MAGGIORE DETERMINAZIONE DELLA RELAZIONE INTERCEDENTE FRA IL RANGO E IL TIPO DI UN GRUPPO (*)

Sia H un gruppo (non abeliano, d'ordine finito) di tipo τ e G un suo sottogruppo fondamentale. Allora, se con τ' si indica il tipo di G o il numero -2, secondo che G non è od è abeliano, ho dimostrato recentemente che, per $\tau > 3$, è $\tau' \leq \tau - 6$; e da ciò ho dedotto che, indicato con r il rango di H, si ha, qualunque sia τ,

(1) $$r \leq \frac{\tau + 5}{6}\ (^1).$$

Proseguendo in tale ordine di ricerche ho potuto riconoscere che, supposto $\tau > 3$, riesce $\tau' = \tau - 6$ quando, e solo quando, H sia di tipo 4, oppure di tipo 7 e rango 2; e che quindi la disuguaglianza (1) poteva essere sostituita dall'altra ancora più espressiva

(2) $$r \leq \frac{\tau + 7}{7}.$$

Oggetto di questa Nota è appunto l'esposizione di questi nuovi teoremi.

1. Si supponga che λ, λ' e λ'' abbiano per G i significati ad essi attribuiti nelle Note già citate e che sia $\tau > 3$ e $\tau' = \tau - 6$.

Essendo $\lambda' \geq 1, \tau' = \tau - 6$ la disuguaglianza $\lambda \geq \tau' + \lambda' + 2$ (I, n. 2) dà $\lambda \geq \tau - 3$; ma, essendo $\tau > 3$, è pure $\lambda \leq \tau - 2$ (II, n.

(*) Rend. Reale Accad. dei Lincei, (6) 7 (1928), pp. 173-178.

(1) G. SCORZA, *Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo*. Note I e II. (Questi « Rendiconti », sedute del 20 novembre e 4 dicembre 1927). Nel testo queste Note saranno richiamate semplicemente con I e II.

6), dunque λ è $\tau - 3$ o $\tau - 2$, e di sistemi fondamentali di H fuori di G non ve n'è che 5 o 4. Segue che non può esistere alcun sottogruppo fondamentale di H che contenga propriamente G, perchè un tal sottogruppo dovrebbe contenere almeno due sistemi fondamentali più che G e almeno quattro meno che H; e che quindi è necessariamente $\lambda' = 1$.

Dopo ciò la disuguaglianza $\tau' \leq \frac{1}{2}(\lambda - \lambda' + \lambda'' - 5)$ (I, n. 3) diviene $\tau - 6 \leq \frac{1}{2}(\lambda + \lambda'') - 3$, ossia $\lambda'' \geq 2\tau - \lambda - 6$; e questa, per $\lambda = \tau - 3$, dà $\lambda'' \geq \tau - 3$ e, per $\lambda = \tau - 2$, $\lambda'' \geq \tau - 4$. Ma d'altronde ha da essere $\lambda'' \leq \tau' + 3 = \tau - 3$ (I, n. 3), dunque per $\lambda = \tau - 3$ è $\lambda'' = \tau - 3$ e per $\lambda = \tau - 2$ è $\lambda'' = \tau - 4$, oppure $\lambda'' = \tau - 3$.

Raccogliendo le osservazioni fatte si vede che si presentano come possibili, per ora, tre alternative; e cioè

I) o si ha $\lambda = \tau - 3$, $\lambda' = 1$, $\lambda'' = \tau - 3$;
II) o si ha $\lambda = \tau - 2$, $\lambda' = 1$, $\lambda'' = \tau - 4$;
III) o si ha $\lambda = \tau - 2$, $\lambda' = 1$, $\lambda'' = \tau - 3$.

2. Dico in primo luogo, che:

Nell'alternativa I) *è* $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 1$ *e* $\tau = 4$.

Infatti, quando essa si verifica, è $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$; quindi, detto ϱ il genere di G, poichè G è massimo, si ha $\tau - \lambda + 2 = 5 \geq 2^{2\varrho - 1}$ (I, n. 4). Ma allora è $\varrho = 1$, indi $\lambda'' = 1$, $\tau = 4$ e $\lambda = 1$.

