
LE

PROBLÈME DES TROIS CORPS

A PROPOS DES
RECHERCHES RÉCENTES DE M. SUNDMANN (1)

I.

Dès que Newton eût été conduit par les lois de Kepler à poser le principe de la gravitation universelle, le premier problème de mécanique qui s'est présenté a été la recherche du mouvement de n points s'attirant deux à deux proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances. Pour $n = 2$, le résultat est d'une admirable simplicité; la trajectoire relative de chaque point autour de l'autre est une section conique dont celui-ci occupe l'un des foyers. A partir de $n = 3$, le problème devient singulièrement plus difficile et a résisté jusqu'ici aux efforts des plus grands mathématiciens. Ce n'est pas que des résultats considérables n'aient été obtenus au moyen d'intégrations approchées, et la Mécanique céleste classique étudie surtout ces intégrations par approximations successives, qui, dans presque tous les problèmes usuels, suffisent largement pour la prédiction du mouvement des astres du système solaire; mais ces solutions approchées ne peuvent être utilisées que pendant un temps plus ou moins long. Au point de vue purement mathématique, ce qui aurait du prix

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 37, 1913, p. 313.

pour les analystes, c'est une solution exacte valable pour toute valeur du temps.

A défaut d'une solution applicable à tous les cas, c'est-à-dire quelles que soient les conditions initiales, on a cherché des solutions exactes particulières du problème des trois corps. Ainsi Lagrange a étudié le cas où les distances mutuelles des corps conservent des rapports constants pendant toute la durée du mouvement, et il a montré qu'alors les trois points sont toujours les sommets d'un triangle équilatéral, ou bien restent constamment en ligne droite. De Lagrange à Poincaré aucune solution particulière intéressante du problème des trois corps n'a été signalée, sauf toutefois dans un beau travail de M. Hill sur la Lune, qui a eu la plus heureuse influence sur les premières recherches de notre grand compatriote. Dans ses mémorables travaux de Mécanique céleste, Poincaré a obtenu des solutions particulières qui ont vivement appelé l'attention, solutions remarquables surtout par les méthodes mises en œuvre qui ont trouvé ailleurs d'importantes applications; je veux parler des solutions périodiques et des solutions qui leur sont asymptotiques. A la vérité, Poincaré n'étudie pas le cas général où les masses des trois corps sont quelconques. Prenons, par exemple, le cas où il s'est le plus souvent placé, dans lequel, un des corps ayant la masse m_1 , les deux autres ont des masses de la forme $m_2 = \alpha_2 \mu$, $m_3 = \alpha_3 \mu$, α_2 et α_3 étant des constantes fixes quelconques, et μ une constante qui devra être suffisamment petite. Dans ces conditions, Poincaré établit l'existence de solutions *périodiques* pour lesquelles les trois corps se retrouvent au bout d'un certain temps dans la même position relative. Il démontre aussi l'existence de solutions *asymptotiques* dans lesquelles les trajectoires des corps, au bout d'un temps suffisamment long, se rapprochent de plus en plus des trajectoires correspondant à une solution périodique. Certaines mêmes de ces solutions asymptotiques sont *doublement asymptotiques*,

étant très voisines, pour t négatif et de grande valeur absolue d'une solution périodique, puis s'en éloignant quelque temps pour s'en rapprocher indéfiniment quand t positif grandit indéfiniment; la démonstration de l'existence de ces solutions doublement asymptotiques a demandé un grand effort analytique. Tous ces résultats supposent μ très petit, car les raisonnements de Poincaré sont des raisonnements par continuité, utilisant les circonstances correspondant à $\mu = 0$. Jusqu'à présent on n'a pas démontré pour des masses quelconques l'existence de solutions périodiques du problème des trois corps en dehors des cas de Lagrange. Cette existence n'est guère douteuse, mais pour l'établir en toute rigueur, il y aura probablement de sérieuse difficultés à surmonter ⁽¹⁾.

