

SUR LES CHOCS ENTRE NEUTRONS RAPIDES ET NOYAUX DE MASSES QUELCONQUES.

Un neutron, de masse m , est supposé lancé avec une énergie cinétique initiale E_0 dans un milieu matériel composé d'atomes tous identiques avec des noyaux de masse M qui peuvent être considérés comme étant au repos avant les chocs, et libres de toute autre action, tant que l'énergie cinétique E du neutron progressivement réduite par les chocs, reste suffisamment grande par rapport à l'énergie moyenne d'agitation thermique ou aux énergies de liaison entre atomes.

Il est important, pour certaines recherches de physique ou de chimie nucléaires, de savoir quelle est la probabilité P pour l'énergie E , de prendre, après un nombre quelconque de chocs, une valeur comprise dans un intervalle déterminé ΔE permettant, par exemple, la capture du neutron par résonance.

Après avoir donné la solution de ce problème dans le cas général où l'intervalle (ou le domaine) ΔE , compris entre 0 et E_0 , est d'étendue quelconque, je développerai plus particulièrement les formules dans le cas, à peu près seul intéressant pour les applications, où ΔE est assez petit pour pouvoir être traité comme une différentielle dE ainsi que la probabilité correspondante dP .

En d'autres termes, si l'énergie cinétique du neutron, de valeur initiale E_0 passe, à la suite des chocs successifs contre les noyaux, par la série discontinue de valeurs décroissantes : $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n, \dots$, il s'agit de trouver la probabilité P pour que l'une au moins de ces valeurs tombe dans l'intervalle ou le domaine ΔE . Ce domaine peut être composé de plusieurs intervalles partiels tous compris entre 0 et E_0 .

Par application du théorème fondamental sur l'addition des probabilités, on voit facilement que si P_1 est la probabilité pour que l'énergie E_1 après le premier choc tombe dans ΔE , P_2 la probabilité pour que, dans les autres cas où E_1 est extérieure à ΔE , l'énergie E après le deuxième choc tombe dans ΔE , P_3 la probabilité pour que E_3 , à l'exclusion de E_1 et E_2 , tombe dans ΔE et ainsi de suite, on a :

$$(1) \quad P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n.$$

Pour évaluer les termes successifs de cette somme, il est nécessaire de préciser les conditions du choc entre neutron et noyau. Étant donnée la petitesse des distances auxquelles s'exercent les actions mutuelles pendant le choc, en dehors des circonstances qui permettent la capture, on peut assimiler le choc à celui de deux sphères élastiques. Si on désigne par θ l'angle que fait, au moment du choc, la ligne des centres avec la direction de la vitesse du neutron, par E et E'

respectivement les énergies cinétiques du neutron avant et après son choc contre le noyau initialement immobile, on a, en mécanique classique :

$$(2) \quad E' = E(\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta) = E[\alpha^2 + (1 - \alpha^2) \sin^2 \theta]$$

en posant :

$$(3) \quad \alpha = \frac{M - m}{M + m}.$$

La constante α est nulle dans le cas du noyau d'hydrogène ou proton, de masse pratiquement égale à celle du neutron, et inférieure à l'unité pour tous les autres noyaux. E' est bien toujours inférieure à E puisque le neutron perd l'énergie cinétique transmise au noyau.

Il est facile de démontrer que l'erreur commise sur E' en appliquant la mécanique classique au lieu de la mécanique relativiste est toujours inférieure à :

$$(1 - \alpha^2) \frac{E}{mc^2},$$

c étant la vitesse de la lumière. Pour les neutrons les plus rapides actuellement connus, cette limite est toujours plus petite que $\frac{E}{400}$, et l'erreur est par conséquent négligeable étant données les autres approximations et la précision limitée des mesures.

D'autre part, la probabilité ϖ pour que l'incidence θ du choc soit comprise entre $\theta = 0$ (choc central) et θ est proportionnelle à l'aire du cercle de rayon $\sin \theta$ et précisément égale à $\sin^2 \theta$ pour satisfaire à la condition de devenir égale à l'unité pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (choc tangent). On a donc, d'après (2) :

$$(4) \quad E' = E[\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi].$$

Le rapport $\frac{E'}{E}$ varie donc entre le minimum α^2 pour $\varpi = 0$ (choc central) et l'unité pour $\varpi = 1$ (choc tangent).

