ, чѣмъ обнаружится сродство между такими опредѣленными интегралами, которые, считаясь весьма трудными для вычисленія, не имѣютъ между собою никакого внѣшняго сходства» (стр. 331). Такъ какъ упомянутыя частныя рѣшенія содержатся въ общемъ выраженіи вида

$$(x-a)^{r'}(x-b)^{s'}\Big[D^p(x-a)^r(x-b)^s\Big]_e^x,$$

гдѣ нижній предѣлъ e означаетъ одно изъ количествъ $-\infty$, a, b и $+\infty$, то соотвѣтствующіе имъ 4 интеграла могутъ быть изображены сокращенно въ видѣ

$$\int_{e_1}^{e_2}(x-a)^k(x-b)^e\Big[D^p(x-a)^r(x-b)^s\Big]_e^x dx,$$

гдѣ e_1 и e_2 означаютъ два изъ количествъ рядомъ стоящихъ въ расположеніи: a, b и $+\infty$; нижній же предѣлъ e въ подъинтегральной функціи можетъ быть взятъ равнымъ или e_1 или e_2. Разсмотрѣніемъ интеграловъ этого послѣдняго вида статья и ограничивается.

Изложенное содержитъ изображеніе главнаго предмета и общихъ задачъ статьи. Что касается до содержанія ея въ подробностяхъ, то вкратцѣ оно можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ. Введеніе. Предварительныя замѣчанія о выраженіяхъ

$$\Big[D^p(b-x)^s\Big]_a^x \quad \text{и} \quad \Big[D^p(x-a)^r(b-x)^s\Big]_a^x$$

при различныхъ соотношеніяхъ между показателями и предѣльныхъ значеніяхъ для x. Вычисленіе разсматриваемаго интеграла, приводящее къ слѣдующимъ четыремъ общимъ формуламъ:

$$\int_a^b (b-x)^l\Big[D^p(x-a)^r(b-x)^s\Big]_a^x dx =$$

$$=\frac{\Gamma(l+1)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(l+s+1-p)}{\Gamma(l+1-p)\,\Gamma(l+r+s+2-p)}(b-a)^{l+r+s+1-p}$$

$$\int_a^b (x-a)^{p-l-1}(b-x)^l\Big[D^p(x-a)^r(b-x)^s\Big]_a^x dx =$$

$$=\frac{\Gamma(l+1)\,\Gamma(r-l)\,\Gamma(l+s+1-p)}{\Gamma(l+1-p)\,\Gamma(r+s+1-p)}(b-a)^{r+s}$$

$$\int_a^b (x-a)^k\Big[D^p(x-a)^r(b-x)^s\Big]_b^x dx =$$

$$=(-1)^{-p}\frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(s+1)\,\Gamma(k+r+1-p)}{\Gamma(k+1-p)\,\Gamma(k+r+s+2-p)}(b-a)^{k+r+s+1-p}$$

$$\int_a^b (x-a)^k (b-x)^{p-k-1} \left[D^p (x-a)^r (b-x)^s \right]_b^x dx =$$

$$= (-1)^{-p} \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(s-k)\,\Gamma(k+r+1-p)}{\Gamma(k+1-p)\,\Gamma(r+s+1-p)} (b-a)^{r+s}$$

Примѣненіе этихъ формулъ къ частнымъ случаямъ, приводящее ко множеству выраженій для опредѣленныхъ интеграловъ частію извѣстныхъ и частію новыхъ. Изъ нихъ авторъ разсматриваетъ только 12. Изысканіе выраженій для интеграловъ вида

$$\int_b^\infty \frac{(x-b)^l}{(x-a)^k} \left[D^p (x-a)^r (x-b)^s \right]_b^x dx,$$

приводящее къ слѣдующимъ двумъ новымъ общимъ формуламъ

$$\int_b^\infty \frac{1}{(x-a)^k} \left[D^p (x-a)^r (x-b)^s \right]_b^x dx =$$

$$= \frac{\Gamma(s+1)\,\Gamma(k+p)\,\Gamma(k+p-r-s-1)}{\Gamma(k)\,\Gamma(k+p-r)} (b-a)^{r+s+1-p-k}$$

$$\int_b^\infty (x-b)^l \left[D^p (x-a)^r (x-b)^s \right]_b^x dx =$$

$$= \frac{\Gamma(p-l)\,\Gamma(p-l-r-s-1)\,\Gamma(l+s+1-p)}{\Gamma(-l)\,\Gamma(-r)} (b-a)^{l+r+s+1-p}$$

Примѣненіе этихъ формулъ къ четыремъ частнымъ случаямъ, дающее выраженія для нѣсколькихъ замѣчательныхъ интеграловъ, частію извѣстныхъ и частію новыхъ. Разсмотрѣніе опредѣленнаго интеграла общаго вида

$$\int_o^\infty \frac{(x-b)^l}{(x-a)^k} \left[D^p (x-a)^r (x-b)^s \right]_\infty^x dx,$$

дающее въ результатѣ слѣдующія двѣ новыя общія формулы

$$(-1)^p \int_b^\infty (x-b)^l \left[D^p (x-a)^r (x-b)^s \right]_\infty^x dx =$$

$$= \frac{\Gamma(l+1)\,\Gamma(l+s+1-p)\,\Gamma(p-l-r-s-1)}{\Gamma(l+1-p)\,\Gamma(-r)} (b-a)^{r+s+l+1-p}$$

$$\int_b^\infty \frac{(x-b)^l}{(x-a)^{l+1-p}} \left[D^p (x-a)^r (x-b)^s \right]_\infty^x dx =$$

$$= (-1)^{-p} \frac{\Gamma(l+1)\,\Gamma(p-r-s)\,\Gamma(l+s+1-p)}{\Gamma(l+1-p)\,\Gamma(l+1-r)} (b-a)^{r+s}$$

Четыре примѣра приложенія этихъ формулъ. Выводъ нѣкоторыхъ изъ числа приведенныхъ выше для примѣра 20 опредѣленныхъ интеграловъ другимъ путемъ, именно прямо изъ выраженій тригонометрическихъ, гиперболическихъ и сферическихъ функцій въ видѣ междупредѣльныхъ производныхъ. Выводъ нѣкоторыхъ выраженій новыхъ опредѣленныхъ интеграловъ посредствомъ полученія обратныхъ формулъ изъ выраженій, представляющихъ тригонометрическія или гиперболическія или сферическія функціи.

