

## A PROPOSITO DI UN TEOREMA DEL CHAPMAN (\*)

---

In una sua breve Nota inserita nel *Messenger of Mathematics* (vol. 42, 1913, pag. 132) il CHAPMAN ha dimostrato che, se  $G$  è un gruppo d'ordine finito ed  $H$  è un suo sottogruppo di indice  $r$ , è possibile determinare in  $G$   $r$  elementi  $g_1, \dots, g_r$ , sì che risulti nel tempo stesso

$$G = Hg_1 + \dots + Hg_r \text{ e } G = g_1H + \dots + g_rH.$$

Il ragionamento del CHAPMAN, che procede per assurdo, non pone affatto in evidenza la ragione intima di codesto notevole teorema; nè, per questo riguardo, è da considerarsi come più soddisfacente la dimostrazione che ne dà il MILLER a pag. 83 del trattato sulla teoria dei gruppi finiti composto in collaborazione col BLICHFELDT e col DICKSON, nella quale si fa ricorso alla teoria della rappresentazione dei gruppi astratti mediante gruppi transitivi di sostituzioni.

Oltre di che nè il procedimento del CHAPMAN, nè quello del MILLER si prestano alla determinazione del numero dei sistemi di  $r$  elementi ciascuno, per ognuno dei quali vale la proprietà sopra enunciata.

Orbene, oggetto di questa Nota è far vedere come le proprietà della distribuzione degli elementi di un gruppo in sistemi laterali, sinistri o destri, rispetto a un sottogruppo, o in sistemi bilaterali rispetto a una coppia ordinata di sottogruppi, e alcune osservazioni su tale argomento (vedi più innanzi i n.° 3 e 4) che, a quanto pare, non sono state ancora poste esplicitamente in rilievo, permettono non solo di mostrare in maniera semplice e spontanea, con notevole generalizzazione del teorema del CHAPMAN, che:

*Se  $G$  è un gruppo d'ordine finito ed  $H, K$  sono suoi sottogruppi di indice  $r$ , è possibile determinare in  $G$   $r$  elementi  $g_1, \dots, g_r$ , sì che*

(\*) Boll. Un. Mat. Ital., 6 (1927), pp. 1-6.

risulti nel tempo stesso

$$G = Hg_1 + \dots + Hg_r, \text{ e } G = g_1 K + \dots + g_r K:$$

ma anche di computare in quante maniere diverse la determinazione di  $r$  elementi sì fatti possa essere adempiuta.

1. Se  $G$  è un gruppo (d'ordine finito, o non) ed  $H$  un suo sottogruppo, un sistema *laterale sinistro* (*destro*) di  $G$  rispetto ad  $H$  è l'insieme degli elementi di un prodotto del tipo  $gH$  (del tipo  $Hg$ ), con  $g$  elemento di  $G$ .

Ciascuno dei sistemi  $gH$  e  $Hg$  contiene  $g$ , una volta che  $H$  contiene l'elemento identico; e se  $g'H$  e  $Hg''$ , con  $g'$  e  $g''$  elementi di  $G$ , contengono  $g$ , è  $g = g'h'$  e  $g = h''g''$ , con  $h'$  e  $h''$  elementi opportuni di  $H$ , indi

$$g'H = gh'^{-1} \cdot H = g \cdot h'^{-1} H = gH$$

e

$$Hg'' = H \cdot h''^{-1} g = Hh''^{-1} \cdot g = Hg;$$

dunque ciascun elemento di  $G$  appartiene ad uno, ed uno solo, dei sistemi laterali sinistri (*destri*) di  $G$  rispetto ad  $H$ .

2. Se  $H$  e  $K$  sono sottogruppi di  $G$ , un sistema *bilaterale* di  $G$  rispetto alla coppia ordinata  $(H, K)$  è l'insieme degli elementi di un prodotto del tipo  $HgK$ , con  $g$  elemento di  $G$ . Che se poi è  $K = H$ , un tale insieme dicesi più semplicemente un sistema *bilaterale* di  $G$  rispetto ad  $H$ .

Giacchè  $H$  e  $K$  contengono l'elemento identico,  $HgK$  contiene  $g$ ; e, se  $Hg'K$ , con  $g'$  elemento di  $G$ , contiene  $g$ , è  $g = hg'k$ , con  $h$  e  $k$  elementi opportuni di  $H$  e  $K$  rispettivamente, indi

$$Hg'K = H \cdot h^{-1} gk^{-1} \cdot K = Hh^{-1} \cdot g \cdot k^{-1} K = HgK;$$

dunque ciascun elemento di  $G$  appartiene ad uno, e uno solo, dei sistemi bilaterali di  $G$  rispetto ad  $(H, K)$ .

Il sistema  $HgK$  contiene evidentemente  $Hg$  e  $gK$ ; d'altronde, per quanto precede,  $g$  è, in sostanza, un qualsivoglia elemento di  $HgK$ , quindi un sistema bilaterale di  $G$  rispetto ad  $(H, K)$  contiene ogni sistema laterale destro (*sinistro*) di  $G$  rispetto ad  $H$  (*a*  $K$ ), che abbia in comune con esso un elemento.

