MISCELLANEA.

Przyczynek do metodyki wykładu rachunku różniczkowego i całkowego w szkole średniej.

Podajemy tu w przekładzie (z pewnemi opuszczeniami) ciekawy referat T. P. Nunna, wygłoszony na posiedzeniu Kongresu Międzynarodowego matematyków w Cambridge'u p. t. The calculus as a subject of school instruction*). Unikaliśmy przytym wszelkich uwag krytycznych, pomimo że z niektóremi twierdzeniami autora trudno zgodzić się, mamy natomiast nadzieję, że czytelnicy nasi zechcą zabrać głos w tej ważnej sprawie.

Trudności, na które natrafia przeciętny uczeń przy zrozumieniu rachunku różn. i całkowego, są dwojakiego rozwoju: logiczne i techniczne. Logiczne polegają na tym, że uczeń nie może ująć zasadniczej idei przedmiotu i pojąć dokładnie rozumowań, techniczne — na tym, że uczeń nie umie przeprowadzić dowodu ze pomocą umówionych symboli.

Zacznijmy od trudności logicznych. Wszystkie one grupują się dokoła pojęcia *granicy*. Podkreślam, że sami dobrowolnie powiększamy trudności, tkwiące w naturze tego pojęcia, przez to, że z uporem godnym lepszej sprawy trwamy przy starych błędach i nieporozumieniach zarówno w podręcznikach, jak w wykładzie. Większość tych błędów ma swe źródło w doktrynie, że pochodna jest stosunkiem dwuch „nieskończenie małych“ wielkości i że całka jest sumą „nieskończenie wielu nieskończenie małych“. Wiadomo, skąd ta doktryna pochodzi — z teorji minima indivisibilia Leibniza. Różni autorowie, z których wymienię p. B. Russella, podali przekonywujący dowód, że takie „nieskończonostki“ nie istnieją. Nauczyciel, który chce uczniom swym dać jasne pojęcie granicy, powinien, moim zdaniem, unikać przy tym samego wyrazu „nieskończoność“. Dopóki wyraz ten nie zostanie wyrugowany, dopóty w głowach uczniów jakaś mgła mistyczna przesłaniać będzie jasne i proste zarysy pojęcia granicy.

W związku z poprzednim pozostaje inny błąd logiczny, który nieraz popełniamy, przykrywając go wyrazem „w końcu“ albo „ostatecznie“. Mówią np. czasem, że gdy liczbę boków wielokąta foremnego zwiększamy nieogra-

*) Pomysły swoje rozwijał poprzednio Nunn na tle historycznym w szeregu artykułów, ogłoszonych w 1910 r. w czasopiśmie Mathematical Gazette.

niczenie, wielokąt „ostatecznie“ przechodzi w koło. Nauczyciel, który zdecydował się na usunięcie wyrazu „nieskończoność“, powinien również umieścić na indeksie wyraz „ostatecznie“. W ten sposób pozostanie on w zgodzie ze zdrowym rozsądkiem swoich uczni, którzy doskonale widzą, że wielokąt zawsze pozostanie wielokątem i cudem chyba mógłby stać się kołem.

Przy dokładnym zbadaniu tych błędów logicznych oraz mylnych sposobów wysławiania się, okazuje się, że źródło ich tkwi w tym, iż granicę ciągu traktują jak gdyby to był jeden z wyrazów ciągu. Wiemy np., że

