SUGLI ADDENDI DI COMPOSIZIONE DI UN'ALGEBRA (*)

La nozione di serie di composizione è stata estesa dalla teoria dei gruppi a quella delle algebre dai Signori S. Epsteen e J. H. Maclagan-Wedderburn [1]; qui vogliamo far vedere come anche per le algebre possa essere stabilito un teorema che è da riguardare come l'analogo di quello che per i gruppi indica la relazione intercedente tra i fattori di composizione di un gruppo e quelli di un suo sotto-gruppo. E cioè del teorema che:

Ciascun fattore di composizione di un sotto-gruppo di un gruppo è divisore di uno, almeno, dei fattori di composizione del gruppo.

*
* *

1. Se gli ordini delle algebre costituenti i termini di una serie di composizione di un'algebra sono $n_1, \dots, n_t$, gli interi (positivi)

$$n_1 - n_2, n_2 - n_3, \dots, n_{t-1} - n_t, n_t,$$

a meno, in caso, dell'ordine, sono indipendenti dalla serie.

Ebbene essi si diranno gli *addendi di composizione* dell'algebra data; di guisa che:

La somma degli addendi di composizione di un'algebra è l'ordine di questa.

2. Ciò premesso, il teorema che qui si vuol dimostrare è il seguente:

(*) *Giorn. di Mat. di Battaglini,* (3) 15 (1925) pp. 1-3.

(1) Cfr. S. Epsteen and J. H. Maclagan-Wedderburn, *On the structure of hypercomplex number systems* (Transactions of the American Mathematical Society, vol. 6, 1905, pp. 172-178), od anche G. Scorza, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), pp. 251-262.

Se B è una sotto-algebra di un'algebra A, per ciascun addendo di composizione di B ne esiste almeno uno di A non inferiore ad esso.

Sia

$$A_1 = A \, , \, A_2 \, , \dots , A_t$$

una serie di composizione di A, con A_i dell'ordine $n_i \, (i = 1 , \dots , t)$

Se B è in A_t, il teorema è evidente, perchè allora detto m l'ordine di B, è $m \leq n_t$, e ciascun addendo di composizione di B, non superando m, non supera nemmeno n_t.

Supponiamo dunque che ciò non sia, e sia $A_j \, (j > 1)$ la prima delle $A_1 , \dots , A_t$ che *non* contiene B. Allora B ed A_j stanno in A_{j-1} e

$$B + A_j = C$$

è un'algebra, perchè, essendo A_j invariante (massima) in A_{j-1}, è

$$C^2 = B^2 + BA_j + A_j B + A_j^2 \leq B + A_j = C \, .$$

Indichiamo con B' l'intersezione di B ed A_j (diversa, certo, da B), e supponiamo, in primo luogo, che sia $B' \neq 0$.

Dico che *B' è una sotto-algebra invariante di B*.

Infatti da

$$B'B \leq B \quad \text{e} \quad B'B \leq A_j A_{j-1} \leq A_j$$

segue

$$B'B \leq B' \, ;$$

e, analogamente, da

$$BB' \leq B \quad BB' \leq A_{j-1} A_j \leq A_j$$

segue

$$BB' \leq B' \, .$$

Ora sia

$$B_1 = B \, , \, B_2 \, , \dots , B_h$$

una serie di composizione di B (certo esistente) di cui faccia parte B', e sia $B' = B_k (k > 1)$. Inoltre sia m' l'ordine di B' ed $m_l \, (l = 1 , \dots , h)$ quello di B_l, di guisa che sarà $m_1 = m$ ed $m_k = m'$.

Si avrà

$$m - m' = m_1 - m_k = (m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + \dots + (m_{k-1} - m_k)$$

e gli addendi di composizione di B fino ad $m_{k-1} - m_k$ saranno non superiori ad $m - m'$.

Intanto l'ordine di C è $m + n_j - m'$ ed è $C \leq A_{j-1}$; dunque si ha

$$m + n_j - m' \leq n_{j-1}\,, \text{ ossia } m - m' \leq n_{j-1} - n_j\,,$$

e ciascuno degli addendi di composizione di B fino ad $m_{k-1} - m_k$ è non superiore all'addendo $n_{j-1} - n_j$ di A.

Supponiamo, in secondo luogo, che sia $B' = 0$.

In tal caso l'ordine di C è $m + n_j$, quindi è

$$m + n_j \leq n_{j-1}\,, \text{ ossia } m \leq n_{j-1} - n_j$$

e ciascun addendo di composizione di B, non superando m, non supera nemmeno l'addendo $n_{j-1} - n_j$ di A.

Se $B' = 0$ la dimostrazione è compiuta; se invece $B' \neq 0$ la dimostrazione del teorema per B viene ricondotta a quella del teorema analogo per B',

Ma è $B' < B$, quindi non occorre insistere oltre perchè si veda come in ogni caso si pervenga ad esaurire la dimostrazione.

3. Dal teorema dimostrato si trae subito che:

Se un'algebra gode della proprietà che il suo ordine eguaglia il numero dei termini di una (e quindi di ogni altra) sua serie di composizione, ogni sua sotto-algebra gode della proprietà analoga.