3. Sia adesso  $H_d$  un sistema laterale destro di  $G$  rispetto ad  $H$  e  $K_s$  un sistema laterale sinistro di  $G$  rispetto a  $K$ .

Se  $H_d$  e  $K_s$  hanno almeno un elemento comune, il sistema bilaterale di  $G$  rispetto ad  $(H, K)$ , cui appartiene quell'elemento, contiene  $H_d$  e  $K_s$ .

Ebbene, suppongasi inversamente che  $H_d$  e  $K_s$  siano entrambi contenuti in un sistema bilaterale  $T$  di  $G$  rispetto ad  $(H, K)$ ; e sia  $g_1$  un elemento di  $H_d$ ,  $g_2$  un elemento di  $K_s$ .

Sarà

$$H_d = Hg_1, \quad K_s = g_2K, \quad T = Hg_1K = Hg_2K$$

e sussisterà un'eguaglianza della forma

$$g_1 = hg_2k,$$

con  $h$  e  $k$  elementi opportuni di  $H$  e  $K$  rispettivamente.

Ma da questa discende

$$h^{-1}g_1 = g_2k,$$

e  $h^{-1}g_1$  appartiene ad  $Hg_1$ , cioè ad  $H_d$ ,  $g_2k$  appartiene a  $g_2K$ , cioè a  $K_s$ ; dunque  $H_d$  e  $K_s$  hanno almeno un elemento comune.

Aggiungasi che, se  $g$  è un tale elemento, si ha

$$H_d = Hg, \quad K_s = gK$$

e quindi è <sup>(1)</sup>

$$H_d \cap K_s = Hg \cap gK = gg^{-1}(Hg \cap gK) =$$

$$= g(g^{-1}Hg \cap g^{-1}gK) = g(g^{-1}Hg \cap K);$$

e analogamente

$$H_d \cap K_s = (Hg \cap gK)g^{-1}g = (H \cap gKg^{-1})g.$$

Si conclude che:

*Un sistema laterale destro  $H_d$  di  $G$  rispetto ad  $H$  e un sistema laterale sinistro  $K_s$  di  $G$  rispetto a  $K$  hanno almeno un elemento comune quando, e solo quando, sono contenuti in un medesimo sistema bilaterale di  $G$  rispetto ad  $(H, K)$ ; e, in caso affermativo, detto  $g$  un*

(<sup>1</sup>) Se  $U$  e  $V$  sono sistemi di un gruppo, cioè insiemi di suoi elementi, con  $U \cap V$  indichiamo l'intersezione di  $U$  e  $V$ , cioè l'insieme degli elementi comuni ad  $U$  e  $V$ .

tale elemento, si ha :

$$H_d \cap K_s = g(g^{-1} Hg \cap K) = (H \cap gKg^{-1})g.$$

4. Sia  $T$  un sistema bilaterale di  $G$  rispetto ad  $(H, K)$  e sia  $J_d (J_s)$  l'insieme dei sistemi laterali destri (sinistri) di  $G$  rispetto ad  $H$  (a  $K$ ) contenuti in  $T$ . Infine siano  $H_d$  e  $H'_d$  sistemi di  $J_d$  e  $K_s$  e  $K'_s$  sistemi di  $J_s$ .

Dico che :

*Gli ordini dei sistemi  $H_d \cap K_s$  e  $H'_d \cap K'_s$  sono uguali* <sup>(2)</sup>.

Infatti siano  $g, g'$  e  $g_1$  elementi contenuti, rispettivamente, nei sistemi  $H_d \cap K_s$ ,  $H'_d \cap K'_s$  e  $H_d \cap K'_s$ .

Sarà

$$H_d = Hg = Hg_1, \quad K_s = gK,$$

$$H'_d = Hg', \quad K'_s = g'K = g_1K,$$

e inoltre

$$g_1 = hg \text{ e } g_1 = g'k,$$

con  $h$  elemento di  $H$  e  $k$  elemento di  $K$ ; quindi si avrà

$$\begin{aligned} H_d \cap K'_s &= g_1(g_1^{-1} Hg_1 \cap K) = hg(g^{-1} \cdot h^{-1} Hh \cdot g \cap K) = \\ &= h \cdot g(g^{-1} Hg \cap K) = h(H_d \cap K_s) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H'_d \cap K'_s &= (H \cap g_1 K g_1^{-1}) g_1 = (H \cap g' \cdot k K k^{-1} \cdot g'^{-1}) g' k = \\ &= (H \cap g' K g'^{-1}) g' \cdot k = (H'_d \cap K'_s) k. \end{aligned}$$

Ma allora l'ordine di  $H_d \cap K'_s$  eguaglia tanto quello di  $H_d \cap K_s$  quanto quello di  $H'_d \cap K'_s$  e dunque questi ultimi due sono eguali.

L'intersezione di un sistema di  $J_d$  con un sistema di  $J_s$  si dirà un *nucleo* di  $T$  — rispetto ad  $(H, K)$  — e l'ordine comune dei nuclei di  $T$  si dirà la *valenza* di  $T$  — rispetto ad  $(H, K)$  —.

