ALCUNE PROPRIETÀ (*) DELLE ALGEBRE REGOLARI

Raccolgo qui alcuni teoremi sulle algebre regolari [1] non sprovvisti di interesse e suscettibili di applicazioni notevoli.

Di queste applicazioni nel seguito non ne indico che una, geometrica, riflettente una certa classe di sistemi lineari di omografie che sono, nel tempo stesso, dei gruppi; un'altra, assai più importante, alla teoria della rappresentazione di un gruppo di ordine finito sopra un gruppo di sostituzioni lineari, sarà sviluppata nella sua tesi di laurea da un mio allievo della R. Università di Catania (**).

* * *

1. *Perchè un'algebra regolare di ordine p^2 ammetta una sotto-algebra regolare di ordine q^2 con lo stesso suo modulo, occorre e basta che q sia un divisore di p.*

Sia A un'algebra regolare di ordine p^2 in un corpo numerico Γ. Possiamo supporre, senza venir meno alla generalità, che A sia l'algebra delle matrici in Γ di ordine p, il cui modulo è la matrice identica in Γ dello stesso ordine, che indicheremo con I.

Se B è una sotto-algebra regolare di A di ordine q^2, con lo stesso suo modulo, esistono in B q^2 matrici indipendenti $b_{i,j}$ $(i, j = 1, \dots, q)$, per le quali è

$$(1) \qquad b_{i,j}\, b_{h,k} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq h, \\ b_{i,k}, & \text{se } j = h \end{cases} \qquad (i, j, h, k = 1, \dots, q),$$

e

$$(2) \qquad b_{1,1} + \dots + b_{q,q} = I.$$

(*) *Note e Mem. di Mat.*, Catania, 1 (1921), pp. 198-209.

(1) Per la definizione di algebra regolare vedi G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), pag. 193.

(**) [Vedi: G. FICHERA, *I caratteri di un gruppo e le sue rappresentazioni sopra un gruppo di sostituzioni lineari*, Atti dell'Acc. Gioenia di Sc. Nat. di Catania, serie V, XIII, 1921)].

Da

$$b_{i,j} = b_{i,h}\, b_{h,k}\, b_{k,j}$$

si trae che la caratteristica della matrice $b_{i,j}$ non supera quella della matrice $b_{h,k}$. Ma i, j, h, k sono numeri qualunque della serie $1, \dots, q$, dunque le $b_{i,j}$ hanno tutte una stessa caratteristica, poniamo γ.

Dopo ciò, badando che le $b_{1,1}, \dots, b_{q,q}$ sono matrici automoduli, di caratteristica γ, a due a due mutuamente nullifiche se $q > 1$, dalla (2) si trae $p = q\gamma$ (2) e q è, come volevasi, un divisore di p.

Supponiamo inversamente che q sia un divisore di p e poniamo $p = q\gamma$; poi consideriamo l'insieme C delle matrici in Γ ciascuna delle quali è *composta* (3) con γ matrici eguali di ordine q.

È chiaro che C risulta una sotto-algebra regolare di A con lo stesso suo modulo e dell'ordine q^2; dunque il teorema è pienamente dimostrato.

È utile osservare, per quanto dovrà esser detto tra poco, che, se si indica con $c_{i,j}\,(i, j = 1, \dots, q)$ la matrice in Γ di ordine p per la quale sono eguali a 1 gli elementi secondo cui le righe

$$i^{ma}, (i+q)^{ma}, \dots, [i + (\gamma - 1)\, q]^{ma}$$

si incrociano rispettivamente con le colonne

$$j^{ma}, (j+q)^{ma}, \dots, [j + (\gamma - 1)\, q]^{ma},$$

le $c_{i,j}$ risultano q^2 matrici indipendenti di C, per le quali è

$$(3) \qquad c_{i,j}\, c_{h,k} = \begin{cases} 0 & , \text{se } j \neq h, \\ c_{i,k} & , \text{se } j = h \end{cases} \qquad (i, j, h, k = 1, \dots, q),$$

e

$$(4) \qquad c_{1,1} + \dots + c_{q,q} = I.$$

(2) A proposito di quanto è quivi asserito cfr. loc. cit. (1), pag. 420.

