

**NOTE SUR LES EFFETS BALISTIQUES
DE LA DÉTENTE DES GAZ DE LA POWDRE
DANS UNE TUYÈRE CONVERGENTE-DIVERGENTE.**

Je me propose d'établir quelques formules simples relatives à la détente des gaz de la poudre et d'en faire l'application à différents problèmes tels que ceux des projectiles à tuyère de culot ou des fusées.

Soit p_1 la pression des gaz de la poudre dans la chambre de combustion, aux points où leur vitesse est nulle ou négligeable, et soit $p = Zp_1$ leur pression en un point de la tuyère par laquelle la détente des gaz se produit dans l'atmosphère. Soient, d'autre part, S la section de la tuyère au point considéré, S_0 la section minimum ou section contractée, S_2 la section d'ouverture par laquelle la tuyère s'ouvre dans l'atmosphère, $p_0, p_2, Z_0, Z_2, \dots$ les valeurs de p et de Z qui correspondent aux sections S_0 et S_2 respectivement.

Si l'on peut attribuer aux gaz émis une valeur déterminée γ du rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant (nous reviendrons sur ce point), les formules suivantes résultant de la théorie classique :

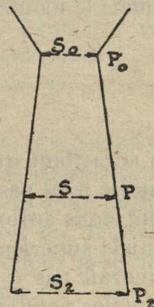


Fig. 148.

$$(1) \quad Z_0 = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}},$$

et

$$(2) \quad \frac{S}{S_0} = \frac{Z_0^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - Z_0^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}}}{Z^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - Z^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}}} = \frac{\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}}{Z^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - Z^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}}},$$

sont applicables dès que p_1 est supérieur au double de la pression atmosphérique, ce qui sera évidemment toujours réalisé dans le genre actuel d'applications.

VITESSE. — Si ρ_1 est la densité absolue des gaz dans la région initiale de pression p_1 , leur vitesse V au point de pression $p = Zp_1$ est donnée par la formule connue (système C. G. S. d'unités) :

$$(3) \quad V = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(1 - Z^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right)}.$$

Le quotient $\frac{p_1}{\rho_1}$ qui figure dans cette expression est relié de manière simple à la force F de la poudre employée lorsqu'on suppose établi, comme nous le ferons d'ordinaire par la suite, un régime permanent d'écoulement dans lequel la combustion de la poudre fournit dans chaque élément de temps une masse de gaz égale à celle que la tuyère débite.

Dans ces conditions, la pression p_1 régnant dans l'endroit où se fait la combustion de la poudre, l'émission de l'unité de masse des gaz se fait *avec un travail extérieur égal à $\frac{p_1}{\rho_1}$* . D'autre part, quand on mesure la force F , la combustion se fait en vase clos, *sans travail extérieur*. Il résulte de cette remarque, comme le montre un raisonnement thermodynamique simple, que :

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{F}{\gamma},$$

en admettant que la pression p_1 soit assez faible pour que le covolume de la poudre n'ait pas d'influence appréciable. Il en sera toujours ainsi, les appareils dont nous aurons à nous occuper ne comportant pas en général une pression initiale supérieure à 500 atm. L'influence du covolume sur les résultats n'atteindrait pas 4 p. 100 dans ces conditions, pour le cas le plus défavorable, celui des poudres noires. La plupart de nos résultats seront d'ailleurs indépendants de cette hypothèse.

En tenant compte dans (3) de la relation précédente, on a :

$$(4) \quad V = \sqrt{\frac{2F}{\gamma-1}} \sqrt{1 - Z \frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

La vitesse maxima résultant d'une détente complète aurait ainsi pour valeur $\sqrt{\frac{2F}{\gamma-1}}$.

VALEUR DE γ . — Ce résultat va nous permettre de déterminer la valeur de γ qu'il y a lieu de faire correspondre à chaque type de poudre. En effet, la détente complète doit transformer en énergie cinétique la totalité de la chaleur fournie par la combustion de la poudre : cette énergie cinétique doit être égale au *potentiel* W de la poudre. La vitesse limite doit avoir pour valeur $\sqrt{2W}$, et en l'égalant à la valeur obtenue précédemment, il vient :

$$W = \frac{F}{\gamma-1},$$

ou :

$$(5) \quad \gamma = 1 + \frac{F}{W}.$$

En admettant pour les poudres colloïdales $F = 9 \times 10^9$, $W = 45 \times 10^9$ unités (C. G. S.) on obtient :

$$\gamma = 1,2,$$

et pour les poudres noires $F = 3 \times 10^9$, $W = 27 \times 10^9$,

$$\gamma = 1,1.$$

Ces nombres sont tout à fait conformes à ce que permettent de prévoir d'autres considérations tirées de la nature des gaz obtenus et sur lesquelles il serait trop long d'insister ici. Pour la poudre noire, en particulier, la faible valeur de γ correspond à la présence de fumées solides en suspension qui cèdent leur chaleur au gaz, quand celui-ci se détend, et augmentent par là d'une même quantité ses deux chaleurs spécifiques, dont le rapport se trouve rapproché de l'unité.

Nous obtiendrons d'ailleurs plus loin ce résultat remarquable que les effets balistiques produits par la détente des gaz de la poudre sont sensiblement indépendants de la valeur admise pour γ dans la théorie. Il est donc inutile de chercher à connaître cette quantité avec plus de précision ou de tenir compte de sa variation possible au cours de la détente. La valeur moyenne fournie par le raisonnement précédent sera largement suffisante.

