SULLE MATRICI DI RIEMANN (*)

Con una Memoria, presentata al « Circolo Matematico di Palermo » fin dal marzo dell'anno scorso, che presto uscirà per le stampe, lo SPAMPINATO ha fatto vedere come lo studio sistematico dell'algebra reale connessa con una matrice di RIEMANN conduca spontaneamente a stabilire le belle formule che il ROSATI comunicò a questa Accademia con una Nota preventiva nel 2° semestre del 1927, e che servono a calcolare gli indici di singolarità e moltiplicabilità ed il rango di una qualsiasi matrice di RIEMANN, in funzione di convenienti caratteri dei suoi pseudo-assi (1).

Le dimostrazioni *in extenso* di codeste formule e di molti altri notevoli teoremi sono esposte in una Memoria del ROSATI, che comparirà nel tomo LIII dei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » e di cui già, per la gentilezza dell'Autore, ho ricevuto l'estratto.

Poichè lo SPAMPINATO non ha avuto occasione di fermarcisi, con le brevi osservazioni che seguono, intese soprattutto a ribadire l'idea fondamentale che soggiace ad una mia Memoria del 1921 (2), e cioè che *nella teoria delle algebre sia da ravvisare lo strumento più adatto per lo studio delle omografie di una matrice riemanniana*, desidero far rilevare in primo luogo che, per chi faccia ricorso alla teoria delle algebre e tenga presenti i risultati già da me conseguiti sulle matrici di RIEMANN, il *teorema fondamentale* del ROSATI sulle matrici pure può esser dedotto assai agevolmente da osservazioni

(*) Rend. Reale Accad. dei Lincei (6) 9 (1929), pp. 253-258.

(1) I caratteri in discorso introdotti dallo Spampinato non coincidono con quelli del Rosati, ma si passa dagli uni agli altri mediante relazioni semplicissime.

(2) G. SCORZA, *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann* (« Rend. del Circolo Matematico di Palermo », t. XLV, 1921). Nel testo questa Memoria sarà citata con la sigla *L*.

del Rosati stesso sugli pseudo-assi di una tal matrice, e in secondo luogo che l'affermazione riguardante gli indici di quelle che egli chiama *le varietà invarianti minime* è contenuta in proposizioni già stabilite in miei lavori precedenti.

A questo proposito avverto che, ad evitare ripetizioni inutili, quando in ciò che segue un'affermazione si giustificherebbe con ragionamenti perfettamente simili ad altri già svolti nella mia Memoria or ora citata, anzi che ripetere tali ragionamenti mi contenterò di rimandare ai passi della Memoria che li contengono.

1. Se una matrice riemanniana ω è dotata di pseudo-assi isolati ed M, N sono due tali pseudo-assi fra loro complementari, ciascuno degli spazi M ed N è mutato in sè da ciascuna omografia di ω.

Allora basta guardare alla forma delle equazioni di una tale omografia rispetto ad una piramide fondamentale i cui vertici siano tutti distribuiti fra M ed N, per riconoscere che il sistema lineare delle omografie reali non nulle di ω è il sistema congiungente di quello delle omografie singolari reali non nulle di ω aventi per primo asse uno spazio contenente M e per secondo asse uno spazio contenuto in N con quello delle omografie singolari reali non nulle di ω aventi per primo asse uno spazio contenente N e per secondo asse uno spazio contenuto in M.

Ciò posto si ha subito (cfr. L, parte 2^a, n. 9) che:

L'algebra reale connessa con una matrice di Riemann è riducibile quando, e solo quando, la matrice possiede pseudo-assi isolati.

Da ciò e da miei teoremi precedenti (L, Parte 2^a, nn. 14 e 52) discende che:

L'algebra reale connessa con una matrice di Riemann è, in ogni caso, semi-semplice. È addirittura semplice, se, e solo se, la matrice è priva di pseudo-assi isolati; primitiva, se, e solo se, la matrice è non singolare.