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

przy wszelkich całkowitych dodatnich wartościach n. Im n jest większe, tym wartość ułamka, stojącego po lewej stronie równości, jest bliższa do $1/_3$, nie wolno jednak mówić, że ułamek kiedykolwiek stanie się równym $1/_3$. Słusznie możemy $1/_3$ nazwać granicą różnych wartości tego ułamka. Otóż, gdyby $1/_3$ była jedną z wartości, które ułamek przybiera, nie mogłaby ona być granicą wszystkich jego wartości. Granicą jest ona właśnie dla tego, że *nie będąc* wyrazem ciągu wartości ułamka, ma jednak z tym ciągiem specjalny związek: wśród liczb większych od $1/_3$ niema ani jednej tak bliskiej do $1/_3$, żebyśmy w naszym ciągu nie potrafili znaleść wyrazu jeszcze bliższego do $1/_3$. Powiedzieć, że ułamek nasz równa się $1/_3$, gdy n jest nieskończenie wielkie, albo że staje się on „ostatecznie“ równym $1/_3$, jest to gmatwać i zaciemniać sprawę. Takie sposoby wyrażania się są w najlepszym razie dwuznaczne; w wykładzie szkolnym należy ich stanowczo unikać.

Przechodzę do t r u d n o ś c i t e c h n i c z n y c h. Źródłem ich jest, że w postaci ułamka algiebraicznego przedstawiamy to, co ułamkiem nie jest. Nie chcę przez to powiedzieć, że symbol $\frac{dy}{dx}$ nie jest wygodny, że nie może nim posługiwać się matematyk, dla którego pojęcia metafizyczne, z których ten symbol wyrósł, dawno umarły. Ale pamiętajmy, że mamy do czynienia z początkującym. Dla niego symbol jest środkiem do utrwalenia lotnych pojęć, do nadania konsekwencji rozumowaniu, które mu się wymyka. Gdy uczeń posługuje się symbolami, o których mowa, bezwiednie nasuwają się jego umysłowi pewne przypuszczenia, choćbyśmy go nie wiedzieć ile razy przed niemi ostrzegali. Są to, oczywiście, przypuszczenia, o których mówiliśmy już poprzednio. Dotyczą one poglądu na dy i dx jako na „nieskończenie małe“ przyrosty zmiennych, których stosunek ma np. w równaniu $\frac{dy}{dx}=3x^2$ wartość $3x^2$. Z tego punktu widzenia „nieskończonostkę“ dy możemy otrzymać, mnożąc dx przez $3x^2$. Całkowanie staje się tu po prostu sumowaniem nieskończenie wielu nieskończenie małych iloczynów tego kształtu. Nie ulega wątpliwości, że znakowanie Leibniza wyraża tę całą doktrynę w sposób niezmiernie przejrzysty, ale właśnie dla tego musi ono wprowadzać w błąd ucznia, któremu wytłumaczyliśmy, że gdyby dy i dx były wielkościami, byłyby to po prostu zera, że $3x^2 . dx$ oznaczałoby tyleż co $3x^2 . h$ gdzie $h=0$, że zatym $3x^2 . dx=0$ i że nic nie można utworzyć przez dodawanie zer.

Zapewne niewielu studentów zdołało w pierwszych początkach swych studjów uniknąć tej gmatwaniny pojęć; jedyną drogą do uniknięcia jej jest usunąć z początkowego kursu znakowanie, które daje do niej powód.

Przechodzę do propozycji praktycznych. Już bardzo wcześnie, przy graficznym przedstawianiu funkcji można dać pewien przedsmak zasadniczych myśli, na których opiera się rachunek różn. i całkowy, nie będę jednak mówił o tym—temat to zbyt oklepany*), jakkolwiek bardzo ważny. Pozwolicie, panowie, że zacznę od tego punktu, gdzie w szkole wprowadzamy rachunki algiebraiczne.

a) Ogólna metoda postępowania.

