LA MATEMATICA COME ARTE (*)

Avevo lasciato da pochi giorni l'Università di Catania per quella di Napoli, allorchè una mattina del gennaio 1922, scendendo giù per via Santa Teresa, mi venne fatto di notare la lapide con la quale si rammenta la dimora che in una casa di quella strada fece il LEOPARDI negli ultimi anni di sua vita: e fu certo la fredda, ma trasparente chiarità mattinale del cielo, perfettamente terso e limpido, a farmi rinascer vivi nel ricordo i versi che il LEOPARDI, in un suo dialogo famoso, finge cantati in coro dalle mummie di FEDERICO RUYSCH.

In pochi altri luoghi, mi dissi, il pessimismo del LEOPARDI apparisce, come in questo, di tanto assoluta universalità, e ben poche volte è stato espresso con sì disperata energia e, insieme, con sì classica compostezza. Qui si ammette che la morte non tronchi la vita dello spirito, ma per soggiungere subito che, spogliatala d'ogni contenuto affettivo, la rende arida e vuota; il destino, posto dal fato al genere umano, di non poter raggiungere mai la beatitudine, nè durante, nè oltre la vita terrena, è qui riconosciuto con una gelida serenità stoica che ignora del pari lamenti e ribellioni; e i versi che nel LEOPARDI aderiscono sempre al pensiero, come guaina a lucida lama, in modo tanto più intimo e stretto quanto più sdegnoso di amplificazioni rettoriche e di inutili abbellimenti, rare volte hanno raggiunto una sì cristallina trasparenza e precisa nettezza.

Ora proprio in quei giorni, per guidare un giovane allievo nella preparazione della tesi di laurea, avevo avuto accasione di rileggermi l'agile libro del BAIRE sulle funzioni discontinue, ove l'intrinseca bellezza degli importanti teoremi dovuti alle ricerche personali dell'autore è posta in chiaro rilievo dalla scarna ma elegantissima lindura della esposizione.

Cosicchè, per un rapido ed affatto spontaneo processo associativo, l'ammirazione per la nuda e schiva schiettezza di quei versi fece subito riaffiorare alla soglia della mia coscienza la viva impressione estetica

(*) *Atti 19ª riunione della Soc. Ital. per il Progr. delle Scienze,* (1930), pp. 130-146.

che in quei giorni avevo novellamente ricevuto dalla semplice e linda finezza dello stile matematico del BAIRE.

*
* *

Col ravvisare nella sequenza di rappresentazioni ora rievocata un esempio calzante di processo associativo piuttosto che un accozzo fortuito di immagini mentali, io vengo implicitamente ad affermare che vi è luogo a valutazioni estetiche per le opere matematiche al pari di quanto accade per le opere letterarie.

Ed a ciò ho voluto alludere col titolo di questa mia conferenza, con la quale intendo di richiamare l'attenzione sul lato artistico della matematica e non certo di sostenere che la matematica sia da annoverare fra le così dette arti belle.

Parlo di arti belle piuttosto che di arte senz'altro, perchè io son ben lontano dal credere che dell'arte in generale sia possibile assegnare una definizione soddisfacente.

Chi accetta col CROCE, per dirlo con le parole del FLORA, che « *l'arte è l'intuizione pura, il momento della conoscenza ingenua, mediante la quale lo spirito teoretico si impadronisce del mondo e traduce l'impressione nell'espressione* » si forma di essa un concetto che, se non erro, in un senso è troppo lato, in un altro è troppo ristretto.

Troppo lato, perchè quando il CROCE da una parte, com'egli dice, identifica francamente la conoscenza intuitiva ed espressiva col fatto artistico od estetico, dall'altra, a chiarir con esempi che cosa si intenda per conoscenza intuitiva, adduce il rimprovero che il politico fa all'astratto ragionatore di non avere l'*intuizione* viva delle situazioni e condizioni di fatto, oppure la dichiarazione dell'uomo pratico di vivere di *intuizioni,* più che di ragionamenti, o, infine, il detto comune che certe verità non si possono dimostrare per sillogismi, ma conviene coglierle intuitivamente — non si vede come non riguardare per manifestazioni artistiche gli ordini concitati che di fronte a gravi contingenze politiche un capo di governo impartisce ai suoi funzionari (ordini suggeriti, non da una posata consapevole disamina critica di dati di fatto, ma bensì da una loro rapida valutazione intuitiva) o i teoremi coi quali spesso, come può attestare chiunque abbia sufficiente esperienza di ricerche scientifiche, si enunciano per subitanea illuminazione intuitiva verità che, solo più tardi, e mediante sforzi, nè brevi nè lievi, si riesce a confortare di dimostrazioni rigorose.