3. Dico, in secondo luogo, che:

L'alternativa III) *è da escludere.*

Infatti si supponga che essa si verifichi e siano J_0 e J i centrali di H e G rispettivamente.

Essendo $\lambda' = 1$ e $\lambda = \tau - 2$, dei $\tau + 2$ sistemi fondamentali di H, uno, e sia I, è contenuto in G e J; $\tau - 3$, e siano $I_1, I_2, \ldots, I_{\tau-3}$, sono esterni a J, ma contenuti in G, e quattro, diciamo $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}$ e $I^{(4)}$, sono esterni a G. Dei $\tau + 2$ sottogruppi fondamentali di H quello corrispondente a G è, naturalmente, I; quelli corrispondenti ad I_j e $I^{(l)}$ $(j = 1, \ldots, \tau - 3;\ l = 1, \ldots, 4)$ siano rispettivamente G_j e $G^{(l)}$.

Poichè $\lambda'' - 1 = \tau - 4$, fra i sottogruppi $G_1, \ldots, G_{\tau-3}$ ve ne sono $\tau - 4$, e non più, e siano $G_1, \ldots, G_{\tau-4}$, contenuti propriamente in G. D'altronde, essendo $\tau' = \tau - 6$, il numero $\tau' + 2$, dei sottogruppi fondamentali di G viene ad essere $\tau - 4$, dunque $G_1, \ldots, G_{\tau-4}$ coincidono coi sottogruppi fondamentali di G.

Il gruppo $G_{\tau-3}$, per le ipotesi fatte, non è contenuto in G; ma l'intersezione di G e $G_{\tau-3}$ è un sottogruppo fondamentale di G, dunque essa coincide con uno dei gruppi $G_1, \ldots, G_{\tau-4}$; poniamo con $G_{\tau-4}$. Dopo ciò $G_{\tau-3}$, contenendo propriamente $G_{\tau-4}$, deve contenere almeno due sistemi fondamentali di H esterni a $G_{\tau-4}$, indi a G; quindi $G_{\tau-3}$ o contiene tutti e quattro i sistemi $I^{(l)}$, o ne contiene soltanto tre, o ne contiene soltanto due.

Ebbene facciamo vedere che tutte e tre queste conseguenze sono da respingere; dopo di che sarà dimostrato, come volevasi, che l'alternativa III) deve essere esclusa.

E infatti, se $G_{\tau-3}$ contenesse i quattro sistemi $I^{(l)}$, sarebbe $H = G + G_{\tau-3}$, e ciò non è possibile [2].

Se $G_{\tau-3}$ contenesse soltanto tre dei sistemi $I^{(l)}$, poniamo $I^{(1)}, I^{(2)}$ e $I^{(3)}$, sarebbe $H = G + G_{\tau-3} + G^{(4)}$ e $G^{(4)}$ conterrebbe l'intersezione di G e $G_{\tau-3}$ [3]. Ora I sta in G e sta pure in $G_{\tau-3}$, perchè $I_{\tau-3}$ appartiene a G; dunque $G^{(4)}$ conterrebbe I e per conseguenza G conterrebbe $I^{(4)}$: mentre $I^{(4)}$ è per ipotesi, esterno a G.

Si supponga infine che $G_{\tau-3}$ contenga soltanto due dei sistemi $I^{(l)}$ e che essi siano $I^{(1)}$ e $I^{(2)}$.

Dei sistemi I e $I^{(3)}$, I è interno a G e $G_{\tau-3}$, ma esterno a $G^{(3)}$, $I^{(3)}$ è esterno a G e $G_{\tau-3}$, ma interno a $G^{(3)}$, dunque ciascun elemento del prodotto $I\, I^{(3)}$ è esterno a G, $G_{\tau-3}$ e $G^{(3)}$, ossia appartiene ad $I^{(4)}$, e si ha $I\, I^{(3)} \leq I^{(4)}$, indi $I_{\tau-3}\, I\, I^{(3)} \leq I_{\tau-3}\, I^{(4)}$.