Après l'immense labeur de Poincaré, il n'était guère tentant pour les mathématiciens de reprendre l'étude analytique des équations différentielles du problème des trois corps. Comme l'écrivait Tisserand dans le Tome IV de sa *Mécanique céleste* : « La solution rigoureuse du problème des trois corps n'est pas plus avancée aujourd'hui qu'à l'époque de Lagrange, et l'on peut dire qu'elle est manifestement impossible. » Tisserand pensait sans doute, en parlant de solution *rigoureuse*, à des représentations des coordonnées des trois corps au moyen de développements en séries dont les termes dépendent du temps t et convergentes pour toute valeur de t , ce qui n'arrive pour aucun des développements classiques de la Mécanique céleste. En fait, la solution *rigoureuse* peut être entendue d'une

(1) Au moins dans le cas du plan, les notions introduites par Poincaré dans le Mémoire publié peu de temps avant sa mort, dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, paraissent devoir conduire au but, mais une discussion approfondie est encore nécessaire. On sait qu'un jeune géomètre américain, M. Birkoff, a démontré très simplement le théorème de géométrie que Poincaré regardait comme probable, et dont, à l'avance, il avait esquissé quelques applications, en le supposant exact.

manière plus générale. Concevons qu'on puisse exprimer les neuf coordonnées des trois corps par des séries dont les termes soient des fonctions d'une variable τ , ces séries étant convergentes pour τ compris entre -1 et $+1$; admettons, d'autre part, que le temps t puisse s'exprimer en fonction de τ par une série convergente également entre -1 et $+1$ [soit $t = f(\tau)$], et cela de telle manière que τ allant en croissant de -1 à $+1$, la fonction $f(\tau)$ varie également toujours dans le même sens en allant de $-\infty$ à $+\infty$. On suppose, bien entendu, que les différents termes des séries envisagées peuvent être obtenus de proche en proche, quand les conditions initiales sont données. Avec ces divers développements, le problème doit être regardé comme résolu rigoureusement, car à une valeur de t correspond manifestement une et une seule valeur de τ , ce qui permet de calculer les coordonnées pour chaque valeur du temps.

II.

Le programme que nous venons d'indiquer a été rempli par un astronome de l'observatoire d'Helsingfors. M. Sundmann ⁽²⁾. Avant d'essayer de donner une idée du travail de M. Sundmann, il nous faut dire un mot d'une remarque faite par Poincaré en 1886, concernant d'ailleurs le cas où les rapports des masses sont quelconques. Poincaré avait indiqué que, si l'on était sûr à l'avance que la distance de deux quelconques des trois points restera toujours supérieures à une limite déterminée, on pourrait affirmer que les coordonnées des trois corps sont susceptibles d'être

(²) Les points essentiels des recherches de M. Sundmann ont été communiqués à la *Société des Sciences de Finlande*, les 17 décembre 1906 et 18 janvier 1909, et ont fait l'objet de Notes parues dans les Tomes XXXIV et XXXV des Mémoires de cette Société. Un Mémoire plus développé a paru dans le Tome XXXVI des *Acta mathematica* en 1912.

développées pour toute valeur de t suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1},$$

α étant une constante positive convenable. C'est là un résultat qui, au premier abord, paraît bien remarquable⁽³⁾. Malheureusement, pour des conditions initiales données, on ne sait pas si l'on se trouvera ou non dans les conditions supposées, et Poincaré lui-même, probablement après des recherches infructueuses, écrivait : « Je ne crois pas toutefois qu'on puisse tirer grand parti des applications de cette méthode à la Mécanique céleste. »

Si les corps se choquent, le développement de Poincaré cesse d'être applicable; mais, comme l'a vu M. Sundmann en analysant les diverses circonstances susceptibles de se présenter, on peut utiliser un développement analogue, après avoir remplacé préalablement le temps par une autre variable indépendante convenablement choisie.

Le point fondamental dans les recherches de M. Sundmann réside dans le théorème suivant : *Si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, on peut, les circonstances initiales étant données, indiquer une limite positive au-dessous de laquelle les deux plus grandes distances entre les corps ne descendent jamais.* En particulier, les trois corps ne se choqueront certainement pas au même instant si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois ⁽⁴⁾,

⁽³⁾ On pourrait trouver, pour le même objet, un grand nombre d'autres développements, plus simples mêmes que celui de Poincaré. C'est un point qui est devenu presque évident depuis que l'étude de la méthode employée par Cauchy pour démontrer l'existence des intégrales des équations différentielles a été approfondie. On peut consulter à ce sujet le Tome II de mon *Traité d'Analyse* (pages 332 et suivantes) et également le Tome III (pages 249 et suivantes).