La vitesse V_0 dans la section contractée, égale à la vitesse du son dans le gaz sous les conditions de pression et de température réalisées dans cette section, s'obtient en donnant dans (4) à Z la valeur Z_0 fournie par (1).

On obtient ainsi :

$$(6) \quad V_0 = \sqrt{\frac{2F}{\gamma + 1}},$$

soit environ 900 m par seconde pour la poudre B et 530 pour la poudre noire. La vitesse augmente à partir de V_0 quand on suit le gaz au delà de la section contractée, en restant inférieure au maximum $\sqrt{2W}$ qui est d'environ 3.000 m pour la poudre B et 2.300 m pour la poudre noire. Pour avoir la vitesse V_2 à l'orifice de la tuyère, il faut tenir compte des relations (2) et (3) pour en tirer la valeur V_2 de la vitesse qui correspond à la valeur S_2 de la section par l'intermédiaire de Z_2 . Les gaz émis dans l'atmosphère avec cette vitesse sous la pression $Z_2 p_1$ y continuent leur détente, mais celle-ci, n'étant plus guidée par la tuyère, s'effectue dans toutes les directions, de sorte que l'effet balistique est moindre que si la tuyère avait été plus longue. Nous allons voir comment il est possible de calculer cet effet balistique en fonction de la section d'ouverture de la tuyère.

DÉBIT DE LA TUYÈRE. — En vertu de la loi de détente adiabatique suivie par le gaz, la densité ρ_0 dans la section contractée a pour valeur :

$$\rho_1 Z_0^{\frac{1}{\gamma}},$$

elle permet de calculer le débit D de la tuyère ou masse de gaz évacuée par unité de temps par :

$$(7) \quad D = \rho_0 V_0 S_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{F}} p_1 S_0,$$

avec :

$$(8) \quad \alpha = \gamma \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}.$$

Le débit de la tuyère est proportionnel à la pression initiale et à l'aire de la section contractée. Un tableau donné plus loin montre comment varie le coefficient de proportionnalité α avec la valeur admise pour γ .

EFFET BALISTIQUE. — Pour calculer la propulsion qui résulte de l'émission des gaz par l'orifice de la tuyère il faut évaluer la quantité de mouvement I qui passe, par unité de temps, à travers la section S_2 de cet orifice. Ce flux de quantité de mouvement, ou impulsion, comprend deux parties : d'abord la quantité de mouvement DV_2 représentée par le gaz émis, puis l'action $p_2 S_2$ ou $Z_2 p_1 S_2$ résultant de l'existence de la pression p_2 dans la section orifice. Donc au total :

$$I = DV_2 + Z_2 p_1 S_2.$$

En remplaçant V_2 et S_2 par leurs expressions tirées de (2) et (3), on obtient :

$$(9) \quad I = f p_1 S_0,$$

où le coefficient f a pour valeur :

$$(10) \quad f = \gamma \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}} \sqrt{1 - Z_2 \frac{\gamma}{\gamma - 1}} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{Z_2 \frac{\gamma}{\gamma - 1}}{1 - Z_2 \frac{\gamma}{\gamma - 1}} \right].$$

Il est remarquable que l'effort de propulsion fourni par la tuyère, proportionnel, comme le débit, à la pression initiale et à l'aire de la section contractée, ne dépend, en outre, par l'intermédiaire de f , que de γ et de Z_2 , c'est-à-dire de la *raison d'ouverture* $\frac{S_2}{S_0}$ de la tuyère. La force de la poudre employée n'y figure plus.

Si on coupe la tuyère à la section contractée, le coefficient f prend la valeur simple :

$$(11) \quad f_0 = 2 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}},$$

obtenue en remplaçant dans (10) Z_2 par la valeur (1) de Z_0 . La valeur de f

augmente ensuite à mesure qu'on allonge la tuyère pour tendre quand la longueur augmente indéfiniment vers la valeur :

$$f_{\infty} = \gamma \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}.$$

On trouve une confirmation des résultats précédents en vérifiant que la contribution à l'effort de propulsion d'une tranche de la paroi de la tuyère comprise entre les sections S et $S + dS$ est bien égale au produit de la pression locale Zp_1 par la projection dS de la paroi interne de cette tranche sur un plan perpendiculaire à l'axe de la tuyère. On vérifie bien en effet que :

$$dI = Zp_1 dS,$$

quand on suppose Z variable dans les expressions de I et de S .

Dans le calcul précédent j'ai confondu la vitesse V_2 du gaz avec sa projection sur l'axe de la tuyère, ceci est légitime en raison de la faible ouverture ($\frac{1}{20}$ de radian environ) qu'il faut donner à la partie divergente de la tuyère pour obtenir un bon rendement en évitant le décollement de la veine gazeuse. La variation du *coefficient de propulsion* f avec la longueur de la tuyère tient à ce qu'après être sortis de celles-ci, les filets gazeux divergent progressivement, et qu'après détente complète, leur quantité de mouvement totale projetée sur l'axe de la tuyère est d'autant moindre, toutes choses égales d'ailleurs, que cette divergence s'est produite plus tôt, c'est-à-dire que la tuyère est plus courte.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — La question la plus importante que les résultats précédents permettent de résoudre est la suivante :

Quel est l'effort de propulsion I fourni par une tuyère donnée dont on connaît la section contractée S_0 , la raison d'ouverture $\frac{S_2}{S_0}$ et la pression p_1 d'alimentation?

Pour y répondre, j'ai calculé pour diverses valeurs de Z_1 et de γ le *coefficient de propulsion* f et la *raison d'ouverture* $\frac{S_2}{S_0}$ par les formules (10) et (2) et construit ensuite, pour chaque valeur de γ la courbe qui représente la variation de f en fonction de $\frac{S_2}{S_0}$; la propulsion I est donnée par $f p_1 S_0$ quand f est connu.