Введеніе въ разсмотрѣнную статью г. Лѣтникова начинается весьма интереснымъ краткимъ очеркомъ современнаго состоянія той области Анализа, къ которой принадлежитъ его изслѣдованіе, то-есть ученія объ опредѣленныхъ интегралахъ. Приводимъ этотъ очеркъ вполнѣ. «Теорія опредѣленныхъ интеграловъ и способы, употребляемые для нахожденія ихъ выраженій, составляютъ обширнѣйшую отрасль анализа, которая, не смотря на чрезвычайное обиліе матеріала, представляетъ одинъ изъ наименѣе обработанныхъ отдѣловъ науки. Отсутствіе связи между разнообразными изслѣдованіями въ этой области такъ велико, что, за исключеніемъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ главъ объ интегралахъ Эйлера, интегралахъ Фурье и другихъ, существуютъ только весьма немногія попытки объединить многочисленные результаты, добытые по большей части или случайно, или по требованіямъ, предъявляемымъ со стороны прикладныхъ частей математики. Составитель наиболѣе полнаго сборника опредѣленныхъ интеграловъ г. Bierens de Haan, при всемъ желаніи сократить количество матеріала, нашелся вынужденнымъ помѣстить въ своихъ таблицахъ болѣе *во́съми тысячъ* опредѣленныхъ интеграловъ, которые соединены имъ въ группы по чисто-внѣшнимъ признакамъ съ единственною цѣлью облегчить отысканіе даннаго интеграла. Громадный и весьма замѣчательный по эрудиціи трудъ того-же ученаго, посвященный изложенію теоріи опредѣленныхъ интеграловъ, доказываетъ, что, и при самыхъ обширныхъ познаніяхъ въ этой области науки, въ настоящее время еще весьма трудно открыть общія начала для множества изслѣдованій различныхъ ученыхъ, избиравшихъ часто весьма разнообразные пути для достиженія однихъ и тѣхъ-же результатовъ. Единственный почти способъ объединенія отдѣльныхъ выводовъ можно видѣть до настоящаго времени только въ трудахъ нѣкоторыхъ ученыхъ по составленію общихъ трансформаціонныхъ формулъ, дающихъ выраженія опредѣленныхъ интеграловъ, содержащихъ въ себѣ произвольныя функціи, которымъ могутъ быть приписываемы различные виды. Не смотря однако на то, что между подобными формулами есть весьма замѣчательныя, помощью которыхъ было найдено множество выраженій новыхъ опредѣленныхъ интеграловъ, нельзя не видѣть, что этотъ путь къ объединенію не есть тотъ, на которомъ слѣдуетъ исключительно остановиться. Въ самомъ дѣлѣ, хотя каждая изъ трансформаціонныхъ формулъ заключаетъ въ себѣ безчисленное множество интеграловъ,—обратно, не существуетъ никакого средства для того чтобы узнать, заключается-ли данный интегралъ въ одной изъ извѣстныхъ общихъ формулъ, не говоря уже о трудности судить о томъ, приложима ли извѣстная формула къ данному частному виду функціи. Трактатъ г. Bierens de Haan'а какъ нельзя лучше показываетъ, что при настоящемъ состояніи науки, общія трансформаціонныя формулы приносятъ еще мало пользы и что при изученіи опредѣленныхъ интеграловъ частные способы, употребленные для вычисленія замѣчательнѣйшихъ изъ нихъ разными учеными, должны все еще стоять на первомъ планѣ» (стр. 327—328).

(*Продолженіе слѣдуетъ.*)

РЕЦЕНЗІИ И ОТЧЕТЫ О НОВЫХЪ КНИГАХЪ.

Журналъ элементарной математики, издаваемый *В. П. Ермаковымъ*, профессоромъ Императорскаго университета св. Владиміра, членомъ-корреспондентомъ Императорской Академіи Наукъ. Томъ первый. Годъ первый. 1884—1885. Кіевъ. Въ 8 д. л., IV и 376 стр. текста, IV и 43 стр. Приложенія.

(*Продолженіе*).

Всего статей и замѣтокъ помѣщено въ Журналѣ 65 и одна въ Приложеніи. Изъ нихъ, какъ и слѣдовало ожидать, значительная часть, именно ровно треть, то-есть 22, принадлежитъ самому Редактору-Издателю. По предметамъ онѣ распадаются на слѣдующія группы. По геометріи—25, по ариѳметикѣ и алгебрѣ—23, по Теоріи Вѣроятностей — 2, по части коммерціи — 4, по физикѣ — 10 и по Исторіи математики—1. Задачъ въ Журналѣ помѣщено подъ разными рубриками («Ариѳметическія задачи для упражненія учениковъ» (№ 1), «Задачи для рѣшенія», «Задачи для каникулярныхъ упражненiй») 74. Изъ нихъ относятся: къ геометрiи 24, къ ариѳметикѣ и алгебрѣ 40, къ тригонометрiи 3, къ физикѣ и механикѣ 6 и къ математическимъ рекреацiямъ 1. Помѣщенныхъ въ текстѣ Журнала отзывовъ о новыхъ книгахъ 14. Послѣ этого краткаго статистическаго отчета о содержанiи Журнала, перейдемъ къ болѣе подробному его обзору. Начнемъ со статей по геометрiи, которой, какъ мы уже видѣли выше, отведено въ Программѣ первое мѣсто.

И заявленiя програмы, и соображенiя о богатыхъ матерьялахъ, заключающихся въ сочиненiяхъ Дюгамеля и Петерсена, давали основанiе ждать гораздо большаго числа статей, посвященныхъ общимъ вопросамъ рѣшенiя геометрическихъ задачъ, чѣмъ ихъ оказалось въ дѣйствительности. Ихъ всего только шесть: три статьи самого Редактора-издателя и три-же, посвященныя исключительно методу геометрическихъ мѣстъ, постороннихъ сотрудниковъ.

Первая изъ упомянутыхъ трехъ статей Редактора-Издателя, озаглавленная «Опредѣленiе числа рѣшенiй геометрическихъ задачъ», представляетъ простое перечисленiе, иногда комментированное ссылками на задачи, 21 частнаго случая, въ которыхъ задачи имѣютъ отъ одного до четырехъ рѣшенiй. Статья, какъ не трудно видѣть, могла-бы быть безконечною; авторъ ограничивается разсмотрѣнными имъ случаями, «такъ какъ подробный разборъ этихъ и болѣе сложныхъ случаевъ не представляетъ интереса» (стр. 14). Заглавiе, очевидно, не вполнѣ соотвѣтствуетъ содержанiю, такъ какъ обѣщаетъ гораздо больше, чѣмъ даетъ послѣднее. Тотъ-же характеръ простаго перечисленiя имѣетъ и вторая статья, скорѣе замѣтка, того-же автора, озаглавленная «Число условiй, опредѣляющихъ геометрическую фигуру на плоскости». Заглавiе и здѣсь не соотвѣтствуетъ содержанiю, но уже въ другомъ смыслѣ, такъ какъ покрываетъ собою только часть замѣтки, потому что въ ней перечисляются также и условiя, опредѣляющiя величину геометрическихъ фигуръ.