Troppo ristretto, perchè ammesso che arte non sia che espressione di un'intuizione, diventa un poco difficile sostenere che la Divina

Commedia, la Gerusalemme liberata e lo stesso Orlando Furioso siano sempre e soltanto arte.

Se l'Ariosto non avesse mirato che ad esprimere suoi fantasmi intuitivi, perchè avrebbe dovuto « *raccogliere per ogni parte* » del suo poema « *il parere e le impressioni dei maggiori letterati e umanisti* » del suo tempo, « *il Bembo, il Molza, il Navagero* » ? perchè « *come Apelle le sue dipinture* » avrebbe dovuto tenere « *per due anni l'opera sua nella sala della sua casa* », sentire i giudizi dei visitatori, discuterli con essi e infine regolarsi e risolversi a suo modo ?

Le correzioni di che sono irti i manoscritti dei poeti, le sostituzioni di verbo a verbo, di aggettivo ad aggettivo, con che le immagini svariano per numerosi stadi intermedi prima di trovare la loro configurazione definitiva, permettono davvero di credere che in sì penoso travaglio la conoscenza ingenua, alogica procede tranquillamente da sola senza invocare mai l'aiuto della conoscenza riflessa ?

Concediamo che Edgardo Poe nel suo saggio famoso « *The philosophy of composition* » fosse trascinato dall'amore del paradosso ad esagerare la sua tesi : ma, fatte pure tutte le possibili tare alle sue affermazioni, resta sempre che proprio uno dei poeti più originali e suggestivi, novelliere e stilista perfetto, postosi ad indicare in qual modo procedesse nel mettere insieme le sue opere e presa di mira, per codesto scopo, la sua celebre poesia sul Corvo, tranquillamente, dichiara : « *è mio proposito rendere manifesto che niente nella composizione di essa fu dovuto al caso o all'intuizione ; il lavoro procedette passo per passo fino al suo termine con la precisione e la rigidità consequenziale di un problema matematico* ».

*
* *

Ma non è il caso di insistere più a lungo su considerazioni che qui sarebbero dopo tutto un fuor d'opera ; tanto più che, con una sua bella pagina, il Croce stesso ci dà modo di chiarire quanto meglio non si potrebbe ciò che poco fa abbiamo affermato.

« *Le manifestazioni più alte,* scrive il Croce, *le cime da lontano risplendenti, della conoscenza intuitiva e della conoscenza intellettuale si dicono come già sappiamo, arte e scienza. Arte e scienza sono, dunque, diverse e insieme congiunte : coincidono per un lato, ch'è il lato estetico. Ogni opera di scienza è insieme opera d'arte. Il lato estetico potrà restare poco avvertito quando la nostra mente è tutta presa dallo sforzo di intendere il pensiero dello scienziato e di controllarne la verità. Ma non resta più inavvertito quando dall'attività dell'intendere passia-*

mo a quella del contemplare, e vediamo quel pensiero o svolgercisi innanzi limpido, netto, ben contornato, senza parole superflue, senza parole mancanti, con ritmo e intonazione appropriata; ovvero confuso, rotto, impacciato, saltellante. E grandi pensatori sono proclamati talvolta grandi scrittori: mentre altri pensatori restano scrittori più o meno frammentarii, se pure i loro frammenti valgano, scientificamente, opere armoniche, coerenti e perfette ».

Capisco che il Croce, quando parla di scienza come manifestazione della conoscenza intellettiva, intende riferirsi alla filosofia; perchè, come è ben risaputo, la matematica, la fisica, la chimica e quelle che comunemente si dicono scienze naturali per il Croce sono pseudo-scienze, non scienze, hanno valore pratico e non teoretico; ma se pure è da credere che, quando egli asseriva ogni opera di scienza essere insieme un'opera d'arte, non fossero presenti al suo pensiero che scritti di filosofi, e sebbene in altro luogo egli affermi che poesia e matematica sembrano così poco d'accordo come il fuoco e l'acqua, e l'*esprit mathématique* è fra i nemici più dichiarati dell'*esprit poétique*, non è senz'altro da supporre che, richiamatavi la sua attenzione, egli vorrebbe negare la possibilità di valutare esteticamente le opere di un Archimede o di un Lagrange. Tanto più che la scappatoia sarebbe facile; basterebbe dire che dove lo scrittore di matematica attinge la bellezza egli vi perviene non in quanto matematico, ma in quanto artista.