Les calculs ont été faits pour les valeurs suivantes de γ :

$$1, \quad 1,05, \quad 1,1, \quad 1,15, \quad 1,2, \quad 1,25, \quad 1,3, \quad 1,35, \quad 1,4 \quad \text{et} \quad \frac{5}{3}.$$

La valeur $\frac{5}{3}$ est la plus grande que puisse prendre γ et correspond au cas des gaz monoatomiques; la suivante 1,4 est relative aux gaz diatomiques. Les valeurs les plus intéressantes au point de vue balistique sont 1,2 et 1,1 comme on l'a vu plus haut.

Enfin il est intéressant d'y ajouter le cas limite $\gamma = 1$ d'un gaz dont la détente adiabatique se confond avec l'isotherme.

Les formules générales établies plus haut se présentent dans ce cas sous forme indéterminée et doivent être remplacées par les suivantes, où le symbole L représente un logarithme népérien et e la base du système.

$$(1') \quad Z_0 = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0,6065,$$

$$(2') \quad \frac{S_1}{S_0} = \frac{1}{Z \sqrt{2e L \frac{1}{Z}}},$$

$$(4') \quad V = \sqrt{2F L \frac{1}{Z}}.$$

$$(6') \quad V_0 = \sqrt{F}.$$

$$(8') \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0,6065$$

$$(10') \quad f = \frac{1}{\sqrt{2e L \frac{1}{Z}}} [1 - 2e LZ].$$

$$(11') \quad f_0 = \frac{2}{\sqrt{e}} = 1,2130.$$

L'importance du cas $\gamma = 1$ résulte du fait que les résultats obtenus sont, comme nous l'allons voir, remarquablement indépendants de la valeur admise pour γ et que les calculs relatifs à diverses applications se développent beaucoup plus simplement dans le cas limite $\gamma = 1$ que dans les autres. L'erreur commise en adoptant pour γ la valeur 1 sera généralement négligeable.

Les courbes de la planche 1 représentent les variations de f en fonction de $\frac{S_2}{S_0}$ pour les valeurs de γ indiquées et jusqu'à la valeur 3,5 de la raison d'ouverture, plus que suffisante pour les applications. *Ces courbes passent toutes sensiblement par un même point correspondant à $\frac{S_2}{S_0} = 1,57$ et à $f = 1,40$.* Elles s'écartent peu les unes des autres; en particulier les courbes relatives aux trois valeurs 1, 1,1 et 1,2 de γ ont des ordonnées qui ne s'écartent pas de 2 p. 100 au maximum pour une même abscisse.

Nous obtenons ainsi ce résultat remarquable que le *coefficient de propulsion* d'une tuyère donnée *ne dépend que de cette tuyère et nullement de la poudre utilisée.*

Il est d'environ 1,5 pour une tuyère d'ouverture $\frac{S_2}{S_0} = 2,25$, c'est-à-dire dont la *longueur est environ quintuple du diamètre de sa section contractée.* Une longueur plus grande sera généralement inutile.

La force de propulsion obtenue ainsi est d'environ 1,5 kg par centimètre carré de section contractée et par atmosphère de pression initiale des gaz de la poudre. Elle est 1,5 fois l'effort statique exercé par la même pression sur la même surface, et varie relativement peu avec la longueur de la tuyère puisqu'elle serait encore supérieure à 1,2 kg si la tuyère était coupée au niveau de la section contractée.

Pour ce qui concerne le débit, il résulte des nombres donnés au tableau I que le débit par centimètre carré de section contractée et par atmosphère de pression initiale est d'environ 8 g par seconde pour la poudre B et 12 g par seconde pour la poudre noire.

VITESSE EFFICACE. — Le quotient de l'impulsion I par le débit D donne la vitesse moyenne dans la direction de l'axe de la tuyère des gaz émis après détente complète. On peut l'appeler la *vitesse efficace* V_e . Elle a pour expression, d'après (7), (8), (9) et (10) :

$$(12) \quad V_e = \frac{1}{D} = \sqrt{\frac{FJ}{\alpha}} = \sqrt{2W} \sqrt{1 - Z_2 \frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{Z_2 \frac{\gamma-1}{\gamma}}{1 - Z_2 \frac{\gamma-1}{\gamma}} \right).$$

Dans le cas de la tuyère de longueur quintuple du diamètre de la section contractée, cette expression donne pour la *vitesse efficace* d'émission :

2 000 m par seconde pour la poudre B ;
1 160 m par seconde pour la poudre noire.

Si la tuyère est coupée à la section contractée, l'expression de V_e devient, par substitution de Z_0 à Z_2 :

$$(13) \quad V_e = \sqrt{2W \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)},$$

ce qui donne :

1 660 m par seconde pour la poudre B ;
970 m par seconde pour la poudre noire.

