РОЛЬ ПРОФЕССОРА ВЕЙЕРШТРАССА ВЪ СОВРЕМЕННОМЪ РАЗВИТІИ МАТЕМАТИКИ.

(Рѣчь, читанная въ засѣданіи физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей при Казанскомъ университетѣ 13 октября 1885 г. проф. *А. В. Васильевымъ*).

(*Окончаніе*).

Новая точка зрѣнія, съ которой Вейерштрассъ взглянулъ на функціи отъ комплексной перемѣнной, не могла не оказаться плодотворною и для дальнѣйшихъ успѣховъ какъ теоріи этихъ функцій, такъ и вообще Анализа.

Степенныя строки представляютъ обобщеніе цѣлаго полинома; цѣлый полиномъ всегда можетъ быть разложенъ вполнѣ опредѣленнымъ образомъ на произведеніе линейныхъ множителей. Отсюда естественно является вопросъ, какъ разлагаются на множители функціи, представляющіяся степенными строками. Отвѣтъ на это далъ Вейерштрассъ своею замѣчательною теоремою, по которой всякая функція, имѣющая характеръ цѣлой, т. е. выражаемая для всѣхъ значеній перемѣнной абсолютно-сходящеюся степенною строкою можетъ быть разложена на множители вида:

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{g\,(x,\;a)},$$

гдѣ $g\,(x,\,a)$ представляетъ цѣлый полиномъ, коеффиціенты котораго зависятъ отъ a. Теорема эта, опубликованная Вейерштрассомъ въ 1876 г., послужила началомъ цѣлаго ряда замѣчательныхъ изслѣдованій Миттагъ-Леффлера, Эрмита, Казорати, Бурге, Аппеля, Пуанкаре, Гишара, изслѣдованій, обогатившихъ математику совершенно новыми понятіями о прерывныхъ функціяхъ, о существенно-особенныхъ точкахъ высшихъ порядковъ и пр. [9]).

Изученіе вопроса о томъ, въ какомъ отношеніи стоятъ функціи, опредѣленныя только для вещественныхъ значеній перемѣнной, къ аналитическимъ функціямъ, привело проф. Вейерштрасса къ замѣчательнымъ изслѣдованіямъ о функціяхъ отъ вещественной перемѣнной, между прочимъ дало ему возможность составить извѣстный примѣръ функціи непрерывной, но не имѣющей производной [10]). Примѣръ этотъ поколебалъ принятыя всѣми основанія дифференціальнаго исчисленія, въ которомъ, слѣдуя Амперу и Галуа, дифференцируемость функцій считалась до тѣхъ поръ совпадающею съ непрерывностью. Съ другой стороны этотъ-же примѣръ въ связи съ работами Риманна [11]) и Ганкеля [12]) создалъ особую область изслѣдованій о системахъ точекъ (Punktmannigfaltigkeiten) [13]).

Я уже упоминалъ, что введеніе абсолютно-сходящихся степенныхъ строкъ въ теорію эллиптическихъ и абелевыхъ функцій привело Вейерштрасса къ созданію основанной на новыхъ началахъ теоріи этихъ функцій. Въ основу своей теоріи эллиптическихъ функцій Вейерштрассъ кладетъ именно изученіе простѣйшей однозначной аналитической функціи, имѣющей свойство, выражаемое теоремою сложенія, и притомъ имѣющей характеръ цѣлой для всѣхъ значеній комплексной перемѣнной. Функція эта, которую Вейерштрассъ въ своихъ первыхъ мемуарахъ обозначалъ въ честь Абеля знакомъ $Al(u)$ и которую теперь обозначаетъ знакомъ σu, опредѣляется слѣдующимъ безконечнымъ произведеніемъ:

$$\sigma u = u\,\Pi\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

гдѣ величина w принимаетъ значенія, получающіяся изъ общаго выраженія $2\mu\,\omega + 2\mu'\,\omega'$, придавая μ и μ' всевозможныя комбинаціи цѣлыхъ значеній, за исключеніемъ комбинаціи ($\mu = 0$, $\mu' = 0$); ω и ω' суть произвольныя комплексныя числа, удовлетворяющія условію, чтобы вещественная часть отношенія $\frac{\omega'}{\omega i}$ была положительна.

Основныя свойства функціи σu состоятъ въ равенствахъ:

$$(\mathrm{I})\quad \left|\begin{array}{l} \sigma(u + 2\omega) = e^{-2\eta(u+\omega)}\,\sigma(u) \\ \sigma(u + 2\omega') = e^{-2\eta'(u+\omega')}\,\sigma(u); \end{array}\right.$$

η и η' суть постоянныя, зависящія отъ ω и ω'.

Равенства (I) показываютъ, что функція

(II) $p\ (u) = -\dfrac{d^2 \log \sigma u}{du^2}$ есть функція двояко-періодическая съ періодами 2ω и $2\omega'$.

Между функціею $p\ (u)$ и ея производною существуетъ дифференціальное уравненіе:

(III) $p'\ (u)^2 = 4p^3\ (u) - g_2\ p\ (u) - g_3$, которое показываетъ, что $p\ (u)$ есть функція обратная эллиптическому интегралу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}. \quad (IV)$$

Вейерштрассъ показалъ, что всякій эллиптическій интегралъ

$$\int \frac{dx'}{\sqrt{Ax'^4 + 4\ Bx'^3 + 6\ Cx'^2 + 4\ B'x' + A'}}$$

можетъ быть приведенъ къ каноническому виду (IV), причемъ g_2 и g_3 суть два инваріанта биквадратичной формы: $Ax'^4 + 4\ Bx'^3\ y' + 6\ Cx'^2\ y'^2 + 4\ B'\ x'\ y'^3 + A'\ y'^4$.

Инваріанты g_2 и g_3 играютъ важную роль въ теоріи функцій Вейерштрасса, такъ какъ коеффиціенты разложенія функцій σu и pu выражаются цѣлыми функціями отъ $g_2\ g_3$ [14]).

Изученіе функцій со многими неизвѣстными, аналогичныхъ съ функціей σu, составляетъ также одно изъ отличій теоріи абелевыхъ функцій, данной Вейерштрассомъ [15]), отъ теорій Якоби, Гопеля, Розенгайна и Риманна [16]).

Еще въ 1846 г. въ одномъ изъ своихъ первыхъ мемуаровъ «Ueber die Theorie der analytischen Facultäten» (Crelle's J. Bd. 51) Вейерштрассъ упоминаетъ о найденныхъ имъ точныхъ принципахъ интегрированія строками дифференціальныхъ уравненій. Нѣсколько позже въ 1863 году въ своемъ курсѣ теоріи Абелевыхъ функцій Вейерштрассъ изложилъ основанія теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, и эти лекціи имѣли, какъ указываетъ пр. Фуксъ, вліяніе на фундаментальную въ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій работу Фукса [17]).

Наконецъ, въ своихъ лекціяхъ по варіаціонному исчисленію, изданіе которыхъ предпринято пр. Шварцемъ, Вейерштрассъ вмѣсто обычнаго неопредѣленнаго по своей общности понятія о варіаціи вводитъ лишь такія варіаціи, которыя изображаются степенными строками т. е. вводитъ условіе непрерывности не только для варіируемыхъ функцій, но и для ихъ производныхъ. Изучая съ этой точки зрѣнія варіаціонное исчисленіе, Вейерштрассъ показалъ между прочимъ, что обыкновенные критеріи, данные Якоби для существованія максимума или минимума интеграла, недостаточны, если выше приведенное условіе не выполнено, т. е. если величина интеграла, взятаго по кривой, опредѣляемой равенствомъ нулю первой варіаціи, сравнивается съ величинами интеграловъ не только по кривымъ, идущимъ почти параллельно первой, но и по какимъ угодно зигзагообразнымъ кривымъ [18]).

Такимъ образомъ важнѣйшіе результаты, открытые проф. Вейерштрассомъ въ Анализѣ, находятся въ самой тѣсной связи съ его теоріею аналитическихъ функцій.