(3) Se $\mu_1, \dots, \mu_t$ sono matrici in uno stesso corpo, la matrice data, con simbolismo evidente, da

$$\begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \mu_t \end{Vmatrix}$$

si dice *composta* mediante $\mu_1, \dots, \mu_t$.

2. *Se B, B' sono sotto-algebre regolari, di uno stesso ordine, dell'algebra regolare A, aventi per modulo il modulo di questa, e Ω è una qualunque corrispondenza di isomorfismo tra B e B'* [4], *Ω può pensarsi come subordinata fra B e B' da un autoisomorfismo interno* [5] *di A.*

Supponiamo, come prima, che A sia l'algebra delle matrici in Γ di ordine p; poi indichiamo con q^2 l'ordine comune di B e B', e, posto $p = q\gamma$ (γ intero), diciamo C la sotto-algebra di A costituita dalle matrici in Γ di ordine p ciascuna delle quali è composta con γ matrici eguali di ordine q.

Per dimostrare il teorema basterà evidentemente far vedere che, se ω è una qualsiasi corrispondenza di isomorfismo tra B e C (e di tali corrispondenze ne esistono certo perchè B e C, essendo regolari e dello stesso ordine, sono equivalenti), ω può pensarsi come subordinata fra B e C da un autoisomorfismo interno di A.

Per questo, supponiamo che le $c_{i,j}$ abbiano per C il significato più sopra chiarito e indichiamo con $b_{i,j}$ l'elemento di B corrispondente in ω all'elemento $c_{i,j}$ di C. Siccome ω è una corrispondenza di isomorfismo, una volta che per le $c_{i,j}$ valgono le (3) e (4), per le $b_{i,j}$ varranno le (1) e (2); poi le $b_{i,j}$ saranno tutte matrici con la caratteristica γ e la nullità $\nu = p - \gamma$; e fra di esse le $b_{1,1}, \ldots, b_{q,q}$ saranno automoduli, a due a due mutuamente nullifici se $q > 1$.

Indichiamo con Σ il sistema (di ordine p) dei p-complessi di Γ [6] e con $S_1^{(i)}$, $S_2^{(i)}$ ($i = 1, \ldots, q$) il primo e il secondo asse $b_{i,i}$ [7]. Questi saranno due sistemi, complementari in Σ, degli ordini rispettivi ν e γ; poi i sistemi $S_2^{(1)}, \ldots, S_2^{(q)}$ saranno complementari in Σ e sarà [8]

$$S_1^{(i)} = S_2^{(1)} + \ldots + S_2^{(i-1)} + S_2^{(i+1)} + \ldots + S_2^{(q)}.$$

Da

$$b_{i,j}\, b_{j,j} = b_{i,j}$$

si trae che il primo asse di $b_{i,j}$ contiene quello di $b_{j,j}$ [9]; ma tali primi assi hanno ciascuno l'ordine ν, dunque essi coincidono, e il primo asse di $b_{i,j}$ è quello di $b_{j,j}$, cioè $S_1^{(j)}$.

(4) Loc. cit. (1), pag. 192.
(5) Ibid., pag. 222.
(6) Ibid., pag. 23 e seg.ti
(7) Ibid., pag. 409 e seg.ti
(8) Loc. cit. (2).
(9) Loc. cit. (1), pag. 413.

Allo stesso modo, dall'eguaglianza

$$b_{i,i}\, b_{i,j} = b_{i,j}$$

si trae che il secondo asse di $b_{i,j}$ coincide con quello di $b_{i,i}$ e che, pertanto, esso è dato da $S_2^{(i)}$.

Ciò posto, siano $X_1, \dots, X_\gamma$ γ elementi indipendenti di $S_2^{(1)}$.

Per $j = 1, \dots, q$ l'intersezione di $S_2^{(j)}$ e del primo asse di $b_{1,j}$ è zero, perchè quest'ultimo è $S_1^{(j)}$, ed $S_2^{(j)}$, $S_1^{(j)}$ sono complementari in Σ; dunque il trasformato di $S_2^{(j)}$ mediante $b_{1,j}$ è di ordine eguale a quello di $S_2^{(j)}$, (10) cioè dell'ordine γ. D'altronde cotesto trasformato è contenuto nel secondo asse di $b_{1,j}$, cioè in $S_2^{(1)}$; dunque coincide con $S_2^{(1)}$.