COMPARAISON DES POUDRES. — Le fait, remarqué plus haut, que la variation de f et par conséquent de I ou de V_e avec la longueur de la tuyère est sensiblement la même pour les diverses valeurs possibles de γ , et par conséquent la même pour toutes les poudres, permet de comparer celles-ci entre elles au point de vue des effets de fusée, de manière indépendante de la tuyère employée. On peut utiliser dans ce but l'expression (13) pour comparer les propulsions obtenues avec des masses égales des diverses poudres. Si on remplace γ par sa valeur $1 + \frac{F}{W}$ en fonction de la force et du potentiel de la poudre, il vient pour cette mesure de l'effet fusée d'une poudre à masse donnée :

$$(14) \quad \phi_m = \frac{\sqrt{2WF(2W+F)}}{W+F},$$

Il est plus important peut-être de comparer les poudres au point de vue des impulsions qu'elles peuvent donner sous des *volumes égaux*. Pour obtenir le coefficient correspondant φ_v d'effet fusée à volume donné, il suffit de multiplier le coefficient précédent φ_m par la densité δ de la poudre à l'état solide. On obtient ainsi :

$$(15) \quad \varphi_v = \frac{\delta \sqrt{2WF(2W+F)}}{W+F},$$

en fonction des éléments connus, densité, force et potentiel de la poudre.

En admettant les densités 1,6 et 1,8 pour la poudre B et la poudre noire, on obtient pour les coefficients φ_v de ces poudres les valeurs respectives 2 650 et 1 750. A volume égal, la poudre B donnera donc un effet de propulsion une fois et demie plus grand que celui de la poudre noire.

On pourrait certainement augmenter beaucoup le coefficient φ_v en constituant des poudres denses à base de nitrate de baryum ou de nitrate de plomb.

Projectiles à tuyère de culot.

Je me propose d'appliquer d'abord les résultats précédents à l'examen des projectiles à tuyère de culot, tels que ceux étudiés par M. Delamare-Maze, dans lesquels l'action propulsive de la poudre est à la fois statique comme dans

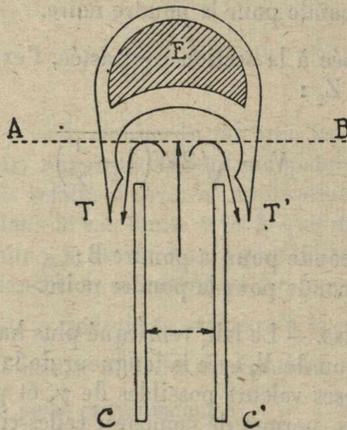


Fig. 149.

les canons et dynamique comme dans les fusées, les gaz de la poudre prenant appui à la fois sur l'appareil de lancement et sur eux-mêmes. Ces projectiles représentent une modification du type Van Deuren par adjonction d'une tuyère annulaire TT' à la partie antérieure du tube cylindrique CC' qui coiffe l'appareil de lancement. Il s'agit d'évaluer l'avantage que peut présenter la disposition nouvelle et de déterminer dans quelles conditions cet avantage sera le plus grand possible.

La question me semble devoir être précisée de la manière suivante. Le projectile peut être séparé en deux parties par un plan tel que AB : au-dessus se trouve la partie utile, de masse m_u , comprenant l'explosif E et son emballage; au-dessous, les organes de lancement, tube et tuyère, de masse totale m_o , que nous supposons faits d'un acier de qualité donnée, caractérisée par sa limite élastique R et sa densité Δ .

Le meilleur procédé de lancement sera évidemment celui qui, pour une valeur donnée du rapport $\frac{m_u}{m_o}$ permettra d'obtenir la plus grande vitesse initiale, ou, ce qui revient au même, celui qui, pour une masse donnée de métal m_1 permettra de lancer avec une vitesse initiale donnée la plus grande masse utile m_o .

Cela revient encore à comparer les forces vives que les divers dispositifs permettent de communiquer au projectile par l'intermédiaire d'une masse donnée m_1 de métal employé dans les organes de lancement. Chaque type de projectile sera donc caractérisé à ce point de vue par le quotient $\frac{T}{m_1}$ de la force vive T communiquée au projectile par la masse m_1 de ses organes de lancement. Ce quotient représente d'ailleurs le carré de la vitesse initiale que prendrait le projectile s'il était réduit à ces organes de lancement et son quotient par l'accélération g de la pesanteur représente la portée maxima P_0 qu'on obtiendrait dans ces conditions sous l'angle de 45 degrés en négligeant l'effet de la résistance de l'air. Il est donc naturel de caractériser chaque type de projectile par cette portée maxima :

$$(16) \quad P_0 = \frac{T}{m_1 g}$$

La portée P que peut atteindre le projectile de masse $m_1 + m_o$ est évidemment :

$$(17) \quad P = P_0 \frac{m_1}{m_1 + m_o}$$

celle-ci est d'autant plus faible, pour un dispositif donné de lancement (caractérisé par P_0), que la masse utile m_o est plus considérable par rapport à la masse active m_1 .

La force vive T prise par le projectile est égale au double du travail fourni par l'ensemble des actions propulsives de la poudre; les conditions les plus favorables seront réalisées pour chaque type, et ce travail sera maximum, si la pression p_1 des gaz est constante et égale au maximum que peut supporter le métal des organes de lancement en raison de ses propriétés élastiques. Nous ferons tout d'abord la comparaison en nous supposant dans ce cas d'émission sous pression constante, qui correspond à l'emploi d'une *poudre progressive* convenablement choisie.