2. Sia G' il gruppo costituito dalle omografie reali di ω. Allora (cfr. L, Parte 2^a, nn. 16 e 17) si può asserire, in primo luogo, che:

Gli automoduli dell'algebra reale connessa con ω corrispondono biunivocamente agli automoduli di G';

e, in secondo luogo, che:

Ciascun automodulo non identico di G' è un'omografia singolare avente per primo e secondo asse due pseudo-assi complementari di ω.

Viceversa:

Se M ed N sono due pseudo-assi complementari di ω esiste uno ed un solo automodulo di G' col primo asse in M ed il secondo asse in N.

Infatti siano σ_M e σ_N due sistemi nulli reali degeneri di ω aventi per assi rispettivi M ed N. Se σ è un sistema nullo reale del fascio determinato da σ_M e σ_N, diverso da σ_M e σ_N, quindi non degenere, rispetto a σ M ed N sono l'uno polare dell'altro e il sistema nullo indotto da σ in N coincide con quello ivi indotto da σ_M. Ma allora l'omografia di G' data dal prodotto $\sigma_M \sigma^{-1}$ ha come primo asse M, come secondo asse N e in N induce l'identità; quindi essa è un automodulo, e il teorema è dimostrato.

Segue che:

Se ω è dotata di pseudo-assi (ossia, è singolare), vi è corrispondenza biunivoca fra gli automoduli non identici di G' e le coppie ordinate di pseudo-assi complementari di ω.

3. La matrice ω sia dotata di pseudo-assi e sia A un automodulo non identico dell'algebra reale $[\omega]'$ connessa con ω. Sia inoltre A^* l'automodulo di G' corrispondente ad A e siano M ed N il suo primo e il suo secondo asse.

L'algebra $A\,[\omega]'\,A$ è la sotto algebra di $[\omega]'$ costituita dagli elementi di $[\omega]'$ che hanno un modulo in A. Ad essa risponde in G' il sottogruppo $A^*\,G'\,A^*$, che ha per elemento identico A^*.

Evidentemente gli elementi di $A^*\,G'\,A^*$ sono omografie reali di ω che hanno per primi assi spazi contenenti M e per secondi assi spazi contenuti in N.

Inversamente, sia B^* un'omografia reale di ω che abbia per primo asse uno spazio contenente M e per secondo asse uno spazio contenuto in N.

Poichè A^* subordina in N l'identità, si vede subito che $A^*B^*A^*$ ha comuni con B^* il primo e il secondo asse, subordinando in N l'omografia subordinatavi da B^*; dunque è $A^*B^*A^* = B^*$.

Segue che $A^*G'A^*$ è esaurito dalle omografie reali di ω che hanno per primo asse uno spazio contenente M e per secondo asse uno spazio contenuto in N.

Fra codeste omografie ne esistono di quelle aventi per primo asse uno spazio per M e più ampio di M (indi intersecante N secondo uno pseudo-asse di ω), se, e soltanto se, N non è puro; dunque fra le omografie indotte in N da quelle di $A^*G'A^*$ esistono omografie singolari non nulle, se, e soltanto se, N non è puro.

Si conclude che l'algebra $A\,[\omega]'\,A$ non è, od è, primitiva, secondo che N non è, od è, puro.

Ora l'ordine di $A\,[\omega]'\,A$ è ciò che il ROSATI direbbe il *carattere* di N, e, per un teorema classico del FROBENIUS, un'algebra reale primitiva è dell'ordine 1, 2 o 4; dunque:

Il carattere di uno pseudo-asse puro di una qualsiasi matrice di Riemann è 1, 2 *o* 4.

Inoltre è chiaro per quanto è stato detto che:

Gli automoduli primitivi dell'algebra $[\omega]'$ *corrispondono biunivocamente agli automoduli di* G' *che hanno per secondi assi gli pseudo-assi puri della matrice.*

4. Dalle osservazioni precedenti, il cui parallelismo con quelle contenute in L, Parte 2ª, n. 19, è manifesto, segue (cfr. ibid., n. 20) che se I è il modulo di $[\omega]'$ e, nell'ipotesi che $[\omega]'$ non sia primitiva,

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

è una decomposizione di I in una somma di automoduli primitivi mutuamente nullifici, detti M_j ed N_j il primo e secondo asse dell'automodulo I_j^* di G' rispondente ad I_j,

$$N_1\,, N_2\,, \dots, N_n$$

è per ω un sistema fondamentale di pseudo-assi puri ed M_l è lo spazio congiungente gli spazi N_j con $j \neq l$.