Рядъ статей, посвященныхъ методу геометрическихъ мѣстъ, начинается третьей статьей Редактора-Издателя, озаглавленной «Основные прiемы рѣшенiя геометрическихъ задачъ». Заглавiе и на этотъ разъ не соотвѣтствуетъ содержанiю. Статья главнымъ образомъ занимается методомъ геометрическихъ мѣстъ, вскользь касается другаго, названнаго авторомъ *обратнымъ*, а объ остальныхъ говоритъ, что они «не поддаются общему описанiю». По поводу обратнаго метода автора мы должны замѣтить, что онъ не можетъ быть причисленъ къ «основнымъ», такъ какъ для своего примѣненiя требуетъ умѣнья рѣшать обратную задачу. Что-же касается до утвержденія о всѣхъ другихъ методахъ, то оно, во-первыхъ, не совсѣмъ справедливо, а. во-вторыхъ, и нѣсколько странно, такъ какъ «общему описанію не поддаются» только предметы малоизвѣстные или недостаточно изученные. Разъ-же признавши послѣднее, трудно говорить съ такою увѣренностью и такъ категорично о преимуществахъ метода геометрическихъ мѣстъ, какъ это дѣлаетъ авторъ. Изъ трехъ статей объ этомъ методѣ, принадлежащихъ постороннимъ сотрудникамъ, съ двумя первыми, именно со статьями гг. Никульцева и Левшина, Редакція поступила столько-же своебразно, сколько и нелѣпо. Пользуясь одинаковостью ихъ заглавій («Методъ геометрическихъ мѣстъ»), она соединила ихъ въ своемъ представленіи какъ-бы въ одну статью, вслѣдствіе этого вышелъ такой, крайне неудобный для справокъ, курьезъ: первая часть статьи г. Левшина названа «статьей первой», статья г. Никульцева «статьей второй» и вторая часть статьи г. Левшина «статьей третьей». Оригинальничающая Редакція въ своемъ новаторствѣ пошла, впрочемъ, далѣе заглавій, такъ какъ подчинила ему также и нумерацію предложеній и задачъ, составляющихъ статьи. Такъ послѣ двухъ предложеній первой части статьи г. Левшина, два предложенія г. Никульцева оказываются уже, къ изумленію читателя, 3-мъ и 4-мъ, а предложенія второй части статьи г. Левшина 5-ымъ, 6-мъ и т. д. до 10-го включительно. Обращаясь къ содержанію статей, мы также не находимъ въ немъ ничего, что могло-бы хотя нѣсколько оправдать нелѣпое новаторство Редакціи. Статья г. Никульцева состоитъ изъ двухъ предложеній, взятыхъ совершенно случайно, тогда какъ между 8 предложеніями статьи г. Левшина существуетъ нѣкоторое единство. Дѣйствительно, всѣ они имѣютъ своимъ предметомъ геометрическія мѣста, образуемыя двумя движущимися въ плоскости точками, находящимися въ опредѣляемыхъ положеніемъ отношеніяхъ къ постоянной точкѣ. Приведенныя предложенія иллюстрируются въ обѣихъ статьяхъ задачами, которыхъ въ статьѣ г. Левшина 13, а въ статьѣ г. Никульцева 5. Что касается до третьей статьи, принадлежащей г. Билимовичу и озаглавленой «Первоначальныя предложенія теоріи геометрическихъ мѣстъ», то въ своей теоретической части она представляетъ простое заимствованіе изъ сочиненія Петерсена, такъ какъ занимается главнымъ образомъ первыми тремя предложеніями послѣдняго. За изложеніемъ каждаго предложенія авторъ помѣщаетъ по-нѣскольку задачъ, рѣшеніе которыхъ можетъ быть основано на предложеніи. Многія изъ этихъ задачъ (приблизительно треть всего ихъ числа 36) также заимствованы у Петерсена (№№ 2, 3, 4, 7, 10, 17, 20, 22, 23, 24, 25). Весьма курьезно въ отношеніи точности и правильности языка слѣдующее редакторское примѣчаніе къ этой статьѣ: «Удобнѣе принять эти два геометрическія мѣста за самостоятельныя предложенія, а не какъ слѣдствія предложенія 2» (стр. 319.)

Прежде чѣмъ перейти къ обзору остальныхъ статей по геометріи, мы считаемъ полезнымъ въ видахъ его бо́льшей систематичности остановиться нѣсколько на общемъ вопросѣ о цѣляхъ, которыя должны преслѣдоваться статьями по Элементарной Математикѣ. Этихъ цѣлей, по нашему мнѣнію, три. Первая—расширеніе области Элементарной Математики черезъ введеніе въ нее новыхъ статей изъ другихъ областей Математики, что можетъ быть достигнуто, очевидно, распространеніемъ на эти статьи элементарныхъ пріемовъ изложенія и доказательства. Вторая — усовершенствованіе Элементарной Математики черезъ улучшеніе системы расположенія ея статей, усовершенствованіе прежнихъ методовъ доказательства и пріемовъ изложенія, открытіе новыхъ, и т. д. Третья--усовершенствованіе преподаванія Элементарной Математики.

Въ журналѣ, посвященномъ Элементарной Математикѣ, сообразно съ ближайшими преслѣдуемыми имъ задачами, къ этимъ общимъ главнымъ цѣлямъ его статей могутъ присоединяться еще и другія, второстепенныя, равно какъ и тѣ или другія изъ упомянутыхъ общихъ цѣлей могутъ пріобрѣтать преобладающее значеніе. Въ томъ случаѣ, когда журналъ имѣетъ въ виду главнымъ образомъ учениковъ старшаго класса среднихъ учебныхъ заведеній или, говоря вообще, только лицъ, получившихъ элементарное математическое образованіе, главнѣйшею изъ преслѣдуемыхъ имъ второстепенныхъ цѣлей является совершенно понятнымъ образомъ такъ называемое *пополненіе* матерьяла, заключеннаго въ учебникахъ, статьями обыкновенно въ нихъ не помѣщаемыми, хотя и входящими въ область Элементарной Математики. Статьи, посвященныя такому пополненію, какъ не представляющія ничего новаго и оригинальнаго, очевидно не могутъ претендовать ни на какое научное значеніе. Ихъ индивидуальное значеніе совершенно случайно и вполнѣ опредѣляется потребностями и вкусами читателей журнала. Статьи этого рода, какъ представляющія простыя повторенія уже не разъ, а иногда даже и много разъ, изложеннаго въ наукѣ ранѣе, есть по самой природѣ своей статьи безцвѣтныя. Онѣ рѣдко бываютъ лучше своихъ образцовъ, такъ какъ выдающіеся умы, способные ихъ сдѣлать такими, почти никогда не принимаются за ихъ составленіе, справедливо находя эту работу весьма мало благодарною. Съ другой стороны они почти никогда не бываютъ и особенно плохи, такъ какъ нужно особое искусство, чтобы при наличности образцовъ сдѣлать ихъ такими. Рецензенту приходится, слѣдовательно, говорить о такихъ статьяхъ всего менѣе.