ÉMISSION À PRESSION CONSTANTE. — Prenons d'abord le cas du projectile Van Deuren où l'organe de lancement se réduit au tube CC'. Soit r le rayon intérieur de ce tube et l sa longueur que nous supposerons égale au trajet parcouru

pendant le lancement. Si p_1 est la pression intérieure constante, la force propulsive est $p_1\pi r^2$ et la force vive, double du travail, est :

$$T = 2p_1\pi r^2 l.$$

L'épaisseur ε du tube doit être telle que celui-ci supporte la pression p_1 sous une tension égale à sa limite élastique R ; ceci exige qu'on ait :

$$\varepsilon = \frac{p_1}{R} r.$$

La masse active m_1 du tube a pour valeur :

$$m_1 = 2\pi r^2 l \frac{p_1}{R} \Delta.$$

Il vient ainsi pour la portée maxima P_0 , en vertu de (16) :

$$(18) \quad P_0 = \frac{R}{g\Delta}.$$

Si l'on admet $R = 4 \times 10^9$ (ou 40 kilogrammes par millimètre carré) et $\Delta = 8$, il vient :

$$P_0 = 5.000 \text{ mètres,}$$

et par conséquent, en vertu de (17), ce dispositif permettrait d'envoyer à 1 600 mètres environ un projectile renfermant environ les deux tiers de son poids utile, c'est-à-dire un tiers en explosif si le poids de ce dernier est pris égal à celui de son enveloppe. C'est bien à peu près là ce que donne l'expérience.

Pour examiner le cas du projectile à tuyère de culot, désignons par σ le rapport de la section contractée S_0 de la tuyère à la section $S = \pi r^2$ du tube cylindrique. Nous pouvons remarquer tout d'abord que ce rapport est nécessairement inférieur à l'unité puisque le cylindre CC' alimente la tuyère; si celle-ci était trop large, la section contractée de la veine gazeuse se trouverait reportée dans le cylindre et σ atteindrait sa limite supérieure 1.

La force propulsive se compose ici de deux parties correspondant, la première à la réaction $p_1 S$ exercée sur l'appareil de lancement, la seconde à l'appui $I = f p_1 S_0$ pris sur les gaz émis par la tuyère en vertu de la relation (9). La force vive, acquise par le projectile le long du chemin l , est donc ⁽¹⁾ :

$$T = 2(p_1 S + f p_1 S_0) = 2\pi r^2 p_1 (1 + f\sigma).$$

(1) On suppose ici que la vitesse du projectile par rapport à l'appareil de lancement qui lui fournit les gaz est petite par rapport à la vitesse avec laquelle ces gaz sont chassés.

Le coefficient de propulsion f dépend seulement de la *raison d'ouverture* $\frac{S_2}{S_0}$ de la tuyère et varie, comme nous l'avons vu de 1,25 à 1,5 quand $\frac{S_2}{S_0}$ varie de 1 à 2,25.

La masse m_1 des organes de lancement comprend la masse $2\pi r^2 l \frac{\rho_1}{R} \Delta$ du tube et la masse de la tuyère. Celle-ci pour une valeur donnée de σ et du rapport $\frac{S_2}{S_0}$ est évidemment proportionnelle à $r^3 p_1 \frac{\Delta}{R}$ et par conséquent de la forme :

$$2\pi r^3 p_1 \frac{\Delta}{R} \varphi.$$

φ étant un coefficient numérique fonction de σ et de $\frac{S_2}{S_0}$ variable avec la forme adoptée pour la région où s'attache la tuyère, mais qui semble très facilement pouvoir être rendu inférieur à 4 ou 5 pour $\sigma = 1$ et $\frac{S_2}{S_0} = 1$. C'est sur la diminution de ce coefficient que devra porter l'effort de construction. On obtient ainsi :

$$m_1 = 2\pi r^2 l \frac{\rho_1 \Delta}{R} \left(1 + \varphi \frac{r}{l}\right).$$

Il vient pour la portée maxima :

$$(19) \quad P_0 = \frac{R}{g\Delta} \times \frac{1 + f\sigma}{1 + \varphi \frac{r}{l}}.$$

Il résulte de cette formule, tout d'abord qu'il y a intérêt à rendre l aussi grand que possible, c'est-à-dire à utiliser un *long tube de lancement*; la valeur $\frac{1}{10}$ est facilement atteinte pour le rapport $\frac{r}{l}$ (longueur quintuple du diamètre); ensuite à augmenter σ jusqu'à son maximum 1 (*section contractée de la tuyère égale à la section du tube de lancement*). Il serait nuisible d'aller au delà pour la largeur de la tuyère, car σ n'augmenterait pas, la section contractée se trouvant reportée dans le tube et φ augmenterait, d'où diminution de P_0 . Si on admet $\sigma = 1$ et $\frac{S_2}{S_0} = 1$ (tuyère coupée à la section contractée), f est égal à 1,25 environ, φ étant pris égal à son maximum 5 et $\frac{r}{l}$ à $\frac{1}{10}$, il vient comme *minimum* de P_0 .

$$(20) \quad P_0 = 1,5 \frac{R}{g\Delta},$$

c'est-à-dire une *efficacité supérieure de 50 p. 100 à celle du projectile sans tuyère*. Le résultat s'améliore si on allonge la tuyère jusqu'à un optimum déterminé

par la condition que le métal ajouté à la partie externe de la tuyère et soumis à la pression $Z_2 p_1$ apportée à la propulsion une contribution par unité de masse égale à la contribut on moyenne du métal déjà existant. Une addition faite au delà de cet optimum diminuerait l'efficacité, très lentement d'ailleurs, comme il arrive au voisinage de tout optimum, de sorte que la longueur de la tuyère peut être modifiée dans de larges limites sans qu'il en résulte une variation appréciable sur P_0 .

MASSÉ DE POUVRE. — Le gain de portée que peut fournir l'emploi de la tuyère de culot, à *masse de métal constante*, s'achète par l'emploi d'une masse de poudre plus grande. Cherchons à évaluer cet accroissement.

