PHYSIQUE NUCLÉAIRE.

SUR LES CHOCS ENTRE NEUTRONS RAPIDES ET NOYAUX DE MASSE QUELCONQUE.

Il est important, pour diverses recherches de physique nucléaire, de pouvoir répondre à la question suivante :

Dans un milieu matériel composé d'atomes tous identiques, un neutron est lancé avec une énergie cinétique initiale E_0 telle que, au cours de sa réduction par les chocs successifs du neutron contre les noyaux atomiques, l'énergie cinétique E du neutron reste assez grande, par rapport à l'énergie moyenne d'agitation thermique ou aux énergies de liaison entre atomes, pour que les noyaux de ceux-ci puissent être considérés comme immobiles et libres avant d'être rencontrés par le neutron. L'énergie E subissant ainsi une série de diminutions brusques du fait de ces chocs dont les conditions, variables d'un choc à l'autre, sont supposées régies par les lois du hasard, cette énergie passe par une série discontinue et constamment décroissante de valeurs E_0, E_1, $E_2 \ldots$, variable d'un neutron à l'autre. On demande quelle est la probabilité pour que l'une au moins de ces valeurs tombe dans un intervalle ΔE ou dans un domaine ΔE composé d'un nombre quelconque d'intervalles permettant, par exemple, la capture du neutron par résonance. Avec cette interprétation, la probabilité cherchée P est celle de la capture du neutron par résonance après un nombre quelconque de chocs.

Je vais donner la solution du problème ainsi posé dans le cas général où la masse M des noyaux rencontrés est quelconque par rapport à la masse m du neutron et où le domaine ΔE est d'étendue finie. Le résultat s'exprime de manière simple lorsque ce domaine se compose d'un seul intervalle infiniment petit dE, auquel cas la probabilité cherchée prend elle-même une valeur infiniment petite dP. Nous verrons que ce résultat satisfait bien à la condition de prendre la forme encore plus simple et déjà connue :

$$dP = \frac{dE}{E} \tag{1}$$

lorsque les noyaux rencontrés sont des protons, de masse pratiquement égale à celle du neutron.

Soient P_1 la probabilité pour que l'énergie cinétique E_1, après le premier choc tombe dans ΔE, P_2 la probabilité pour que, E_1 étant extérieur à ΔE, E_2 y soit contenue, P_3 la probabilité pour que, E_1 et E_2 étant extérieurs à ΔE, E_3 y soit contenue, et ainsi de suite. Les cas ainsi considérés étant exclusifs les uns des

www.rcin.org.pl

autres, on a évidemment, par application du théorème d'addition des probabilités :

$$P = P_1 + P_2 + \ldots = \sum_1^\infty P_n. \tag{2}$$

Pour évaluer ces probabilités, nous assimilerons le choc entre neutron et noyau à celui de deux sphères élastiques de masses m et M se rencontrant de telle façon qu'au moment du choc la ligne des centres fasse un angle θ avec la direction de la vitesse initiale du neutron, celle du noyau étant supposée nulle. L'angle θ varie de zéro à $\pi/2$ quand on passe du choc central au choc tangentiel. Si E est l'énergie cinétique initiale du neutron, son énergie cinétique après le choc est, en mécanique classique, donnée par :

$$E' = E(\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta) = E[\alpha^2 + (1-\alpha^2)\sin^2\theta], \tag{3}$$

en posant :

$$\alpha = \frac{M-m}{M+m}. \tag{4}$$

L'erreur relative sur E', résultant de la formule (3) par rapport à ce que donnerait la mécanique relativiste, est toujours inférieure à $(1-\alpha^2)$ (E/mc^2), c'est-à-dire négligeable même pour les neutrons les plus rapides rencontrés jusqu'ici. Nous ferons donc usage de la formule (3) dans ce qui suit.

D'après cette formule, E', toujours inférieure ou au plus égale à E, varie entre α^2E (choc central) et E (choc tangent).

La probabilité ϖ pour que l'angle θ soit compris entre zéro et θ est égale à $\sin^2\theta$; on a donc, d'après (3) :

$$E' = E[\alpha^2 + (1-\alpha^2)\varpi]. \tag{5}$$

La probabilité $\Delta\varpi$ pour que l'énergie finale E', après un choc d'énergie initiale E, tombe dans le domaine ΔE est donc :

$$\Delta\varpi = \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{\delta E}{E}, \tag{6}$$

δE étant la partie du domaine ΔE comprise entre α^2E et E.