Обращаясь отъ этихъ общихъ замѣчаній къ нашему ближайшему предмету, то-есть, къ разсмотрѣнію геометрическихъ статей разбираемаго Журнала, мы прежде всего замѣчаемъ, что значительное большинство этихъ статей принадлежитъ именно къ группѣ пополняющихъ учебники. Таковы слѣдующія статьи.

Редактора-Издателя: «Ангармоническое отношеніе и гармоническое дѣленіе» (стр. 65—71). Содержитъ «изложеніе главнѣйшихъ основаній теоріи» того и другаго. О «весьма многочисленныхъ» приложеніяхъ этой теоріи авторъсобирается «говорить впослѣдствіи», но, повидимому, неранѣе слѣдующаго года, такъ какъ въ разсматриваемомъ мы встрѣчаемся только еще съ одной статьей автора по тому-же предмету, именно со статьей «Построеніе четвертой гармонической точки» (стр. 170—171). Эта послѣдняя содержитъ два построенія, производимыя при помощи одной линейки, и замѣтку о полномъ четыреугольникѣ и свойствѣ его діагоналей. Заглавіе статьи не покрываетъ, слѣдова тельно, ея содержанія. «Зависимости между сторонами и діагоналями четыреугольника, вписаннаго въ кругъ» (стр. 104—105). Содержитъ два предложенія: именно о произведеніи діагоналей (теорема Птоломея) и объ ихъ отношеніи. По собственному сознанію автора, обѣ эти теоремы «встрѣчаются въ нѣкоторыхъ учебникахъ, но далеко не во всѣхъ». Онъ ихъ «помѣщаетъ съ тою цѣлью, что на этихъ теоремахъ основывается рѣшеніе предложенныхъ задачъ» (всѣхъ или нѣкоторыхъ?). Указанное признаніе автора было-бы гораздо болѣе краснорѣчивымъ, если-бы упоминало также и о томъ чрезвычайно распространенномъ учебникѣ, въ которомъ помѣщены оба разсматриваемыя предложенія, именно объ учебникѣ Давидова. Если сравнимъ изложеніе втораго предложенія въ этомъ послѣднемъ съ изложеніемъ автора, то не безъ удивленія замѣтимъ, что въ сжатости рѣчи первое значительно превосходитъ второе. «Радіусъ круга, описаннаго около даннаго треугольника» (стр. 122) и «Площадь четыреугольника, вписаннаго въ кругъ» (стр. 123—124). Въ примѣчаніи ко второй изъ этихъ двухъ статей авторъ говоритъ, что «эта теорема и предъидущая хотя и встрѣчаются въ геометріи Давидова, но мы ихъ помѣстили по той причинѣ, что онѣ находятся въ тѣсной связи съ задачею № 10». Это уже не значитъ пополнять учебники, это значитъ просто повторять ихъ, выписывая изъ нихъ, что приглянется, такъ какъ учебникъ Давидова принадлежитъ къ числу самыхъ распространенныхъ. До какихъ предѣловъ можетъ быть доведено это повторенiе содержанiя учебниковъ при пользованiи такимъ растяжимымъ принципомъ, какъ нужды и требованiя задачъ, сказать трудно. При извѣстномъ усердiи съ одной стороны, при отсутствiи болѣе подходящихъ матерьяловъ съ другой, можно дойти, конечно, до полнаго воспроизведенiя учебника въ формѣ ряда отдѣльныхъ и какъ бы не связанныхъ другъ съ другомъ отдѣльныхъ статей. Много-ли выиграютъ отъ наполненiя журнала такими статьями интересы читателей и въ особенности «математической литературы», въ необходимости которой «глубоко убѣжденъ» Редакторъ-Издатель,—это другой вопросъ.

г. Войнова «Биссекторы угловъ треугольника» (стр. 139—142). Представляетъ изложенiе 4 теоремъ, изъ которыхъ двѣ первыя имѣютъ дѣло съ дѣленiемъ противоположной стороны биссекторомъ внутренняго или внѣшняго угла, а двѣ послѣднiя—съ зависимостью между произведенiемъ двухъ сторонъ и биссекторомъ составляемаго ими внутренняго или внѣшняго угла. Первая теорема принадлежитъ къ числу тѣхъ, безъ которыхъ учебники обходиться не могутъ. Вторая обыкновенно не помѣщается въ нихъ, въ большинствѣ случаевъ, вѣроятно, потому что доказывается такимъ же образомъ, какъ и предыдущая. Наконецъ, двѣ послѣднiя встрѣчаются только въ немногихъ учебникахъ. На нихъ главнымъ образомъ и сосредоточивается вниманiе автора.