Przedewszystkim powstaje pytanie, w jakim duchu mamy prowadzić całą robotę? Czy rachunek różn. i całkowy mamy rozwijać jako odrębny zupełnie przedmiot, czy też ma on wyłonić się z różnych zagadnień, które od czasu do czasu studjujemy w algiebrze? Jestem stanowczym zwolennikiem tej drugiej metody. Nie chcę przez to obniżać wartości „puryzmu“ w nauczaniu matematyki. Jest rzeczą niezawodnie bardzo cenną dążenie do tego, żeby dać uczniowi pojęcie o doskonałym okazie budowy matematycznej, wzniesionej z jednolitego materjału i spełniającej jeden harmonijny cel. W historji jednak rzadkie są wypadki, żeby teorja jakaś odrazu w tej formie powstała. Doskonała budowa bywa zwykle wynikiem długiego procesu doboru i krytyki, operującej wielką ilością materjału. Uczeń naogół niewiele skorzysta z czysto logicznego traktowania przedmiotu, jeżeli nie odtworzymy w nauczaniu warunków rozwoju historycznego tego przedmiotu. Wykład zgodny z ideałem „purystów“ musi być w znacznym stopniu rekonstrukcją i oczyszczeniem krytycznym tych wiadomości, które uczeń już posiada...

Wobec tego proponuję, żebyśmy, wprowadzając ucznia w rachunki wyższe, odtwarzali w pewnym stopniu warunki historyczne ich powstania. Dla takich pjonerów jak Wallis i Mercator, a nawet do pewnego stopnia jeszcze dla Newtona nowe metody były po prostu rozwinięciem metod algiebry, niezbędnym do rozwiązania pewnych zagadnień, których dawne metody rozwiązać nie mogły. Dopiero z rozwojem specjalnej techniki, metody te stały się nową gałęzią matematyki, mającą swoistą budowę i wyraźną indywidualność. Uważam za zgodne z najzdrowszemi zasadami pedagogiki udzielanie uczniom początków rachunków wyższych w tej formie niewyspecjalizowanej. Wielu uczniów prawdopodobnie nie wyjdzie poza tę fazę, a jednak wyniesie ze szkoły zupełnie jasne zrozumienie istoty tej metody rachunkowej i jej najważniejszych zastosowań. Uczeń, pragnący bliżej zapoznać się z tym przedmiotem, zostanie doprowadzony do punktu, w którym dalszy rozwój przedmiotu staje się niemożliwy bez specjalnej techniki. Uczeń taki czynić będzie później postępy szybkie i pewne, gdyż w początkach nie odrywał uwagi od pierwszych zasad przez jednoczesną pracę nad opanowaniem nowego algorytmu.

Wreszcie metoda proponowana ukazuje nam odrazu rachunki wyższe we właściwym świetle — jako naukę o pewnym związku między

*) Oczywiście, oklepany w Anglji, gdzie wykresy wprowadzają w szkołach ludowych, a rachunek różn. i całkowy wraz z gieom. analityczną wykładają w niektórych zakładach 16-letnim dzieciom. *Red.*

funkcjami. Uczeń wie, że gdy bok (zmiennego) kwadratu wyraża się funkcją $ax+b$, jego pole wyraża się funkcją $a^2x^2+2abx+b^2$. Teraz dowiaduje się np., że gdy prędkość ciała po upływie czasu x wyraża się funkcją ax^2, droga przebyta przez nie wyraża się funkcją $^1/_3 ax^3$. Nowym jest tu tylko *sposób* znalezienia lub dowiedzenia związku między dwiema funkcjami. Specjalne symbole mogą być wygodne jak w jednym, tak i drugim przypadku, żeby zwięźle wyrazić rodzaj związku, jaki zachodzi między funkcjami, w zasadzie jednak symbole takie nie są konieczne.