Segue che in $S_2^{(j)}$ esistono γ elementi indipendenti, univocamente determinati,

$$X_1^{(j)}, \dots, X_\gamma^{(j)},$$

per i quali è

$$b_{1,j}\, X_r^{(j)} = X_r \qquad (j = 1, \dots, q;\ r = 1, \dots, \gamma).$$

Siccome $b_{1,1}$ è un automodulo col secondo asse $S_2^{(1)}$ si ha (11)

$$b_{1,1}\, X_r^{(1)} = X_r^{(1)} \qquad (r = 1, \dots, \gamma),$$

dunque $X_1^{(1)}, \dots, X_\gamma^{(1)}$ coincidono rispettivamente con $X_1, \dots, X_\gamma$, ed è

$$b_{1,j}\, X_r^{(j)} = X_r^{(1)} \qquad (j = 1, \dots, q;\ r = 1, \dots, \gamma). \tag{5}$$

Ma dico che si ha, più generalmente,

$$b_{i,j}\, X_r^{(h)} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } j \neq h, \\ X_r^{(i)}, & \text{se } j = h \end{cases} \qquad (i, j, h = 1, \dots, q;\ r = 1, \dots, \gamma).$$

Che sia

$$b_{i,j}\, X_r^{(h)} = 0,$$

se $j \neq h$, è evidente, perchè $X_r^{(h)}$ sta in $S_2^{(h)}$, e il primo asse di

(10) Ibid., pag. 411.
(11) Ibid., pag. 418.

$b_{i,j}$, $S_1^{(j)}$, per $j \neq h$, contiene $S_2^{(h)}$. Resta dunque a far vedere che è

$$b_{i,j} X_r^{(j)} = X_r^{(i)}.$$

Per questo si osservi intanto che, per le (1) e le (5),

$$b_{i,j} X_r^{(j)} = b_{i,1} b_{1,j} X_r^{(j)} = b_{i,1} X_r^{(1)};$$

e che, essendo

$$b_{1,i} b_{i,1} = b_{1,1},$$

ed essendo $X_r^{(1)}$ trasformato da $b_{1,1}$ in sè stesso, si ha

$$b_{1,i} (b_{i,1} X_r^{(1)}) = X_r^{(1)}.$$

Intanto $b_{i,1} X_r^{(1)}$ è un elemento del secondo asse di $b_{i,1}$, cioè di $S_2^{(i)}$, e l'*unico* elemento di $S_2^{(i)}$ trasformato da $b_{1,i}$ in $X_r^{(1)}$ è $X_r^{(i)}$, dunque

$$b_{i,1} X_r^{(1)} = X_r^{(i)},$$

e, per conseguenza,

$$b_{i,j} X_r^{(j)} = X_r^{(i)}.$$

Adesso si indichi con $Z_t\,(t = 1, \dots, p)$ il p-complesso di Σ per cui è eguale a 1 il numero che occupa il t^{mo} posto e gli altri, se $p > 1$, sono nulli; i p-complessi $Z_1, \dots, Z_p$ saranno p elementi indipendenti di Σ.

Ma anche i $q\gamma = p$ elementi $X_r^{(i)}\,(i = 1, \dots, q;\ r = 1, \dots, \gamma)$ sono p elementi indipendenti di Σ, perchè gli assi $S_2^{(1)}, \dots, S_2^{(q)}$ sono complementari in Σ, dunque esiste in Γ una matrice (non degenere), y, di ordine p, atta a trasformare $X_r^{(i)}$ in $Z_{i+(r-1)q}$, per $i = 1, \dots, q$ ed $r = 1, \dots, \gamma$ [12].