Application au premier choc. — L'énergie initiale du neutron étant E_0 et ϖ_1 la probabilité, égale à $\sin^2\theta_1$, pour que l'angle sous lequel se produit le premier choc soit compris entre zéro et θ, on a, par application de (5) :

$$E_1 = E_0[\alpha^2 + (1-\alpha^2)\varpi_1]$$

et par (6) :

$$P_1 = \Delta_1\varpi = \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{\delta E}{E_0}.$$

www.rcin.org.pl

Il nous sera commode pour la suite de poser :

$$C = \frac{E}{E_0} = e^{-x}, \qquad x = L\,\frac{E_0}{E} \tag{7}$$

et

$$a = L\,\frac{1}{\alpha^2} = 2L\,\frac{M+m}{M-m}. \tag{8}$$

On aura :

$$P_1 = \frac{\delta C}{1-\alpha^2}. \tag{9}$$

Si nous faisons correspondre aux conditions de choc caractérisées par l'angle θ_1 un point d'abscisse $\sin^2\theta_1$ ou ϖ_1, sur un segment de droite OI de longueur égale à l'unité, l'origine O correspondra au choc central, C y prendra la valeur α^2 et x la valeur a, tandis que l'extrémité I correspondra au choc tangentiel pour lequel C prend la valeur 1 et x la valeur zéro. La probabilité P_1 est égale à la partie du segment OI pour laquelle E_1 tombe dans ΔE.

Les résultats relatifs à P peuvent s'exprimer sous forme différentielle de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } 0 \leqq x \leqq a, & dP_1 = \dfrac{dC}{1-\alpha^2} = \dfrac{dE}{E_0(1-\alpha^2)}, \\ \text{pour } x > a, & dP_1 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Le coefficient de proportionnalité de dP_1 à dC représente donc ainsi une discontinuité égale à $1/1-\alpha^2$ lorsque x traverse la valeur a, ou lorsque C traverse la valeur α^2 qui correspond pour E à la valeur $\alpha^2 E_0$. Nous verrons que les autres termes P_2, $P_5 \ldots$, de la somme (2) ne présentent pas de semblables discontinuités.

Application au deuxième choc. — Si θ_1 et θ_2 sont les angles sous lesquels se produisent les deux premiers chocs, ϖ_1 et ϖ_2 les probabilités correspondantes, on a, par application de (5) :

$$E_1 = E_0[\alpha^2 + (1-\alpha^2)\varpi_1],$$
$$E_2 = E_1[\alpha^2 + (1-\alpha^2)\varpi_2],$$

d'où :

$$E_2 = E_0[\alpha^2 + (1-\alpha^2)\varpi_1][\alpha^2 + (1-\alpha^2)\varpi_2] \tag{11}$$

www.rcin.org.pl

Si nous portons ϖ_1 et ϖ_2 sur deux segments rectangulaires égaux à l'unité, OI_1 et OI_2, il correspond à chaque modalité de l'ensemble des deux premiers chocs, caractérisé par θ_1 et θ_2 ou par ϖ_1 et ϖ_2, un point à l'intérieur du carré OI_1I_2J, et, par application du théorème des probabilités composées, la probabilité, pour que ce point représentatif se trouve à l'intérieur d'une portion de la surface de ce carré, est égale à l'aire de cette portion, et l'ensemble de tous les cas possibles correspond à l'aire totale du carré qui est égale à l'unité (voir la figure).

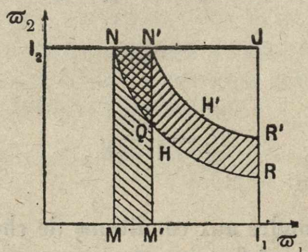

Fig. 151.

En vertu de l'équation (11), les points représentatifs de tous les systèmes de deux chocs successifs qui aboutissent à une même énergie finale E_2 du neutron sont situés sur l'hyperbole :

$$[\alpha^2 + (1-\alpha^2)\varpi_1][\alpha^2 + (1-\alpha^2)\varpi_2] = C = \frac{E_2}{E_0}. \tag{12}$$

Il nous est maintenant facile de déterminer la portion du carré qui correspond aux systèmes de deux chocs pour lesquels l'une au moins des énergies E_1 et E_2 tombe dans le domaine ΔE. Supposons, pour simplifier la figure, que ce domaine comprenne un seul intervalle d'étendue finie dont les limites soient elles-mêmes comprises entre $\alpha^2 E_0$ et E_0. Si OM et OM′ (fig.) représentent les valeurs de ω_1, qui correspondent aux limites inférieure et supérieure de cet intervalle ΔE, les points du carré pour lesquels E_1 tombe dans ΔE sont situés dans la bande rectangulaire MM′NN′, et les points pour lesquels E_2 tombe dans ΔE sont situés dans la bande NN′RR′ comprise entre les deux hyperboles H et H′ dont les équations, de la forme (12), correspondent aux deux valeurs de E_2 égales aux limites inférieure et supérieure de ΔE. On voit facilement, dans ces conditions, que P_1 est égal à l'aire de la bande MM′NN′ et P_2 égal à l'aire N′QRR′, de sorte que la somme $P_1 + P_2$ est représentée par l'aire hachurée totale. Le triangle curviligne NQN′ contient les points représentatifs pour lesquels E_1 et E_2 tombent tous deux dans le domaine ΔE. Remarquons de suite que si ΔE est infiniment petit, l'aire de ce triangle est infiniment petite du second ordre.