b) *Pierwszy stopień nauczania.*

Na związek, o którym tylko co mówiliśmy, można zapatrywać się dwojako: albo jako na związek między funkcją i jej pochodną, albo jako na związek między funkcją a jej całką. Z którego końca mamy najpierw pokazać go uczniowi? Powiadam, że wiele przemawia za drugim sposobem widzenia rzeczy. Historycznie całkowanie poprzedzało różniczkowanie. Zagadnienia, powstające w sposób najbardziej naturalny, i najprostsze do sformułowania, są te, które prowadzą do całkowania. Np. o wiele naturalniejszym jest pytanie: „jaką drogę przebiegnie ciało przy danym rodzaju ruchu?“ niż pytanie: „jakie prawo prędkości wytworzyło dany ruch?“ Nawet gdy badacz stawia sobie to drugie pytanie—jak to uczynił np. Galileusz—próba rozwiązania przybiera zwykle kształt sprawdzania przypuszczalnych praw, czyli całkowania. W ogólności możemy powiedzieć, że metodą charakterystyczną nauk matematycznych jest wysnuwanie wniosków, mających postać całek, z praw wyrażonych przez równania różniczkowe. Równań tych nie możemy, co prawda, rozwiązać, dopóki nie uzbieraliśmy odpowiedniego materjału przez różniczkowanie, ale jest to tylko, mówiąc językiem scholastyki, przypadłość matematyczna, która nie powinna zbytnio wpływać na nasz wykład.

Proponuję tedy zaczynać od całkowania i iść naogół drogą, obraną przez Wallisa w Arithmetica infinitorum (1655 r.). O metodach Wallisa mówiłem obszerniej w czasopiśmie Mathematical Gazette, tu nadmienię tylko, że chodziło mu przeważnie o obliczanie pól ograniczonych krzywemi lub objętości, jeżeli rzędne krzywych albo przekroje brył spełniały pewne dane prawa*). Metody jego, proste i pomysłowe, doprowadziły go do cennego wniosku, że gdy rzędne (ewent. przekroje brył) spełniają prawo y (albo S)$=kx^{n-1}$, wówczas pole (resp. objętość) spełnia prawo S (resp. V)$=$ $=\frac{1}{n}kx^n$. Dążąc do uogólnienia tej reguły, Wallis wynalazł wykładniki potęg ujemne i ułamkowe...

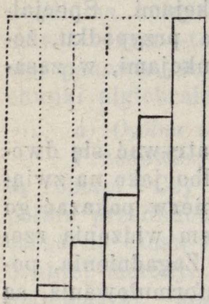
Na ułamku, któryśmy poprzednio rozważali, pokażemy zasadniczą myśl metody Wallisa. Przypuśćmy, że na rys. 1 wszystkie prostokąty mają równe podstawy, pola zaś ich niech będą po kolei równe 1^2, 2^2, 3^2, ... n^2, przyczym pole pierwszego obraliśmy za jednostkę zupełnie dowolnie. Niech cały prostokąt oznaczony kropkami składa się z $n+1$ prostokątów równych sobie i równych największemu z poprzednio wymienionych; stosunek rosnącego szeregu pierwszych prostokątów do całego prostokąta, oznaczonego kropkami, równa się

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{(n+1)n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\,.$$

*) Właściwie metoda ta znana była już dawniej; stosował ją Fermat, a może nawet Descartes. *Red.*

Gdy n rośnie, wartość ułamka zbliża się do $^1/_3$, szereg zaś prostokątów zbliża się do pola, ograniczonego przez odcinek paraboli. Wnosimy tedy, że to pole stanowi $^1/_3$ pola prostokąta, wyznaczonego przez rzędną i odciętą końcowego punktu łuku paraboli.

Do strony logicznej tego rozumowania powrócimy wkrótce; tymczasem zauważmy, że metodę Wallisa można stosować do wielu różnych zagadnień, nic nie mających spólnego z mierzeniem pól... Przy końcu pierwszego okresu nauczania, uczeń powinien z łatwością, mając równanie krzywej w rodzaju $y = 3 - 2x + 4.x^2$, obliczać pole wyznaczone przez krzywą. Przypuśćmy, że droga przebieżona przez punkt w ciągu t sekund dana jest równaniem $s = 2t + 1{,}3t^2 - 0{,}8t^3$; uczeń powinien umieć napisać odrazu prędkość punktu. Oczywiście, że reguły, na których oparł on rozwiązanie tych dwuch zadań, powinien umieć objaśnić.