Admettons, dans le cas du Van Deuren, que le volume intérieur à l'appareil de lancement soit sensiblement égal au volume $\pi r^2 l$ intérieur au tube CC' , de sorte que le volume total *en fin de course* du projectile, soit double de $\pi r^2 l$ la masse de poudre employée pour produire dans ce volume la pression p_1 est $2\pi r^2 l \rho_1$ si ρ_1 est la densité des gaz, reliés à p_1 comme on l'a vu, par la relation :

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{F}{\gamma}$$

La masse de poudre m_2 est donc, dans ce cas :

$$m_2 = 2\pi r^2 l \rho_1 \frac{\gamma}{F}$$

Avec la tuyère, il faut ajouter à ceci la masse débitée pendant le temps mis à parcourir le chemin l du mouvement uniformément accéléré qui aboutit à la vitesse initiale v , ce temps est donc $\frac{2l}{v}$ et la masse débitée :

$$D \frac{2l}{v} = \frac{\alpha}{\sqrt{F}} p_1 S_0 \frac{2l}{v}$$

Il en résulte que le rapport des masses de poudre employées avec et sans tuyère, à *égalité de travail obtenu* est :

$$(21) \quad \frac{m'_2}{m_2} = \frac{1 + \frac{\alpha \sigma \sqrt{F}}{\gamma v}}{1 + \sigma f}$$

On voit que l'utilisation de la poudre par le projectile à tuyère est d'autant moins bonne que la vitesse initiale v est plus faible : c'est un caractère commun à tous les appareils utilisant l'effet de fusée. Il sera préférable de limiter l'emploi de ces projectiles aux portées les plus grandes, s'il se confirme qu'ils permettent, comme les considérations précédentes le font prévoir, d'aller plus loin que les autres types d'engins de tranchées.

Admettant dans la formule (21) $\sigma = 1$, $f = 1,5$, $v = 150$ m par secondes
 F (poudre noire) = 3×10^9 , $\gamma = 1,1$, $\frac{\alpha}{\gamma} = 0,6$, il vient :

$$\frac{m'_2}{m_2} = 1,3.$$

Dans ces conditions, si le travail obtenu à *masse de métal égale* est augmenté de 50 p. 100, le travail obtenu à *masse de poudre égale* est diminué de 25 p. 100.

L'avantage du projectile à tuyère sera d'autant plus marqué qu'il s'agira de portées plus grandes.

PRESSION VARIABLE. — Si l'on ne suppose pas que la pression des gaz soit maintenue constante, on peut encore écrire les équations de balistique intérieure tenant compte à la fois de la chute de pression due à l'accroissement de volume provenant du mouvement du projectile et de celle qui provient du débit de la tuyère. L'intégration de ces équations est notablement simplifiée quand on suppose la détente du gaz isotherme en se plaçant dans le cas limite $\gamma = 1$; nous avons vu que les résultats sont très peu modifiés par cette hypothèse.

J'ai examiné d'abord le cas d'une *poudre vive* dont la durée de combustion est faible par rapport au temps que met le projectile à quitter l'appareil de lancement. Le calcul, qu'il serait trop long de reproduire ici, montre que l'adjonction d'une tuyère est défavorable, à moins que l'appareil de lancement ne porte une chambre de combustion de volume considérable par rapport à l'accroissement de volume qui résulte du déplacement du projectile. On conçoit en effet que la présence d'un réservoir de gaz tende à maintenir la pression constante. La consommation de poudre devient considérable.

L'emploi d'une poudre progressive est donc indispensable si l'on veut tirer parti du dispositif à tuyère de culot. L'intégration des équations est encore possible dans certains cas, en particulier lorsque la vitesse de combustion est, comme pour la poudre noire, proportionnelle à la racine carrée de la pression. La théorie pourra servir de guide également dans ce cas.

Problème de la fusée.

Soient m_0 la masse utile (explosif et enveloppe), m_1 celle du récipient qui contient la poudre de propulsion, et m_2 la masse de celle-ci. Pour une tuyère donnée, de section contractée S_0 , nous avons vu que l'effort de propulsion correspond à une certaine *vitesse efficace* V_e donnée par la formule (12). Un raisonnement simple montre que la vitesse v acquise par la fusée, supposée partir du repos, est, après combustion complète de la poudre, *indépendante de la manière dont se fait cette combustion en fonction du temps*, et a pour valeur :

$$(22) \quad v = V_e L \left(1 + \frac{m_2}{m_0 + m_1} \right).$$

le symbole L représentant toujours le logarithme népérien.

Si la vitesse v est assez petite par rapport à V_e , $\frac{m_2}{m_0 + m_1}$ est lui-même assez petit pour qu'on puisse remplacer la relation (22) par la suivante :

$$v = V_e \frac{m_2}{m_0 + m_1}.$$

Si l'on ne s'impose aucune condition relative à la durée de la combustion, la meilleure poudre est celle qui, pour une enveloppe donnée ($m_0 + m_1$ donnée) permet d'obtenir la plus grande valeur possible pour le produit $m_2 V_e$. Nous avons vu que cette quantité est proportionnelle au coefficient φ , défini par la formule (15).

Les conditions seront d'autant meilleures, d'autre part, que m_1 sera plus petit pour un volume donné du récipient, c'est-à-dire que la paroi de celui-ci sera plus mince. En même temps que diminue cette épaisseur, la pression entretenue dans le récipient par la combustion de la poudre doit diminuer en proportion, et le temps que dure la propulsion doit augmenter dans le même rapport. Une limite est imposée par la condition que l'échauffement des parois ne devienne pas excessif, mais on peut la reculer en introduisant un calorifuge.

