KARL WEIERSTRASS [1]

Le 19 février dernier, M. Weierstrass s'est éteint après une longue maladie. Il a été un des plus grands géomètres de ce siècle, et il a exercé une influence considérable sur les progrès de l'Analyse. C'est dans ses leçons à l'Université de Berlin que Weierstrass publiait le plus souvent ses découvertes. Les mémoires qu'il a rédigés lui-même sont relativement peu nombreux; ce serait là peut-être la source de quelques difficultés si l'on voulait historiquement suivre la marche des idées de Weierstrass et rechercher l'origine première de telle ou telle notion, mais il importe peu si l'on a seulement en vue les résultats définitivement acquis aujourd'hui à la Science. L'illustre analyste a publié en 1876 un mémoire sur la Théorie des fonctions uniformes; ce mémoire, en faisant connaître à un public plus étendu les résultats développés depuis longtemps déjà dans l'enseignement du maître, a été le point de départ d'un très grand nombre de travaux sur la Théorie des fonctions. Cauchy et ses disciples français, en étudiant les fonctions analytiques uniformes, n'avaient pas pénétré bien profondément dans l'étude de ces points singuliers appelés « points singuliers essentiels », dont le point $z = 0$ pour la fonction $e^{\frac{1}{z}}$ donne l'exemple le plus simple. Weierstrass, en approfondissant cette étude, a été conduit à un résultat qui est un des plus admirables théorèmes de l'Analyse moderne, je veux parler de la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires. D'après le théorème fondamental de l'Algèbre,

(1) *Revue générale des Sciences*, 15 mars 1897.

un polynome peut être décomposé en un produit de facteurs linéaires; pour une fonction entière, c'est-à-dire pour une fonction uniforme continue dans tout le plan (telle que sin z), ne peut-on chercher à obtenir aussi une décomposition en facteurs ? Cauchy avait obtenu sur ce sujet des résultats importants, mais sans le traiter dans toute sa généralité. Il était réservé à Weierstrass de montrer qu'une fonction entière peut être décomposée en un produit d'un nombre généralement infini de facteurs primaires, chacun de ceux-ci étant le produit d'un facteur linéaire par une exponentielle de la forme $e^{P(z)}$, où P (z) est un polynome. C'est sans doute en étudiant l'intégrale eulérienne de seconde espèce que Weierstrass a été mis sur la voie de ce beau théorème, et nous rappellerons à ce sujet cet important résultat que l'inverse de cette intégrale est une fonction entière.

Weierstrass a beaucoup insisté sur l'importante notion du prolongement analytique d'une fonction et sur la représentation des fonctions par des séries; il a le premier appelé l'attention sur certaines séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable, qui ne peuvent être prolongées au delà de leur cercle de convergence. C'est dans ces dernières recherches qu'il fut conduit à donner le premier exemple d'une fonction continue d'une variable x n'ayant pas de dérivée. Voici cet exemple mémorable : Soient a un entier impair et b un nombre positif inférieur à l'unité; la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos(a^n x)$$

est une fonction continue de x n'admettant pas de dérivée si $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Je me suis arrêté d'abord sur quelques-uns des travaux de Weierstrass relatifs à la Théorie des fonctions; c'est qu'ils occupent dans son œuvre une place considérable, et c'est qu'aussi je me rappelle encore l'admiration avec laquelle, il y a bientôt vingt ans, M. Hermite en parlait à ses élèves, admiration dont quelques années après portait la trace un cours lithographié qui a exercé une grande influence sur les études mathématiques dans notre pays.

Les fonctions elliptiques ont fait pendant plusieurs années l'objet de l'enseignement de Weierstrass; il y a introduit de nouvelles notations qui ont eu la plus heureuse influence sur le développement de la théorie [1]. Mais c'est surtout dans la Théorie des intégrales abéliennes qu'il a fait des découvertes de premier ordre. Le problème de l'inversion des intégrales hyperelliptiques avait été posé par Jacobi, et résolu par Gopel et Rosenhain dans le cas où le polynome sous le radical est du cinquième ou du sixième degré. Dans deux Mémoires publiés en 1853 et 1856, Weierstrass résout le problème pour les intégrales hyperelliptiques de degré quelconque. Les méthodes de Göpel et de Rosenhain ne pouvaient être généralisées; c'est par la considération de certaines sommes d'intégrales de seconde et de troisième espèce, regardées comme fonctions des variables indépendantes, qu'il parvient de la manière la plus brillante à introduire les éléments analytiques fondamentaux. Ce ne fut qu'en 1869 que Weierstrass s'occupa, dans ses leçons, des fonctions algébriques les plus générales et de leurs intégrales; dans l'intervalle avaient paru en 1857 les travaux de Riemann sur ce sujet, et les méthodes de l'illustre émule de Weierstrass, qui prennent leur point de départ dans une question de Géométrie de situation, sont aujourd'hui classiques. Le point de vue de Weierstrass est tout différent de celui de Riemann; ainsi il arrive à la notion de genre d'une courbe algébrique, sans sortir du domaine de l'Algèbre, en

---

[1] Les notations et les formules de Weierstrass sont maintenant bien connues en France grâce aux Traités d'Halphen, de MM. Tannery et Molk, et de MM. Appell et Lacour.

recherchant le nombre minimum des infinis arbitraires que peut posséder une fonction rationnelle des coordonnées d'un point variable de la courbe. Les tendances d'esprit des deux grands analystes sont d'ailleurs bien distinctes; Riemann aime les méthodes intuitives qui projettent sur tout un sujet une vive lumière, quitte à ne pas toujours descendre dans les détails, tandis que Weierstrass semble, dans son exposition, éviter les vues générales et aime à tout déduire de transformations de calcul permettant d'arriver d'une manière assurée au résultat annoncé. Rien ne serait plus intéressant à cet égard, si c'en était le lieu, que de les suivre tous deux dans l'étude des modules d'une courbe algébrique.

J'ai dû passer sous silence bien des travaux de Weierstrass; sa prodigieuse activité s'est appliquée sur presque toutes les parties des Mathématiques. Il a apporté dans le Calcul des variations son souci de la plus extrême rigueur, et la Théorie des équations différentielles a fait souvent l'objet de son enseignement. La Théorie des surfaces minima lui doit d'importants progrès, comme on peut le voir dans une courte note des *Monatsberichte*, qui a été développée par M. Darboux dans un des plus beaux chapitres du tome I de ses *Leçons de Géométrie infinitésimale*, et je rappellerai enfin son étude sur les grandeurs complexes formées avec *n* unités fondamentales.

La vie de Weierstrass a été entièrement consacrée à la Science. Son enseignement a été l'honneur de l'Université de Berlin; c'est là qu'il a répandu, sans compter, une foule d'idées qu'ont développées dans leurs travaux ses nombreux élèves. Nous saluons avec respect la mémoire du grand Géomètre et du Maître vénéré de tous ceux qui l'ont approché.