O czterech całkach Hermite'a.

W swym kursie analizy (Paris 1873), mówiąc o całkowaniu przez części, powiada Hermite (str. 260), iż nie posiadamy sposobu bezpośredniego odnajdowania całek

$$\int \frac{x^2dx}{u^2} = \frac{v}{u} \; ; \quad \int \frac{x^2dx}{v^2} = -\frac{u}{v} \; ; \quad \int \frac{bx^2dx}{(au+bv)^2} = -\frac{u}{au+bv} \; ;$$

gdzie $u = x\sin x + \cos x$; $v = \sin x - x\cos x$.

Dalej powiada:

„Nous pourrions encore citer... cette intégrale

$$\int \frac{adx}{[a+(ax+b)tgx]^2} = \frac{tgx}{a+(ax+b)tgx} ,$$

dont on ne peut vérifier la valeur que par la différentiation",

W 1883 r. Pereira de Silva zamieścił w Bulletin des Sciences mathem. (t. VII, serja 2) artykuł p. t. „Sur quelques intégrales données dans le cours d'analyse de M. Hermite", w którym znajduje pierwsze trzy całki Hermite'a. Niniejsza notatka ma na celu wykazanie, że wszystkie cztery powyższe całki należą do jednego typu, oraz obliczenie tych całek. Przy sposobności znajdziemy też kilka innych całek.

---

§ 1. Niech będzie dana funkcja $z = f(x)$, czyniąca zadość warunkowi

$$z + z'' = 0 \; .$$

Rozwiązanie ogólne równania możemy napisać w postaci

$$z = A\sin x + B\cos x = R\sin(x+\alpha) \; ,$$

przyczym

$$R^2 = A^2 + B^2 \; ; \quad \alpha = arctg \frac{B}{A} \; .$$

Niech będą prócz tego dane dwie funkcje p i q kształtu

$$p = xz + z' \; ; \quad q = z - xz' \; .$$

Wówczas $\quad p' = xz' \; ; \quad p'' = z' - xz \; ; \quad q' = xz \; ; \quad q'' = z + xz' \; .$

Skąd $\quad p + p'' = 2z' \; ; \quad p - p'' = 2xz \; ; \quad q + q'' = 2z \; ; \quad q'' - q = 2xz' \; .$

Mnożąc pierwsze i trzecie z tych równań przez x, drugie przez z', czwarte zaś przez z, otrzymujemy trzy równania

$$x(y+y'')=2y' ; \quad z'(y-y'')2zy' ; \quad z(y''-y)=2z'y' .$$

Pierwszemu z tych równań czynią zadość funkcje p i q, zatym jego całka ogólna ma kształt

$$\text{(I)} \qquad y=ap+bq=(ax+b)z+(a-bx)z'=$$
$$=R\rho[x\sin(x+\varphi)+\cos(x+\varphi)] ,$$

gdzie $\rho^2=a^2+b^2$, $\varphi=\alpha-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Co się tyczy dwuch drugich równań, to trzecie otrzymać możemy z drugiego, kładąc w nim z' zamiast z, gdyż $z''=-z$. Tak więc pozostaje właściwie do zcałkowania tylko drugie równanie.

Funkcja p jest szczególnym rozwiązaniem tego równania, możemy tedy podstawić zamiast y, y', y'' wartości

$$p\eta ; \quad p\eta'+p'\eta ; \quad p\eta''+2p'\eta'+p''\eta$$

i zcałkować równanie.

Otrzymujemy $$z'p\eta''+2(z'p'+zp)\eta=0 ,$$

czyli $$\frac{\eta''}{\eta}+\frac{2p'}{p}-\frac{2z''}{z'}=0 .$$

Skąd po pierwszym całkowaniu mamy

$$C\eta'=\frac{z'^2}{p^2} ,$$

po drugim zaś $$C\eta=C_1+\int\frac{z'^2dx}{p^2} .$$

Przyjmując p za zmienną niezależną i całkując przez części, otrzymamy

$$\int\frac{z'^2dx}{p^2}=\frac{1}{x}-\frac{z'}{px}=\frac{z}{p} ,$$

zatym $$C\eta=\frac{C_1p+z}{p} ; \quad p\eta=ap+bz .$$

Mamy tedy całki ogólne dla drugiego i trzeciego równania:

$$\text{(II)} \qquad y=(ax+b)z+az'$$

$$\text{(III)} \qquad y=(ax+b)z'-az .$$

§ 2. Wszystkie cztery całki Hermite'a, z których ostatnią napisać można w postaci

$$\int\frac{a\cos^2x dx}{[(ax+b)\sin x+a\cos x]^2} ,$$

należą do typu całek $$\int \frac{s^2dx}{y^2},$$

w których s równa się albo x, albo z', albo z, zależnie od tego, czy y wyraża się w postaci (I), (II) czy (III).

