SUI SOTTOGRUPPI FONDAMENTALI DI UN GRUPPO, II (*)

Questa Nota si riattacca a quella che col medesimo titolo è stata pubblicata nel fascicolo precedente, ne mantiene le notazioni e ne continua la numerazione degli articoli e delle formule. È inteso pertanto che in quanto segue H è un gruppo non abeliano d'ordine finito di tipo τ, col centrale J_0, e G è un suo sottogruppo fondamentale, col centrale J, corrispondente al sistema fondamentale I. Inoltre τ' è il tipo di G o -2, secondo che G non è, od è abeliano, λ è il numero dei sistemi fondamentali di H contenuti in G, λ' è il numero dei sottogruppi fondamentali di H contenenti G e λ'' quello dei sottogruppi fondamentali di H contenuti in G.

5. È stato dimostrato dal prof. CIPOLLA [1] che è

$$\tau \geq \lambda. \tag{9}$$

Ebbene dico, in primo luogo, che:

È $\tau = \lambda$ quando, e solo quando, è $\tau = 1$;

di guisa che:

Se $\tau > 1$, è necessariamente $\tau \geq \lambda + 1$.

E infatti si supponga che sia $\tau = \lambda$, cioè che i sistemi fondamentali di H esterni a G siano soltanto due. Si indichino con I' e I'' codesti sistemi e con G' e G'' i sottogruppi fondamentali ad essi corrispondenti.

Sarà

$$H = G + I' + I'',$$

(*) Rend. Reale Accad. dei Lincei, (6) 6 (1927), pp. 441-445.

[1] Vedi: CIPOLLA, *Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito*, Nota III, n. 2 (« Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli », maggio e giugno 1911).

indi anche

$$H = G + G' + G'' ;$$

ma allora G e G' e G'' si tagliano a due a due in un medesimo sottogruppo invariante Γ di H, $\frac{H}{\Gamma}$ è un gruppo quadrinomio, e l'indice di Γ in G, G' e G'' è 2 [2].

Dico che è $\Gamma = J_0$.

Ed invero è chiaro intanto che Γ contiene J_0, perchè J_0 appartiene a ciascuno dei sottogruppi G, G' e G''; ed è pur chiaro che Γ, come intersezione di sottogruppi fondamentali, o coincide con J_0 o è la somma di J_0 e di un certo numero di sistemi fondamentali di H. Ma se I''' fosse un sistema fondamentale di H contenuto in Γ e G''' fosse il sottogruppo fondamentale ad esso corrispondente, G, G' e G'', contenendo Γ conterrebbero I''', indi G''' conterrebbe a sua volta I, I' e I''; ed allora, essendo $H = G + I' + I''$, sarebbe pure $H = G + G'''$, mentre ciò è impossibile [3].

Segue che l'indice di J_0 in G, G' e G'' è 2, ossia che si può porre, indicando con α (α', α'') un elemento qualsiasi di I (I', I''),

$$G = J_0 + J_0\,\alpha, \quad G' = J_0 + J_0\,\alpha', \quad G'' = J_0 + J_0\,\alpha''.$$

Di qua, badando che, essendo α, α' e α'' in I, I' e I'', anche $J_0\,\alpha, J_0\,\alpha'$ e $J_0\,\alpha''$ sono in I, I' e I'', si ricava che è addirittura

$$J_0\,\alpha = I, \quad J_0\,\alpha' = I', \quad J_0\,\alpha'' = I'',$$

$$G = J_0 + I, \quad G' = J_0 + I', \quad G'' = J_0 + I'',$$

e

$$H = J_0 + I + I' + I'',$$

ossia che è, come volevasi, $\tau = 1$.

Inversamente è chiaro che se $\tau = 1$ anche $\lambda = 1$, e dunque il teorema è dimostrato.

6. Ma le cose possono essere ulteriormente precisate; cioè possiamo dimostrare, in secondo luogo, che:

Se $\tau > 2$, *è addirittura* $\tau \geq \lambda + 2$.

[2] Cfr. G. Scorza, *I gruppi che possono pensarsi come somme di tre loro sottoggruppi* («Bollettino dell'Un. Mat. Italiana» anno V, dicembre 1926).

[3] Vedi la mia Nota or ora citata.

In virtù di quanto precede, questa osservazione sarà giustificata non appena sia fatto vedere che, se $\tau > 2$, non può essere $\tau = \lambda + 1$ [4].

Supponiamo, se è possibile, che sia $\tau > 2$ e $\tau = \lambda + 1$.