*
* *

A questo proposito è bene per altro avvertire che se fra matematica ed arte vi è luogo a distinguere, non è da pensare che fra di esse, come il Croce afferma e come comunemente si crede, vi sia aperta inimicizia e completa opposizione.

In primo luogo, se non si ha da aggirarsi nella zona grigia della mediocrità, tanto a far della matematica, quanto a far dell'arte, bisogna essere eminentemente dotati di fantasia creatrice.

Come si resta nel basso gregge dei versificatori e non si ascende alla nobile schiera dei poeti, ove non soccorra una grande agilità fantastica e quella pronta attitudine a trasportarsi in pieno nel mondo creato dalla fantasia, a viverlo come se fosse reale, che faceva esclamare al Metastasio in un sonetto famoso

Sogni e favole io fingo; eppure, in carte
Mentre favole e sogni orno e disegno
In lor, folle che io son!, prendo tal parte
Che del mal ch'io inventai piango e mi sdegno;

così il vero matematico si distingue dal calcolatore, magari abilissimo, e dal risolutore di problemi, magari dotato di virtuosità ammirevoli, per l'agevolezza a fingere nuovi tipi di questioni, ad escogitare nuovi processi costruttivi, a cogliere per rapidi ravvicinamenti, suggeriti da vivezza di fantasia, relazioni profonde fra teorie apparentemente diverse o proposizioni riposte, che, spesso, non si riesce a munire di prove apodittiche, se non dopo averne provvisoriamente ammessa la verità, averne sviluppate o intraviste le conseguenze, essersi rappresentata chiaramente la nuova situazione che per esse viene ad essere stabilita nella trama dei teoremi già conosciuti ed avervi vissuto per qualche tempo con la sicura fede di muoversi sopra un terreno solido e non in un mondo di fole.

Assai significativa è, nei riguardi di quanto ora è stato affermato, la circostanza che frequentissimi sono nella matematica come nelle arti gli esempi di precocità meravigliose.

Si pensi che le *Disquisitiones arithmeticae* di GAUSS, grosso volume in 4^0, ricco di altissimi contributi originali alla teoria dei numeri — prima dimostrazione rigorosa del celebre teorema di reciprocità nella teoria dei residui quadratici, intorno a cui si erano inutilmente affaticati LEGENDRE ed EULERO, teoria della composizione delle forme quadratiche, determinazione dei poligoni regolari costruibili con l'uso esclusivo della riga e del compasso — escirono alla luce quando l'autore non aveva che 24 anni; che ABEL e GALOIS, due dei più profondi geni che la matematica abbia mai avuto, veri lampi di giovinezza, sono morti il primo a 27 anni, il secondo a 22. E la serie degli esempi potrebbe essere continuata; ma non mette conto, poichè è notorio che l'OSTWALD, dall'avere osservato che le più grandi scoperte scientifiche sono generalmente fatte negli anni giovanili, dedusse la più forte obbiezione alla durata del *curriculum* scolastico che egli trovava eccessiva.

In secondo luogo, come per ogni artista, fra le passioni e i sentimenti che lo muovono e ne accendono la fantasia — agisca pure talvolta con appena percettibile forza — è da annoverare l'amore per il Bello, in che si riflette l'anelito incessante dello spirito umano di comporre in una sintesi di suprema e divina armonia l'amore per il Vero e l'amore per il Bene che, quasi fari a naviganti, segnano al suo pensiero teoretico e pratico la via del Progresso; così la molla segreta che spinge il matematico a compiere le sue ricerche con appassionato ed instancabile fervore, non è se non il desiderio di contribuire a rendere sempre più vivo lo splendore luminoso di che si ricinge nella sua mente l'organico sistema delle sue dottrine.

Giacchè, per quanto i profani sorridano, e non sempre con simpatica amabilità, della frequenza con la quale i matematici parlano di bei teoremi, di procedimenti dimostrativi eleganti e di trattati che si leggono come romanzi, per chi la coltiva con passione e con successo, il pregio migliore della matematica non consiste nell'immensa utilità sociale delle sue applicazioni, negar la quale, di fronte allo spettacolo della civiltà odierna poggiantesi sempre più ampiamente sui progressi della fisica, della chimica e della meccanica sarebbe lo stesso che negar la luce del sole; ma nel fatto che talune delle sue più elevate teorie, quando siano contemplate nel loro insieme, nel loro armonico dispiegarsi in sistemi coerenti e compatti, di quella veramente ferrea coerenza e di quella veramente solida compattezza di cui sarebbe vano cercare esempi più imponenti in altri campi dello scibile umano, dànno tale un'impressione di alta e pura Bellezza quale solo sono capaci di suscitare le più ispirate poesie e le pagine di musica più potentemente suggestive.