Ora $I_{\tau-3}$ è interno a G e $G_{\tau-3}$, ma esterno a $G^{(4)}$, ed $I^{(4)}$ è interno a $G^{(4)}$ ma esterno a G e $G_{\tau-3}$; dunque ciascun elemento del prodotto $I_{\tau-3}\, I^{(4)}$ è esterno a G, $G_{\tau-3}$, $G^{(4)}$, ossia appartiene ad $I^{(3)}$, e si ha $I_{\tau-3}\, I\, I^{(3)} \leq I^{(3)}$.

Segue che, se $i_{\tau-3}, i, i^{(3)}$ sono elementi comunque presi, il primo in $I_{\tau-3}$, il secondo in I e il terzo in $I^{(3)}$, esiste un elemento di $I^{(3)}$, e sia $i_1^{(3)}$, per il quale si ha $i_{\tau-3}\, i\, i^{(3)} = i_1^{(3)}$, ossia $i_{\tau-3}\, i = i_1^{(3)}\, i^{(3)-1}$; quindi $i_{\tau-3}\, i$ appartiene all'intersezione di G e $G^{(3)}$. Ma codesta intersezione è J_0, perchè, essendo $I^{(3)}$ esterno a $G_{\tau-3}$ ed a G — indi a G_1, $G_2, \ldots, G_{\tau-4}$ — $G^{(3)}$ non può contenere nessuno dei sistemi $I, I_1, \ldots$ $\ldots, I_{\tau-3}$; dunque $i_{\tau-3}\, i$ è un elemento di J_0.

Ora ciò è assurdo; ed invero da $i_{\tau-3}\, i = j_0$, con j_0 elemento di J_0, seguirebbe $i_{\tau-3} = j_0\, i^{-1}$ e $i_{\tau-3}$ sarebbe al pari di i e i^{-1}, un elemento di I.

(2) G. Scorza, *I gruppi che possono pensarsi come somme di tre loro sottogruppi.* (« Bollettino dell'Un. Mat. Ital. », dic. 1926).

(3) Cfr. la Nota or ora citata.

4. Dico, in terzo luogo, che:

Se si presenta l'alternativa II) *è* $\tau = 7$ *ed* $r = 2$.

Infatti si supponga che essa si verifichi e si mantengano per $J_0, J, I, I_1, \ldots, I_{\tau-3}, I^{(1)}, \ldots, I^{(4)}, G_1, \ldots, G_{\tau-3}$ e $G^{(1)}, \ldots, G^{(4)}$ i significati del n.° precedente.

Poichè nelle ipotesi attuali è $\lambda'' - 1 = \tau - 5$, dei gruppi $G_1, \ldots$ $\ldots, G_{\tau-3}$ quelli contenuti propriamente in G sono $\tau - 5$, e non più; quindi, se supponiamo che essi siano $G_1, \ldots, G_{\tau-5}$, ciascuno dei gruppi $G_{\tau-4}$ e $G_{\tau-3}$ non sarà contenuto in G, ma avrà per intersezione con G un gruppo che sarà sottogruppo fondamentale per esso e per G. Segue che esistono almeno due sistemi fondamentali di $G_{\tau-4}$ (di $G_{\tau-3}$) esterni a G, e quindi anche almeno due sistemi fondamentali di H esterni a G e contenuti in $G_{\tau-4}$ (in $G_{\tau-3}$). Ma si vede subito, come più sopra, che dei quattro sistemi $I^{(l)}$ non più di due possono appartenere a $G_{\tau-4}$ o $G_{\tau-3}$, dunque ciascuno di questi gruppi contiene due, e soltanto due, dei sistemi $I^{(l)}$.

Siano $I^{(1)}$ e $I^{(2)}$ quelli che stanno in $G_{\tau-4}$; dico che:

Quelli che stanno in $G_{\tau-3}$ *sono* $I^{(3)}$ *e* $I^{(4)}$.

Osservando che I è interno a G e $G_{\tau-4}$, ma esterno a $G^{(3)}$, mentre $I^{(3)}$ è interno a $G^{(3)}$, ma esterno a G e $G_{\tau-4}$, si riconosce che il prodotto $I\,I^{(3)}$ è esterno a $G, G_{\tau-4}$ e $G^{(3)}$; quindi si ha

$$I\,I^{(3)} \leq I^{(4)} \text{ e } I_{\tau-4}\,I\,I^{(3)} \leq I_{\tau-4}\,I^{(4)}.$$

Per ragioni analoghe il prodotto $I_{\tau-4}\,I^{(4)}$ riesce esterno a G, $G_{\tau-4}$ e $G^{(4)}$; dunque è $I_{\tau-4}\,I^{(4)} \leq I^{(3)}$ e, in definitiva, $I_{\tau-4}\,I\,I^{(3)} \leq I^{(3)}$.