Но, какъ замѣчательный аналистъ, проф. Вейерштрассъ далъ рѣшеніе и многихъ другихъ вопросовъ, по своей трудности останавливавшихъ другихъ знаменитыхъ математиковъ; такъ ему принадлежитъ изящное рѣшеніе задачи о геодезической линіи на трехъосномъ элипсоидѣ [19]), новые методы для рѣшенія вопроса о минимальныхъ поверхностяхъ [20]), изслѣдованія объ интегрируемости въ конечномъ видѣ ирраціональныхъ дифференціаловъ [21]) и о приведеніи абелевыхъ интеграловъ къ эллиптическимъ [22]), о совокупномъ приведеніи къ каноническому виду (суммѣ квадратовъ) двухъ квадратичныхъ формъ [23]), о комплексныхъ числахъ, составленныхъ изъ n единицъ [24]), о модулярной функціи [25]), объ интегрированіи линейныхъ уравненій съ частными производными [26]) и мног. др. [27]).

Къ сожалѣнію я не имѣю времени остановиться подробно на этихъ замѣчательныхъ изслѣдованіяхъ пр. Вейерштрасса, не буду также говорить о плодотворной педагогической дѣятельности знаменитаго ученаго въ Берлинскомъ университетѣ, выразившейся въ созданіи замѣчательной школы математиковъ (Фуксъ, Миттагъ-Леффлеръ, Шварцъ, Кенигсбергеръ, и мног. друг.). Ученые, принадлежащіе къ школѣ Вейерштрасса, занимаютъ каѳедры преимущественно въ Германіи: но вліяніе Вейерштрасса весьма сильно отразилось и на работахъ талантливыхъ молодыхъ математиковъ Франціи, учениковъ Эрмита (Пуанкаре, Дарбу, Пикаръ, Аппель, Гурса и др.).

Главная цѣль моего сообщенія заключалась въ выясненіи роли, которую играетъ проф. Вейерштрассъ въ современномъ движеніи Чистой Математики. Въ эпоху, которая ознаменовалась громадными успѣхами, сдѣланными Анализомъ благодаря введенію комплексныхъ чиселъ, проф. Вейерштрассъ далъ ясныя и элементарныя основанія теоріи функцій отъ комплексныхъ чиселъ и открылъ совершенно новыя области изслѣдованій въ этой теоріи.

Чистая математика, наравнѣ съ философіею, можетъ быть уподоблена маятнику, колеблющемуся между крайнимъ идеализмомъ и крайнимъ эмпиризмомъ, между стремленіемъ къ обобщеніямъ и отвлеченіямъ, къ систематической обработкѣ — съ одной стороны—и наклонностью къ рѣшенію вопросовъ специальныхъ и конкретныхъ съ другой стороны. Настоящая эпоха въ развитіи Чистой Математики, связанная съ великимъ именемъ Гаусса, характеризируемая развитіемъ теоріи функцій отъ комплексной перемѣнной, является несомнѣнно эпохою идеалистическою; только отдѣльные ученые и отдѣльныя школы противостоятъ общему стремленію работъ въ этомъ направленіи. Но настоящей эпохѣ предшествовала другая эпоха, эпоха Эйлера и Лагранжа, не гонявшаяся за обобщеніями, но положившая за то основаніе громадному количеству новыхъ математическихъ методовъ, новыхъ путей къ рѣшенію тѣхъ реальныхъ и конкретныхъ задачъ, которыя даются наукою о веществѣ и его движеніяхъ. Подобная-же эпоха можетъ быть смѣнитъ скоро и настоящую; на настоящее положеніе въ Анализѣ ученія о комплексныхъ числахъ будутъ смотрѣть, какъ на излишнее увлеченіе, но важные результаты, достигнутые введеніемъ комплексныхъ чиселъ въ Анализъ, останутся и наша эпоха будетъ по справедливости занимать почетное мѣсто въ Исторіи математики.

Кажется, Гёте сказалъ

«Wer hat gelebt für seine Zeit,
Der hat gelebt für alle Zeiten».

Великій поэтъ хотѣлъ выразить въ этихъ словахъ ту мысль, что тотъ не можетъ не считаться истинно-полезнымъ дѣятелемъ для всѣхъ будущихъ поколѣній человѣчества, кто, имѣя передъ собою всегда путеводною звѣздою вѣчные идеалы, стремится осуществить только осуществимое въ данную эпоху, стремится прежде всего рѣшить тѣ задачи, которыя ставятся жизнію для даннаго времени. Справедливое относительно жизни справедливо и для науки. Въ этомъ смыслѣ и пр. Вейерштрассъ, котораго важную роль систематика въ современномъ Анализѣ я старался представить, который развилъ, упрочилъ и уяснилъ тѣ идеи, которыя Гауссъ и Коши положили въ основаніе современнаго направленія Чистой Математики, заслуживаетъ вполнѣ того глубокаго и единодушнаго сочувствія, съ которымъ откликнулись математики всего свѣта на призывъ достойнымъ образомъ отпраздновать день семидесятой годовщины его рожденія, и я не сомнѣваюсь, что такое-же теплое сочувствіе встрѣтитъ юбилей знаменитаго ученаго и въ нашей средѣ.

ПРИМѢЧАНІЯ.

9) Weierstrass. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen (Abhandlungen der Berl. Akad. der Wissenschaften. 1876. J.).

— Zur Functionenlehre (Monatsber. Berl. Akad. 1880).

— Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler (ibid.).

См. также Hermite. Cours professé pendant le semestre 1881—1882 et redigé par Andoyer.

Подробная литература вопроса приведена въ монографіи „Аналитическія выраженія однозначныхъ функцій" Б. Букрѣева (Кіевъ 1884), къ которой мы и отсылаемъ читателя. Послѣ ея напечатанія появился важный мемуаръ Миттагъ-Леффлера: «Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante» (Acta mathematica. Vol. 4. 1884 p. 1).

10) См. Paul Dubois—Reymond. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen (Journ. de Borchardt. B. 79 p. 21).

11) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (Werke p. 243 ff.).

12) Untersuchungen über die unendlich oft oscillirienden und unstetigen Functionen. Tub. 1870.

13) См. преимущественно Cantor. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. 1883. См. также собраніе его мемуаровъ въ Acta mathematica. Bd. 2.

14) Формулы и теоремы теоріи эллиптическихъ функцій по Вейерштрассу собраны безъ доказательствъ въ брошюрѣ: Formeln und Lehrsatze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von Schwarz. Göttingen. 1881—1885.

См. также Anders Donner. Om uttrycken för entydiga elliptiska funktioner. Akademisk afhändling. Helsingfors. 1879.

Weierstrass. Zur Theorie der elliptischen Functionen (Berlin. Monatsberichten. 1882).

15) Вейерштрассомъ опубликованы слѣдующіе мемуары, относящіеся къ теоріи Абелевыхъ функцій:

a) Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale. Braunsberg. 1848.

b) Theorie der Abel'schen Funktionen. Crelle's Journ B. 52.

d) Bemerkungen über die Integration per hyperelliptischen Differentialgleichungen (Berl. Monntsber. 1862).

e) Ueber die allgemeinsten eindeutigen und 2-nfach periodischen Functionen von n Veränderlichen (Berl. Monatsber. 1869).

f) Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen (Berl. Monatsber. 1876).

h) Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Satze. Berlin. 1881.

g) Zur Theorie der Jacobi'schen Functionen von mehreren Veränderlichen (Berlin. Monatsber. 1882).

См. также слѣдующія работы учениковъ Вейерштрасса: Koenigsberger. Ueber die Transformation der Abelschen Functionen erster Ordnung. Crelle's Journ. Bd. 64.

Wiltheiss: Die Umkehrung einer Gruppe von Systemen allgemeiner hyperelliptischer Differentialgleichungen. Berlin. 1879.

[16]) См. К. А. Поссе. О функціяхъ ϑ отъ двухъ аргументовъ и о задачѣ Якоби. Петербургъ. 1882.

[17]) Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. (Crelle's Journ. Bd. 66 и 68).

См. также Tannery. Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables (Thèse. 1874).

Подробная библіографія работъ по новой теоріи дифференціальныхъ линейныхъ уравненій, заключающая до 300 мемуаровъ, опубликована въ American Journal of Mathematics. Vol. VII. См. Nixon and Fields. Bibliography of Linear Differential Equations p. 353—363.