Область геометрическихъ вопросовъ и задачъ на нахожденiе наибольшихъ и наименьшихъ величинъ, не смотря на свою обширность, весьма мало эксплуатировалась Журналомъ. Въ немъ содержатся всего только двѣ статьи этого рода, именно «Наибольшiя величины площадей и периметровъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругѣ» г. *Никульцева* (стр. 291—296), и «Опредѣленiе наименьшей величины периметра треугольника, вписаннаго въ данный треугольникъ» г. *Мириманова* (стр. 363—365). По поводу первой изъ нихъ Редакцiя обратилась къ своимъ читателямъ съ слѣдующимъ воззванiемъ: «Надѣемся (,) что примѣру г. Никульцева послѣдуютъ и другiе. Геометрическихъ задачъ на нахожденiе наибольшихъ и наименьшихъ величинъ можетъ быть весьма много. Изъ каждой задачи на построенiе, имѣющей нѣсколько рѣшенiй, можно извлечь одну или нѣсколько задачъ на нахожденiе наибольшихъ и наименьшихъ величинъ (стр. 291). Весьма вѣроятно, что статей разсматриваемаго рода было-бы болѣе, если бы это рецептообразное воззваніе, напечатанное въ одномъ изъ послѣднихъ нумеровъ, появилось ранѣе. Что касается до заявленныхъ упомянутыми авторами цѣлей своихъ статей, то таковыми были для первой «желаніе способствовать распространенію пріемовъ, при помощи которыхъ рѣшаются задачи на нахожденіе наибольшихъ и наименьшихъ величинъ», а для второй сознаніе «интереса и важности элементарныхъ пріемовъ» рѣшенія тѣхъ же задачъ. Для достиженія поставленной цѣли г-нъ Никульцевъ «выбралъ двѣ простѣйшія геометрическія задачи и намѣренъ показать, какимъ образомъ подобныя задачи рѣшаются при помощи алгебры; вмѣстѣ съ тѣмъ онъ даетъ также и геометрическія рѣшенія задачъ». Въ тѣхъ же видахъ г. Мириманов слѣдуетъ другому пути. Онъ даетъ сперва «самое простое геометрическое рѣшеніе задачи» и только послѣ уже «считаетъ полезнымъ прибавить еще и алгебраическое рѣшеніе».

Статей, имѣющихъ цѣлью расширеніе области Элементарной Геометріи или усовершенствованіе ея преподаванія, нѣтъ ни одной. Но за то есть нѣсколько имѣющихъ въ виду усовершенствованіе ея изложенія. Пересмотримъ ихъ.

Г. *Слугинова* «Доказательство основной теоремы ангармоническихъ отношеній» (стр. 233—235), то-есть теоремы, что «пучекъ четырехъ прямыхъ линій произвольною прямою пересѣкается въ четырехъ точкахъ, ангармоническое отношеніе которыхъ есть число постоянное». Свое, сравнительно съ обыкновенно употребляемыми, весьма простое доказательство авторъ основываетъ на извѣстныхъ теоремахъ о пропорціональныхъ линіяхъ.

Г. *Билимовича* «Геометрическій пріемъ рѣшенія алгебраическихъ уравненій» (стр. 246—248) или точнѣе изложеніе геометрическаго пріема рѣшенія системы уравненій

$$x=\sqrt{y^2-a^2}+\sqrt{z^2-a^2},\ \ y=\sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{z^2-b^2},\ \ z=\sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{y^2-c^2}.$$

Авторъ думаетъ, что «до сихъ поръ едва-ли занимался кто либо приложеніемъ геометріи къ алгебрѣ, преимущественно къ рѣшенію алгебраическихъ уравненій». «Между тѣмъ, продолжаетъ онъ далѣе, подчеркивая приводимое соображеніе, «если алгебра оказываетъ большую услугу геометріи, легко допустить и обратное: геометрія можетъ не меньше помочь разрѣшенію вопросовъ алгебры». По поводу перваго утвержденія автора слѣдуетъ замѣтить, что до открытія алгебраическихъ способовъ рѣшенія болѣе трудныхъ уравненій, напримѣръ, квадратныхъ, ихъ рѣшали, когда въ этомъ являлась особенная надобность, исключительно помощью приложенія геометріи. Такъ поступали математики древней Греціи и по ихъ примѣру арабскіе и европейскіе конца Среднихъ Вѣковъ и начала Новаго Времени. Конечно, г. Билимовичу, какъ еще студенту, простительно не знать такихъ важныхъ фактовъ Исторіи своей науки. Но едва-ли такое незнаніе можетъ быть прощено ученой Редакціи, которая въ примѣчаніи къ послѣднему изъ выписанныхъ нами соображеній говоритъ: «высказанная авторомъ мысль заслуживаетъ вниманія», какъ будто эта мысль была оригинальною и высказана въ первый разъ. Что касается до автора, то кромѣ ознакомленія съ Исторіей математики, ему было-бы весьма полезно въ видахъ пріобрѣтенія необходимыхъ свѣдѣній по интересующему его вопросу познакомиться съ извѣстнымъ сочиненіемъ Маттиссена «Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen» (Leipzig, Teubner. 1878).

Г. *Тачалова* «Вычисленіе отношенія окружности къ діаметру» (стр. 358 — 363). Статья предлагаетъ увеличить число уже существующихъ элементарныхъ способовъ этого вычисленія еще однимъ, основаннымъ на одной весьма мало употребительной теоремѣ, помѣщенной между прочими въ курсѣ геометріи Руше и Комберусса. Авторъ «не придаетъ особеннаго значенія данному имъ пріему для вычисленія π, такъ какъ въ высшей математикѣ для этой цѣли есть другой гораздо болѣе точный пріемъ». Другое дѣло элементарные учебники геометріи. Авторъ думаетъ, что его «пріемъ удобнѣе обыкновенно излагаемаго» въ нихъ. Тѣмъ не менѣе, даже и соглашаясь съ нимъ въ этомъ, нельзя не замѣтить, что едва-ли его пріему удастся вытѣснить изъ учебниковъ обыкновенно употребляемый, такъ какъ для введенія перваго потребовалось-бы увеличить существующій курсъ геометріи новыми леммой и теоремой, занявшими, напр., въ изложеніи автора въ совокупности болѣе трехъ страницъ. По пути авторъ выводитъ изъ своихъ неравенствъ также и формулу для вычисленія синуса дуги.