FUSÉE GUIDÉE. — Les conditions sont autres si l'on veut chercher à éviter la dispersion résultant des irrégularités dans l'émission des gaz. Il suffirait de guider la fusée pendant toute la durée de la combustion, en imposant à celle-ci d'être complète après un parcours de longueur donnée l et par conséquent de durer un temps donné $\frac{2l}{v}$. Cette condition ne permet plus de considérer indépendamment la masse de la poudre et celle du récipient.

Nous sommes ramenés à des considérations analogues à celles que nous avons développées à propos des projectiles à tuyère : il faut rapporter la force vive $T = (m_1 + m_0)v^2$ à la masse m_1 du métal employé pour la propulsion. L'effort obtenu étant $fp_1 S_0$ le travail sur une longueur l est :

$$fp_1 S_0 l,$$

et la force vive obtenue :

$$T = 2fp_1 S_0 l.$$

D'autre part, les conditions les plus avantageuses au point de vue de l'utilisation du métal sont fournies par un récipient de forme sphérique; soit r son rayon. La masse m_1 si l'épaisseur doit être telle que le récipient supporte la pression p_1 sera :

$$m_1 = 2\pi r^3 \frac{p_1 s}{R}.$$

On aura donc pour la portée maximum P_0 correspondante :

$$P_0 = \frac{T}{gm_1} = \frac{R flr_0^2}{g\Delta r^3},$$

r_0 étant le rayon de la section contractée.

Cette portée sera d'autant plus grande que r_0 sera plus grand par rapport à r . Le rayon de la tuyère sera nécessairement inférieur à celui du récipient sphérique qui l'alimente — on peut considérer comme convenable la relation $r = 2r_0$, d'où :

$$P_0 = \frac{R fl}{g\Delta 4r}.$$

Si on prend l'hypothèse défavorable où la tuyère est coupée à la section contractée, f est environ 1,25 et on a :

$$(23) \quad P_0 = \frac{R}{g\Delta} \times 0,3 \frac{l}{r}.$$

Si l'on compare ce résultat à la relation (16) fournie par le Van Deuren, on voit que la fusée guidée peut présenter un avantage considérable. Le parcours de lancement l peut être assez grand par rapport au rayon r du projectile, facilement décuple ou davantage. Ceci donnerait une efficacité (travail rapporté au métal utile) au moins triple de celle du Van Deuren ou double de celle du projectile à tuyère de culot.

On aurait de plus l'avantage de n'exercer aucune réaction sur l'appareil de lancement : celui-ci serait un simple guide et ne serait pas soumis aux efforts violents qui produisent le dépointage constant des engins ordinaires.

Si l'on veut rapporter la force vive obtenue à la masse de poudre employée, on doit calculer cette dernière par :

$$m'_2 = D \frac{2l}{v} = \frac{\alpha}{\sqrt{F}} p_1 S_0 \frac{2l}{v},$$

et en comparant au Van Deuren, obtient à égalité de travail obtenu :

$$\frac{m'_2}{m_2} = \frac{\alpha\sqrt{F}}{\gamma v f}.$$

Pour la poudre noire, avec une tuyère limitée à la section contractée et une vitesse initiale v de 200 m par seconde (portée 4 km environ), il vient :

$$\frac{m'_2}{m_2} = 1,5 \text{ environ.}$$

L'utilisation de la poudre est donc relativement très bonne, tandis que celle du métal peut être bien meilleure.

TABLEAU I.

γ .	1.	1,05.	1,1.	1,15.	1,2.	1,25.	1,3.	1,35.	1,4.	$\frac{5}{3}$
$\frac{V_0}{\sqrt{F}}$	1	0,9877	0,9759	0,9645	0,9535	0,9428	0,9325	0,9225	0,9129	0,8660
$\frac{Z_0}{1}$	0,6065	0,5955	0,5847	0,5744	0,5645	0,5550	0,5457	0,5369	0,5283	0,4871
$\frac{1}{Z_0}$	1,649	1,680	1,710	1,741	1,771	1,802	1,832	1,863	1,893	2,053
f_0	1,2130	1,221	1,228	1,235	1,242	1,249	1,255	1,262	1,268	1,299
$\left(\frac{V_c}{\sqrt{F}}\right)_0$	2	1,928	1,863	1,803	1,748	1,697	1,650	1,606	1,565	1,385
α	0,6065	0,6330	0,6590	0,6848	0,7105	0,7357	0,7608	0,7856	0,8102	0,9375
f_∞		4,004	2,947	2,501	2,247	2,081	1,964	1,878	1,812	1,624
$\frac{V_\infty}{\sqrt{F}}$		6,325	4,472	3,651	3,162	2,828	2,582	2,390	2,236	1,7320

 $\gamma = 1.$

$\frac{1}{Z}$.	1,649.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	15.	20.	500.
$\frac{S}{S_0}$	1	1,0303	1,2285	1,4570	1,690	1,922	2,826	3,909	4,956	86
f_0	1,2130	1,2292	1,3082	1,3742	1,4262	1,4686	1,5842	1,6722	1,7324	2,310
$\frac{V_c}{\sqrt{F}}$	2	2,0267	2,1570	2,2667	2,3515	2,4213	2,6120	2,7570	2,8562	3,809