⁽⁴⁾ Dans une lettre à M. Mittag-Leffler du 2 février 1889, Weierstrass énonce sans démonstration ce résultat. Cette lettre de Weierstrass a été imprimée récemment dans les *Acta mathematica* (t. XXXV), postérieurement aux Notes citées de M. Sundmann dans les *Acta Societatis Fennicæ*.

et c'est dans ce cas général que se place M. Sundmann dans toute la suite de son Mémoire. Par contre, il peut arriver que deux des corps se choquent à un certain moment, mais cette circonstance, qui avait été jusqu'ici la pierre d'achoppement dans tous les travaux analytiques concernant le problème des trois corps, ne va être la source d'aucune difficulté grâce aux vues ingénieuses de M. Sundmann sur ce que l'on peut appeler le *prolongement analytique* du problème après le choc. Supposons que, pour $t = a$ deux des trois corps viennent à se choquer. On établit qu'alors les coordonnées des trois corps peuvent se développer suivant les puissances de $(t - a)^{\frac{1}{3}}$. Dans ces développements, pour $t < a$, la valeur de $(t - a)^{\frac{1}{3}}$ est négative. Ces séries permettent de définir le mouvement des trois corps après le choc; on y parvient en donnant, dans ces mêmes développements, des valeurs positives à $(t - a)^{\frac{1}{3}}$ pour $t > a$. En réalité, on fait ainsi un prolongement analytique de la solution, qui correspondrait à donner pour un moment (t étant d'abord réel, voisin de a , et inférieur à a) des valeurs complexes à t , et à faire tourner le point correspondant d'un angle égal à 3π dans le plan de la variable complexe t .

Le temps t (redevenu réel) continuant à croître, il peut y avoir d'autres chocs (même une infinité), le problème étant après chaque choc *prolongé* comme il vient d'être dit. C'est d'ailleurs une conséquence du théorème énoncé plus haut que les valeurs de t correspondant à des chocs (s'il y en a) ne peuvent avoir une limite finie. On voit donc nettement, d'après ce qui précède, ce qui arrive quand le temps t grandit indéfiniment : la solution reste holomorphe tant qu'aucun choc n'a lieu, mais il peut arriver que, pour certaines valeurs a de t , un choc entre deux corps se produise; les coordonnées sont alors susceptibles d'être développées suivant les puissances de $(t - a)^{\frac{1}{3}}$ et le problème peut être prolongé analytiquement au delà de $t = a$.

Tous ces points établis, et la démonstration de plusieurs d'entre eux a exigé une grande pénétration, il reste à faire un changement de variable, grâce auquel les coordonnées des trois corps ne cesseront pas d'être holomorphes. On y parvient en posant

$$dt = \Gamma d\omega,$$

ω étant la nouvelle variable (avec la condition $t = 0$ pour $\omega = 0$). On pose

$$\Gamma = \left(1 - e^{-\frac{r_1}{t}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_2}{t}}\right) \left(1 - e^{-\frac{r_3}{t}}\right),$$

l étant une constante positive convenable, et les r désignant les distances des trois points deux à deux; on a

$$0 \leq \Gamma < 1,$$

d'où il résulte que les variables ω et t varient dans le même sens, et, quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, ω varie de $-\infty$ à $+\infty$. Il est facile maintenant d'établir que les neuf coordonnées sont des fonctions holomorphes de ω dans le voisinage de chaque valeur réelle ω_0 de cette variable, le rayon de convergence autour de ω_0 étant supérieur à un nombre fixe indépendant de ω_0 . Il suffira alors de poser ⁽⁵⁾.

$$\tau = \frac{e^{\alpha\omega} - 1}{e^{\alpha\omega} + 1}$$

(α constante positive convenable), et l'on pourra exprimer les neuf coordonnées sous forme de séries ordonnées suivant les puissances de τ et convergentes entre -1 et $+1$; t est, d'autre part, une fonction de τ susceptible d'un développement de même nature, et, quand τ varie de -1 à $+1$, t varie de $-\infty$ à $+\infty$.

⁽⁵⁾ Je rappelle que cette relation entre τ et ω transforme une bande du plan de la variable ω , parallèle à l'axe réel et ayant celui-ci comme ligne médiane, dans le cercle de rayon 1, ayant l'origine pour centre, du plan de la variable τ . Comme je l'ai dit plus haut, Poincaré utilisait cette transformation.

On a donc bien la solution du problème des trois corps sous la forme que nous avons dite plus haut. Les circonstances initiales (vitesses et positions des corps étant données) on peut mettre *les neuf coordonnées et le temps* sous la forme de séries entières

$$A + B\tau + C\tau^2 + \dots$$

convergentes entre -1 et $+1$, les coefficients se calculant de proche en proche par des dérivations successives, et la fonction $f(\tau)$, qui représente le temps, croissant de $-\infty$ à $+\infty$, quand τ croît de -1 à $+1$.