La sua stessa astrattezza, che tanto più si instaura quanto più essa procede ardita nel continuo risanamento ed affinamento delle sue teorie, ben lungi dall'affievolirne il valore estetico, come parrebbe dovesse avvenire all'osservatore profano e superficiale, ne accresce invece con moto sempre più accelerato, l'affascinante malìa, aumentandone la potenza e moltiplicandone la ricchezza di deduzioni

Si pensi a ciò che erano le nozioni di spazio e di numero fino a qualcosa meno che un secolo fa ed a ciò che esse sono divenute oggi.

Per quanto astratte anche a quel tempo, esse erano ancora assai crassamente corpulente in confronto alla tenuità vaporosa cui sono state ridotte dai processi di assottigliamento e, direi quasi, di scarnificazione successiva cui via via sono state sottoposte: la prima, a traverso lo sviluppo della geometria di posizione, delle teorie iperspaziali, delle geometrie non euclidee, della topologia e più ancora della teoria introduttiva alla così detta analisi generale; la seconda, a traverso le ardite introduzioni dei così detti immaginari di Galois e dei numeri ideali di Kummer che hanno condotto alla nozione assolutamente generale di corpo numerico.

Ora asserire che con ciò la visione dei fatti geometrici ed algebrici sia diventata meno chiara e più nebulosa, sarebbe quanto asserire che si vede meglio attraverso un vetro opaco, anzi che attraverso un limpido cristallo; e sostenere, che una teoria sia tanto più capace di suscitare impressioni estetiche in chi la rimira quanto meno sono astratti gli oggetti cui si riferisce, sarebbe quanto sostenere che la veduta del delizioso golfo di Napoli si gode meglio dalla spiaggia di Mergellina anzi che da un'alta terrazza del Vomero o di Posillipo.

Dal punto di vista astratto sono piani proiettivi e i piani euclidei ampliati mediante l'introduzione dei punti impropri, e le stelle di rette o di piani, e le totalità delle coppie di elementi degli enti razionali semplicemente infiniti, e le reti di curve o superficie, e così via, via ; e dunque ogni teoria dell'ordinaria geometria proiettiva piana, astrattamente considerata, è suscettibile di innumerevoli interpretazioni concrete differenti. Ed ecco che il teorema di PASCAL e il teorema di BRIANCHON, trovati a distanza di oltre un secolo e mezzo, allorchè le cose si guardavano in concreto — insieme con infiniti altri che oggi, per richiamare un'immagine del ROUSSEAU, potrebbero essere enunciati come per altrettanti giri di manovella — vi si convertono in atteggiamenti intuitivi diversi di una medesima proposizione astratta.

Ancora : ponetevi dal punto di vista formale ed ecco che un piano dell'ordinaria geometria proiettiva, soppressine i punti di una retta propria qualunque, vi diventa un piano euclideo ; ecco che le proprietà proiettive del quadrangolo completo — compresa quella del non allineamento dei suoi tre punti diagonali che per qualche tempo ha posto a dura prova la sagacia dei geometri — vi si rivelano quali immediate traduzioni di banali proprietà elementari dei parallelogrammi.

E così infine si considerino il teorema di WILSON sui numeri primi e quello esprimente il prodotto delle radici di un'equazione di secondo grado mediante il rapporto dei suoi coefficienti estremi ; e anzi che chiudersi fra gli stretti confini dell'ordinaria teoria dei numeri e dell'algebra elementare, si passi a più ampio respiro trasportandosi sul terreno della teoria generale dei corpi numerici. L'apparente estraneità di quei due teoremi vi si muta, come per un colpo di bacchetta magica, nella più intima parentela.

Ora bisognerebbe essere immuni d'ogni traccia di sensibilità matematica per non provare alcun compiacimento estetico nel riconoscere che proposizioni a prima vista *toto caelo* diverse, per certo loro lato comune, possono essere raccolte in un' unica proposizione generale.

*
* *

Ho parlato di sensibilità matematica: non vorrei che qualche ascoltatore si impennasse di fronte ad un tale accoppiamento di vocaboli.