Di qui segue, come più sopra, che se $i_{\tau-4}$ e i sono elementi comunque scelti, il primo in $I_{\tau-4}$ e il secondo in I, il prodotto $i_{\tau-4}\,i$ è un elemento dell'intersezione di G e $G^{(3)}$.

Ora, per un ragionamento fatto, questa conseguenza porterebbe ad un assurdo se l'intersezione di G e $G^{(3)}$ fosse J_0; e tale intersezione sarebbe veramente J_0, se $I^{(3)}$, come è esterno a G (indi a G_1, $G_2, \ldots, G_{\tau-5}$) e $G_{\tau-4}$ fosse anche esterno a $G_{\tau-3}$, perchè allora $G^{(3)}$ non potrebbe contenere, di G, nè I, nè $I_1, \ldots$, nè $I_{\tau-3}$; dunque $I^{(3)}$ è interno a $G_{\tau-3}$. Allo stesso modo si vede che $G_{\tau-3}$ contiene $I^{(4)}$ e quindi l'asserzione fatta è dimostrata.

Da essa discende che $H = G + G_{\tau-4} + G_{\tau-3}$; per conseguenza G, $G_{\tau-4}$ e $G_{\tau-3}$ si tagliano a due a due in un medesimo gruppo Γ, che ha in ciascuno di essi l'indice 2 e in H l'indice 4, e $\frac{H}{\Gamma}$ è un gruppo quadrinomio.

Il gruppo Γ, che contiene I, $I_{\tau-4}$ e $I_{\tau-3}$, è un sottogruppo fondamentale tanto per G, quanto per $G_{\tau-4}$ e $G_{\tau-3}$. Ora, fuori di Γ, $G_{\tau-4}$ e $G_{\tau-3}$ non contengono, ciascuno, che due sistemi fondamentali di H, quindi, *a fortiori*, che due proprî sistemi fondamentali; dunque (II, n. 5) $G_{\tau-4}$ e $G_{\tau-3}$ sono di tipo 1.

Da ciò e dalle uguaglianze

$$G_{\tau-4} = \Gamma + I^{(1)} + I^{(2)}, \qquad G_{\tau-3} = \Gamma + I^{(3)} + I^{(4)}$$

si deduce che dei tre sistemi fondamentali di $G_{\tau-4}$ due sono $I^{(1)}$ e $I^{(2)}$, e di quelli di $G_{\tau-3}$ due sono $I^{(3)}$ e $I^{(4)}$.

Il centrale di $G_{\tau-4}$ sta in Γ, dunque in G. Esso contiene J_0 e $I_{\tau-4}$, ma non contiene alcun altro dei sistemi fondamentali di H contenuti in G, cioè nessuno dei sistemi $I, I_1, \dots, I_{\tau-5}, I_{\tau-3}$, perchè, se uno di questi sistemi stesse nel detto centrale, G, oppure $G_1, \dots$, oppure $G_{\tau-5}$, oppure $G_{\tau-3}$ dovrebbe contenere $G_{\tau-4}$; dunque il centrale di $G_{\tau-4}$ è $J_0 + I_{\tau-4}$.

Analogamente il centrale di $G_{\tau-3}$ è $J_0 + I_{\tau-3}$.