Tant que E' reste comprise entre 0 et $\alpha^2 E$ la probabilité ϖ est nulle puisque l'énergie E' après le choc ne peut prendre aucune valeur inférieure à $\alpha^2 E$, puis, quand E' augmente, ϖ varie linéairement en fonction de E' avec le facteur de proportionnalité $\frac{1}{1 - \alpha^2}$, pour prendre la valeur 1 quand E' devient égale à E (choc tangent). On a ainsi, pour E' comprise entre $\alpha^2 E$ et E :

$$(5) \quad d\varpi = \frac{1}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{dE'}{E}.$$

De cette loi de variation on tire immédiatement le résultat suivant :

La probabilité $\Delta\varpi$ pour que l'énergie E' du neutron après un choc d'énergie initiale E tombe dans un domaine donné ΔE a pour expression :

$$(6) \quad \Delta\varpi = \frac{1}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{\Delta E}{E},$$

δE étant la partie du domaine ΔE comprise dans l'intervalle entre $\alpha^2 E$ et E .

Les résultats précédents s'appliquent immédiatement au cas du premier choc, pour lequel $\varpi_1 = \sin^2 \theta_1$ étant la probabilité pour que l'angle d'incidence θ_1 soit compris entre 0 et θ , l'énergie cinétique E_1 après le choc, toujours comprise entre $\alpha^2 E_0$ et E_0 , a pour expression en fonction de ϖ_1 , d'après (4) :

$$(7) \quad E_1 = E_0[\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi_1]$$

d'où la relation analogue à (5), E_1 étant compris entre $\alpha^2 E_0$ et E_0 , et P_1 représentant, comme il a été dit plus haut, la probabilité pour que l'énergie E_1 après le premier choc soit comprise dans le domaine ΔE :

$$dP_1 = d\varpi_1 = \frac{1}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{dE_1}{E_0}$$

d'où, par application à tous le domaine ΔE :

$$(8) \quad P_1 = \frac{1}{1 - \alpha^2} \frac{\delta E}{E_0},$$

δE étant la partie du domaine ΔE comprise dans l'intervalle entre $\alpha^2 E_0$ et E_0 .

Avant d'aller plus loin, posons, pour simplifier l'écriture :

$$(9) \quad C = \frac{E}{E_0} = e^{-x}, \quad x = L \frac{E_0}{E}$$

et :

$$a = L \frac{1}{\alpha^2} = 2 L \frac{M + m}{M - m}.$$

D'autre part, introduisons la représentation graphique suivante dont l'extension à des nombres croissants de dimensions nous sera particulièrement utile dans la suite. Sur un segment de droite OI , de longueur unité, portons à partir de l'origine O la probabilité ϖ_1 en abscisse. A chaque point de ce segment, d'abscisse ϖ_1 , correspond une des modalités du choc, celle qui est définie par l'angle d'incidence θ_1 , relié à ϖ_1 par :

$$\sin^2 \theta_1 = \varpi_1$$

avec une valeur de E_1 définie par (7), et les valeurs correspondantes de C et de x :

$$C = \alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi_1, \quad x = -LC.$$

Pour le point O (choc central) on a :

$$\varpi_1 = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad E_1 = \alpha^2 E_0, \quad C = \alpha^2, \quad x = a$$

et pour le point I (choc tangent) :

$$\varpi_1 = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad E_1 = E_0, \quad C = 1, \quad x = 0.$$

Au domaine ΔE ou au domaine correspondant ΔC , cette représentation fait correspondre une partie du segment OI précisément égale à P_1 , et donnée, selon (8) par :

$$P_1 = \frac{1}{1 - \alpha^2} \delta C,$$

δC étant la partie de ΔC contenue à l'intérieur du segment OI et, en particulier, égale à ΔC ou $\frac{\Delta E}{E_0}$ si le domaine ΔE est entièrement compris entre $\alpha^2 E_0$ et E_0 . Les valeurs correspondantes de x sont alors entièrement comprises entre 0 et a .

Ces résultats s'expriment encore sous forme différentielle de la manière suivante :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} dP_1 = \frac{1}{1 - \alpha^2} dC \quad \text{pour} \quad \alpha^2 \leq C \leq 1 \quad \text{ou} \quad 1 \leq x \leq a \\ \text{et} \\ dP_1 = 0 \quad \text{pour} \quad C < \alpha^2 \quad \text{ou} \quad x > a. \end{array} \right.$$

Le coefficient de proportionnalité de dP_1 à dC présente donc une discontinuité égale à $\frac{1}{1 - \alpha^2}$ quand C traverse la valeur α^2 , c'est-à-dire quand x traverse la valeur a . Nous reviendrons plus loin sur ce résultat, qui ne se retrouve pas pour les autres termes $P_2 \dots P_n$ de la somme (1).