Segue che se $[\omega]'$ non è semplice e le algebre semplici di cui è somma diretta sono in numero di t, la somma degli automoduli I_j si scinde in t somme parziali che danno i moduli di codeste algebre semplici e lo spazio congiungente gli spazi N_j corrispondenti agli automoduli I_j di una qualsiasi di codeste t somme parziali è il secondo asse del modulo dell'algebra semplice corrispondente, ed è uno dei t pseudo assi isolati minimi di ω.

5. E adesso si supponga che ω sia pura e del genere p, con l'indice di moltiplicabilità h e si indichino con $[\omega]$ l'algebra razionale connessa con ω e con R ed R' le algebre regolari (di ordine $4p^2$) costituite dalle matrici di ordine $2p$ i cui elementi siano rispettivamente numeri razionali o reali.

Allora $[\omega]$ è una sotto-algebra primitiva di R; quindi $h+1$ è un divisore di $4p^2$ e posto $4p^2 = (h+1)\,m$ è possibile determinare in R e fuori di $[\omega]$ degli elementi $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ sì che si abbia

(1) $$R = [\omega] + x_1[\omega] + x_2[\omega] + \ldots + x_{m-1}[\omega];$$

di guisa che i sistemi $[\omega], x_1[\omega], \ldots, x_{m-1}[\omega]$ risulteranno complementari in R. Inoltre è chiaro che, senza venir meno alla generalità, le matrici $x_1, \ldots, x_{m-1}$ possono esser supposte non degeneri.

Dalla (1) segue naturalmente l'ulteriore eguaglianza:

$$R' = [\omega]' + x_1[\omega]' + x_2[\omega]' + \ldots + x_{m-1}[\omega]'.$$

Ciò posto, sia x' un qualunque elemento di $[\omega]'$. Sarà

$$R'x' = [\omega]'x' + x_1[\omega]'x' + \ldots + x_{m-1}[\omega]'x'.$$

I sistemi $[\omega]'x', x_1[\omega]'x', \ldots$ hanno tutti il medesimo ordine, perchè nessun elemento non nullo di $[\omega]'x'$ può avere un nullifico sinistro in $x_1, x_2, \ldots$ o x_{m-1}, una volta che queste matrici sono tutte non degeneri; inoltre, essendo $[\omega]'x' \leq [\omega'], x_1[\omega]'x' \leq x_1[\omega]', \ldots$, i detti sistemi sono certo indipendenti; dunque l'ordine di $R'x'$ (cioè la caratteristica di x' in R') è il prodotto di m per l'ordine di $[\omega]'x'$ (cioè per la caratteristica di x' in $[\omega]'$). Ma, se γ è la caratteristica — nel senso ordinario — della matrice x', la caratteristica di x' in R' è $2p\gamma$, dunque, se γ' è la caratteristica di x' in $[\omega]'$, si ha $2p\gamma = m\gamma'$, ossia

$$\gamma = \frac{m\gamma'}{2p} = \frac{2p}{h+1}\gamma'.$$

Occorre appena avvertire che considerazioni perfettamente simili potrebbero essere istituite per gli elementi dell'algebra complessa connessa con ω.

6. Ciò posto, mantenuta l'ipotesi che ω sia pura, supponiamo in primo luogo che ω sia priva di pseudo-assi isolati.

In tal caso $[\omega]'$ è semplice; quindi, per un classico teorema di Cartan, essa è il prodotto diretto di un'algebra regolare per una algebra primitiva dell'ordine 1, 2 o 4 (equivalente al corpo reale, al corpo complesso o all'algebra dei quaternioni reali). Corrispondentemente gli pseudo-assi puri di ω, che corrispondono alle sottoalgebre di $[\omega]'$ aventi per moduli gli automoduli primitivi di $[\omega]'$, hanno tutti per carattere o 1, o 2, o 4.