Dire che y trasforma $X_r^{(i)}$ in $Z_{i+(r-1)q}$ equivale a dire che y^{-1} trasforma Z_t in $X_r^{(i)}$, se i è l'intero della serie $1, \dots, q$ congruo a t mod q, e se inoltre è

$$r = \frac{t-i}{q} + 1, \text{ cioè } (r-1)q = t - i;$$

[12] Ibid., pag. 415.

dunque, se si pone

$$y b_{h,k} y^{-1} = d_{h,k} \qquad (h\,,k = 1\,,\dots,q)\,,$$

è, coi significati ora posti di i ed r rispetto a t,

$$d_{h,k} Z_t = y b_{h,k} (y^{-1} Z_t) = y b_{h,k} X_r^{(i)} = \begin{cases} 0, \text{ se } k \neq i\,, \\ y X_r^{(k)} = Z_{h+(r-1)q} = Z_{h+t-k}\,, \text{ se } k = i\,; \end{cases}$$

ossia

$$d_{h,k} Z_t = \begin{cases} 0\,, & \text{se } t \not\equiv k \pmod q\,, \\ Z_{h+t-k}\,, & \text{se } t \equiv k \pmod q\,. \end{cases} \qquad (t = 1\,,\dots,p)\,.$$

Segue che $d_{h,k}$ è una matrice di ordine p in cui gli elementi della colonna t^{ma} sono tutti nulli, se $t \not\equiv k \pmod q$; mentre, se $t \equiv k \pmod q$, tra di essi è eguale a 1 quello che appartiene alla riga $(h + t - k)^{ma}$ e gli altri, se $p > 1$, sono tutti nulli.

In altri termini $d_{h,k}$ è una matrice di ordine p nella quale sono eguali a 1 gli elementi secondo cui le colonne

$$k^{ma}\,, (k + q)^{ma}\,, \dots, [k + (\gamma - 1)\,q]^{ma}$$

si incrociano rispettivamente con le righe

$$h^{ma}\,, (h + q)^{ma}\,, \dots, [h + (\gamma - 1)\,q]^{ma}\,,$$

e tutti gli altri eventuali elementi sono nulli.

Ma dunque è

$$d_{h,k} = c_{h,k} \qquad (h\,,k = 1\,,\dots,q)\,,$$

ossia

$$y b_{h,k} y^{-1} = c_{h,k} \qquad (h\,,k = 1\,,\dots,q)\,.$$

Segue che l'autoisomorfismo interno di A che si ottiene facendo corrispondere a ciascun elemento di A il suo trasformato mediante y^{-1}, muta $b_{h,k}$ in $c_{h,k}$ per $h\,,k = 1\,,\dots,q$ e quindi B in C, subordinando fra B e C una corrispondenza di isomorfismo che coincide con ω, una volta che per essa e per ω ai q^2 elementi $b_{h,k}$ di B rispondono, nello stesso modo, gli stessi q^2 elementi indipendenti $c_{h,k}$ di C.

3. Dal teorema dimostrato, supponendo in esso $B = B' = A$, si deduce che:

In ogni algebra regolare il gruppo degli autoisomorfismi coincide con quello degli autoisomorfismi interni.

Se, estendendo alle algebre una denominazione già in uso nella teoria dei gruppi di ordine finito, diciamo che un'algebra con modulo è *completa* quando per essa l'ordine della sotto-algebra centrale è 1 e il gruppo degli autoisomorfismi è esaurito da quello degli autoisomorfismi interni, ricordando che la sotto-algebra centrale di un'algebra regolare è appunto dell'ordine 1 [13], possiamo, dire che:

Ogni algebra regolare è completa.

Se un'algebra con modulo è somma diretta di due o più altre, queste sono tutte dotate di modulo [14], e, assegnato comunque in ciascuna di esse un autoisomorfismo interno, esiste nell'algebra data un autoisomorfismo interno che subordina in ciascuna di esse l'autoisomorfismo assegnato [15]. D'altronde in un'algebra semi-semplice riducibile ciascuna corrispondenza di autoisomorfismo non può che permutar fra di loro le algebre semplici di cui quella data è somma diretta [16], e quindi non può che tener ferma ciascuna di dette algebre semplici, subordinandovi una corrispondenza di autoisomorfismo, se gli ordini di queste sono tutti differenti, dunque anche:

In un'algebra (semi-semplice) somma diretta di algebre regolari con ordini tutti differenti il gruppo degli autoisomorfismi coincide con quello degli autoisomorfismi interni.