Passons maintenant à l'évaluation de P_2 , c'est-à-dire de la probabilité pour que l'énergie cinétique E_2 après le deuxième choc tombe dans le domaine ΔE à l'exclusion de E_1 .

Soient θ_1, θ_2 les angles d'incidence sous lesquels se produisent ces deux premiers chocs, ϖ_1, ϖ_2 les probabilités correspondantes pour chacun d'eux. En appliquant la relation (4) à ces deux chocs successivement, on obtient :

$$E_1 = E_0[\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi_1],$$

$$E_2 = E_1[\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi_2]$$

d'où par multiplication :

$$(11) \quad E_2 = E_0[\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi_1][\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi_2].$$

Chaque modalité possible pour l'ensemble des deux premiers chocs est caractérisée par un système de valeurs de θ_1 et θ_2 et par conséquent de ϖ_1 et ϖ_2 . Étendant à deux dimensions la représentation géométrique déjà utilisée dans le cas d'une seule, nous porterons sur deux axes rectangulaires les probabilités ϖ_1 et ϖ_2 , de sorte que, ϖ_1 et ϖ_2 variant chacune entre 0 et 1, c'est-à-dire θ_1 et θ_2

entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, à chaque modalité de l'ensemble des deux chocs correspondra un point (ϖ_1, ϖ_2) à l'intérieur du carré OI_1I_2J (fig. 152).

Par application du théorème des probabilités composées, on voit immédia-

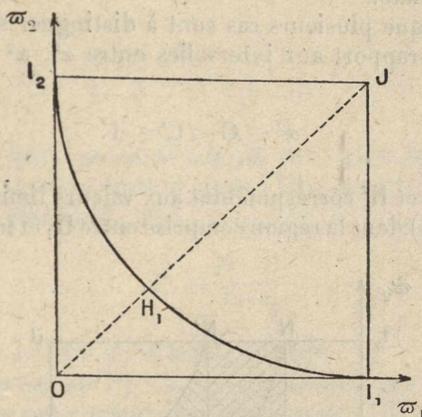


Fig. 152.

tement que la probabilité pour que le point représentatif de l'ensemble des deux premiers chocs se trouve à l'intérieur d'un élément $d\varpi_1 d\varpi_2$ de ce carré est égale au produit $d\varpi_1 d\varpi_2$, c'est-à-dire à l'aire de cet élément, et, par conséquent, que la probabilité P_2 pour le point représentatif de se trouver dans une région déterminée à l'intérieur du carré est mesurée par l'aire de cette région. L'aire totale du carré, qui correspond à l'ensemble de tous les cas possibles pour l'ensemble des deux chocs, est bien égale, comme il convient, à l'unité.

D'autre part, en vertu de la relation (11), les points représentatifs qui correspondent à une même valeur de l'énergie E_2 après le deuxième choc, c'est-à-dire à une valeur donnée du rapport $C = \frac{E_2}{E_0}$ sont situés sur la partie de l'hyperbole H :

$$(12) \quad [\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi_1][\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi_2] = C.$$

qui se trouve à l'intérieur du carré.

Toutes les hyperboles H sont équilatères et ont pour axe transverse la diagonale OJ du carré et correspondent à des valeurs de C qui varient depuis le minimum α^4 quand l'hyperbole passe par l'origine (cas où les deux chocs successifs sont centraux) jusqu'à l'unité quand l'hyperbole passe par le point J (cas où les deux chocs sont tangents) avec, comme intermédiaire principal, la valeur α^2 pour l'hyperbole H_1 qui passe par les deux autres sommets I_1 et I_2 du carré. Cette hyperbole partage le carré en deux régions, la région supérieure droite dans laquelle la quantité $x = -LC$ varie depuis 0 (sommet J) jusqu'à a (hyperbole H_1) et la région inférieure gauche dans laquelle x varie depuis a (hyperbole H_1) jusqu'à $2a$ (sommet O).

Évaluons maintenant P_2 dans le cas général où le domaine ΔE est d'étendue

finie. Il suffira de traiter celui où ce domaine comprend un seul intervalle entre E et E' correspondant à des valeurs C et C' > C du rapport $\frac{E}{E_0}$; si le domaine comprend plusieurs intervalles distincts, la généralisation du raisonnement qui va suivre est immédiate.