Avvicinare sensi e matematica può sembrare un'ingenuità; e sarebbe, infatti, se con quella frase intendessi accostarli.

Ma con essa voglio dire soltanto che, al pari di quanto accade per le opere d'arte, si può essere più o meno capaci di subire il fascino di un'opera di matematica, più o meno pronti a riviverla in sè, a penetrarne gli intimi congegni e coglierne le armonie patenti o nascoste; e che vi è luogo a parlare di finezza, grossolanità o addirittura mancanza di gusto in analisi o in geometria, come, ad esempio, in musica od in pittura.

Giova chiarire quanto ora ho affermato col rilievo delle seguenti circostanze.

In primo luogo basta che ricorra alla sua esperienza personale, perchè ogni cultore di matematica riconosca che talune teorie esercitano sulla sua mente una simpatica attrattiva, mentre altre parlano sì alla sua intelligenza, ma non ne suscitano l'interesse, non ne mettono in moto l'attività fantastica. Precisamente come accade che si può essere magari sensibilissimi per la poesia e non avere alcun trasporto per la musica, essere fini intenditori di pittura e non avere alcuna attitudine ad apprezzare convenientemente le opere architettoniche. In certa sua prosa il Carducci, se non erro, scherza piacevolmente sul suo scarso gusto musicale.

In secondo luogo l'uso assiduo dei procedimenti deduttivi sviluppa nei matematici un caratteristico gusto per l'arte pura del ragionare, per sè considerata, indipendentemente dalle conseguenze importanti, o meno, cui conduce, a quel modo che i poeti sanno assaporare il puro suono delle parole, i pittori il puro colore.

Assistono i matematici a talune sottili disquisizioni evitanti con agilità sorprendente le numerose trappole tese dal non sgrossato senso comune con quella stessa abbrividente ammirazione con la quale si assiste alle virtuosità del giocoliere muoventesi sicuro sopra una corda tesa; guardano ai delicati intrichi di certe finissime argomentazioni connettentisi pronte fra di loro in un saldo, eppur leggero, tessuto logico con quel senso di fresca gioia col quale si guarda alla fragile bellezza di certi merletti preziosi.

In terzo luogo è ben noto che per l'avveduto scrittore di prose o poesie non esistono veri sinonimi e che tra le parole ritenute dal profano come perfettamente equivalenti egli sa scegliere con mano felice quella che a volta a volta fa al caso suo.

Ad esempio, nel dizionario italiano come sinonimi di chioma voi trovate *capellatura* e *capelliera*.

Ed ecco che nel *Sogno di un tramonto d'autunno* del D'ANNUNZIO, parlandosi di Pantéa, la cortigiana, e del suo amante, vi si dice: « *Egli era davanti a un arpicordo, ed ella s'era posta a giacere sul coperchio dell'istrumento e aveva disciolta la capellatura, e il suo viso era presso a quello del sonatore e una lista dei suoi capelli passava intorno al collo di lui, e così egli toccava l'arpicordo ed ella cantava con una voce sommessa quasi nell'orecchio a lui che s'inclinava* ».

Invece il CARDUCCI, in un suo discorso famoso, così conclude quello che nell'accesa fantasia gli parve dovesse essere fra qualche secolo la narrazione della leggenda garibaldina nella futura epopea: « *Liberato e restituito negli antichi diritti il popolo suo, conciliati i popoli intorno, fermata la pace, la libertà, la felicità, l'eroe scomparve; dicono fosse assunto ai concilii degli Dei della patria. Ma ogni giorno il sole, quando si leva sulle Alpi tra le nebbie del mattino fumante e cade tra i vapori del crepuscolo, disegna tra gli abeti ed i larici una grande ombra, che ha rossa la veste e bionda la capelliera errante su i venti e sereno lo sguardo siccome il cielo. Il pastore straniero guarda ammirato, e dice ai figliuoli: È l'eroe d'Italia che veglia su le Alpi della sua patria* ».

Ora non occorre avere un gusto letterario molto raffinato per sentire come ben si confaccia alla sensualità esasperata di quel « *poema tragico* » dannunziano la parola capellatura che fin nel suono ha un che di lenta, greve e sinuosa carezza; e come ben si addica alla vasta chioma errante sui venti della grande ombra immaginata dal CARDUCCI la parola capelliera dal suono più largo e, quasi direi, più sparso.