È chiaro, però, che una tale algebra non è completa, perchè l'ordine della sua sotto-algebra centrale è ≥ 2 [17].

4. I teoremi dei n^{ri} 1 e 2 possono essere generalizzati.

Se B è una sotto-algebra, col modulo v, dell'algebra A, B è anche una sotto-algebra di $v\,A\,v$, perchè questa è l'insieme degli elementi di A ciascun dei quali ha un modulo in v [18]; d'altronde, se A è regolare e dell'ordine p^2, $v\,A\,v$ è pur essa regolare e dell'ordine p_1^2, se pp_1 è la caratteristica di v in A [19], dunque (n^0 1):

Perchè un'algebra regolare di ordine p^2 ammetta una sotto-algebra regolare, di ordine q^2, il cui modulo abbia in essa la caratteristica (sinistra e destra) pp_1 (p_1 intero), occorre e basta che sia $1 \leq p_1 \leq p$ e q un divisore di p_1.

(13) Ibid., pag. 359.
(14) Ibid., pag. 241, β).
(15) Ibid., pag. 244, σ).
(16) Ibid,, pag. 207 e pag. 330.
(17) Ibid., pag. 358.
(18) Ibid., pag. 266.
(19) Ibid., pag. 359.

5. Per generalizzare il teorema del n° 2 giova premettere il seguente lemma:

Se un'algebra e una sua sotto-algebra sono entrambe dotate di modulo, ciascun autoisomorfismo interno della sotto-algebra si può pensare come subordinato in essa da un autoisomorfismo interno dell'algebra.

Siano A e B l'algebra e la sotto-algebra di cui si tratta, e u, v i loro moduli rispettivi.

Posto

$$u = v + w ,$$

w o è zero, o è un automodulo nel quale ha un nullifico ciascun elemento di A che abbia un modulo in v [20]; quindi in ogni caso è

$$w^2 = w \text{ e } wx = xw = 0 , \tag{6}$$

qualunque sia x in B.

Se b è un elemento di B ivi dotato di inverso e questo inverso è b', da

$$bb' = v$$

e dalle (6) si trae

$$(b + w)(b' + w) = bb' + w^2 = v + w = u ,$$

dunque $b + w$ e $b' + w$ sono intanto elementi di A, ciascun dei quali è ivi inverso dell'altro.

D'altronde, qualunque sia x in B, è

$$(b' + w)\, x\, (b + w) = b'x\,(b + w) = b'xb ,$$

dunque l'autoisomorfismo interno di B, che si ottiene facendo corrispondere a ciascun elemento di B il suo trasformato mediante b, si può pensare come subordinato in B da quello di A, che si ottiene facendo corrispondere a ciascun elemento di A il suo trasformato mediante $b + w$.

Ciò posto, possiamo generalizzare il teorema del n° 2 dimostrando che:

Se B e B' sono sotto-algebre regolari, di uno stesso ordine, dell'algebra regolare A, e i moduli di B e B' hanno in A la stessa caratteristica (sinistra e destra), detta Ω una qualunque trasformazione

[20] Ibid., pag. 264.

di isomorfismo di B in B', Ω può pensarsi come subordinata tra B e B' da un autoisomorfismo (interno) di A.

Siano v, v', u i moduli rispettivi di B, B', A, per modo che v e v' avranno in A la stessa caratteristica e saranno ivi equivalenti ([21]).

Ciò significa che esiste in A un autoisomorfismo (interno) diciamo τ, atto a mutare v in v', e quindi vAv in $v'Av'$.

Ma è $B \leq vAv$, $B' \leq v'Av'$, dunque τ muta B in una sotto-algebra B'' di A che sta, insieme con B', in $v'Av'$ e che, come B', ha per modulo v' di $v'Av'$.

Indichiamo con ω la trasformazione di isomorfismo di B in B'' indotta su B da τ, e poniamo $\Omega_1 = \omega^{-1}\Omega$, per modo che Ω_1 sarà una trasformazione di isomorfismo di B'' in B'.