On voit de suite que plusieurs cas sont à distinguer suivant la position des limites C et C' par rapport aux intervalles entre α^2 , α^2 et 1. Supposons tout d'abord :

$$\alpha^2 \leq C < C' \leq 1.$$

Les hyperboles H et H' correspondant aux valeurs limites C et C' se trouvent toutes deux (fig. 153) dans la région comprise entre H₁ et le sommet J. Les points

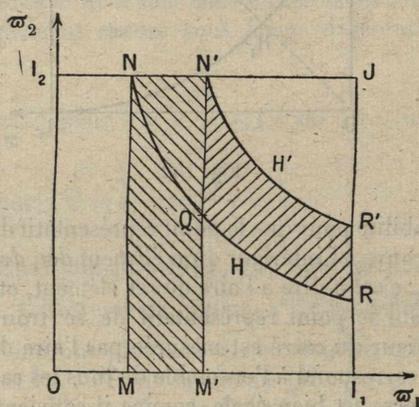


Fig. 153.

compris entre ces deux hyperboles correspondent tous à des chocs pour lesquels l'énergie E_2 tombe dans le domaine ΔE mais, pour évaluer P_2 , il faut en exclure ceux pour lesquels E_1 tombe dans ce même domaine, c'est-à-dire ceux qui sont contenus dans la bande verticale $MM'NN'$ pour les points de laquelle E_1 est compris dans le domaine ΔE . D'après ce qui précède, P_2 est égale à l'aire de la région $N'QR'R$.

Cette aire est facile à évaluer. En désignant par ω_2 et ω'_2 les ordonnées respectives des points qui, sur les hyperboles H et H', correspondent à une même abscisse ω_1 et par ω'_1 l'abscisse du point M' pour lequel E_1 est égal à $C'E_0$, d'où, en vertu de (7) :

$$\omega'_1 = \frac{C' - \alpha^2}{1 - \alpha^2}.$$

On a :

$$P_2 = \int_{\omega'_1}^1 (\omega'_2 - \omega_2) d\omega_1$$

et comme, en vertu de (11), on a :

$$\omega'_2 - \omega_2 = \frac{C' - C}{(1 - \alpha^2)[\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\omega]},$$

il vient :

$$(13) \quad P_2 = \frac{C' - C}{1 - \alpha^2} L \frac{1}{C'} = \frac{x'}{(1 - \alpha^2)^2} (C' - C),$$

x' étant la valeur de x qui correspond à la valeur C' de C . Remarquons d'ailleurs que la valeur de P_1 , trouvée égale d'après (10), dans le cas actuel où ΔE est entièrement compris entre $\alpha^2 E_0$ et E_0 , à :

$$(14) \quad P_1 = \frac{C' - C}{1 - \alpha_2}$$

est précisément égale à l'aire de la bande $MM'NN'$.

Il en résulte que la somme $P_1 + P_2$ est représentée par l'aire totale hachurée sur la figure 153 et a pour valeur, par addition de (13) et (14) :

$$(15) \quad P_1 + P_2 = \frac{C' - C}{1 - \alpha_2} \left(1 + \frac{x'}{1 - \alpha^2} \right).$$

Il résulte de la représentation géométrique que cette somme est bien plus petite que l'unité comme doit l'être la probabilité qu'elle mesure pour que l'une au moins des énergies E_1 et E_2 après le premier et le deuxième choc tombe dans le domaine ΔE .

On constate facilement sur la figure 153 que la région $MNQM'$ contient les

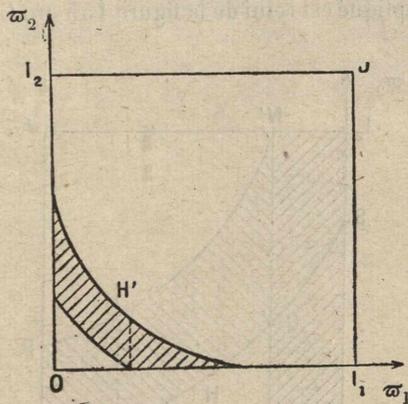


Fig. 154.

points représentatifs des chocs pour lesquels E_1 seul tombe dans le domaine ΔE , entre E et E' , que la région $N'QRR'$ contient les points représentatifs des chocs

pour lesquels E_2 seul tombe dans ce même domaine, tandis que la région $NN'Q$ correspond au cas où les deux énergies E_1 et E_2 sont l'une et l'autre à l'intérieur de ΔE .

Le résultat est également simple lorsque les limites E et E' du domaine ΔE , suppose d'un seul tenant, sont toutes deux inférieures à $\alpha^2 E_0$, mais supérieures à $\alpha^4 E_0$:

$$\alpha^4 \leq C < C' \leq \alpha^2.$$

L'énergie E_1 , toujours supérieure à $\alpha^2 E_0$, ne peut tomber dans ΔE , de sorte que P_1 est nul et P_2 égal à l'aire comprise entre les deux hyperboles H et H' de la figure 154.