Del che è facile persuadersi ancora meglio con una controprova. Si supponga di scambiare nei due passi le due parole e si consideri a quali stridenti stonature si va incontro.

Ebbene, qualcosa di simile può dirsi anche per lo scrittore di matematica dotato di buon gusto.

La necessità di scegliere fra sinonimi, presa questa parola nel suo più stretto significato, non gli si presenterà che di rado, esigenze evidenti di precisione tecnica costringendolo ad un vocabolario assai circoscritto; ma in un certo senso può ben dirsi che la scelta delle notazioni sia una scelta fra sinonimi e ad essa egli non manca di dedicar le sue cure, poichè sa bene che notazioni opportunamente fissate non solo contribuiscono alla chiarezza ed all'eleganza del discorso o delle formule — certe sgarbate combinazioni di simboli degli autori negligenti dànno luogo ad impressioni di vero fastidio —, ma spesso hanno anche un non trascurabile valor suggestivo.

Avvertasi inoltre, che, di fronte a più enunciati della medesima portata logica, egli non resterà indifferente e troverà sempre modo di decidersi per l'uno piuttosto che per l'altro, a seconda del punto di vista che anche con la suggestione verbale vuol porre in evidenza, e, di fronte alla possibilità di dimostrare un teorema in più modi diversi, egli saprà sempre scegliere quello che meglio si attaglia all' indole ed all'armonia del suo scritto. Ma a quest'ultimo proposito è da avvertire che spesso a criteri di scelta non si assumono pure considerazioni d'ordine estetico, ma consuetudini tradizionali cui taluno si attiene con fedeltà degna di causa migliore.

Il motto « *geometrica geometrice* » ha fatto molto bene alla nostra cultura matematica; ha rimesso in onore, nell'insegnamento medio, i metodi ispirati ai classici *Elementi* di EUCLIDE, ha contribuito al sorgere e grandeggiare della scuola geometrica italiana, che è, nella scienza, uno dei maggiori vanti del nostro paese. Ma ha pur dato luogo ad esagerazioni non commendevoli ed a vere e proprie storture estetiche.

Vi sono cultori della così detta geometria sintetica che crederebbero di venir meno alla proprietà ed all'eleganza se si avvalessero di rappresentazioni analitiche e calcoli algebrici; pure, se riflettessero un poco meglio, si accorgerebbero che per un orecchio matematico fine nulla stride più dell'ingenuità sbrigativa con la quale per qualche tempo si è creduto di essersi resi indipendenti, in geometria, dall'algebra e dall'analisi.

Che cos'è in un piano per la ben nota *Introduzione* del CREMONA un linea d'ordine n?

Un luogo che da ciascuna retta del piano è incontrato in n punti — a proposito dei quali subito si aggiunge che non è obbligo siano tutti reali o tutti distinti.

In quanti punti si incontrano due linee di un piano degli ordini n ed n'?

Presto fatto: si ammette come « *principio evidente* » che il numero richiesto dipende soltanto da n ed n' e dopo ciò, spezzando una delle linee in rette, si scopre che esso è dato dal prodotto di n ed n'.

Già: e non si riflette che perchè quella funzione abbia senso — si pensi alla clausola che i punti di cui vi si parla possono essere non tutti reali e non tutti distinti — e perchè il principio ammesso come evidente possa apparire come plausibile, bisogna proprio tener fiso lo sguardo a quell'algebra da cui si vorrebbe stornarlo.

Con che, si osservi, non solo si va incontro a mancanze di rigore troppo gravi perchè l'eleganza dell'esposizione non ne sia compromessa, ma si vien meno proprio al canone che soggiace al motto: « *geometrica geometrice* » ; giacchè per quello stesso canone, pel quale si chiede che in geometria si proceda per vie geometriche, bisogna pure esigere che, in algebra, si proceda per vie algebriche; e la nozione di linea d'ordine n è una nozione sostanzialmente algebrica. In essa di geometrico non v'è che il linguaggio: concettualmente si tratta di nient'altro che dell'insieme delle soluzioni di un'equazione algebrica.

Del resto l'algebra, cacciata per la porta, rientra per la finestra, allorchè il CREMONA passa a stabilire — e qualcosa di simile potrebbe dirsi per altre occasioni — ciò che egli chiama gli importanti porismi di CHASLES, e cioè, in parole povere, a dimostrare che la curva e gli inviluppi algebrici di un piano sono rappresentati analiticamente da equazioni algebriche. Vero è che, per darsi l'illusione di rimanere nell'ambito della geometria sintetica, in codeste equazioni si fanno comparire non già le esecrate x ed y, o u e v della geometria analitica, bensì le espressioni esplicite delle coordinate di punto o di retta come rapporti di segmenti; ma sono codeste delle foglie di fico, che, come quelle apposte alle statue, non raggiungono altro fine che quello di richiamare ancora più vivamente l'attenzione dello spettatore su ciò che gli si vorrebbe nascondere.