Довольно значительнаго, сравнительно, вниманія Журнала удостоилась разработка обыкновенно весьма мало замѣчаемаго способа превращенія фигуръ черезъ посредство разрѣзыванія и переложенія разрѣзанныхъ частей. Статей, посвященныхъ вопросамъ этой разработки, помѣщено въ Журналѣ *пять*. Изъ нихъ четыре слѣдующія принадлежатъ г. *Флоринскому*: «Превращеніе прямоугольника въ квадратъ разрѣзываніемъ и переложеніемъ разрѣзанныхъ частей» (стр. 145 – 147); «Дополненіе (говоря точнѣе поправка) къ статьѣ о превращеніи прямоугольника въ квадратъ переложеніемъ разрѣзанныхъ частей» (стр. 203—204); «Превращеніе квадрата въ равносторонній треугольникъ переложеніемъ разрѣзанныхъ частей» (стр. 232 — 233); «Превращеніе прямоугольнаго треугольника въ квадратъ переложеніемъ частей (стр, 353 — 357). Пятая статья «Превращеніе квадрата разрѣзываніемъ и переложеніемъ частей въ *n* равныхъ равностороннихъ треугольниковъ» (стр. 297—299) принадлежитъ г. *Руктешелю*. Литература упомянутаго способа или, какъ выражается претенціозно Редакція, «теоріи» превращенія фигуръ этими статьями въ Журналѣ еще не исчерпывается. Кромѣ нихъ предложены три задачи (№№ 35, 41 и 51) на ту-же тему, а далѣе и доставленныя въ Редакцію ихъ рѣшенія (стр. 254, 302 и 349). Имѣется также и посвященный той-же теоріи слѣдующій декретъ Редакціи по адресу сотрудниковъ. «Изъ статьи г. Флоринскаго легко выясняется общій методъ для превращенія квадрата и вообще даннаго прямоугольника въ 2, 3, 4, 5 и 6 и т. д. равныхъ квадрата переложеніемъ разрѣзанныхъ частей. Желая способствовать большему развитію теоріи превращенія однихъ фигуръ въ другія переложеніемъ разрѣзанныхъ частей, предлагаемъ любителямъ заняться рѣшеніемъ слѣдующихъ задачъ. Превратить переложеніемъ разрѣзанныхъ частей: 1) квадратъ въ 2, 3, 4 и т. д. равныхъ равносторонних треугольника, 2) равносторонній треугольникъ въ 2, 3, 4 и т. д. равныхъ квадрата, 3) равносторонній треугольникъ въ 2, 3, 4 и т. д. равныхъ равностороннихъ треугольника. Простѣйшія рѣшенія этихъ задачъ будутъ помѣщены въ Журналѣ. Желающіе (милостиво разрѣшаетъ Редакція) могутъ также заняться подобнымъ превращеніемъ и другихъ фигуръ, кромѣ квадрата и треугольника» (стр. 239 — 240). Упомянутая статья г. Руктешеля является такимъ образомъ отвѣтомъ на первую изъ предложенныхъ Редакціею задачъ. Г. Флоринскій повидимому думаетъ, что идея изучаемаго имъ способа принадлежитъ исключительно ему и что она не обладаетъ непосредственной очевидностью. Въ началѣ первой изъ своихъ статей онъ говоритъ. «Настоящая замѣтка имѣетъ цѣлью, показать, что такой (равновеликій площади данной фигуры) квадратъ можно построить не только посредствомъ циркуля и линейки, но что всякая прямолинейная фигура превращается въ квадратъ разрѣзываніемъ и переложеніемъ разрѣзанныхъ частей» (стр. 145). Смѣемъ увѣрить почтеннаго автора, что въ этомъ «показываніи» рѣшительно нѣтъ никакой надобности, такъ какъ справедливость идеи совершенно очевидна, Если его замѣтка и имѣетъ значеніе, то никакъ не вслѣдствіе упомянутаго «показыванія», а какъ начало разработки самаго способа. Что же касается до причинъ, вслѣдствіе которыхъ, не смотря на очевидность идеи, самый способъ почти не обращалъ на себя вниманія, то мы едва-ли ошибемся, если скажемъ, что главнѣйшей изъ нихъ была его малозначительность. Дѣйствительно, все значеніе его чуть-ли не приводится къ одной способности доставленія матерьяла для задачъ соотвѣтствующаго рода.

Извѣстный уже нашимъ читателямъ взглядъ Редакціи на работы по Исторіи математики не помѣшалъ ей однако же помѣстить въ своемъ Журналѣ двѣ статьи, имѣющія отношеніе къ Исторіи геометріи именно проф. *Ващенко-Захарченко* «Выраженіе площади треугольника въ функціи его сторонъ» (стр. 49—52) и проф. *Рахманинова* «Методъ или способъ Роберваля для проведенія касательныхъ къ кривымъ линіямъ» (стр. 161—169 и 185—197). Первая имѣетъ цѣлью дать сопровождаемое историческими указаніями и подробностями изложеніе приписываемаго Герону Старшему вывода разсматриваемаго выраженія. Приступить къ составленію статьи, впрочемъ, побудилъ автора не историческій интересъ вопроса, но убѣжденіе, что «по простотѣ и изяществу доказательства всѣ эти (позднѣйшіе) методы и пріемы (вывода разсматриваемаго выраженія) далеко уступаютъ доказательству, которое приписываютъ Герону Старшему» (стр. 52). Авторъ такимъ образомъ имѣетъ въ виду усовершенствованіе изложенія Элементарной Геометріи. Что касается до статьи проф. Рахманинова, то она представляетъ обстоятельное изложеніе геометрическаго способа Роберваля проведенія касательныхъ къ кривымъ въ его современномъ развитіи, данномъ Маннгеймомъ. Статья имѣетъ въ виду, слѣдовательно, введеніе въ Элементарную Геометрію метода, хотя и не новаго, но давно оставленнаго и уже почти забытаго.

Чтобы закончить нашъ обзоръ статей Журнала по геометріи, намъ остается еще упомянуть о статьѣ г. *Левшина* «Задачи на построеніе круга (стр. 339—342). Эта статья занимается рѣшеніемъ выдѣляемыхъ ею въ особую группу задачъ на построеніе круга, проходящаго черезъ данныя точки и касающагося данныхъ линій (прямыхъ или окружностей). Какъ занимающаяся вопросами рѣшенія задачъ опредѣленной группы, статья г. Левшина составляетъ переходъ отъ статей теоретическаго характера къ задачамъ, что и заставило насъ отложить упоминаніе о ней до конца. Способъ, которымъ она пользуется при рѣшеніи, есть способъ геометрическихъ мѣстъ. Заглавіе ея, какъ не трудно видѣть, слишкомъ обще и потому не даетъ никакого понятія о содержаніи; начало-же, гдѣ говорится о предметѣ изслѣдованія недостаточно ясно.

(*Окончаніе слѣдуетъ*).

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ УКАЗАТЕЛЬ

русскихъ, французскихъ и нѣмецкихъ книгъ по физико-математическимъ наукамъ, вышедшихъ въ теченіе декабря 1884 года, января и февраля 1885 года.

Ecoles régimentaires. Cours préparatoire. **Géométrie** (Геометрія). In—16, 201 p. avec fig. Paris, impr. nationale. (11 février).

Félix-Fraiche.—Eléments de géométrie (Элементы геометріи). In—8⁰, 531 p. avec fig. Paris, impr. De Soye et fils. (20 décembre).

Girod (F.).—Cours de géométrie théorique et pratique à l'usage des lycées et des collèges, etc. (Курсъ теоретической и практической геометріи для употребленія въ лицеяхъ и коллегіяхъ и пр.), contenant de nombreuses applications au dessin linéaire, à l'architecture, à l'arpentage, etc. 6-e édition. In—8⁰, 392 p. avec 559 fig. Sceaux, impr. Charaire et fils. 4 francs (8 janvier).