On obtient facilement dans ce cas :

$$P_1 + P_2 = P_2 = \frac{C' - C}{(1 - \alpha^2)^2} \left[L \frac{C}{\alpha^4} - 1 \right] + \frac{C'}{(1 - \alpha^2)^2} L \frac{C}{C'}$$

Si C devient inférieur à α^4 , C' restant compris entre α^4 et α^2 , l'hyperbole H sort du carré en traversant le point O ; P_2 ne dépend plus que de C' et devient :

$$P_2 = P_1 + P_2 = \frac{C'}{(1 - \alpha^2)^2} \left[L \frac{C'}{\alpha^4} - 1 \right] + \frac{\alpha^4}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

De même, si dans le cas de la figure 153, C' devient égal ou supérieur à 1, l'hyperbole H' sort du carré en traversant le sommet J ; l'expression (15) pour $P_1 + P_2$ ne dépend plus que de C et devient :

$$P_1 + P_2 = \frac{1 - C}{1 - \alpha^2}.$$

Le cas le plus compliqué est celui de la figure 155 où, C étant compris entre α^4

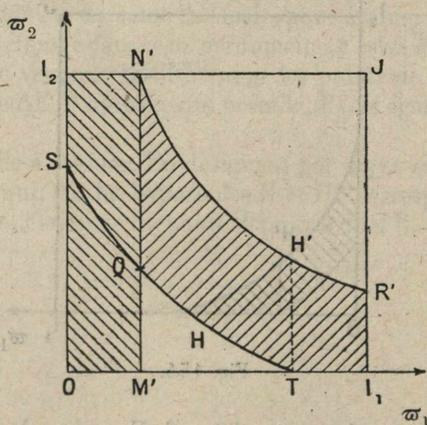


Fig. 55.

et α^2 et C' entre α^2 et 1, les hyperboles H et H' sont situées de part et d'autre de H_1 . On a alors, si $C = x^2 C'$:

$$P_1 = \frac{C - \alpha^2}{1 - \alpha^2},$$

$$P_2 = \int \frac{C - \alpha^4}{C' - \alpha^2} \frac{\alpha^2(1 - \alpha^2)}{1 - \alpha^2} (\varpi'_2 - \varpi_2) d\varpi_1 + \int \frac{C - \alpha^4}{\alpha^2(1 - \alpha^2)} \varpi'_2 d\varpi_1,$$

$$P_2 = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^2} [(C' - C) L \frac{C}{\alpha^2 C'} - C' L \frac{C}{\alpha^2} + C - \alpha^2].$$

Si, au contraire, $C < \alpha^2 C'$, le point M' passe entre T et I , et l'on a

$$P_2 = \int \frac{1}{C' - \alpha^2} \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \varpi'_2 d\varpi_1 = \frac{1}{(1 - \alpha^2)^2} [C' L \frac{1}{C'} - \alpha^2(1 - C')]$$

et :

$$P_1 + P_2 = 1 + \frac{1}{(1 - \alpha^2)^2} [C' L \frac{1}{C'} + C' - 1].$$

Ces résultats se simplifient si l'on suppose le domaine ΔE suffisamment petit pour être considéré comme infinitésimal, et comprenant le seul intervalle entre E et $E + dE$, C variant ainsi entre C et $C + dC$. La région telle que $NN'Q$ (fig. 153) où les deux énergies E_1 et E_2 tombent à la fois dans ΔE devient un infiniment petit du second ordre par rapport à dC ; les probabilités P_1 et P_2 , quand elles ne sont pas nulles, deviennent des infiniment petits du premier ordre, dP_1 et dP_2 , dont il est facile de voir que les expressions changent suivant que C , toujours inférieur à l'unité, est compris dans l'un ou l'autre des intervalles entre 1 et α^2 , α^2 et α^4 , α^4 et 0, c'est-à-dire que la quantité x est comprise dans l'un ou l'autre des intervalles entre 0 et a , a et $2a$, $2a$ et l'infini. Les résultats sont les suivants qui complètent ceux déjà donnés pour dP_1 :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \alpha^2 < C < 1 \text{ ou } 0 < x < a \\ 2^\circ \alpha^4 < C < \alpha^2 \text{ ou } a < x < 2a \\ 3^\circ C < \alpha^4 \text{ ou } x > 2a \end{array} \right\} \begin{cases} dP_1 = \frac{1}{1 - \alpha^2} dC, \\ dP_2 = \frac{x}{(1 - \alpha^2)^2} dC; \\ dP_1 = 0, \\ dP_2 = \frac{2a - x}{(1 - \alpha^2)^2} dC; \\ dP_1 = 0, \\ dP_2 = 0. \end{cases}$$