On calculera ainsi facilement la somme $P_1 + P_2$ quel que soit le domaine donné ΔE ; dans le cas où il se compose d'une seule bande de largeur infiniment

www.rcin.org.pl

petite dE ou $E_0 dC$, on obtient, pour les éléments dP_1 et dP_2, les résultats suivants :

$$0 \leqq x \leqq a \quad \text{ou} \quad \alpha^2 \leqq C \leqq 1 \quad \begin{cases} dP_1 = \dfrac{1}{1-\alpha^2}\, dC, \\ dP_2 = \dfrac{x}{(1-\alpha^2)^2}\, dC, \end{cases}$$

$$a \leqq x \leqq 2a \quad \text{ou} \quad \alpha^4 \leqq C \leqq \alpha^2 \quad \begin{cases} dP_1 = 0, \\ dP_2 = \dfrac{2a - x}{(1-\alpha^2)^2}\, dC, \end{cases}$$

$$2a \leqq x \quad \text{ou} \quad C < \alpha^4 \quad \begin{cases} dP_1 = 0, \\ dP_2 = 0. \end{cases}$$

Cas d'un nombre quelconque de chocs. — La représentation que nous venons d'utiliser se généralise facilement. A chaque système de n chocs successifs caractérisé par les angles $\theta_1, \theta_2 \ldots, \theta_n$ ou les probabilités $\varpi_1, \varpi_2 \ldots, \varpi_n$ égales respectivement à $\sin^2\vartheta_1, \sin^2\theta_2 \ldots$, correspond un point représentatif de coordonnées $\varpi_1, \varpi_2 \ldots$, à l'intérieur d'un hypercube d'ordre n dont toutes les arêtes, et par conséquent le volume total, sont égaux à l'unité. L'ensemble de tous les points représentatifs, tels que l'une au moins des énergies $E_1, E_2 \ldots$, tombe dans le domaine ΔE, constitue une portion de cet hypercube limitée par des hyperplans, des hypercyclindres hyperboliques et des hyperhyperboloïdes dont les équations sont toutes de la forme :

$$[\alpha^2 + (1-\alpha^2)\varpi_1]\,[\alpha^2 + (1-\alpha^2)\varpi_2] \ldots [\alpha^2 + (1-\alpha^2)\varpi p] = C,$$

p variant depuis 1 jusqu'à n quand on passe des hyperplans aux hyperhyperboloïdes. La probabilité cherchée P est égale au volume de cette portion de l'hypercube, et par conséquent égale au maximum à l'unité.

J'ai pu effectuer complètement les calculs lorsque le domaine ΔE se compose d'un seul intervalle infiniment petit de largeur dE égale à $E_0 dC$. Les résultats sont les suivants : il faut tout d'abord situer l'intervalle donné dE, compris entre E et $E + dE$, par rapport aux termes d'une progression géométrique décroissante qui représentent les énergies successives du neutron lorsque tous les chocs sont centraux :

$$(13) \qquad E_0, \quad \alpha^2 E_0, \quad \alpha^4 E_0, \quad \ldots, \quad \alpha^{2i} E_0, \quad \ldots,$$

ou, ce qui revient au même, situer x, égal à $L(E_0/E)$, par rapport aux termes de la progression arithmétique :

$$0, \quad a, \quad 2a, \quad \ldots, \quad ia, \quad \ldots.$$

On détermine ainsi un entier i tel que :

$$ia \leqq L\,\frac{E_0}{E} \leqq (i+1)a.$$

www.rcin.org.pl

Si l'on pose ensuite :

$$(14) \qquad y = \frac{x}{1-\alpha^2} = \frac{1}{1-\alpha^2} \mathrm{L} \frac{E_0}{E}, \qquad \varepsilon = \frac{a}{1-\alpha^2},$$

$$(15) \qquad \varphi_k(y) = \frac{2}{k!} \frac{d}{dy} (y^k e^y),$$

k étant un entier, on a pour la probabilité cherchée dP :

$$(16) \qquad dP = \frac{dE}{E_0(1-\alpha^2)} \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \varphi_k(y - k\varepsilon).$$

Le coefficient de proportionnalité de dP à dE ne présente une discontinuité, égale à $1/E_0(1-\alpha^2)$, que lorsque E traverse la valeur $\alpha^2 E_0$, c'est-à-dire lorsque x traverse la valeur $L(1/\alpha^2)$, ou y la valeur $(1/1-\alpha^2)\,L(1/\alpha^2)$; cette discontinuité provient du seul terme dP_1. Lorsque la masse M du noyau est égale à celle du neutron (cas du proton), α est nul, la série (13) ne présente plus qu'un seul intervalle entre E_0 et 0, i est par conséquent toujours égal à zéro, et la seule fonction φ à envisager est :

$$\varphi_0(y) = e^y = \frac{E_0}{E},$$

en tenant compte de (15) et (14).

Le résultat (16) prend alors la forme simple :

$$dP = \frac{dE}{E}.$$

---

www.rcin.org.pl