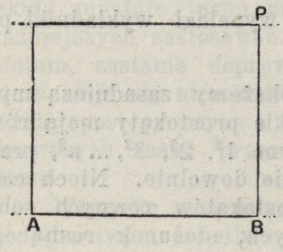
Rys. 1.

b) Drugi stopień: granica.

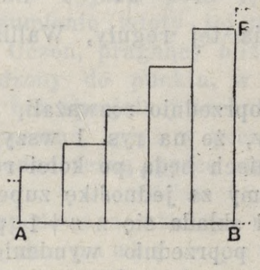
Oczywista rzecz, że strona logiczna tej metody ma dwa słabe punkty. Przedewszystkim wierzchołki prostokątów nie mogą nigdy utworzyć łuku paraboli; po-wtóre, ułamek nasz nie może nigdy osiągnąć wartości $^1/_3$. Z punktu widzenia praktycznego te zarzuty nie miałyby znaczenia; wierzymy, że natura nie robi w takich wypadkach skoków, i choćby życie nasze miało zależeć od prawdziwości tego wzoru, z największym spokojem twierdzilibyśmy, że jest słuszny. Lecz r o z u m nie może poprzestać na najgłębszym nawet przekonaniu praktycznym. Musimy d o w i e ś ć, że gdy rzędna spełnia prawo $y = kx^2$, pole d o k ł a d n i e wyrazi się wzorem $S = {}^1/_3\, kx^3$.

Cechą drugiego stopnia nauczania powinno być uzupełnienie przekonania praktycznego o wartości naszej metody przez dowód logiczny.

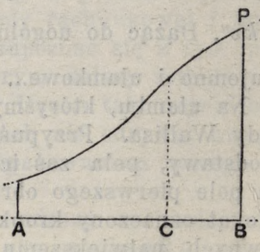
Niech pole prostokątu na rys. 2 wyobraża drogę, przebytę przez punkt ruchem jednostajnym w ciągu jednostki czasu AB. Prędkość punktu niech będzie $v \frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Rzecz jasna, że wysokość PB wyobraża prędkość v. Na rys.



Rys. 2.



Rys. 3.



Rys. 4.

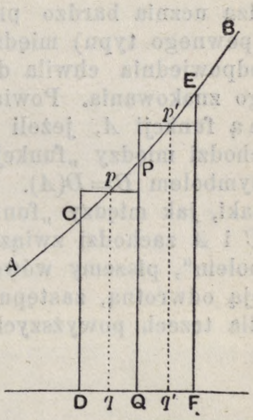
3 przypuszczamy, że punkt porusza się równemi skokami, przyczym prędkość w ciągu każdego skoku pozostaje stałą. Jeśli w ciągu ostatniej $\frac{1}{n}$ sek. punkt

przebył drogę$=\frac{v}{n}$ cm., w takim razie prędkość jego w ciągu tej części sekundy wynosiła $v\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Zauważmy, że pole ostatniego prostokąta $=\frac{v}{n}$ cm.², ale wysokość $PB=v$ jak dawniej, jakkolwiek wielką liczbą byłoby n. Przypuśćmy wreszcie, że drogę przebytą przez punkt wyrazić możemy za pomocą pola, ograniczonego przez krzywą i dwie rzędne na rys. 4, i że prędkość w chwili B wyraża się za pomocą rzędnej $PB=v$. Oczywista rzecz, że w ciągu jednostki czasu AB niema ani jednego przedziału, w którym prędkość byłaby stałą. Rys. 2, 3 i 4 mają jedną spólną cechę—że prędkość w chwili B równa się $PB=v\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Jakkolwiek tedy nie możemy powiedzieć, żeby prędkość na rys. 4 była w ciągu jakiegokolwiek okresu czasu równa v, możemy jednak wprowadzić nowy sposób wysłowienia i mówić, że w chwili B prędkość$=v\frac{\text{cm.}}{\text{sek.}}$. Możemy teraz określić ściśle (przynajmniej posługując się terminologją wykresów), co rozumiemy przez prędkość w danej chwili przy ruchu zmiennym. Jeżeli wykreślimy krzywą tak, by pole, ograniczone przez nią i przez pewną rzędną (np. PB), dokładnie równało się drodze przebytej przez ciało aż do chwili, którą wyobraża odpowiednia odcięta, wówczas długość rzędnej da nam prędkość ciała w chwili B.