Riassumendo le considerazioni fatte si ha il seguente enunciato complessivo :

*Un sistema bilaterale  $T$  di  $G$  rispetto ad  $(H, K)$  si può considerare e come una somma di sistemi laterali destri rispetto ad  $H$  e come*

<sup>(2)</sup> Occorre appena avvertire che si può parlare di *ordine* di un gruppo o di un sistema, anche se l'insieme dei suoi elementi è infinito. Esso è, in ogni caso, la potenza di detto insieme.

una somma di sistemi laterali sinistri rispetto a  $K$ . Detto  $J_a$  l'insieme di quelli e  $J_s$  l'insieme di questi:

1<sup>o</sup>) ciascun sistema di  $T$  appartiene ad uno, ed un solo, sistema di  $J_a$  e ad uno, ed un solo, sistema di  $J_s$ ;

2<sup>o</sup>) ciascun sistema di  $J_a$  interseca ciascun sistema di  $J_s$  secondo un nucleo di  $T$ ;

3<sup>o</sup>) i nuclei di  $T$  hanno tutti per ordine la valenza di  $T$ , e ciascun sistema di  $J_a$  e  $J_s$  è una somma di nuclei.

5. Introducasi ora l'ipotesi che  $G$  sia di ordine finito, di guisa che tali saranno pure  $H$  e  $K$ , i sistemi laterali e bilaterali di  $G$  considerati, e i nuclei di questi ultimi.

Si indichino con  $\mu, \nu$  gli ordini di  $H, K$  rispettivamente; con  $T_1, T_2, \dots, T_l$  i sistemi bilaterali di  $G$  rispetto ad  $(H, K)$  e con  $q_j$  la valenza di  $T_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ).

Un sistema laterale destro di  $G$  rispetto ad  $H$  contenuto in  $T_j$  è una somma di nuclei di  $T_j$ , a due a due privi di elementi comuni; d'altronde il suo ordine è  $\mu$ , dunque  $\mu$  è divisibile per  $q_j$ . Allo stesso modo si vede che  $\nu$  è divisibile per  $q_j$ ; ed è chiaro che, se si pone

$$\mu = \mu'_j q_j \quad \text{e} \quad \nu = \nu'_j q_j,$$

$T_j$  conterrà  $\mu'_j$  sistemi laterali sinistri di  $G$  rispetto a  $K$  e  $\nu'_j$  sistemi laterali destri di  $G$  rispetto ad  $H$ ; di guisa che l'ordine di  $T_j$  sarà

$$\nu \mu'_j = \mu \nu'_j = \frac{\mu \nu}{q_j},$$

e il numero dei nuclei di  $T_j$  sarà

$$\mu'_j \nu'_j = \frac{\mu \nu}{q_j}.$$

6. Si mantengano le ipotesi del n.<sup>o</sup> precedente e si supponga inoltre che gli indici di  $H$  e  $K$  siano uguali, di guisa che sarà  $\mu = \nu$  e  $\mu'_j = \nu'_j$ .

In  $T_j$  si avranno  $\mu'_j$  sistemi laterali destri di  $G$  rispetto ad  $H$  e altrettanti sistemi laterali sinistri di  $G$  rispetto a  $K$ , e le intersezioni di quelli con questi saranno i  $\mu_j^2$  nuclei di  $T_j$ .

Segue che  $g_{j,1}, \dots, g_{j,\mu'_j}$  saranno  $\mu'_j$  elementi di  $T_j$  per i quali risulta nel tempo stesso,

$$T_j = Hg_{j,1} + \dots + Hg_{j,\mu'_j} \quad \text{e} \quad T_j = g_{j,1}K + \dots + g_{j,\mu'_j}K,$$

se, e soltanto se, essi si distribuiscono, uno per uno, in  $\mu'_j$  nuclei di  $T_j$ , dei quali ne capiti uno — ed uno solo — in ciascuno dei  $\mu'_j$  sistemi laterali destri rispetto ad  $H$ , e in ciascuno dei  $\mu'_j$  sistemi laterali sinistri rispetto a  $K$ , contenuti in  $T_j$ .

Ora  $\mu'_j$  nuclei di  $T_j$  soddisfacenti a tale condizione si possono determinare in  $\mu'_j!$  modi differenti; e fissati  $\mu'_j$  nuclei sì fatti, per ciascun di essi un elemento può scegliersi in  $q_j$  modi diversi; dunque in  $T_j$  sistemi di  $\mu'_j$  elementi ciascuno che si comportino nel modo ora indicato ne esistono

$$\mu'_j! q_j^{\mu'_j}.$$

Da ciò segue subito il teorema più generale di quello del CHAPMANN enunciato nell'introduzione, e segue anche che il numero dei sistemi di elementi soddisfacenti alle condizioni da esso imposte è dato dal prodotto

$$\mu'_1! \mu'_2! \dots \mu'_l! q_1^{\mu'_1} q_2^{\mu'_2} \dots q_l^{\mu'_l}.$$

Morano Calabro, 13 agosto 1926