Supponiamo, in secondo luogo, che $[\omega]_1$ non sia semplice, indi somma diretta di t algebre semplici

$$[\omega]_1', [\omega]_2', \dots, [\omega]_t'$$

se t è il numero degli pseudo-assi isolati minimi di ω.

L'ordine di $[\omega]_j'$, per il citato teorema di CARTAN, sarà a seconda del caso del tipo r_j^2, $2s_j^2$ o $4\varrho_j^2$, con r_j, s_j, ϱ_j interi; corrispondentemente il modulo di $[\omega]_j'$ sarà la somma di r_j, s_j o ϱ_j automoduli primitivi, in $[\omega]_j'$, indi in $[\omega]'$, avrà la caratteristica r_j^2, $2s_j^2$ o $4\varrho_j^2$, e per conseguenza, considerato come una matrice di ordine $2p$, avrà per caratteristica — nel senso ordinario —

$$\frac{2p}{h+1} r_j^2, \quad \frac{4p}{h+1} s_j^2 \quad \text{oppure} \quad \frac{8p}{h+1} \varrho_j^2.$$

Segue che il secondo asse dell'automodulo di G' corrispondente al modulo di $[\omega]_j'$, che è uno pseudo-asse isolato minimo di ω, sarà lo spazio congiungente di r_j, s_j o ϱ_j pseudo-assi puri indipendenti di ω e avrà la dimensione

$$\frac{2p}{h+1} r_j^2 - 1, \quad \frac{4p}{h+1} s_j^2 - 1, \quad \text{oppure} \quad \frac{8p}{h+1} \varrho_j^2 - 1.$$

Ora, poichè ω è pura, come il ROSATI ha fatto vedere, gli pseudo-assi isolati minimi di ω congiungono uno stesso numero di pseudo-assi puri indipendenti ed hanno la medesima dimensione, dunque se quel numero si indica con r e questa dimensione con λ, deve essere $r_j = r$, $s_j = r$, oppure $\varrho_j = r$ e, corrispondentemente,

$$\frac{2p}{h+1} r^2 - 1 = \lambda,$$

oppure

$$\frac{4p}{h+1} r^2 - 1 = \lambda,$$

o, infine,

$$\frac{8p}{h+1} r^2 - 1 = \lambda.$$

Ma fra λ ed r non può sussistere che una determinata di quest'ultime eguaglianze, dunque, di fronte al teorema di CARTAN, per tutte le algebre $[\omega]_1', \dots, [\omega]_t'$ si presenta una medesima delle tre alternative possibili.

Si conclude che anche nel caso attuale gli pseudo-assi puri di ω hanno caratteri eguali, il valor comune di questi caratteri essendo 1, 2 o 4, secondo che ciascuna delle algebre $[\omega]'_j$ è il prodotto diretto di un'algebra regolare per un'algebra primitiva di ordine 1, 2 o 4.

Con ciò il teorema fondamentale del ROSATI per le matrici pure è pienamente dimostrato.

7. Il prolungamento di $[\omega]'$ nel corpo complesso, quando ω è pura (o impura, ma priva di assi isolati), per quanto è detto in L, Parte 2ª, n. 37, o è un'algebra regolare o è somma diretta di algebre regolari del medesimo ordine. Tale teorema avrebbe potuto essere invocato nel numero precedente per dimostrare una parte delle conseguenze ivi dedotte dalle proprietà degli pseudo-assi isolati minimi dovute al ROSATI; ma da solo non avrebbe condotto alla conclusione cui si mirava.

Piuttosto osserveremo che esso, posto a riscontro col teorema che chiude un mio lavoro sulle algebre regolari ([3]), dà subito che le *varietà invarianti minime* del gruppo G', quando ω è pura (o impura, ma priva di assi isolati), sono varietà di SEGRE di 2ª specie aventi tutte i medesimi indici.

([3]) G. SCORZA, *Alcune proprietà delle algebre regolari* (« Note e Memorie del Circolo Matematico di Catania », vol. I, 1921), n. 8.