Zapomocą poprzedniej metody można te całki sprowadzić do kształtu

$$\int \frac{s^2dx}{y'^2}. \tag{1}$$

Istotnie, $$\int \frac{s^2dx}{y^2} = -\frac{s^2}{yy'} + \int \frac{sdx}{yy'^2} . t$$

gdzie $t = 2y's' - y''s$, przyczym

w pierwszym przypadku $t = 2y' - 2y''x = xy$,

w drugim $t = -z'y$,

w trzecim $t = -zy$.

Zważywszy, że $y' = ap' + bq' = R\rho x\cos(x+\varphi)$,

mamy $$\int \frac{x^2dx}{y'^2} = \frac{\operatorname{tg}(x+\varphi)}{R^2\rho^2},$$

zatym $$\int \frac{x^2dx}{y^2} = -\frac{x^2}{yy'} + \frac{x\sin(x+\varphi)}{R\rho y'} = \frac{1}{R^2\rho^2}[az - bz' - x(az' + bz)],$$

czyli (2) $$R^2\rho^2 \int \frac{x^2dx}{(ap+bq)^2} = \frac{aq-bp}{ap+bq} + \text{const.}$$

Kładąc w tej ostatniej całce $a=1$, $b=0$, albo też $a=0$, $b=1$, albo wreszcie $A=1$, $B=0$, otrzymamy trzy pierwsze całki Hermite'a. Oczywista rzecz, że przy innych założeniach, np. przy $A=0$, $B=1$, otrzymamy nowe całki.

Jeżeli w całce (1) założymy $s = z'$, będziemy mieli

$$\int \frac{z'^2dx}{y^2} = -\frac{z'^2}{yy'} - \int \frac{dx}{(ax+b)^2} = \frac{z}{ay},$$

lub, ze względu na całkę (II),

$$a\int \frac{z'^2dx}{[(ax+b)z+az']^2} = \frac{z}{(ax+b)z+az'}. \tag{3}$$

Kładąc w tej całce $A=1$, $B=0$, mamy czwartą całkę Hermite'a. Przy $A=0$, $B=1$ otrzymamy nową całkę.

Mamy wreszcie, kładąc $s = z$, z całki (1)

$$\int \frac{z^2dx}{y^2} = -\frac{z^2}{yy'} - \int \frac{z^2dx}{y'^2} = \frac{z'}{ay},$$

zatym

$$a \int \frac{z^2 dx}{[(ax+b)z' - az]^2} = \frac{z'}{(ax+b)z' - az} \quad . \tag{4}$$

Możemy i do tej całki zastosować poprzednie podstawienia.

§ 3. Wszystko, co mówiliśmy poprzednio o funkcjach trygonometrycznych, da się zastosować do funkcji hiperbolicznych, musimy tylko założyć, że

$$z - z'' = 0 \ ,$$

funkcje zaś p i q czynią zadość równaniom

$$p = xz - z' \ ; \quad q = xz' - z \ .$$

Funkcja z musi mieć wtedy kształt

$$z = A\sinh x + B\cosh x = R\sinh(x+\alpha) \ ,$$

wobec czego

$$p'' - p = 2z' \ ; \qquad p + p'' = 2xz$$

$$q'' - q = 2z \ ; \qquad q + q'' = xz' \ .$$

Otrzymujemy trzy funkcje

$$y = ap + bq \ ; \qquad y = (ax+b)z + az' \ ; \qquad y = (ax+b)z' + az \ ,$$

czyniące zadość odpowiednio równaniom

$$x(y'' - y) = 2y \ ; \qquad z'(y + y'') = 2zy' \ ; \qquad z(y + y'') = 2z'y' \ .$$

Romuald Witwiński.