Remarquons que, comme il a été annoncé plus haut, alors que le coefficient

de proportionnalité de dP_1 à dC présente une discontinuité $\frac{1}{1-\alpha^2}$ quand C passe par la valeur α^2 ou x par la valeur a , celui de dP_2 ne présente aucune discontinuité pour $x = a$ ni pour $x = 2a$.

Ce qui concerne les chocs suivants se traite de la même manière. Si $\varpi_3 = \sin^2 \theta_3$ est la probabilité pour que le troisième choc se produise sous un angle d'incidence compris entre 0 et θ_3 , chaque modalité possible pour l'ensemble des trois premiers chocs, chaque système de valeurs possibles pour $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ou pour $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ correspond à un point situé dans l'intérieur d'un cube de côté égal à l'unité et dont les trois arêtes partant du sommet choisi pour origine correspondent aux trois coordonnées rectangulaires $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$, variables chacune entre zéro et l'unité. La probabilité pour que le point représentatif se trouve à l'intérieur du parallélépipède infinitésimal $d\varpi_1, d\varpi_2, d\varpi_3$ est donnée, puisque les circonstances des chocs successifs doivent être considérées comme indépendantes, par le produit $d\varpi_1, d\varpi_2, d\varpi_3$ qui représente le volume de l'élément. Par suite, la probabilité pour que le point représentatif se trouve à l'intérieur d'un domaine quelconque intérieur au cube est égale au volume de ce domaine.

D'autre part, l'application de la formule (4) montre que la condition pour que l'énergie cinétique E_3 après le troisième choc ait une valeur déterminée $E_3 = CE_0$ est :

$$[\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi_1][\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi_2][\alpha^2 + (1 - \alpha^2)\varpi_3] = C.$$

Le lieu des points représentatifs qui répondent à cette condition est ainsi un hyperboloïde H_1 de révolution autour de la diagonale du cube qui passe par l'origine. La valeur de C qui correspond à l'origine est $\alpha^6 (x = 3a)$, celle qui correspond au sommet opposé est $1 (x = 0)$ et les six autres sommets se partagent en groupes de trois pour lesquels C prend respectivement les valeurs $\alpha^2 (x = a)$ et $\alpha^4 (x = 2a)$. Les hyperboloïdes H qui passent par ces deux groupes de trois sommets et qui correspondent respectivement aux deux valeurs α^2 et α^4 de C ou a et $2a$ de x , partagent le cube en trois régions qui joueront ici le même rôle que les deux régions dans lesquelles l'hyperbole H_1 partage le carré de la figure 152.

Comme dans le cas de deux chocs, on verra facilement comment se délimite, par des plans, des cylindres hyperboliques et des hyperboloïdes de révolution au lieu de droites et d'hyperboles, le domaine dont le volume représente la probabilité cherchée P correspondant à un intervalle ou à un domaine quelconque ΔE . Le domaine P ainsi délimité et composé des parties adjacentes qui représentent P_1, P_2 et P_3 , occupe au maximum la totalité du cube et la probabilité correspondante P est donc toujours, comme il convient, au plus égale à l'unité.

Malgré la simplicité de cette solution géométrique, il serait fastidieux de reprendre ici l'énumération des cas particuliers qui peuvent se présenter, même lorsque le domaine ΔE se compose d'un seul intervalle d'étendue finie. Par contre, les résultats restent simples lorsque cet intervalle peut être considéré comme infiniment petit, compris entre E et $E + dE$ ou C et $C + dC$ et qu'il s'agit, comme nous l'avons fait pour dP_1 et dP_2 , de calculer dP_3 égal au volume

compris entre deux hyperboloïdes H infiniment voisins correspondant à C et $C + dC$. On obtient ainsi :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \text{ pour } 1 > C > \alpha^2 \text{ ou } 0 < x < a : dP_3 = \frac{x^2}{2(1-\alpha^2)^3} dC; \\ 2^\circ \text{ pour } \alpha^2 > C > \alpha^4 \text{ ou } a < x < 2a : dP_3 = \frac{x^2 - 3(x-a)^2}{2(1-\alpha^2)^3} dC; \\ 3^\circ \text{ pour } \alpha^4 > C > \alpha^6 \text{ ou } 2a < x < 3a : dP_3 = \frac{(3a-x)^2}{2(1-\alpha^2)^3} dC; \\ 4^\circ \text{ pour } C < \alpha^6 \text{ ou } x > 3a : dP_3 = 0. \end{array} \right.$$

On remarquera que, comme dans le cas de dP_2 , le coefficient de proportionnalité de dP_3 à dC , tout en prenant des formes algébriques différentes en fonction de x dans les différents intervalles, ne présente pas de discontinuités quand on passe d'un intervalle au suivant. Il présente un maximum pour $x = \frac{3a}{2}$.

