SUGLI INTEGRALI ABELIANI RIDUCIBILI (*)

In uno dei miei corsi di lezioni di geometria superiore di questi ultimi anni ebbi occasione di far rilevare che il procedimento aritmetico ben noto, indicato dal WEIERSTRASS per stabilire l'esistenza di sistemi di periodi ridotti per un integrale abeliano riducibile, poteva essere utilmente sostituito con un ragionamento di più succinta elèganza e di maggiore efficacia pratica.

Data l'importanza della questione, non mi pare inutile di pubblicare qui quel mio ragionamento, tanto più che, a causa forse di una definizione non felice dei periodi ridotti di un integrale riducibile che si trova in qualche libro, non è mancato chi ha creduto di poter sostituire il procedimento di WEIERSTRASS con un ragionamento affatto inadeguato allo scopo.

1. Sia J un integrale abeliano (di 1ª specie) riducibile, appartenente e una curva di genere p, e siano

$$\omega_1, \dots, \omega_{2p}$$

i suoi periodi relativi a un sistema normale di tagli della riemanniana corrispondente alla curva.

Poi si supponga che $r\ (\geq 1)$ sia il massimo numero di relazioni lineari omogenee indipendenti a coefficienti interi passanti tra le ω_j e che

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&a_{1.1}\,\omega_1 + \dots + a_{1,2p}\,\omega_{2p} = 0\,,\\
&\quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,\\
&a_{r,1}\,\omega_1 + \dots + a_{r,2p}\,\omega_{2p} = 0
\end{aligned}
$$

siano r di codeste relazioni formanti *base minima* per l'insieme delle relazioni lineari omogenee a coefficienti interi intercedenti fra le ω_j.

(*) *Rend. Reale Accad. dei Lincei,* (5), 30 (1921), pp. 359-360.

Per teoremi notissimi di analisi indeterminata, la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_{1,1}\,, \dots\,, a_{1,2p} \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ a_{r,1}\,, \dots\,, a_{r,2p} \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

sarà di caratteristica r, e il massimo comune divisore dei suoi minori di ordine r sarà 1 [1].

Ma allora, in virtù di un bel teorema di HERMITE-FROBENIUS [2], è possibile costruire un determinante unimodulare a elementi interi di ordine $2p$, così che delle sue righe le prime r siano appunto le righe della (2).

Siano

$$\begin{matrix} a_{r+1,1}\,, \dots\,, a_{r+1,2p}\,, \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ , \\ a_{2p,1}\,, \dots\,, a_{2p,2p} \end{matrix}$$

le rimanenti righe di un tal determinante, e si ponga

$$\begin{matrix} a_{r+1,1}\,\omega_1 + \dots + a_{r+1,2p}\,\omega_{2p} = \Omega_1\,, \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ , \\ a_{2p,1}\,\omega_1 + \dots + a_{2p,2p}\,\omega_{2p} = \Omega_{2p-r}\,. \end{matrix} \tag{3}$$

Le (3) mostrano che $\Omega_1, \dots, \Omega_{2p-r}$ sono *periodi* di J; le (1) e (3), prese insieme, essendo unimodulare il determinante delle a_{ij} $(i\,, j = 1\,, \dots, 2p)$, mostrano che ciascuna delle ω_j è una combinazione lineare omogenea a coefficienti interi delle $\Omega_1\,, \dots, \Omega_{2p-r}$; dunque

$$\Omega_1\,, \dots\,, \Omega_{2p-r} \tag{4}$$

è un sistema di periodi ridotti (primitivi) di J.

Dopo di che è ben noto ed è anche ben chiaro come ogni altro tale sistema possa essere dedotto dal sistema (4).

Avvertasi che, dato il significato di r, tra i periodi (4) non può passare alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti interi non tutti nulli.

[1] Per tutte le affermazioni contenute nel testo vedi, p. es., il n. 1 della mia Memoria: *Sulle varietà abeliane contenenti congruenze abeliane* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLIII, 1918-1919, pp. 213-238).

[2] Vedi, per es., FROBENIUS: *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* [Journal für die reine und angewandte Mathematik; Bd. 86 (1879), pp. 146-208], § 8.