Siccome $v'Av'$ è regolare, per il teorema del n^0 2, esiste un autoisomorfismo (interno) di $v'Av'$, diciamo σ, che muta B'' in B', subordinando tra B'' e B' la trasformazione Ω_1.

Allora, se in conformità del lemma, si indica con τ_1 un autoisomorfismo (interno) di A che subordini in $v'Av'$ l'autoisomorfismo σ, è chiaro che $\tau\tau_1$ è un autoisomorfismo (interno) di A atto a mutare B in B' e a subordinare tra B e B' la trasformazione Ω.

6. Nelle considerazioni che siamo venuti via via facendo è contenuto implicitamente il seguente teorema, che giova enunciare in modo esplicito:

Perchè in un corpo numerico Γ esista un'algebra regolare di ordine q^2 i cui elementi siano matrici in Γ di ordine p e il cui modulo sia una matrice di caratteristica p_1, occorre e basta che sia $1 \leq p_1 \leq p$ e q un divisore di p_1. E se p_1 e q soddisfanno a queste condizioni, ed è $p_1 = q\gamma$, ogni algebra del tipo in discorso può essere trasformata mediante una matrice (non degenere) di ordine p nell'algebra costituita dall'insieme delle matrici in Γ (di ordine p) ciascuna delle quali è composta, ordinatamente, con γ matrici eguali di ordine q e una matrice nulla di ordine $p - p_1$ (se $p_1 < p$).

*
* *

7. Indichiamo rapidamente un'applicazione di quanto è stato detto alla geometria proiettiva iperspaziale.

In uno spazio proiettivo complesso della dimensione $p-1$, S_{p-1},

([21]) Ibid., pag. 247.

si fissi una rappresentazione parametrica dei punti mediante coordinate proiettive omogenee $(x_1, \dots, x_p)$, e a ciascuna matrice (a elementi complessi) di ordine p

$$\alpha = \| a_{s,t} \| \qquad (s, t = 1, \dots, p)$$

si faccia corrispondere l'omografia α^* rappresentata dalle equazioni:

$$x'_s = \sum_t^{1\dots p} a_{s,t}\, x_t \qquad (s = 1, \dots, p).$$

È chiaro:

1) che α^* risponde, nello stesso modo che ad α, a ciascuna matrice del tipo $k\alpha$, con k numero (complesso) non nullo;

2) che se α descrive un sistema di ordine h, α^* descrive un *sistema di ordine* h, cioè un insieme di omografie che risulta dall'aggregare l'omografia nulla dell'ambiente a quelle di un sistema lineare della dimensione $h - 1$;

3) e che per tal modo resta fissata una corrispondenza biunivoca tra i sistemi di ordine h di matrici (a elementi complessi) dell'ordine p e i sistemi di ordine h di omografie in S_{p-1} — fra questi ultimi riuscendo *gruppi* quelli, e quelli soltanto, che corrispondono ai sistemi di matrici che sono addirittura delle algebre.

La corrispondenza in discorso dipende, naturalmente, dalla considerata rappresentazione dei punti di S_{p-1} mediante coordinate proiettive omogenee; ma è chiaro che, se Σ_1 e Σ'_1 sono i sistemi di matrici rispondenti a un assegnato sistema Σ di omografie in due di tali rappresentazioni, Σ'_1 non è che il trasformato di Σ_1 mediante una matrice (non degenere) di ordine p.

Segue, in particolare, che se Σ è un gruppo, Σ_1 e Σ'_1 sono algebre equivalenti; e quindi ogni proprietà di Σ_1 (o di Σ'_1) invariante di fronte alla relazione di equivalenza fra algebre si riflette in una proprietà *proiettiva* di Σ.

Conformemente all'osservazione ora fatta, noi diremo che un sistema di omografie di S_{p-1}, che sia un gruppo, è *regolare*, se tale è l'algebra costituita dalle matrici del sistema ad esso corrispondente in una qualsiasi rappresentazione dei punti di S_{p-1} mediante coordinate proiettive omogenee.