Ora, in un gruppo di tipo 1 i sistemi fondamentali hanno ordine eguale a quello del centrale e i sottogruppi fondamentali hanno ordine doppio di quello del centrale; dunque

$$\text{ord}\,(J_0 + I_{\tau-4}) = \text{ord}\, I^{(1)} = \text{ord}\, I^{(2)}$$

$$\text{ord}\,(J_0 + I_{\tau-3}) = \text{ord}\, I^{(3)} = \text{ord}\, I^{(4)}$$

e

$$\text{ord}\,\Gamma = 2\,\text{ord}\,(J_0 + I_{\tau-4}) = 2\,\text{ord}\,(J_0 + I_{\tau-3}).$$

Di qui segue, in primo luogo, che

$$\text{ord}\, I^{(1)} = \text{ord}\, I^{(2)} = \text{ord}\, I^{(3)} = \text{ord}\, I^{(4)},$$

$$\text{ord}\, I_{\tau-4} = \text{ord}\, I_{\tau-3};$$

in secondo luogo che Γ è esaurito dagli elementi di $J_0, I, I_{\tau-4}$ e $I_{\tau-3}$, perchè l'ordine di I non è inferiore a quello di J_0; e infine che l'ordine di I coincide addirittura con quello di J_0.

Dopo ciò Γ risulta la somma dei suoi tre sottogruppi proprî $J_0 + I = J$, $J_0 + I_{\tau-4}$ e $J_0 + I_{\tau-3}$; dunque l'ordine di Γ deve essere doppio dell'ordine di ciascuno di questi sottogruppi ed è

$$\text{ord}\, J_0 = \text{ord}\, I = \text{ord}\, I_{\tau-4} = \text{ord}\, I_{\tau-3}.$$

Si indichi con k l'ordine comune di J_0, I, $I_{\tau-4}$ e $I_{\tau-3}$. Allora l'ordine comune dei sistemi $I^{(l)}$ sarà $2k$, quello di I' sarà $4k$, l'ordine comune di G, $G_{\tau-4}$, $G_{\tau-3}$ sarà $8k$ e infine quello di H sarà $16k$.

Ciò posto, da $G = J_0 + I + I_1 + \ldots + I_{\tau-3}$ si ricava che l'ordine di $I_1 + I_2 + \ldots + I_{\tau-5}$ è $4k$; d'altronde l'ordine di ciascuno dei sistemi $I_1, \ldots, I_{\tau-5}$ è multiplo di k, dunque il numero di questi sistemi è 2, 3 o 4, e corrispondentemente τ è 7, 8 o 9, e τ' è 1, 2 o 3. In ogni caso, essendo $\tau' \leq 3$, i sottogruppi fondamentali di G risultano tutti abeliani e quelli diversi da Γ sono

$$J_0 + I + I_1, \quad J_0 + I + I_2, \ldots, J_0 + I + I_{\tau-5}.$$

Ora, ciascuno di questi sottogruppi, contenendo il centrale $J = J_0 + I$ di G, ha per ordine un multiplo di $2k$, dunque gli ordini di $I_1, \ldots, I_{\tau-5}$ debbono essere multipli addirittura di $2k$, e il numero di questi sistemi è necessariamente 2.

Si conclude che $\tau = 7$; che dei nove sottogruppi fondamentali di H tre sono di tipo 1 e sei abeliani, e che quindi è pure, come volevasi, $r = 2$.

5. Raccogliendo le osservazioni fatte sin qui, si ha che:

Se $\tau > 3$, *è* $\tau' = \tau - 6$, *quando, e solo quando,* H *è di tipo* 4, *oppure di tipo* 7 *e rango* 2 (4); *di guisa che in ogni altro caso è* $\tau' \leq \tau - 7$.

Dopo ciò basta riprendere il ragionamento del n. 9 della Nota II già citata e sostituire alle disuguaglianze

$$\tau_r \leq \tau - 6, \quad \tau_{r-1} \leq \tau_r - 6, \ldots, \quad \tau_3 \leq \tau_4 - 6,$$

che ivi compariscono, quelle che discendono dal teorema ora enunciato, cioè

$$\tau_r \leq \tau - 7, \quad \tau_{r-1} \leq \tau_r - 7, \ldots, \quad \tau_3 \leq \tau_4 - 7,$$

per avere, come volevasi,

$$-2 \leq \tau - 7r + 5, \qquad \text{ossia } r \leq \frac{\tau + 7}{7}.$$

(4) La caratterizzazione dei gruppi di tipo 7 e rango 2, che qui si presentano, potrebbe essere ulteriormente precisata; si potrebbe far vedere, cioè, che per ciascun di essi il gruppo aggiunto (d'ordine 16) è (abeliano e) ad elementi tutti bilateri; ma su ciò crediamo inutile insistere.