Lebon (E.). — Géométrie descriptive (Начертательная геометрія) pour l'enseignement secondaire spécial (programme du 28 juillet 1882). Cours de 4-e et 5-e années. 2-e édition. In—8⁰, VIII—176 p. avec 128 fig. et planche. Paris, imp. et lib. Delalain frères. 4 fr. 50. (26 janvier).

—

Gusserow, C. Leitfaden ür den Unterricht iu der Stereometrie und den Elementen der Projectionslehre (Руководство къ изученію Стереометріи и Элементовъ ученія о проэкціяхъ). Berlin. Springer. 1 Mk. 20 Pf.

Алгебра.

Малининъ (А.) и **Буренинъ (К.).** Руководство алгебры и собраніе алгебраич. задачъ для гимназій, реальн. училищъ и учительск. институтовъ. Изд. 7-е книж. магаз. насл. бр. Салаевыхъ. Москва. 84. 8 д. 30000 экз. Ц. 1 р.

—

Bourget (J.). — Cours d'algèbre à l'usage des élèves de l'enseignement spécial, des élèves des écoles normales et des candidats au baccalauréat ès sciences (Курсъ алгебры). In —12, VIII — 264 p. Saint-Clond, imprim. V-e Belin et fils.

Bovier—Lapierre (G.). — L'Algèbre simplifiée, ou Eléments d'algèbre (Упрощенная алгебра или элементы алгебры) comprenant la résolution des équations et des problèmes du premier et du deuxième degré, etc. à l'usage de l'enseignement primaire supérieur, des écoles normales des deux sexes, des aspirants et aspirantes aux brevets de capacité. 3-e édition, revue et augmentée. Ouvrage conforme aux nouveaux programmes de l'enseignement classique et de l'enseignement spécial. In—12, VIII—208 p. avec fig. Corbeil, impr. Renaudet.

Dufailly (J.). — Algèbre (Алгебра). 6 e édition. In—8⁰, 248 p. avec fig. Corbeil, impr. Renaudet. 4 fr.

Тригонометрія.

Серре, А. Прямолинейная Тригонометрія. Пер. Е. Гуторъ. 3-е изд. книж. маг. насл. бр. Салаевыхъ. Москва, 85. 8 д. 2400 экз. Ц. 90 к.

Механика, физика и физическая географія.

Висковатовъ, В. Краткій курсъ начальной физики въ объемѣ городскихъ училищъ. Изд. Полубояринова. Спб. 85. 8 д. 2045 экз. Ц. 50 к.

Каталогъ фундамент. коллекціи картинъ для волшебн. фонаря, принадлежащихъ Московской художеств. мастерской. Ноябрь. 1884 г. М. 84. Тип. Мамонтова и К⁰. 8 д. 200 экз.

Краевичъ, К. Физика ежедневныхъ явленій. Для низшихъ учеб. заведеній. 2-е изд. Спб. 85. Тип. Фреймана. 8 д. 4000 экз. Ц. 70 к.

О преподаваніи элементарной физики. Прибавленіе къ „Физикѣ по Крюгеру". (Для учителя). 3-е исправл. изд. І. Паульсона. Спб. 85. 8 д. 300 экз. Ц. 15 к.

Спеціальный иллюстрированный каталогъ волшеб. фонарей и картинъ къ нимъ, производства Спб. мастерской учеб. пособій и игръ. Спб. 84. Тип. Дома приз. мал. бѣд. 8 д. 3000 экз. Ц. 20 к.

Хвольсонъ, О. Объ учрежденіи коммиссіи для выработки программы конкурса на составленіе для сред. учеб. завед. коллекціи приборовъ, относящихся до открытій и изобрѣт. въ области ученія объ электричествѣ, сдѣланныхъ за послѣднее 10-лѣтіе. Спб. 84. Тип. Пантелеевыхъ 8 д. 170 экз.

Элементарная физика по Крюгеру. Руководство для низшихъ учеб. заведеній. 3-е изд. І. Паульсона. Спб. 85. 3020 экз. Ц. 60 к.

Berquin. — Les Curiosités de la nature, petites études sur la terre, la mer et les astres (Достопримѣчательности природы, маленькіе этюды о землѣ, морѣ и звѣздахъ). In—12. 120 p. Limoges, imp. et lib. E. Ardant et C-e.

Bertrand (O).—Trente-six conférences sur l'ensemble des sciences naturelles (d'après les idées modernes): Cosmographie; Physique; Chimie; Minèralogie; Botanique; Géologie, etc. (36 бесѣдъ о совокупности естественныхъ наукъ (по новѣйшимъ идеямъ): космографіи; физики; химіи; минералогіи; ботаники; геологіи; и пр.). In—18 jésus, 501 p. Mayenne, imp. Durenne.

Bonnier (G.) et A. Seignette.—Eléments usuels des sciences physiques et naturelles (Употребительные элементы физическихъ и естественныхъ наукъ). Cours supérieur: hygiène, zoologie, botanique, géologie, physique, chimie. In—12, 372 p. avec 400 fig. Paris, impr. et lib. P. Dupont. (28 janvier).

Haraucourt (C).—Cours de physique (Курсъ физики) (3-e, 4-e et 5-e années d'après les programmes officiels). In—8⁰, 396 p. avec 369 fig. Sceaux, imprim. Charaire et fils. 4 fr. (8 janvier) (Cours d'études de l'enseignement secondaire des jeunes filles).

Haraucourt (C.).—Cours élémentaire de physique à l'usage des classes de l'enseignement spécial, des classes de lettres des lycées et collèges, et des candidats aux baccalauréats (Элементарный курсъ физики), contenant de nombreux exercices. In—8⁰, 539 p. avec 450 fig. Sceaux. impr. Charaire et fils. 6 fr. (8 janvier).

Haraucourt (C.).—Leçons élémentaires de physique (Элементарные уроки физики) à l'usage des écoles primaires supérieures, avec de nombreux exercices numériques. In—12, 468 p. avec 278 fig. Sceaux, imp. Charaire et fils. 3 fr. (8 janvier).

Pape-Carpantier (M-me M.) et Vacca. — Hygiène, Physique et Chimie (Гигіена, Физика и Химія). 3-e édition. In—18, 396 p. avec fig. Paris, imp. Lahure. 2 fr. (31 décembre) (Cours d'éducation et d'instruction, période moyenne).