Принципы Вейерштрасса были примѣнены и къ уравненіямъ съ частными производными. См. S. Kowalevski. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Borchardt Journ. Bd. 80.

[18]) См. въ недавно появившейся статьѣ Шеффера: „Die Maxima und Minima der einfachen Integrale zwischen festen Grenzen“ (Mathematische Annalen Bd. XXV. S. 894) примѣненіе взглядовъ проф. Вейерштрасса къ задачѣ Ньютона о minimum'ѣ интеграла $\int y \left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds$, бывшей въ послѣднее время предметомъ работъ г. Старкова.

[19]) Ueber die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid. (Berlin. Monatsber. 1861).

См. также Schwering. De linea brevissima in elliptica paraboloide sita. Berl. 1869.

[20]) Untersuchungen über die Flächen, in denen die mittlere Krümmung überall gleich Null ist (Berl. Monatsber. 1866).

Ueber eine besondere Gattung von Minimalflächen (Berlin. Monatsber. 1867).

См. также Schwarz. Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Berlin. 1871.

[21]) Ueber die Integration algebraischer Differentiale vermittelst Logarithmen. (Berl. Monatsber. 1857).

[22]) Sophie Kowalevski Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3-ten Ranges auf elliptische Integrale (Acta mathematica Vol. 4. p. 393).

[23]) Ueber ein die homogenen Functionen 2-en Grades betreffendes Theorem nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen (Berl. Monatsber. 1858).

Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen (ibid. 1868).

[24]) Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen nebst einer Bemerkung von H. A. Schwarz. Götting. (Nachrichten. 1884. 395—419).

См. также Königsberger. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. 1874 p. 10.

Коссакъ. Основы ариѳметики; переводъ съ нѣмецкаго И. Красовскаго. Кіевъ. 1884

25) Sur la théorie des fonctions elliptiques (Acta mathematica Vol, 6. p. 169; Monatsber. Berlin. Akademie. 1883. 95—105, 163—173, 621—647).

26) См. S. Kowalevski. Ueber die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln. (Acta methemetica. Vol. 6. p. 254).

27) См. Ueber eine Gattung real periodischer Functionen (Berl. Monatsb. 1866).

Bemerkungen zu einer von Steiner entdeckten Fläche (Berl. Monatsber. 1863).

ДѢЯТЕЛЬНОСТЬ РУССКИХЪ УЧЕНЫХЪ ОБЩЕСТВЪ ВЪ ОТНОШЕНІИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ ВЪ 1884 ГОДУ.

Московское Математическое Общество.

(*Окончаніе*).

Рулеттами, квадратура которыхъ, какъ показываетъ приведенное выше заглавіе, составляетъ предметъ статьи проф. *Орлова*, называются траекторіи точекъ неизмѣняемой фигуры, движущейся на плоскости по какому-нибудь опредѣленному закону. О содержаніи своей статьи, а также и о работахъ, предшествовавшихъ ей, авторъ сообщаетъ слѣдующія свѣдѣнія. «Первоначальныя изслѣдованія вопроса о квадратурѣ рулеттъ принадлежатъ Штейнеру; въ этихъ изслѣдованіяхъ движеніе фигуры на плоскости опредѣляется полоидой и серполоидой *) и разсматриваются площади, которыя заключаются между дугою полоиды, соотвѣтствующею дугою рулетты и крайними ея нормалями. Предложенія Штейнера, относящіяся къ опредѣленію такихъ площадей, выводятся путемъ хотя и элементарныхъ, но довольно сложныхъ геометрическихъ построеній. Въ позднѣйшихъ изслѣдованіяхъ того же вопроса Гольдича, Вилліамсона, Людездорфа, Кемпе и Лигина разсматриваются площади, описываемыя радіусами —

*) Движеніе фигуры можетъ быть разсматриваемо во всякое мгновеніе, какъ вращеніе около нѣкотораго центра на неподвижной плоскости, называемаго поэтому *мгновеннымъ центромъ* вращенія. Геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ или полюсовъ называется *полоидой*. *Серполоидой* называется кривая, которая представляетъ геометрическое мѣсто точекъ фигуры, послѣдовательно совпадающихъ съ мгновенными центрами вращенія.

векторами различныхъ точекъ движущейся фигуры, при чемъ движеніе фигуры должно быть опредѣлено какими-нибудь двумя условіями. Предложенія, сюда относящіяся, были получены въ разное время и разными путями. Въ предлагаемой статьѣ интересныя, но мало извѣстныя въ нашей литературѣ, предложенія относительно квадратуры рулеттъ выводятся въ болѣе общемъ видѣ однимъ аналитическимъ методомъ, въ сущности представляющимъ развитіе простаго и изящнаго метода, указаннаго Дарбу» (стр. 463—464).

Послѣ необходимыхъ предварительныхъ замѣчаній авторъ разсматриваетъ, во-первыхъ, случай, когда движеніе фигуры на плоскости опредѣляется данными полоидой и серполоидой, и, во-вторыхъ, случай, когда движеніе фигуры на плоскости опредѣляется какими нибудь двумя условіями. Въ заключительномъ отдѣлѣ онъ излагаетъ случаи, когда кромѣ S_0 площади рулетты одной изъ точекъ движущейся фигуры непосредственно опредѣляются условіями движенія фигуры еще и площадь S_1 другой точки фигуры одна или вмѣстѣ съ площадью S_2 третьей точки фигуры. Въ заключеніе разсмотрѣно нѣсколько примѣровъ, въ которыхъ опредѣляются площади, описываемыя радіусами-векторами различныхъ точекъ фигуры.

Разсмотрѣнная статья г. Орлова была читана въ засѣданіи Общества 15 ноября 1883 года. Еще въ болѣе отдаленное время происходило чтеніе упомянутой ранѣе статьи г. *Назимова*, по Теоріи Чиселъ, именно 20 января 1881 года. На этой статьѣ мы останавливаться не будемъ, такъ какъ она представляетъ небольшую замѣтку, предметъ и содержаніе которой выражаются съ достаточной полнотой ея заглавіемъ, приведеннымъ выше.

Также небольшую замѣтку представляетъ и статья проф. *Жуковскаго*, заглавіе которой мы выписали выше и которая была читана въ засѣданіи Общества 18 сентября 1884 года. Предметъ этой статьи состоитъ въ упрощеніи предложеннаго Кирхгофомъ весьма простаго вывода основныхъ формулъ теоріи упругости (Vorlesungen ueber mathematische Physik. Eilfte Vorlesung. § 7). Возможность этого упрощенія доставляется связью между функціями, частныя производныя отъ которыхъ по координатамъ даютъ силы упругости и относительныя перемѣщенія точекъ тѣла.

Не принадлежитъ къ числу новыхъ статей и упомянутая ранѣе статья г. *Минина*, читанная въ засѣданіи Общества 16 ноября 1882 года. Предметъ ея состоитъ въ сообщеніи формулъ наименьшихъ чиселъ, удовлетворяющихъ при нѣкоторыхъ частныхъ видахъ числа m уравненію $\rho(N)=m$, гдѣ m—данное число, а ρ—характеристика числовой функціи, выражающей число дѣлителей N. Упомянутыми частными видами являются слѣдующіе: 1) $m=p$, 2) $m=p^2$, 3) $m=p^3$, 4) $m=p^4$, 5) $m=p^5$, 6) $m=p^6$, 7) $m=p^7$, 8) $m=p.\ q$, 9) $m=p^2.\ q$, 10) $m=p.\ q.\ \nu$, гдѣ p, q, ν—простыя числа. «Такъ какъ пріемъ, помощью котораго получены формулы для этихъ частныхъ видовъ числа m», говоритъ авторъ, «однобразенъ, то я полагаю достаточнымъ остановиться на выводѣ формулъ для какого-нибудь одного изъ указанныхъ случаевъ, для остальныхъ же привести только полученныя мною формулы» (стр. 633). Этимъ случаемъ онъ выбираетъ значеніе $m=p^5$, формулы же остальныхъ соединяетъ въ таблицу.

Предметами первой изъ двухъ названныхъ выше статей г. *Мясоѣдова* служатъ доказательство и подтвержденіе примѣрами слѣдующихъ двухъ теоремъ Высшей Алгебры.