Ważną jest rzeczą zrozumieć dokładnie prawdziwy związek między prędkością przez nas określoną a prędkością średnią (albo przeciętną) ciała w ciągu pewnego okresu czasu. W ciągu okresu CB (rys. 4) średnia prędkość jest ilorazem pola CP przez odcinek CB. Im C obierzemy bliżej do B, tym iloraz powyższy będzie miał wartość bliższą do v, nie może jednak nigdy równać się v. PB jest odcinkiem, nie zaś „nieskończenie wąskim prostokątem“, zatym prędkość w chwili B nie jest równa średniej prędkości w ciągu jakiegoś „nieskończenie małego okresu czasu“ przed chwilą B. Przeciwnie: prędkość $PB=v$ jest granicą ciągu prędkości średnich.

Na tym stopniu nauczania można wprowadzić termin: „granica“, wiele jednak względów przemawia zatym, by odłożyć go na czas późniejszy, na razie zaś poprzestać na symbolu graficznym pojęcia granicy.

Metoda, którą tylko co omawialiśmy, daje nam możność ulepszenia dowodu prawa Wallisa. Przypuśćmy, że krzywa AB na rys. 5 posiada tę własność, że pole, ograniczone przez nią (od początku spółrzędnych aż do jakiejś rzędnej PQ)$=kx^3$, jeżeli x jest odciętą punktu P. Chodzi o znalezienie dokładnej wartości rzędnej PQ. Weźmy dwie inne rzędne CD, EF, leżące po dwuch stronach PQ w odległości h od PQ. Wykreślmy prostokąty o podstawach DQ i QF. Przypuśćmy, że krzywa przecina górne boki prostokątów w punktach p i p'. Łatwo możemy obliczyć długości rzędnych pq i $p'q'$. Istotnie: pole prostokąta DQ równa się $k[x^3-(x-h)^3]$, pole zaś QF równa się $k[(x+h)^3-x^3]$. Dzieląc przez h, mamy



Rys. 5.

$$pq = k[3x^2 - h(3x - h)] \text{ oraz } p'q' = k[3x^2 + h(3x + h)].$$

Jeżeli $h < 3x$, wówczas $pq < 3x^2 < p'q'$. Im mniejsze jest h—t. j. im pq i $p'q'$ są bliższe do PQ—tym długości obu rzędnych są bliższe do $3kx^2$. Jeżeli obierzemy długość dowolnie mało różniącą się od $3kx^2$, możemy zawsze uczynić zarówno pq jak $p'q'$ jeszcze bliższemi do $3kx^2$. Jasna tedy rzecz, że istnieje jedna tylko wartość, którą możemy przypisać rzędnej PQ — mianowicie $3kx^2$. Tu już mamy do czynienia z wynikiem ścisłym, nie zaś przybliżonym. Stosujemy tu metodę logiczną dochodzenia prawdy przez wykluczanie różnych przypuszczeń możliwych. Rzędna PQ musi mieć jakąś wartość; otóż wykazujemy, że nie możemy przypisać jej innej wartości jak $3kx^2$, jeżeli nie mamy popaść w sprzeczność.

c) Uogólnienie wyników.