Giacchè il numero dei sistemi fondamentali di H è $\tau + 2$ e giacchè di questi $\lambda\ (= \tau - 1)$ sono contenuti in G, i sistemi fondamentali di H esterni a G saranno soltanto tre. Poniamo che essi siano I', I'' e I''', e indichiamo con G', G'' e G''' i sottogruppi fondamentali ad essi corrispondenti.

Se esistesse un sottogruppo fondamentale di H contenente propriamente G, i sistemi fondamentali di H esterni a tale sottogruppo sarebbero al più 2, indi, per il teorema dimostrato nel numero precedente, sarebbe, contro il supposto, $\tau = 1$; dunque un tale sottogruppo non esiste, G è massimo, $\lambda' = 1$ e i sistemi fondamentali di H contenuti in G, ma non in J, sono $\lambda - 1 (= \tau - 2)$.

Sia $\bar{I}$ un tal sistema e $\bar{G}$ il corrispondente sottogruppo fondamentale. Dico che $\bar{G}$ non può contenere nessuno dei sistemi I', I'' e I'''.

Infatti, se li contenesse tutti e tre, essendo $H = G + I' + I'' + I'''$, sarebbe $H = G + \bar{G}$, e ciò non è possibile. Se ne contenesse soltanto due, per es. I' e I'', sarebbe $H = G + \bar{G} + G'''$ e G''' conterrebbe l'intersezione di G e $\bar{G}$, indi $\bar{I}$ che è in G e che è pure in $\bar{G}$, perchè $\bar{I}$ è in G. Ora ciò è impossibile, perchè, se G''' contenesse $\bar{I}$, G conterebbe I''', mentre I''' è esterno a G.

Se infine ne contenesse soltanto uno e questo fosse, ad es., I', detto x un elemento di $\bar{I}$ (indi anche, come è stato osservato, di $\bar{G}$) ed x' un elemento di I', sarebbe xx' un elemento di $\bar{G}$ esterno a G e quindi un elemento di I'. Ma allora x' ed xx', appartenendo entrambi ad I', sarebbero permutabili ed x' riescirebbe un elemento permutabile con x, cioè un elemento di G, mentre I' è esterno a G.

Si conclude che $\bar{G}$ è contenuto propriamente in G; ossia che tutti i sottogruppi fondamentali di H corrispondenti ai $\lambda - 1$ sistemi fondamentali contenuti in G, ma non in J, sono contenuti propriamente in G; di guisa che è $\lambda'' - 1 \geq \lambda - 1$, cioè $\lambda'' \geq \lambda$. Ma per la (1) della Nota predecente è pure $\lambda'' \leq \lambda - \lambda' + 1$ e qui $\lambda' = 1$; dunque è proprio $\lambda'' = \lambda$, o, ciò che qui fa lo stesso, $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$.

[4] A questo proposito è bene avvertire che, per quanto risulta dalla determinazione dei gruppi di tipo 2 compiuta dal prof. CIPOLLA, se $\tau = 2$ è veramente $\tau = \lambda + 1$.

Intanto G è massimo, dunque se con ϱ si indica il suo genere, per il teorema stabilito nel n. 4 della Nota precedente, deve essere

$$\tau - \lambda + 2 \geq 2^{2\varrho-1}, \quad \text{ossia} \quad 3 \geq 2^{2\varrho-1}.$$

Si conclude che è $\varrho = 1$, indi $\lambda'' = 1$. Ma $\lambda'' = \lambda = \tau - 1$, dunque sarebbe, contro il supposto, $\tau = 2$.

7. Badando alla (4) della Nota precedente e a quanto fin qui è stato dimostrato, si ha che:

In ogni caso è

$$\tau \geq 2\tau' + \lambda' - \lambda'' + 5, \tag{10}$$

mentre se è $\tau > 1$, *si ha*

$$\tau \geq 2\tau' + \lambda' - \lambda'' + 6, \tag{11}$$

e se è $\tau > 2$, *si ha*

$$\tau \geq 2\tau' + \lambda' - \lambda'' + 7. \tag{12}$$

8. Dico ora che

È in ogni caso $\tau' \leq \tau - 3$ (5); *che se* $\tau > 1$ *è più precisamente* $\tau' \leq \tau - 4$ *e che se* $\tau > 3$ *è addirittura* $\tau' \leq \tau - 6$.

Per la (2) della Nota precedente è $\tau' \leq \lambda - \lambda' - 2$. Ma $\lambda' \geq 1$, dunque $\tau' \leq \lambda - 3$. Ora $\lambda \leq \tau$ e, se $\tau > 1$, è $\lambda < \tau$, dunque $\tau' \leq \tau - 3$ e se $\tau > 1$, $\tau' \leq \tau - 4$.