*
* *

In nessun altro campo dello scibile umano è tanto ingiustificato elevare rigide barriere divisorie fra le sue varie regioni quanto in quello della matematica, poichè in niun altro l'organizzazione delle varie teorie in un tutto unitario sistematico ed armonico è spinta tanto innanzi quanto nella matematica.

Più si accentuano i progressi della geometria e dell'analisi, e più intime diventano le loro relazioni reciproche, più esse tendono a confondersi in teorie astratte generali che le comprendono entrambe.

L'ostinarsi a tenerle separate è come, per veder meglio, guardare con un occhio solo.

Si consideri per un momento la teoria staudtiana degli immaginari in geometria.

Come *tour de force* è certo altamente ammirevole; è un modello di rigore e di completezza: l'ampliamento dello spazio proiettivo reale a tre dimensioni in uno spazio proiettivo complesso è pienamente raggiunto e l'opera dello STAUDT, anche per parecchi decenni dopo la sua pubblicazione, è stata la sola che degli enti immaginari in geometria porgesse una teoria soddisfacente. Giacchè — è doveroso ricordarlo — sebbene l'introduzione di codesti enti fosse stata suggerita e presso che imposta dalla sistematica applicazione dell'algebra alla geometria, da CARTESIO in poi proseguita con sempre maggiori successi, e sebbene in geometria analitica non si sia avuto alcuno scrupolo a parlare di enti geometrici immaginari e prima e dopo l'opera dello STAUDT, ciò era fatto sorvolando con troppa facilità sulle esigenze della chiarezza e del rigore.

Ma chi conosce i *Beiträge* dello STAUDT sa pure a quali enormi lungaggini costringano le preoccupazioni puristiche dell'autore e quanta fatica venga spesa per costruire — in fondo, che cosa? — un modello concreto di spazio proiettivo complesso a tre dimensioni.

Mettiamo da parte le preoccupazioni puristiche, ricordiamoci che gli enti ai quali si riferisce una data teoria matematica non sono soggetti ad altra restrizione che a quella di soddisfare ai postulati assunti a base della teoria — il che ne lascia la natura largamente indeterminata —, esaminiamo le cose con gli occhi schiariti dai metodi della geometria analitica e subito ci accorgiamo che un modello concreto di spazio proiettivo complesso a tre dimensioni è, per dir così, a portata di mano.

La totalità dei suoi punti è quella delle classi in cui possono essere distribuite, di fronte alla relazione di proporzionalità, le quadruple ordinate di numeri complessi non tutti nulli; i suoi piani e le sue rette sono gli insiemi di codeste classi costituite dalle soluzioni di equazioni lineari omogenee a quattro incognite o dei sistemi di due così fatte equazioni indipendenti.

Così non solo guadagniamo immediatamente un modello concreto di spazio proiettivo complesso a tre dimensioni, dal quale è facile risalire ad infiniti altri, in particolare, a quello dello STAUDT, ma, considerando n-ple anzi che quadruple ordinate di numeri, e immaginando che il campo di variabilità di codesti numeri sia non già il corpo complesso, ma un qualsiasi corpo numerico, perveniamo alla nozione di spazio proiettivo con un numero qualunque di dimensioni in un qualunque corpo numerico. Donde tante geometrie proiettive quanti corpi numerici non isomorfi; fra le quali singolarissime quelle corrispondenti ai corpi numerici finiti.

L'importanza scientifica di codesta veduta è senz'altro manifesta e notevolissima è la chiarezza che essa apporta nelle questioni critiche di fondamenti — un bell'esempio di ciò è dato da una nota recente del COMESSATTI — ; ma ciò che qui meglio preme rilevarne è l'alto valore estetico.

Chi si attiene ad esso non può essere un ammiratore senza riserve dei *Beiträge* dello STAUDT e non può non risentirne un senso di fastidio e di peso. È un bel quadro, ben disegnato, ben rifinito in ogni suo particolare e rivelante una grandissima abilità tecnica, ma non animato da vivida ispirazione geniale e, per ciò stesso di modesta efficacia suggestiva.