On étudiera de la même manière l'ensemble des n premiers chocs en introduisant comme domaine de probabilités un hypercube à n dimensions de côté égal à l'unité et partagé en n régions par des surfaces hyperboloïdes à $n - 1$ dimensions qui correspondent, pour l'énergie cinétique E_n après le n° choc, à la série des valeurs décroissantes :

$$E_0 \quad \alpha^2 E_0 \quad \alpha^4 E_0 \dots \alpha^{2i} E_0 \dots \alpha^{2n} E_0$$

qui correspondent aux valeurs de x :

$$0 \quad a \quad 2a \dots ia \dots na.$$

A chacun des n intervalles entre ces valeurs correspond une des régions dans lesquelles est partagé l'hypercube des probabilités. La région de rang i sera celle pour laquelle x est compris dans l'intervalle :

$$(17) \quad ia \leq x \leq (i+1)a$$

l'entier i prenant la série des valeurs $0, 1, \dots, n - 1$, en nombre égal à n .

Quand le point représentatif de l'ensemble des n chocs traverse ces régions successives, l'énergie E_n après le dernier choc diminue progressivement depuis E_0 (cas où tous les chocs sont tangents) jusqu'au minimum $\alpha^{2n} E_0$ (cas où tous les chocs sont centraux).

On délimitera comme précédemment le domaine P , intérieur à l'hypercube, des points représentatifs des chocs pour lesquels l'une au moins des énergies E_0, E_1, \dots, E_n tombe dans le domaine ΔE , et l'étendue de ce domaine, toujours inférieure à l'unité, mesurera la probabilité cherchée P .

Les résultats sont simples quand le domaine ΔE est infinitésimal et compris entre $E_0 C$ et $E_0(C + dC)$. En désignant par :

$$(18) \quad dP_n^i = f^i dC$$

la valeur que prend dP_n dans la région de rang i caractérisée par la condition (17), on peut démontrer la formule suivante, qui généralise les résultats (15) et (16) :

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} dP_n^i = f_n^i dC &= \frac{dC}{(n-1)! (1-\alpha^2)^n} [x^{n-1} - C_n^1(x-a)^{n-1} \\ &+ C_n^2(x-2a)^{n-1} + \dots + (-1)^i C_n^i(x-ia)^{n-1}] \end{aligned} \right.$$

où les C_n^1, \dots, C_n^i sont les coefficients du binôme :

$$C_n^i = \frac{n!}{i! (n-i)!}.$$

De là on tire la relation de récurrence :

$$(20) \quad f_n^i(x) = f_n^{i-1}(x) + (-1)^i \frac{C_n^i(x-ia)^{n-1}}{(1-\alpha^2)^n}.$$

Il en résulte immédiatement, sauf pour $n = 1$, l'absence de discontinuité quand on passe d'une région à l'autre puisque la relation (20) donne :

$$f_n^i(ia) = f_n^{i-1}(ia)$$

et que ia , en vertu de (17) est précisément la valeur de x qui sépare les intervalles de rangs $i-1$ et i .

Pour la dernière région ($i = n-1$) celle qui contient l'origine pour laquelle E_n prend la valeur minima $\alpha^{2n} E_0$, on a l'expression simple :

$$dP_n^{n-1} = \frac{dC}{(n-1)! (1-\alpha^2)^n} (na-x)^{n-1}$$

qui se confond avec celle que l'on peut déduire de (19) en vertu de l'identité :

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} x^{n-1} - C_n^1(x-a)^{n-1} + C_n^2(x-2a)^{n-1} + \dots \\ + (-1)^i C_n^i(x-ia)^{n-1} + \dots + (-1)^n(x-na)^{n-1} \equiv 0. \end{aligned} \right.$$

L'expression générale (19) satisfait d'ailleurs à la condition que l'intégrale de dP étendue à l'ensemble des n régions de l'hypercube soit bien égale à l'unité.