«*Теорема I.* Если

$$
\begin{aligned}
V_0 &= x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m \\
V_1 &= x^{m-1} + p_1 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} \\
V_2 &= x^{m-2} + \ldots + p_{m-3}x + p_{m-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
V_{m-2} &= x^2 + p_1 x + p_2 \\
V_{m-1} &= x + p_1 \\
V_m &= 1
\end{aligned}
$$

и если $x=\alpha$ дѣлаетъ всѣ функціи ряда V_0, V_1, V_2, . . . , V_{m-2}, V_{m-1}, V_m положительными, то α есть высшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія $V_0=0$» (стр. 616).

«*Теорема II.* Если подстановимъ въ рядъ V_0, V_1, . . . , V_{m-2}, V_{m-1}, V_m вмѣсто x послѣдовательно два положительныхъ числа α и β, то число положительныхъ корней уравненія $V_0=0$, заключающихся между α и β, на четное число больше или меньше разности числа перемѣнъ, представляемыхъ членами ряда при той или другой подстановкѣ» (стр. 620).

Первая изъ этихъ теоремъ принадлежитъ Лагерру. Нашъ авторъ далъ только «болѣе простое доказательство, основанное на соображеніяхъ, не имѣющихъ ничего общаго съ тѣми, которыми руководился Лагерръ» (стр. 616). Авторъ читалъ свою статью въ двухъ засѣданіяхъ Общества, именно 15 ноября и 20 декабря 1883 года.

Вторая изъ названныхъ выше статей того же автора была читана въ засѣданіи Общества 21 февраля 1884 года. Составляющіе предметъ этой статьи «непосредственные способы опредѣленія низшаго предѣла положительныхъ корней и предѣловъ отрицательныхъ корней алгебраическаго уравненія» состоятъ въ слѣдующемъ.

Низшій предѣлъ положительныхъ корней уравненія $v_0 = 0$ есть наибольшее положительное число, при которомъ еще не имѣетъ перемѣнъ знаковъ рядъ

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m \\ v_1 = \qquad p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{m-1} = \qquad\qquad\qquad p_{m-1}x + p_m \\ v_m = \qquad\qquad\qquad\qquad p_m \end{array}\right\} \quad (5)$$

«Для нахожденія этого предѣла», говоритъ авторъ, «слѣдуетъ составить для даннаго случая рядъ (5) и подставлять въ функціи этого ряда послѣдовательно члены возрастающей ариѳметической прогрессіи $\div\, h, 2h, 3h, \ldots$ до тѣхъ поръ пока не появятся перемѣны и, если это имѣетъ мѣсто при $x = nh$, то $(n-1)h$ можно принять за низшій предѣлъ. Если низшій предѣлъ менѣе единицы, то удобнѣе подставлять въ рядъ (5) члены гармоническаго ряда $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ до тѣхъ поръ, пока не скроются перемѣны» (стр. 25).

«Высшій предѣлъ отрицательныхъ корней уравненія есть наименьшее отрицательное число, при которомъ рядъ (5) составленный для первой части этого уравненія еще не имѣетъ перемѣнъ знаковъ. Для нахожденія этого предѣла слѣдуетъ составить для даннаго случая рядъ (5) и подставлять въ функціи этого ряда послѣдовательно члены убывающей ариѳметической прогрессіи $\div\, -h, -2h, -3h, \ldots$ до тѣхъ поръ, пока не появятся перемѣны и, если это имѣетъ мѣсто при $x = -nh$, то $(1-n)h$ есть искомый предѣлъ» (стр. 31—32).

«Низшій предѣлъ отрицательныхъ корней уравненія $W_0 = 0$ есть наибольшее отрицательное число (численно наименьшее), для котораго не имѣютъ перемѣнъ функціи слѣдующаго ряда

$$\begin{array}{l} W_0 = x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x + p_m \\ W_1 = x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1}x \\ W_2 = x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-2}x^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$$W_{m-1} = x^m + p_1 x^{m-1}$$
$$W_m = x^m\text{» (стр. 38)}.$$

Справедливость сдѣланныхъ выводовъ подтверждается авторомъ также и примѣрами.

Такъ какъ изъ замѣчательной работы г. *Некрасова* о «Рядѣ Лагранжа» въ 1884 году (20 ноября) была сообщена только одна первая глава, то отчетъ о ней мы откладываемъ до будущаго года. Теперь-же ограничимся второю изъ названныхъ выше статей тогоже автора. Предметъ этой статьи состоитъ въ подробномъ разсмотрѣніи предложеннаго Зейделемъ способа рѣшенія черезъ послѣдовательныя приближенія уравненій, къ которымъ приводитъ способъ наименьшихъ квадратовъ. (Aus den Abhandlungén der k. bayer. Academie der W. II. Cl. XI. Bd. III. Abth. 1874. München). Авторъ даетъ въ началѣ своей статьи слѣдующее изображеніе какъ современнаго состоянія занимающаго его вопроса такъ и главныхъ добытыхъ имъ результатовъ. «Астрономія и геодезія представляютъ такіе случаи, когда приходится опредѣлять по способу наименьшихъ квадратовъ большое число неизвѣстныхъ. Въ этихъ случаяхъ рѣшеніе нормальной системы уравненій, служащей для опредѣленія неизвѣстныхъ, представляетъ громадныя трудности. Такъ нормальная система содержитъ иногда до 70 неизвѣстныхъ. Детерминанты, посредствомъ которыхъ выражаются эти неизвѣстныя, содержа по 70 строкъ, будутъ состоять изъ неимовѣрно большаго числа членовъ, выражающагося произведеніемъ 1 . 2 . 3 . . . 70. Вычисленіе величины такого детерминанта вообще немыслимо по крайней трудности. Чтобы обойти эти трудности, астрономы прибѣгаютъ къ приближенному вычисленію неизвѣстныхъ. Изъ способовъ этого рода наиудобнѣйшимъ считается способъ Зейделя, состоящій въ последовательныхъ приближеніяхъ къ искомымъ рѣшеніямъ... Просматривая способъ Зейделя, я замѣтилъ, что въ мемуарѣ своемъ Зейдель не касается весьма важнаго въ практическомъ отношеніи вопроса о быстротѣ, съ которою по способу Зейделя можно приближаться къ искомымъ рѣшеніямъ. Для пополненія этого недостатка я покажу, что при благопріятныхъ обстоятельствахъ способъ Зейделя довольно быстро приближаетъ къ искомымъ рѣшеніямъ, но весьма часто могутъ представляться такіе случаи, когда приближеніе это будетъ медленное, и даже безконечно медленное» (стр. 189 — 190). Содержаніе остальныхъ частей статьи можетъ быть представлено въ видѣ слѣдующаго краткаго перечня. Основанія способа Зейделя. Выраженія погрѣшностей приближенныхъ величинъ, получаемыхъ по способу Зейделя. Быстрота, съ которою способъ Зейделя приближаетъ къ искомымъ рѣшеніямъ. Быстрота приближенія по способу Зейделя при наивыгоднѣйшемъ порядкѣ вычисленія неизвѣстныхъ.

Математическое Общество при Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ.