Rozwinąłem szczegółowo poprzednie zadania, żeby pokazać, że można wyłożyć rachunki wyższe bardzo elementarnie, a jednak uniknąć grubych błędów. Zarazem chciałem wykazać wartość dydaktyczną pewnych wykresów. Różniczkowania uczymy zwykle przez badanie wzniesienia krzywych. Niezawodnie wiele racji przemawia za tym, sądzę jednak, że mój sposób jest skuteczniejszy. Przeciw posługiwaniu się stycznemi w pierwszych początkach nauczania rachunków wyższych przemawia to, iż wykreślenie jako tako dokładne stycznych jest niemożliwe dla ucznia, a przytym niewygodnie jest posługiwać się styczną w celu zilustrowania całkowania. Przeciwnie, związek między rzędną a polem pod krzywą zawartym z jednakową łatwością zużytkować można do zilustrowania różniczkowania i całkowania.

Wszystkie całki, z któremi mieliśmy do czynienia, były to całki określone. W wykładzie elementarnym jest to zaletą, gdyż otrzymujemu tą drogą całkę odrazu w postaci potrzebnej nam do rozwiązania danego jakiegoś zagadnienia. Związek między rzędną a krzywą może zachować swą wartość typowego obrazu, do którego — w razie potrzeby — sprowadzić można każde zadanie, ale obok tego uczeń w szeregu zadań pozna w innych różnorodnych postaciach ten sam związek pomiędzy funkcjami... Różne te zadania doprowadzą ucznia bardzo prędko do jasnego pojęcia ogólnego zależności formalnej (pewnego typu) między funkcjami. Gdy to nastąpi, wówczas dopiero nastaje odpowiednia chwila do wprowadzenia ostatecznej nomenklatury i ostatecznego znakowania. Powiadamy tedy o funkcji B, że jest **pierwszą pochodną** funkcji A, jeżeli pozostaje ona z funkcją A w takim związku, jaki zachodzi między „funkcją-rzędną" a „funkcją-polem". Związek ten oznaczam symbolem $B = D(A)$. Jeżeli między funkcją C a funkcją B istnieje związek taki, jak między „funkcją-wzniesieniem" a „funkcją-rzędną", czyli że między C i A zachodzi związek taki, jak między „funkcją-wzniesieniem" a „funkcją polem", piszemy wówczas $C = D(B)$ oraz $C = D^2(A)$. Mając do czynienia z funkcją odwrotną, zastępujemy wykładniki dodatnie przez ujemne, piszemy więc dla trzech powyższych funkcji

$$B = D^{-1}(C), \quad A = D^{-2}(C) \text{ *)}.$$

*) Ten sposób oznaczania funkcji odwrotnych jest dziś powszechnie przyjęty w Anglji, gdzie np. zamiast arc sin x piszą $\sin^{-1} x$. *Red.*

Możnaby też, idąc za przykładem logików formalnych, posługiwać się odwróconą literą D i pisać np. $B=\reflectbox{$D$}(C)$.

d) Program.

Brak mi czasu na szczegółowe omówienie programu, poprzestanę tedy na krótkim wyznaniu wiary. Zakres programu musi być w znacznym stopniu wyznaczony przez charakter kursów fizyki, z któremi musi pozostawać w ścisłym związku praca nauczyciela metematyki. Skłaniam się ku dość wczesnemu traktowaniu większej liczby rozmaitych funkcji, niż to czynią dziś znani autorowie podręczników. Więc np. wcześnie przystąpiłbym do funkcyj sinus i cosinus, wobec tego, że występują one w tak wielu ciekawych i doniosłych zagadnieniach. Nie można też, moim zdaniem, opuszczać funkcji logarytmicznej. Należałoby też zastosować rachunek wyższy do prostych rozwinięć na szeregi algiebraiczne i trygonometryczne). Należałoby w takim razie zakończyć dowodem, że wszystkie te rozwinięcia są tylko szczególnym przypadkiem ogólnego szeregu, zwanego szeregiem Taylora.