 $\gamma = 1,05.$

$\frac{1}{Z}$.	1,080.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	15.	20.	500.
$\frac{S}{S_0}$	1	1,0237	1,202	1,412	1,625	1,837	2,650	3,613	4,535	70,05
f_0	1,221	1,2332	1,3047	1,3650	1,4126	1,4510	1,5555	1,634	1,687	2,167
$\frac{V_c}{\sqrt{F}}$	1,928	1,948	2,061	2,156	2,232	2,292	2,457	2,581	2,665	3,423

$$\gamma = 1,1.$$

$\frac{1}{Z}$	1,710.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	15.	20.	500.
$\frac{S}{S_0}$	1	1,0180	1,180	1,373	1,569	1,762	2,500	3,364	4,180	57,95
$f \cdot \frac{V_c}{\sqrt{F}}$	1,228	1,2574	1,2920	1,3573	1,4010	1,4362	1,5310	1,601	1,648	2,100
$\frac{V_c}{\sqrt{F}}$	1,863	1,878	1,962	2,060	2,126	2,180	2,323	2,430	2,501	3,186

$$\gamma = 1,15.$$

$\frac{1}{Z}$	1,741.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	15.	20.	500.
$\frac{S}{S_0}$	1	1,0133	1,160	1,338	1,519	1,696	2,371	3,149	3,879	48,64
$f \cdot \frac{V_c}{\sqrt{F}}$	1,235	1,2430	1,3004	1,3515	1,3918	1,4242	1,5080	1,5740	1,616	1,961
$\frac{V_c}{\sqrt{F}}$	1,803	1,8151	1,8989	1,9735	2,0324	2,0797	2,2021	2,2984	2,3598	2,8636

$$\gamma = 1,20.$$

$\frac{1}{Z}$	1,771.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	15.	20.	500.
$\frac{S}{S_0}$	1	1,0100	1,143	1,309	1,477	1,640	2,260	2,967	3,625	41,37
$f \cdot \frac{V_c}{\sqrt{F}}$	1,242	1,2471	1,3000	1,3476	1,3839	1,4148	1,4940	1,5520	1,589	1,887
$\frac{V_c}{\sqrt{F}}$	1,748	1,7552	1,8296	1,8958	1,9477	1,9912	2,1027	2,1843	2,2364	2,6558

$$\gamma = 1,25.$$

$\frac{1}{Z}$	1,802.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	15.	20.	500.
$\frac{S}{S_0}$	1	1,0070	1,128	1,282	1,438	1,590	2,162	2,808	3,405	35,59
f	1,249	1,2522	1,3001	1,3444	1,3793	1,4070	1,4802	1,5330	1,567	1,827
$\frac{V_e}{\sqrt{F}}$	1,6977	1,7020	1,7671	1,8029	1,8748	1,9124	2,0119	2,0837	2,1299	2,4833

$$\gamma = 1,30.$$

$\frac{1}{Z}$	1,832.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	15.	20.	500.
$\frac{S}{S_0}$	1	1,0050	1,115	1,258	1,404	1,545	2,075	2,670	3,214	30,95
f	1,255	1,2577	1,3012	1,3423	1,3748	1,4006	1,4685	1,517	1,549	1,776
$\frac{V_e}{\sqrt{F}}$	1,650	1,6531	1,7103	1,7643	1,8070	1,9198	1,9302	1,9939	2,0360	2,3343

$$\gamma = 1,35.$$

$\frac{1}{Z}$	1,863.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	15.	20.	500.
$\frac{S}{S_0}$	1	1,0030	1,103	1,236	1,373	1,506	1,999	2,548	3,047	27,16
f	1,262	1,2632	1,3027	1,3413	1,3716	1,3960	1,4590	1,504	1,532	1,734
$\frac{V_e}{\sqrt{F}}$	1,6064	1,6079	1,6592	1,7073	1,7459	1,7769	1,8571	1,9144	1,9501	2,2072

$$\gamma = 1,40.$$

$\frac{1}{Z}$	1,893.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	15.	20.	500.
$\frac{S}{S_0}$	1	1,0017	1,093	1,218	1,346	1,470	1,931	2,440	2,900	24,04
$f \cdot \frac{V_c}{\sqrt{F}}$	1,268	1,2688	1,3046	1,3409	1,3690	1,3882	1,4510	1,493	1,519	1,700
$\frac{V_c}{\sqrt{F}}$	1,565	1,5660	1,6102	1,655	1,6897	1,7134	1,7909	1,8427	1,8748	2,0982

$$\gamma = \frac{5}{3}.$$

$\frac{1}{Z}$	2,053.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	15.	20.	500.
$\frac{S}{S_0}$	1	1,0004	1,053	1,144	1,238	1,330	1,667	2,027	2,345	14,12
$f \cdot \frac{V_c}{\sqrt{F}}$	1,299	1,2992	1,3193	1,3553	1,3656	1,3832	1,3976	1,456	1,474	1,583
$\frac{V_c}{\sqrt{F}}$	1,3856	1,3858	1,4072	1,4243	1,4566	1,4754	1,4907	1,5530	1,5722	1,6885

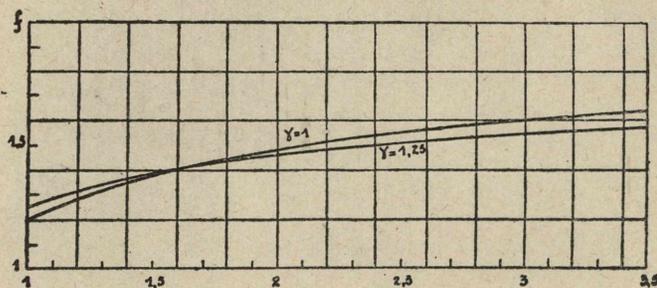


Fig. 15o.

J. Z. 931709.

XII. PHYSIQUE NUCLÉAIRE

XII. HISTOIRE DE CHYPRE