Харьковское Математическое Общество основано въ 1879 году. Главную часть его дѣятельности, какъ выражается Отчетъ за 1883—84 академическій годъ (См. Сообщенія и протоколы засѣданій Математическаго Общества при И. Х. Университетѣ. 1884 года. III. Стр. 182—184), составляютъ засѣданія, посвящаемыя выслушанію ученыхъ сообщеній членовъ общества или постороннихъ лицъ, а также обсужденію различныхъ научныхъ и педагогическихъ вопросовъ, задачъ и т. д. Существеннымъ дополненіемъ къ этой главной части дѣятельности Общества, по выраженію того-же Отчета, является изданіе «Сообщеній и протоколовъ засѣданій», въ которыхъ печатаются тѣ изъ сдѣланныхъ сообщеній, которыя были доставлены ихъ авторами распорядительному комитету въ рукописяхъ. Это изданіе, впрочемъ, не самостоятельное, такъ какъ печатается собственно въ Ученыхъ Запискахъ Университета, отъ которыхъ уже и поступаетъ въ распоряженіе Общества въ видѣ отдѣльныхъ оттисковъ. Въ теченіе 5-лѣтняго существованія Общества оно вышло въ свѣтъ въ количествѣ 12 выпусковъ въ размѣрѣ отъ двухъ до пяти листовъ въ каждомъ. Разсматриваемое изданіе имѣетъ для Общества весьма важное значеніе, такъ какъ, по выраженію Отчета, «всего болѣе, конечно, содѣйствуетъ его цѣлямъ». «Для лицъ, участвующихъ въ трудахъ Общества, оно даетъ», говоритъ Отчетъ далѣе, «средство легко и скоро дѣлать извѣстными ихъ произведенія; для лицъ же, интересующихся занятіями Общества, и для однородныхъ съ нимъ учрежденій оно представляетъ возможность знакомиться ближайшимъ образомъ съ главными результатами этихъ занятій» (стр. 182). Съ цѣлью пользованія выгодами такихъ условій въ возможно бо́льшей мѣрѣ комитетъ Общества вступилъ въ сношенія со многими другими Учеными Обществами, къ числу которыхъ принадлежатъ и всѣ существующія въ Россіи съ нимъ однородныя. Эти сношенія выражаются главнымъ образомъ въ обмѣнѣ изданіями.

Къ началу послѣдняго отчетнаго 1883—84 года въ Обществѣ состояло 30 членовъ, къ которымъ присоединился въ теченіе этого года еще одинъ, избранный въ засѣданіи 18 ноября 1883 года. Въ 1884 году были выбраны три новыхъ члена и одинъ изъ прежнихъ умеръ (В. Я. Стояновъ, преподаватель въ Харьковѣ).

Въ теченіе 1884 года Общество имѣло 9 засѣданій именно 20 января, 24 февраля, 16 и 30 марта, 1 и 19 октября, 2 и 30 ноября, 15 декабря. Число членовъ, присутствовавшихъ въ этихъ засѣданіяхъ, колебалось обыкновенно между 5 и 9. Изъ числа—31—членовъ Общества, состоявшихъ въ немъ къ началу 1884 года, посѣщали засѣданія Общества въ этомъ году только 14. Состоитъ-ли причина этого явленія въ ненахожденіи въ Харьковѣ большинства членовъ Общества или въ чемъ нибудь другомъ—мы не знаемъ.

Денежныя средства Общества, повидимому, не имѣютъ постоянныхъ источниковъ. Что-же касается до текущихъ расходовъ, то они покрываются добровольными взносами членовъ Общества по предлагаемымъ время отъ времени подписнымъ листамъ. Въ 1884 году таковой былъ предложенъ, наприм., въ засѣданіи 1-го октября. Постановленіемъ Совѣта Харьковскаго Университета отъ 31 марта 1883 года, отдѣлившимъ изданіе «Сообщеній и протоколовъ» Общества отъ издаваемыхъ Университетомъ Ученыхъ Записокъ, Общество будетъ получать для своего изданія субсидію отъ Университета.

Администрацію Общества составляли въ 1884 году слѣдующія лица. Въ началѣ года проф. Е. И. *Бейеръ* — предсѣдатель, проф. Д. М. *Деларю* и проф. К. А. *Андреевъ* — товарищи предсѣдателя, проф. М. А. *Тихомандрицкій*—секретарь. Въ концѣ года по новому избранію (въ засѣданіи 1 октября): проф. К. А. *Андреевъ* — предсѣдатель, проф. М. Ѳ. *Ковальскій* и проф. Д. М. *Деларю*—товарищи предсѣдателя, преп. А. П. *Грузинцевъ*—секретарь.

Въ упомянутыхъ 9 засѣданіяхъ Общества, происходившихъ въ 1884 году, были сдѣланы слѣдующія сообщенія. 20 января. г. *Алексѣевскимъ* «Замѣтка объ уравненіи вида:

$$y^{(n)} + \frac{\alpha}{x} y^{(n-1)} = y.$$

г. *Флоровымъ* «Объ уравненіи вида: $x^2u'' + (2x+1)u' + nu = 0$». г. *Андреевымъ* доложена статья г. *Маркова* «Объ одномъ неравенствѣ Чебышева». 24 февраля. г. *Грузинцевымъ* «Опытъ изученія стаціонарнаго состоянія упругой изотропной среды». г. *Андреевымъ*

«Замѣтка, относящаяся къ вопросу о многоугольникахъ Понселе». 16 марта. г. *Алексѣевскимъ* «Объ интегрированіи уравненія

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{\alpha}{z}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \beta y = 0».$$

г. *Тихомандрицкимъ* доложена замѣтка г. *Новикова* «О значеніи, какое можно придать въ динамикѣ второй варіаціи опредѣленныхъ интеграловъ Гамильтона и наименьшаго дѣйствія». 30 марта. г. *Андреевымъ* доложена статья г. *Пташицкаго* «О разложеніи въ рядъ Маклорена функцій со многими перемѣнными». г. *Флоровымъ* «Объ интегрированіи уравненія

$$\sum_{i=o}^{k} a_i x^{k-i} y^{n-i} = x^{m+k} y».$$

г. *Грузинцевымъ* «Замѣтка къ электромагнитной теоріи поляризаціи свѣта». г. *Андреевымъ* доложена замѣтка г. *Маркова* «Опредѣленіе нѣкоторой функціи по условію наименѣе отклоняться отъ нуля». 19 октября. г. *Флоровымъ* «Къ интегрированію одного класса линейныхъ дифференціальныхъ уравненій». г. *Алексѣевскимъ* «Объ интегрированіи уравненій:

$$\frac{d^n y}{dz^n} + \frac{a_1}{z}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \frac{a_2}{z^2}\frac{d^{n-2}y}{dz^{n-2}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}\frac{dy}{dz} + a_n z^m y = 0».$$

2 ноября. г. *Ковальскимъ* доложено содержаніе работы г. *Тихомандрицкаго* «Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ». г. *Грузинцевымъ* замѣтка «О приложеніяхъ закона сохраненія энергіи». 30 ноября. г. *Андреевымъ* «О разложеніи функцій въ рядъ по функціямъ, подобнымъ функціямъ Лежандра». г. *Грузинцевымъ* «Относящіяся къ ученію о теплотѣ замѣчанія о нѣкоторыхъ, хотя и не новыхъ, но мало распространенныхъ способахъ демонстрированія физическихъ явленій». 15 декабря. г. *Флоровымъ* доложено содержаніе статьи г. *Торопова* «Интегрированіе нѣкоторыхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій». г. *Грузинцевымъ* въ дополненіе къ сдѣланному имъ въ предыдущемъ засѣданіи сообщенію были показаны физическіе опыты съ упомянутыми тогда приборами. Кромѣ того въ засѣданіи 1 октября (годичное собраніе) былъ прочитанъ Отчетъ о дѣятельности Общества въ 1883—84 академическомъ году.

Въ теченіе 1884 года въ Обществѣ были предложены для рѣшенія слѣдующія три задачи. Въ засѣданіи 24 февраля г. предсѣдательствующимъ (проф. Андреевъ) отъ имени г. *Аршаулова* «Данъ многоугольникъ какого угодно числа сторонъ. Соединяя средины послѣдовательныхъ сторонъ, получимъ новый многоугольникъ. Тѣмъ-же построеніемъ переходимъ отъ найденнаго опять къ новому и т. д. Требуется найти предѣлъ, къ которому приводитъ это построеніе при безконечномъ его повтореніи». Въ засѣданіи 1 октября отъ имени г. *Новикова* задача на отысканіе дифференціальнаго уравненія траекторіи движущейся точки по началу наименьшаго дѣйствія. Въ засѣданіи 15 декабря г. *Ковальскимъ* «Требуется доказать равенство

$$\frac{(-1)^i}{(2i+1)(i)!}=\sum_{k=o}^{k=i}\frac{(-1)^k(i-k)!\,2^{2i-2k}}{(2i-2k+1)!\,k!},$$

гдѣ i число цѣлое и положительное, а $(n)!=1.2.3...n$». Рѣшеніе первой изъ этихъ двухъ задачъ было сообщено въ слѣдующемъ-же засѣданіи Общества 16 марта г. *Пильчиковымъ*. Кромѣ того были сообщены рѣшенія другой задачи, предложенной г. Аршауловымъ въ предыдущемъ году, въ засѣданіи 20 января гг. *Косенко*, *Флоровымъ* и *Ковальскимъ* и въ засѣданіи 24 февраля студентомъ г. *Гусаковскимъ*.