III.

Nous venons d'obtenir, avec M. Sundmann, une solution complète du problème des trois corps. Les analystes, qui s'étaient antérieurement occupés de ce problème ⁽⁶⁾, portaient leur attention sur les chocs, mais en considérant que le problème n'avait plus de sens après un choc, ce qui est très naturel au point de vue physique ⁽⁷⁾. *Pour M. Sund-*

⁽⁶⁾ Citons particulièrement à ce sujet M. Painlevé, à qui l'on doit la proposition importante retrouvée d'une autre manière par M. Sundmann, qu'il y a nécessairement un choc quand le mouvement cesse d'être régulier à un instant fini. On doit aussi à M. Lévi Civita et à M. Bisconsini d'intéressantes recherches dans lesquelles ils se sont efforcés de trouver les relations entre les données initiales nécessaires et suffisantes pour qu'un choc se produise.

⁽⁷⁾ Il faut toutefois faire exception pour quelques pages du Tome III des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, où Poincaré parle incidemment de prolongement analytique. On les trouvera dans le Chapitre XXVI, l'un des plus beaux de ce célèbre Ouvrage, intitulé : *Stabilité à la Poisson* (pages 168 et suivantes).

Dans la lettre à M. Mittag-Leffler, dont j'ai parlé ci-dessus, Weierstrass dit un mot des développements suivant les puissances de $(t-a)^{\frac{1}{3}}$; il a donc eu vraisemblablement la notion du prolongement analytique d'une solution du problème des trois corps après un choc.

mann, au contraire, le problème continue après le choc. En réalité, c'est pour avoir poussé à fond l'idée du prolongement analytique que M. Sundmann a pu obtenir une solution générale susceptible de comprendre dans ses formules les cas où il y aurait des chocs en nombre fini ou infini.

On demandera maintenant quel est, pour la Mécanique céleste usuelle, l'intérêt de la solution précédente. Rien n'est plus décevant que le métier de prophète, et je ne veux risquer que des probabilités. Il semble que l'extrême généralité de l'analyse de M. Sundmann est peu favorable à l'étude des cas classiques de la Mécanique céleste, où une masse est toujours prédominante. Il est difficile, sans une étude approfondie, de se rendre compte des simplifications qu'apporterait cette hypothèse dans les formules de l'astronome d'Helsingfors; mais, en tout cas, ces formules paraissent impropres à mettre en évidence le caractère à peu près périodique de tant de phénomènes astronomiques, que les séries de type trigonométrique mettent, malgré leur divergence, si bien en évidence. Il y a, semble-t-il, encore moins à espérer en ce qui concerne les questions de stabilité, sauf peut-être quand il s'agit de ce que Poincaré appelait la *stabilité à la Poisson*.

Mais n'insistons pas sur ces probabilités ⁽⁸⁾ et plaçons-nous au point de vue de l'Analyse pure, pensant seulement à l'intégration rigoureuse des équations différentielles du problème des trois corps. Nous pouvons dire alors que le Mémoire de M. Sundmann est un travail faisant époque pour les Analystes et les Astronomes mathématiciens. Beaucoup croyaient que le problème des trois corps ne serait résolu que grâce à l'introduction préalable de trans-

(8) Il est d'autant plus inutile de le faire, que, en s'appuyant sur les théorèmes généraux de M. Sundmann, on peut trouver d'autres développements que le sien pour résoudre le problème des trois corps. C'est là une remarque analogue à celle que je faisais plus haut (Note 3) au sujet d'un développement de Poincaré.

cendantes nouvelles très compliquées. Ce n'est pas un des moindres étonnements pour le lecteur que de voir avec quelle simplicité, en s'appuyant seulement sur des résultats aujourd'hui classiques dans la théorie des équations différentielles ordinaires, le savant finlandais arrive à la solution d'un problème réputé si difficile. Il lui a fallu, il est vrai, une singulière finesse pour discuter avec des moyens aussi élémentaires, est-on tenté de dire, les diverses circonstances pouvant se présenter. Ces constatations ne vont pas sans mélancolie pour qui se rappelle l'histoire esquissée plus haut du problème des trois corps; nous allons chercher quelquefois bien loin des découvertes qui sont à la portée de notre main et les idées simples se présentent les dernières.