8. Posto $p = q\gamma$, con q e γ interi positivi, consideriamo nello S_{p-1} una omografia le cui equazioni siano della forma

$$(1) \quad x'_{(r-1)q+i} = a_{i,1}\, x_{(r-1)q+1} + \dots + a_{i,q}\, x_{rq} \qquad (r = 1, \dots, \gamma;\; i = 1, \dots, q),$$

e indichiamo con V la varietà algebrica dello S_{p-1} rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$x_{(r-1)q+i} = \eta_r \xi_i \qquad (r = 1, \dots, \gamma;\ i = 1, \dots, q), \tag{2}$$

i parametri essendo le η_r e le ξ_i.

È chiaro che V coincide con l'ambiente, se è $q = 1$ e $\gamma = p$, oppure $q = p$ e $\gamma = 1$; mentre, se q e γ sono entrambi maggiori di 1, V è una varietà di SEGRE, di 2ª specie (22), della dimensione $q + \gamma - 2$, immersa nello S_{p-1}, rappresentante le coppie di punti estratte dallo $S_{\gamma-1}$ $(\eta_1, \dots, \eta_\gamma)$ e dallo S_{q-1} $(\xi_1, \dots, \xi_q)$, e quindi dotata di una schiera $\infty^{\gamma-1}$, Φ, di S_{q-1}, e di una schiera ∞^{q-1}, Ψ, di $S_{\gamma-1}$.

Le coordinate dei punti di un S_{q-1} di Φ si ottengono dalle (2) tenendo fisse le η e facendovi variare le ξ; ma, se nei secondi membri delle (1) si pongono per le x i valori dati dalle (2) si ottiene

$$x'_{(r-1)q+i} = \eta_r (a_{i,1} \xi_1 + \dots + a_{i,q} \xi_q);$$

dunque l'omografia rappresentata dalle (1) è tale che per essa ciascun punto di V o è singolare, o è portato in un punto della varietà stessa appartenente con quello a uno stesso S_{q-1} della schiera Φ; o, come possiamo dire (anche se l'omografia è degenere), essa è tale da trasformare in sè la varietà V tenendo fermo ciascuno spazio della schiera Φ.

Siccome le omografie di un S_{q-1} costituiscono un sistema dell'ordine q^2, si riconosce subito che, al variare dei coefficienti a, le (1) forniscono tutte le omografie dello S_{p-1} ambiente ciascuna delle quali trasforma V in sè stessa, mantenendo fermo ciascuno spazio della schiera Φ.

Avvertasi che tra queste omografie quelle, che risultano degeneri e col primo asse di dimensione minima, hanno per assi degli $S_{\gamma-1}$ e, precisamente, tutti, e solo, gli $S_{\gamma-1}$ della schiera Ψ.

Dopo ciò, in virtù di quanto è stato detto più sopra, è evidente che:

Un sistema regolare di omografie non tutte degeneri di uno spazio S_{p-1}

1) *o è il sistema di tutte le sue omografie,*

(22) Vedi G. SCORZA, *Sulle varietà di* SEGRE [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLV (1909) pp. 119-131].

2) *o è il sistema di ordine* 1 *costituito dall'omografia identica insieme con l'omografia nulla,*

3) *o è il sistema di tutte le sue omografie che trasformano in sè una varietà di Segre di* 2^a *specie, immersa in esso, tenendo fermo ciascun elemento di una delle sue due schiere di spazi lineari. Se gli spazi di queste due schiere sono degli* $S_{\gamma-1}$ *e degli* S_{q-1}, *è* $p = \gamma q$; *e, se la schiera degli spazi ciascun dei quali è tenuto fermo, è quella degli* S_{q-1}, *quella degli* $S_{\gamma-1}$ *è l'insieme dei primi assi delle omografie del sistema che risultano degeneri e hanno i primi assi di dimensione minima.*

Crediamo inutile fermarci a dichiarare come vari l'enunciato di questo teorema allorchè si lascia cadere l'ipotesi che le omografie del sistema regolare di cui in esso si discorre non siano tutte degeneri.

Si tratta di cosa che ormai il lettore vede subito da sè.

Mazzarò (Taormina), 16 agosto 1921.