Перейдемъ теперь къ отчету о содержаніи тѣхъ 15 сообщеній, которыя были напечатаны въ 1884 году въ «Сообщеніяхъ и протоколахъ засѣданій» Общества.

Три сообщенія принадлежатъ г. *Алексѣевскому*. Первое изъ нихъ, заглавіе котораго мы выписали выше (см. засѣд. 16 марта), весьма обширно. Оно занимаетъ 24 стр. (стр. 41—64). Искомымъ интеграломъ разсматриваемаго уравненія или точнѣе уравненія

$$y^{(n)}+\frac{\alpha}{x}y^{(n-1)}+y=0,$$

къ которому первое можетъ быть приведено подстановкой

$$z=\frac{x}{\sqrt[n]{\beta}},$$

оказывается выраженіе

$$y=\sum_{i=1}^{i=n}C_i\frac{1}{x}\int_0^\infty \xi^{\frac{\alpha}{n}-2}\, e^{r_i x(1\pm\xi)^{\frac{1}{n}}}\,.\,d\xi$$

Въ заключеніе статьи авторъ указываетъ на примѣнимость употребленнаго имъ пріема «къ разысканію случаевъ интегрируемости въ конечной формѣ многихъ уравненій». Изъ нихъ онъ указываетъ, впрочемъ, только одно, именно

$$y^{(n)} + \frac{\alpha}{x}\, y^{(n-1)} + \beta x^{\mu} \,.\, y = 0\,,$$

гдѣ α, β и μ—постоянныя. Второе сообщеніе того-же автора, озаглавленное «Замѣтка объ обобщеніи уравненія Рикатти» (стр. 80—82) занимается разрѣшеніемъ слѣдующей задачи. «Зная, при какихъ условіяхъ уравненіе Рикатти интегрируется конечнымъ числомъ квадратуръ, найти общее уравненіе вида

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qy^2 + R = 0\,,$$

интеграція котораго возможна». Предметъ третьяго сообщенія автора «Объ интегрированіи одного линейнаго дифференціальнаго уравненія n-го порядка» состоитъ въ изложеніи способа интегрированія уравненія вида

$$\sum_{i=0}^{i=n-r} a_i\, z^{-i}\, \mathrm{D}^{n-i}\, y + a_n\, z^m\, y = 0. \qquad (\mathrm{I})$$

Окончательный выводъ, къ которому приходитъ авторъ, состоитъ въ слѣдующемъ. «Итакъ, для того чтобы уравненіе вида (I), коэффиціенты котораго суть данныя числа $a_1\, a_2, \ldots, a_{n-1}$, интегрировалось, необходимо, чтобы коэффиціенты эти были равны соотвѣтственнымъ коэффиціентамъ уравненія

$$z^{-s_n}\, [z^{\mu_i}\, \mathrm{D}]^n_1\, y + a_n\, z^m\, y = 0\,,$$

которые мы для ясности означимъ черезъ $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Но послѣдніе суть опредѣленныя функціи (алгебраическія) количествъ: $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, m$; слѣдовательно, приравнявъ одни коэффиціенты другимъ, мы получимъ систему изъ $(n-1)$ уравненій: $A_1 = a_1$, $A_2 = a_2, \ldots, A_{n-1} = a_{n-1}$ съ n неизвѣстными $k_1, \ldots k_{n-1}, m$. Предположимъ, что мы опредѣлили $k_1, k_2, \ldots, k_{n-2}$ и m чрезъ k_{n-1}; если при этомъ окажется, что всѣ $k_1, k_2, \ldots, k_{n-2}$ выражаются чрезъ k_{n-1} такъ, что при предположеніи k_{n-1} цѣлымъ числомъ и всѣ остальные $k_1, k_2, \ldots, k_{n-2}$ будутъ цѣлыми числами, то, при найденномъ значенiи m въ функцiи k_{n-1}, данное уравненiе съ коэффицiентами $a_1, \ldots, a_{n-1}$ интегрируется» (стр. 230—231). Авторъ заканчиваетъ свое сообщенiе разсмотрѣнiемъ частнаго случая, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$, то-есть когда разсматриваемое уравненiе принимаетъ видъ:

$$\frac{d^n y}{dz^n} + a_n z^m y = 0 ,$$

Цѣлью сообщенiя проф. *Андреева* «О многоугольникахъ Понселе», посвященная которымъ вторая статья напечатана въ 1884 году (стр. 123—142), было «найти провѣрку и, если можно, подтвержденiе мнѣнiя Шаля о примѣненiи принципа непрерывности «на одномъ предложенiи, давно уже извѣстномъ и представляющемъ во многихъ отношенiяхъ большой интересъ, именно на предложенiи о многоугольникахъ Понселе». Упоминаемое авторомъ мнѣнiе Шаля состоитъ въ утвержденiи, «что всякiй разъ какъ предложенiе доказано при помощи принципа непрерывности, оно можетъ быть доказано и притомъ не менѣе легко, и безъ его посредства, но при посредствѣ особыхъ подготовительныхъ чисто геометрическихъ предложенiй или теорiй имѣющихъ въ наукѣ чрезвычайно важное значенiе». Предложенiй о многоугольникахъ Понселе два: 1) Если всѣ вершины какого нибудь простаго многоугольника перемѣщаются по коническому сѣченiю, а всѣ стороны кромѣ одной огибаютъ другое коническое сѣченiе, то послѣдняя сторона будетъ перемѣщаться, огибая третье коническое сѣченiе, проходящее черезъ точки пересѣченiя двухъ первыхъ. 2) Если всѣ стороны какого либо простаго многоугольника перемѣщаются, огибая одно коническое сѣченiе, а всѣ вершины кромѣ одной скользятъ по другому коническому сѣченiю, то послѣдняя вершина будетъ перемѣщаться по третьему коническому сѣченiю, касающемуся общихъ касательныхъ двухъ первыхъ. «Чтобы заранѣе указать границы нашей задачи», говоритъ авторъ, «замѣтимъ, что изъ двухъ приведенныхъ выше взаимныхъ предложенiй Понселе мы будемъ говорить только о первомъ, такъ какъ все, что относительно его будетъ сказано, распространяется извѣстнымъ образомъ и на второе въ силу закона двойственности. Сверхъ того мы не будемъ разсматривать многоугольниковъ съ какимъ бы ни было числомъ сторонъ, а ограничимся на первый разъ случаемъ треугольника. Обобщенiе же предложенiя на случай произвольнаго числа сторонъ мы надѣемся изложить впослѣдствiи. Наконецъ, мы исключимъ на время изъ нашихъ разсужденій частный случай коническихъ сѣченій, имѣющихъ двойное соприкосновеніе». Установленное выписаннымъ мѣстомъ въ качествѣ временнаго ограниченіе задачи разсмотрѣніемъ однихъ треугольниковъ имѣетъ силу только для первой статьи, появившейся въ свѣтъ ранѣе. Что-же касается до напечатанной въ 1884 году второй статьи (сооб. въ зас. 24 февраля), то она занимается именно тѣмъ, что было исключено для первой, то-есть распространеніемъ изложеннаго въ этой послѣдней на многоугольники съ какимъ угодно числомъ сторонъ и разсмотрѣніемъ случая, когда два данныя коническія сѣченія, относительно которыхъ многоугольники суть вписанные и описанные, имѣютъ двойное соприкосновеніе. Послѣдній случай разсматривается въ заключительномъ § второй статьи. Въ результатѣ своихъ изслѣдованій авторъ получаетъ не только полное доказательство предложенія Понселе, но еще и нѣкоторое обобщеніе, упущенное изъ виду послѣднимъ. Дѣло въ томъ, что «первоначально ни въ самой формулировкѣ этого предложенія, ни въ доказательствѣ его вовсе не имѣлся въ виду случай несуществованія нѣкоторыхъ частей многоугольника. Поэтому въ изложеніи Понселе совершенно упускается изъ разсмотрѣнія случай, когда коническое сѣченіе S помѣщается всѣми точками внутри коническаго сѣченія T. Напротивъ того, нашъ способъ разсужденія не будетъ исключать и этого случая».