Remarquons encore que la formule (19) donne bien des résultats exacts et une probabilité nulle en vertu de l'identité (20) lorsqu'on l'applique à des valeurs de i égales ou supérieures à n , c'est-à-dire à des valeurs de C inférieures au minimum α^{2n} . On a, en effet, d'après (19) et (21) :

$$f_n^i(x) \equiv 0 \text{ pour } i \geq n \text{ ou } x \geq na.$$

On peut vérifier aussi que la relation de récurrence (20) reste exacte pour toutes les valeurs des entiers n et i .

Il est facile maintenant, dans le cas où le domaine ΔE est infinitésimal, d'obtenir l'expression de la probabilité totale :

$$(22) \quad dP = \sum_1^{\infty} dP_n$$

pour que l'énergie cinétique E du neutron prenne, au cours de sa décroissance par degrés discontinus du fait des chocs, une valeur comprise dans l'intervalle entre E et $E + dE$.

À la valeur donnée E correspond, d'après les définitions (9), une valeur déterminée de x et, par conséquent, de l'entier i d'après (17). L'expression que nous allons obtenir pour dP change avec cet entier i , c'est-à-dire avec celui des intervalles de la série :

$$E_0, \alpha^2 E_0, \alpha^4 E_0, \dots, \alpha^{2i} E_0, \dots$$

dans lequel se trouve placée la valeur donnée de E .

Si nous posons :

$$(23) \quad dP = F_i(x) dC,$$

il résulte de (19) et de (23) :

$$F_i(x) = \sum_{n=i+1}^{\infty} f_n^i(x)$$

avec la relation de récurrence résultant de (20) :

$$(24) \quad F_i(x) = F_{i-1}(x) + (-1)^i \sum_{n=i}^{\infty} C_n^i \frac{(x-ia)^{n-1}}{(n-1)!(1-\alpha^2)^n}.$$

En remplaçant C_n^i par sa valeur $\frac{n!}{i!(n-i)!}$, on peut mettre la somme qui figure dans (24) sous la forme :

$$(25) \quad \frac{1}{i!} \sum_i^{\infty} \frac{n(x-ia)^{n-1}}{(n-i)!(1-\alpha^2)^n}.$$

Ceci est la dérivée par rapport à x de :

$$\frac{1}{i!} \sum_i^{\infty} \frac{(x-ia)^n}{(n-i)!(1-\alpha^2)^n}$$

ou encore :

$$\frac{1}{i!} \left(\frac{x-ia}{1-\alpha^2} \right)^i \sum_0^{\infty} \frac{(x-ia)^v}{v!(1-\alpha^2)^v}$$

Ou, en posant :

$$(26) \quad y = \frac{x}{1-\alpha^2} \quad \varepsilon = \frac{a}{1-\alpha^2}$$

la somme (25) devient la dérivée par rapport à x de :

$$\frac{(y - i\varepsilon)^i e^{y-i\varepsilon}}{i!}$$

Cette dérivée est, en tenant compte de (26) :

$$\frac{1}{1-\alpha^2} \varphi_i(y - i\varepsilon)$$

en posant :

$$(27) \quad \varphi_i(y) = \frac{1}{i!} (y+i)^i y^{i-1} e^y.$$

On a donc, d'après (24) :

$$F_i(x) = F_{i-1}(x) + \frac{(-1)^i}{1-\alpha^2} \varphi_i(y - i\varepsilon)$$

d'où par addition :

$$F_i(x) = \frac{1}{1-\alpha^2} \sum_{k=0}^i (-1)^k \varphi_k(y - k\varepsilon).$$

D'où le résultat final, variable avec i et valable pour C compris dans l'intervalle de rang i , c'est-à-dire entre α^{2i} et $\alpha^{2(i+1)}$:

$$(28) \quad dP = \frac{dC}{1-\alpha^2} \sum_{k=0}^i (-1)^k \varphi_k(y - k\varepsilon).$$

Dans le cas particulièrement simple où M est égal à m (rencontres des neutrons avec des protons), α est nul et le résultat (27) se simplifie considérablement puisque i ne peut plus prendre que la valeur 0. La formule (28) se réduit donc à :

$$dP = \varphi_0(y) dC$$

ou, d'après (27) :

$$dP = e^y dC$$

ou, comme ici y est égal à x , e^y est égal à $\frac{1}{C}$ en vertu de la définition de x , d'où :

$$dP = \frac{dC}{C} = \frac{dE}{E}.$$

On retrouve bien ainsi un résultat déjà connu.

XIII. GRAVITATION

CONTENTS