Ciò porta che per dimostrare il teorema basterà far vedere che, se $\tau > 3$, non può essere nè $\tau' = \tau - 4$, nè $\tau' = \tau - 5$.

Se è possibile, sia, in primo luogo, $\tau' = \tau - 4$.

Sarà, per la (12),

$$\tau \geq 2(\tau - 4) + \lambda' - \lambda'' + 7 \geq 2(\tau - 4) + 1 - \lambda'' + 7 = 2\tau - \lambda'',$$

ossia $\lambda'' \geq \tau = \tau' + 4$. Ora ciò è assurdo, perchè, per la (3) della Nota precedente, è $\lambda'' \leq \tau' + 3$.

Sia, in secondo luogo, $\tau' = \tau - 5$.

(5) Questa disuguaglianza è stata già rilevata dal prof. AMATO. Vedi la sua Nota: *Sul tipo minimo dei gruppi di rango 2* (« Rendic. della R. Accad. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli », dicembre 1918).

Sarà, per la (12),

$$\tau \geq 2(\tau - 5) + \lambda' - \lambda'' + 7 \geq 2(\tau - 5) + 1 - \lambda'' + 7 = 2\tau - \lambda'' - 2,$$

ossia $\lambda'' \geq \tau - 2 = \tau' + 3$. Segue, per una ragione già addotta, $\lambda'' = \tau' + 3$, ossia $\lambda'' = \tau - 2$.

Ora, ricordando la (2) della Nota precedente, si ha $\lambda \geq \tau' + \lambda' + 2 \geq \tau' + 3 = \tau - 2$; e, per il teorema del n. 6, $\lambda \leq \tau - 2$: dunque $\lambda = \tau - 2$, e allora G è massimo e $\lambda' = 1$.

Segue che qui è $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$; dopo di che il teorema che chiude la Nota precedente dà che, indicato con ϱ il genere di G, sussiste la disuguaglianza

$$\tau - \lambda + 2 \geq 2^{2\varrho - 1}, \quad \text{cioè} \quad 4 \geq 2^{2\varrho - 1}.$$

Ma allora $\varrho = 1$, indi $\lambda'' = 1$; ed essendo $\lambda'' = \tau - 2$ sarebbe, contro il supposto, $\tau = 3$.

9. Giova rilevare alcuni corollarii immediati del teorema ora stabilito.

Se $\tau = 1$, 2 o 3 la $\tau' \leq \tau - 3$, non potendo essere che $\tau' = -2$ neppure $\tau' \geq 1$, dà $\tau' = -2$; se $\tau > 3$, la $\tau' \leq \tau - 6$ dà, per la ragione addotta, $\tau' = -2$, se $\tau = 4$, 5 o 6; dunque:

Un gruppo di tipo $\tau < 7$ non ammette sottogruppi fondamentali che non siano abeliani (6).

Si supponga adesso che H sia di rango r e, conformemente a ciò, sia G_r un sottogruppo fondamentale di H di genere r e

$$G_r, G_{r-1}, \dots, G_2, G_1$$

una successione di sottogruppi fondamentali di H di cui ciascuno, diverso dall'ultimo, contenga propriamente il successivo.

Fra codesti sottogruppi soltanto G_1 può essere, eventualmente, abeliano; di più ciascun di essi, diverso dal primo, è un sottogruppo fondamentale non solo di H, ma anche di tutti quelli che, nella detta successione, lo precedono.

Ebbene indichiamo con τ_j il tipo di G_j, con l'intesa che se G_1 è abeliano, τ_1 stia per -2.

(6) Teorema già noto. Vedi la già citata Nota del prof. AMATO dalla quale risulta inoltre che esistono effettivamente gruppi di tipo 7 con sottogruppi fondamentali abeliani.

Poichè ciascuno dei gruppi $G_r, G_{r-1}, \ldots, G_3$ ammette in G_2 un sottogruppo fondamentale non abeliano, τ_j, per $j > 2$, è certo > 3; quindi è

$$\tau_r \leq \tau - 6,$$

$$\tau_{r-1} \leq \tau_r - 6,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\tau_3 \leq \tau_4 - 6,$$

$$\tau_2 \leq \tau_3 - 6,$$

$$\tau_1 \leq \tau_2 - 3,$$

$$-2 \leq \tau_1,$$

ossia, sommando membro a membro e riducendo,

$$-2 \leq \tau - 6r + 3,$$

indi

$$\tau \geq 6r - 5 \quad \text{ed} \quad r \leq \frac{\tau + 5}{6}.$$

Si ha così per il rango e il tipo una disuguaglianza più espressiva di quella $\left(r \leq \frac{\tau + 2}{3}\right)$ assegnata già dal prof. Cipolla.