Roy (j.). — L'Astronomie de la jeunesse. 3-e édition. In—12, 180 p. avec vignette. Limoges, impr. et lib. E. Ardant et C-e (Астрономія для юношества).

Tempestini (F.). — Manuel des sciences physiques et naturelles, par demandes et par réponses (Руководство физическихъ и естественныхъ наукъ въ вопросахъ и отвѣтахъ), à l'usage des candidats aux baccalauréats ès lettres et ès sciences. Physique (pesanteur, chaleur, acoustique, électricité, magnétisme, lumière). In—32, 63 pages. Charleville, imp. Devin et C-e. 1 fr.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ УКАЗАТЕЛЬ

КНИГЪ: РУССКИХЪ (СЪ МАРТА — ПО СЕНТЯБРЬ 1885), ФРАНЦУЗСКИХЪ (СЪ МАРТА — ПО МАЙ 1885) И НѢМЕЦКИХЪ (СЪ 16 ФЕВРАЛЯ — ПО 30 АПРѢЛЯ 1885).

Чистая математика.

Альбицкій, В. И. Изслѣдованіе уравненій 2-ой степени съ двумя перемѣнными въ отношеніи разложимости ихъ на два линейные множителя. Отд. отт. изъ Извѣстій Технол. Института 1885 г. 44 стр. Спб. 8 д. Тип. Импер. Акад. Наукъ.

Андреевъ, К. А. О разложеніи въ рядъ функціи по функціямъ подобнымъ функціямъ Лежандра. Спб. 85. Тип. Акад. Наукъ. 8 д. 14 стр.

Войтинскій, С. Сборникъ упражненій и задачъ по дифференціальному исчисленію. Съ таблицею чертежей. Спб. 85. Тип. Бермана и Рабиновича. 8 д. 240 стр. 1 р. 50 к.

Крутиковъ, Ѳ. П. Разложеніе дробей по убывающимъ степенямъ какого-нибудь цѣлаго числа. Москва. 85. Тип. Лисснера и Романа. 8 д. 79 стр.

Лѣтниковъ, А. О гиперсферическихъ функціяхъ и о разложеніи произвольной функціи въ ряды, расположенные по функціямъ гиперсферическимъ. Москва. 85. Изд. моск. математическаго общества. 8 д. 78 стр. 50 экз.

Максимовичъ, В. Розысканіе общихъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка, интегрирующихся въ конечномъ видѣ, и доказательство невозможности такого интегрированія для общаго линейнаго уравненія 2-го порядка. Казань. 85. Унив. тип. 4 д. 87 стр. 200 экз.

Мясоѣдовъ, А. Къ теоріи отдѣленія корней. Москва. 85. Унив. тип. 8 д. 28 стр. 100 экз.

Мясоѣдовъ. Непосредственные способы опредѣленія нисшаго предѣла положительныхъ корней и предѣловъ отрицательныхъ корней алгебраическаго уравненія. Изд. москов. математическаго общества. Москва. 85. 8 д. 20 стр. 50 экз.

Некрасовъ, П. Опредѣленіе неизвѣстныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ при весьма большомъ числѣ неизвѣстныхъ. Москва. 85. Унив. тип. 8 д. 18 стр.

П. В. П. Геометрія чиселъ. Часть I съ таблицею. Москва. 85. Тип. Мамонтова. 8 д. 53 стр. Ц. 35 коп.

Селивановъ, Д. Теорія алгебраическаго рѣшенія уравненій. Спб. 85. Тип. Акад. Наукъ. 8 д. 242 стр.

Сохоцкій. Теорія чиселъ. Литограф. лекціи. Листы: 10, 11 и 12. Стр. 145—192. 8 д. Спб. Лит. Пантелеевыхъ. 100 экз.

Умовъ. Геометрическое значеніе интеграловъ Френеля. Одесса. 85. Тип. «Одесскаго Вѣстника». 8 д. 30 стр. 250 экз.

Catalan (E.). Sur les formules relatives aux intégrales eulériennes (О формулахъ, относящихся къ эйлеровымъ интеграламъ). In—8⁰, 4 p. Paris (17 mars).

Lucas (E.). Le Calcul et les Machines à calculer (Счетъ и счетныя машины). In—8⁰, 31 pp. avec fig. Paris (18 avril).

Méray (C.). Exposition nouvelle de la théorie des formes linéaires et des déterminants (Новое изложеніе теоріи линейныхъ формъ и детерминантовъ). In—4⁰, 104 p. Paris. 3 fr. (27 février).

Biermann, O. Ueber die singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (Объ особенныхъ рѣшеніяхъ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій). (Akad.). Wien, Gerold. 25 Pf.

Bork, H. Untersuchungen über das Verhalten zweier Primzahlen in Bez. auf ihren quadratischen Restcharakter (Изслѣдованія о свойствахъ двухъ первоначальныхъ чиселъ по отношенію къ ихъ квадратичному характеру остатка). (Dissert.). Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Gegenbauer, L. Ueber das Legendre—Jacobi'sche Symbol (О символѣ Лежандра-Якоби). (Akad.). Wien, Gerold. 45 Pf.

Gegenbauer, L. Ueber das quadratische Reciprocitätsgesetz (О квадратичномъ законѣ взаимности). Wien, Gerold. 20 Pf.

Gegenbauer, L. Zahlentheoretische Studien (Изслѣдованія по Теоріи Чиселъ). Wien, Gerold. 1 Mk.

Hecht, W. Zur Integration der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ (Къ интегрированію дифференціальнаго уравненія и пр.). Leipzig, Teubner. 1 Mk. 20 Pf.

Igel, B. Ueber ein simultanes System dreier binärer cubischer Formen (О совмѣстной системѣ трехъ бинарныхъ кубическихъ формъ). Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

Kraus, L. Die Functionaldeterminanten (Функціональные детерминанты). Wien, Gerold. 30 Pf.

Lüroth, J. Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale (О каноническихъ періодахъ Абелевыхъ интеграловъ). München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Pick, G. Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen (О модулярныхъ уравненіяхъ эллиптическихъ функцій). Wien, Gerold. 25 Pf.

Schendel, L. Grundzüge der Algebra nach Grassmann's Principien (Основанія алгебры по принципамъ Грассманна). Halle. Schmidt. 2 Mk. 50 Pf.

Serret, A. Lehrbuch der Differential— und Integralrechnung (Учебникъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія). Deutsch bearb. von A. Harnack. 2 Bd., 1. Hälfte: Integralrechnung. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 20 Pf.

(*Продолженіе слѣдуетъ*).