Изъ четырехъ сообщеній г. *Грузинцева* три относятся къ физикѣ и одно къ геометріи. Заглавіе геометрическаго сообщенія: «Распространеніе способа Абулъ-Джуда для опредѣленія сторонъ правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ» (стр. 37—40). Пріемъ вычисленія стороны правильнаго вписаннаго 9-угольника, данный арабскимъ геометромъ XI столѣтія, авторъ распространяетъ на случай всякаго правильнаго вписаннаго многоугольника съ нечетнымъ числомъ сторонъ.

Первое изъ физическихъ сообщеній автора (стр. 97—121) было изложено въ засѣданіи 24 февраля. Предметомъ его служитъ рѣшеніе слѣдующаго вопроса. «Дана упругая изотропная среда, частицы которой выполняютъ нѣкоторыя перемѣщенія, какъ поступательныя, такъ и вращательныя около нѣкоторыхъ осей; эти перемѣщенія даны для точекъ внутри нѣкотораго объема, составляющаго часть данной среды: найти перемѣщенія и силы, развивающіяся вслѣдствіе этихъ перемѣщеній, въ остальной части среды» (стр. 97). Относительно перемѣщеній авторъ приходитъ къ слѣдующему заключенію. «Точка M (лежащая внѣ «нѣкотораго объема») претерпѣваетъ три рода перемѣщеній: 1-ое вдоль радіуса r (разстояніе точки M отъ другой M_1, лежащей внутри нѣкотораго объема»), это перемѣщеніе измѣняется обратно пропорціонально квадрату разстоянія отъ точки M_1; 2-ое вдоль k_1 ($2\pi k_1$—величина вращательнаго перемѣщенія въ точкѣ M_1)—это перемѣщеніе измѣняется пропорціонально косинусу угла между r и k_1, и 3-ье вдоль перпендикуляра къ плоскости r и k_1 и измѣняется пропорціонально синусу того-же угла; кромѣ того оба послѣднія перемѣщенія измѣняются вмѣстѣ съ тѣмъ обратно—пропорціонально квадрату разстоянія» (стр. 109—110). Что-же касается до силъ, существующихъ въ срединѣ около точки M, то онѣ слѣдующія: «1) сила давленій (т. е. сила нормальная къ плоскому элементу въ M), одинаковыхъ по всѣмъ направленіямъ, равная $\frac{2\mu s}{r}$; 2) сила боковыхъ натяженій вдоль q перпендикулярно къ r; эта сила равна: $-\frac{3\mu q}{r}$ и 3) сила давленій спеціальнаго характера, направленная вдоль r и равная $-\frac{6\mu s}{r}$. Подобные же результаты найдены Максуэллемъ при помощи другихъ соображеній» (стр. 117). Статья заканчивается тремя примѣненіями выведенныхъ формулъ къ случаямъ, представляющимъ особый интересъ. Второе сообщеніе (стр. 215—221) автора по физикѣ было читано въ засѣданіи 2 ноября. Цѣль его—показать на примѣрахъ, что «прибѣгая къ помощи закона сохраненія энергіи, можно нерѣдко значительно сократить изслѣдованіе и придать ему болѣе простую и изящную форму» (стр. 216). Авторъ задается этой цѣлью въ виду того, что «физики, большею частью, пользуются этимъ закономъ качественно, если можно такъ выразиться, а не количественно, т. е., когда приходится дать математическую теорію какого-нибудь физическаго явленія, то не пользуются непосредственно закономъ сохраненія энергіи, а прибѣгаютъ къ тѣмъ дифференціальнымъ уравненіямъ, которыя даются теоретическою механикой для случая дѣйствія тѣхъ или другихъ силъ на матеріальную точку или на систему такихъ точекъ, т. е. пользуются диффереціальными уравненіями движенія» (стр. 215). Свое разсмотрѣніе авторъ ограничиваетъ тремя примѣрами, расположенными въ порядкѣ возрастающей трудности. Третье физическое сообщеніе автора «Къ электромагнитной теоріи поляризаціи свѣта» (стр. 233—239) было читано въ засѣданіи 30 марта. «Цѣль настоящей замѣтки», говоритъ авторъ въ самомъ началѣ своей статьи, «показать, что электромагнитная теорія явленій отраженія и преломленія свѣта на границѣ прозрачныхъ изотропныхъ срединъ столь-же несостоятельна, какъ и старая теорія Френэля и, кромѣ того, несостоятельность ея обнаруживается въ томъ же пунктѣ, въ которомъ слаба теорія Френэля» (стр. 233).

Сообщеніе г. *Маркова* изъ Петербурга, доложенное Обществу въ засѣданіи 30 марта (стр. 83—92) имѣетъ своимъ предметомъ рѣшеніе слѣдующей задачи. «Опредѣлить коэффиценты $p_1, p_2, \ldots, p_n$ цѣлой функціи отъ x

$$y = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n$$

такъ, чтобы наибольшее численное значеніе отношенія $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$, гдѣ $f(x)$ нѣкоторая данная цѣлая функція отъ x не выше какъ $2n$-ой степени

$$f(x) = (1 + a_1 x)(1 + a_2 x) \ldots (1 + a_{2n} x)$$

и x получаетъ всѣ значенія между -1 и $+1$, было какъ можно меньше» (стр. 83). Поводъ къ разсмотрѣнію этой задачи доставили слѣдующія соображенія. «Вопросъ этотъ принадлежитъ къ числу тѣхъ, для рѣшенія которыхъ мы не имѣемъ никакихъ общихъ пріемовъ, кромѣ указанныхъ П. Л. Чебышевымъ въ мемуарѣ Sur les questions de Minima etc. Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ представляетъ обобщеніе двухъ вопросовъ, рѣшенныхъ въ только что упомянутомъ мемуарѣ. На этомъ частномъ примѣрѣ я имѣю въ виду показать, что для всѣхъ разобранныхъ до сихъ поръ примѣровъ основныя разсужденія П. Л. Чебышева (Sur les questions de Minima etc. 1858. Théorème I) могутъ быть замѣнены болѣе элементарными и наглядными» (стр. 84). Далѣе, давъ требованіямъ разсматриваемаго вопроса формулировку по примѣру Чебышева, авторъ приводитъ его по примѣру Золотарева къ интегрированію нѣкотораго дифференціальнаго уравненія. *Угадавъ* затѣмъ постоянныя въ формулѣ, выражающей общее рѣшеніе послѣдняго, онъ находитъ для опредѣленія искомой функціи $z = \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ слѣдующее равенство

$$z = L \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n}),$$

гдѣ вспомогательное число φ_k опредѣляется уравненіями

$$\cos\varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1+a_k}{2}\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1+a_k x}}, \quad \sin\varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1-a_k}{2}\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+a_k x}}$$

Сообщеніе оканчивается доказательствомъ, что найденная функція z менѣе отклоняется отъ нуля, чѣмъ какая бы то ни было другая функція того же вида.

Цѣль доложеннаго въ засѣданіи 16 марта сообщенія г. *Новикова* (стр. 65 — 72) состоитъ въ томъ, чтобы «показать, что и вторая варіація интеграла (Гамильтона)

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt \ ^{*})$$

имѣетъ важное значеніе въ динамикѣ, именно по отношенію къ такъ называемой устойчивости движенія» (стр. 66). Цѣль эта достигается выводомъ слѣдующихъ двухъ теоремъ. I. «Безконечно малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго, удовлетворяющія предѣльнымъ условіямъ, приводятъ вторую варіацію Гамильтонова интеграла къ минимуму» (стр. 70). II. «Условія, которыя должны быть выполнены для того, чтобы вторая варіація Гамильтонова интеграла получила значеніе minimum, представляютъ собою уравненія устойчивости, т. е. уравненія, изъ которыхъ опредѣляются безконечно-малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго (стр. 71). Авторъ заканчиваетъ свое сообщеніе слѣдующими разсужденіями. «Эти двѣ теоремы (I) и (II) вмѣстѣ представляютъ новый второстепенный принципъ динамики, который можно назвать принципомъ второй варіаціи Гамильтонова интеграла. Принципъ второй варіаціи имѣетъ то же значеніе для устойчивости движенія, какое принципъ самого Гамильтонова интеграла имѣетъ для самого движенія. Аналогія между этими двумя принципами до-того велика, что выраженіе принципа Гамильтона переходитъ въ выраженіе принципа второй варіаціи; стоитъ только въ первомъ подставить вмѣсто интеграла его вторую варіацію и вмѣсто координатъ ихъ варіаціи. Тѣ-же самыя разсужденія и выводы, очевидно, приложимы и къ интегралу наименьшаго дѣйствія, который для большей наглядности можно представлять себѣ въ формѣ данной Якоби, т. е. исключить изъ инте-

*) Здѣсь T—живая сила системы, U—потенціалъ силъ и интеграція берется между двумя моментами.

грала время посредствомъ уравненія сохраненія энергіи. Но такъ какъ начало наименьшаго дѣйствія требуетъ сохраненія постоянной полной энергіи, то возмущенія движенія должны не измѣнять живой силы системы; такія возмущенія называются консервативными; если кромѣ возмущеній будутъ еще и смѣщенія, то совокупность смѣщеній и возмущеній не должна мѣнять полной энергіи системы. Сверхъ того, такъ какъ, представивъ интегралъ наименьшаго дѣйствія въ формѣ Якоби, мы исключаемъ время, то изслѣдуемая устойчивость будетъ относиться только къ пространству. Обѣ предыдущія теоремы сохраняютъ свою форму за исключеніемъ замѣны Гамильтонова интеграла интеграломъ наименьшаго дѣйствія» (стр. 72).

Предметъ и содержаніе сообщенія г. *Пташицкаго* изъ Петербурга (стр. 73—79; чит. въ засѣданіи 30 марта) выражаются слѣдующими вступительными словами автора. «Эрмитъ въ своемъ Cours d'analyse de l'école polytechnique на 64-й стр. указываетъ на нѣсколько разложеній функцій отъ двухъ перемѣнныхъ въ рядъ Маклорена. Указанныя Эрмитомъ разложенія тѣмъ интересны, что въ нихъ коэффиціенты приведены къ очень простому виду, между тѣмъ какъ привести ихъ къ этому виду довольно трудно, если для полученія коэффиціентовъ пользоваться общимъ пріемомъ, т. е. если вычислять ихъ съ помощью производныхъ. Въ настоящей замѣткѣ я указываю на два весьма элементарныхъ пріема, которые позволяютъ, пользуясь разложеніями функцій отъ одной перемѣнной, получить разложенія Эрмита. Съ помощью тѣхъ же пріемовъ, какъ легко видѣть, можно найти разложенія многихъ другихъ функцій отъ двухъ и болѣе перемѣнныхъ, причемъ коэффиціенты въ этихъ разложеніяхъ будутъ выражены въ простомъ видѣ, между тѣмъ какъ приведеніе ихъ къ такому виду иногда очень затруднительно, если для ихъ вычисленія пользоваться общимъ пріемомъ» (стр. 73). Изложеніе своихъ элементарныхъ пріемовъ авторъ поясняетъ многими примѣрами.

Сообщеніе г. *Тихомандрицкаго* (стр. 187—196), доложенное въ засѣданіи 2 ноября, имѣетъ предметомъ изложеніе «новаго перехода отъ эллиптическихъ интеграловъ къ Θ—функціямъ, предполагая эллиптическій интегралъ приведеннымъ къ Вейерштрассовской канонической формѣ, чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ получить и переходъ къ тѣмъ функціямъ $\sigma(u)$ изъ рода intermédiaires, которыми Вейерштрассъ замѣняетъ теперь свои прежнія $Al(u)$» (стр. 188). Свойства этого новаго перехода состоятъ въ слѣдующемъ. «Я замѣтилъ», говоритъ авторъ, «что существуетъ болѣе прямой способъ перехода отъ интеграловъ къ fonctions intermédiaires (Théorie des fonctions elliptiques, 2 éd., p. 236), причемъ не только не требуется, чтобы была доказана теорема сложенія интеграловъ 1-го и 2-го рода, но и вообще, чтобы было что-либо извѣстно изъ теоріи эллиптическихъ интеграловъ, кромѣ только того, что верхній предѣлъ эллиптическаго интеграла 1 рода есть однозначная функція значенія интеграла, принимаемаго за независимую перемѣнную, такъ какъ даже двоякая періодичность эллиптическихъ функцій—основное ихъ свойство, получается при этомъ сама собою. Что же касается до однозначности верхняго предѣла интеграла, разсматриваемаго какъ функція значенія интеграла, то это легко можетъ быть доказано» (стр. 188). Разсматриваемое сообщеніе автора было первоначально прочитано имъ въ математическомъ семинаріѣ въ Лейпцигѣ 24 іюля 1884 года.

Въ сообщеніи г. *Торопова* изъ Петербурга (стр. 199—213), доложенномъ въ засѣданіи 15 декабря, разсматриваются три вида обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго и втораго порядка, интегрирующихся въ квадратурахъ. Эти уравненія слѣдующія:

$$f(x^m y^n)ydx + xdy = 0$$
$$f(x^m y'^n)ydx + xdy = 0$$
$$y'' = f(ax + by + c)F(y')$$

Первое изъ этихъ уравненій выводится авторомъ изъ даннаго Эйлеромъ уравненія

$$\alpha\, ydx + \beta\, xdy + x^m y^n(\gamma\, ydx + \delta\, xdy) = 0$$

помощью подстановки $\gamma = \delta = 0$, $\beta = 1$. Благодаря произвольности величинъ m и n и функціи $f(x^m y^n)$, оно заключаетъ въ себѣ безчисленное множество частныхъ случаевъ. Второе уравненіе получается изъ перваго помощью примѣненія къ нему употребляемаго Эйлеромъ пріема перехода отъ линейныхъ уравненій къ уравненіямъ

$$y = xf(y') + F(y')$$

и отъ однородныхъ къ уравненіямъ $y = x^2 F\left(\frac{y'}{x}\right)$. Разсмотрѣніе каждаго изъ уравненій авторъ заканчиваетъ рѣшеніемъ 2—3 геометрическихъ задачъ или примѣровъ, приводящихся къ интегрированію соотвѣтствующаго уравненія.

Къ числу сообщеній, посвященныхъ дифференціальнымъ уравненіямъ, принадлежатъ еще два сообщенія г. *Флорова*. Первое изъ нихъ «Объ уравненіяхъ Рикатти» (стр. 5—35) занимается рѣшеніемъ задачи объ отысканіи такихъ соотношеній между количествами r, p и q въ дифференціальномъ уравненіи перваго порядка

$$\frac{dy}{dx} + ry + py^2 + q = 0,$$

при существованіи которыхъ вопросъ объ интегрированіи этого уравненія въ томъ случаѣ, когда количества r, p и q означаютъ функціи одного только x, когда уравненіе принадлежитъ къ разряду непроинтегрированныхъ, можно было бы свести къ квадратурамъ. Второе сообщеніе того-же автора, озаглавленное «Къ интегрированію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій» (стр. 143 — 177; читано въ зас. 30 марта), имѣетъ своимъ предметомъ интегрированіе уравненія

$$\sum_{i=o}^{k} \alpha_i x^{k-i} u^{n-i} = x^{m+k} u,$$

въ которомъ u^{n-i} означаетъ $(n-i)$-ую производную u по x; α_i и m — постоянныя величины, k и n цѣлыя положительныя числа, удовлетворяющія условію $k<n$. О способѣ, помощью котораго могутъ быть обнаружены случаи интегрируемости этого уравненія, авторъ говоритъ, что онъ «есть слегка видоизмѣненный способъ интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій академика Имшенецкаго» (*Имшенецкій*. Распространеніе на линейныя уравненія вообще способа Эйлера для изслѣдованія всѣхъ случаевъ интегрируемости одного частнаго вида линейныхъ уравненій втораго порядка. Спб. 1882). «Онъ состоитъ, слѣдовательно», прибавляетъ авторъ, «въ преобразованіи даннаго уравненія въ уравненія того же вида, но съ иными коэффиціентами подъ знакомъ сигмы» (стр. 143).