*
* *

S'intende bene che con quanto ora è stato detto sugli inconvenienti cui può esporre l'eccessivo purismo in geometria — e qualcosa di simile potrebbe essere detto per l'eccessivo purismo in analisi — non ho voluto far altro che ricordare l'oraziano:

Est modus in rebus, sunt certi denique fines
Quos ultra citraque nequit consistere rectum ;

perchè non mi sfugge che ad affinare gli strumenti sintetici od analitici e ad aumentarne la potenza giova in un primo stadio imporsene l'uso esclusivo ; nè mi sfugge che mantenuto entro confini ragionevoli il purismo sia anzi fonte di bellezza. Ma a segnare, a volta, a volta, codesti confini occorre essere ben consapevoli delle intrinseche limitazioni del metodo cui si fa ricorso, non farsi illusioni sulla sua portata, cioè appunto non rinchiudervisi come tra cancelli di ferro, ma uscirne per confrontarlo con gli altri e decidere a ragion veduta fino a qual punto convenga avvalersene.

*
* *

Sta di fatto per altro che rinunzia in matematica alle emozioni estetiche più alte chi non si pone in grado di dominarne le teorie più elevate e di coglierne gli intimi legami che le avvivano ed illuminano reciprocamente.

Che sarebbe la teoria delle equazioni algebriche se le geniali vedute e le profonde divinazioni delle famose *Réflexions* del LAGRANGE non avessero dato luogo col RUFFINI, il CAUCHY ed il GALOIS alla teoria dei gruppi, che ne ha fatto emergere in luce meridiana le proprietà più riposte ?

E in analisi infinitesimale, se, dietro l'esempio dato dal CANTOR, non si fosse tratto sempre più largo partito della teoria degli insiemi dei punti, ove non si procede sicuri se non si è dotati di pronto intuito geometrico e di acuta finezza logica che si correggano e si perfezionino reciprocamente, si sarebbe raggiunta la perpiscuità di certe moderne trattazioni che per snellezza ed eleganza non hanno nulla da invidiare alle più svelte esposizioni sintetiche degli elementi di geometria proiettiva?

Il fascino maggiore di tutta l'opera del KLEIN e soprattutto delle sue meravigliose *Vorlesungen über das Ikosaeder* non proviene appunto dalla signorile padronanza che il KLEIN aveva dei rami più disparati della matematica, dalla disinvoltura con la quale sapeva coglierne i legami più nascosti e piegarli ai riscontri più inaspettati, dall'ampiezza delle sue conoscenze che gli dava modo di avvivare ogni suo scritto con brillanti suggestive ricostruzioni critiche della storia dei singoli argomenti e di tracciare con mano sicura larghi programmi di lavoro, che hanno dominato per decenni l'operosità sua e della sua scuola?

E l'alta bellezza della così detta geometria algebrica non proviene soprattutto dall'esser essa il terreno su cui viene, forse, a comporsi in bella armonia il massimo numero di teorie matematiche diverse?

Confluiscono in essa: le ricerche sulle funzioni algebriche e i loro integrali iniziate con giovanile ardimento dallo ABEL, portate a piena maturità dal RIEMANN, proseguite con grande successo dal CLEBSCH, dal NÖTHER, dal PICARD, dal LEFSCHETZ e dal SEVERI; la topologia, che, volta dal RIEMANN con trovata straordinariamente geniale ad illuminare talune delle più riposte proprietà delle curve algebriche, ha dato luogo a conseguenze sempre più fruttuose per tutte le varietà algebriche a traverso i lavori del BETTI, del POINCARÉ, del LEFSCHETZ, dell'ENRIQUEZ, del CHISINI e del SEVERI; la teoria delle funzioni ellettiche, estesasi via via in quella delle funzioni abeliane e delle funzioni automorfe che da ABEL a JACOBI ed HERMITE, WEIERSTRASS, RIEMANN, POINCARÉ e KLEIN ha richiesto i contributi dei maggiori ingegni matematici del secolo decimonono; le ricerche algebriche del BRILL e del NÖTHER, quelle inspirate a vedute algebrico-geometriche del SEGRE, del CASTELNUOVO, dell'ENRIQUEZ, del SEVERI e della fiorentissima scuola formatasi intorno ad essi; ed infine quelle di natura aritmetico-algebriche del DEDEKIND e del WEBER. Nè ad essa sono rimaste estranee l'ordinaria teoria dei numeri con la quale varie volte è venuta a contatto, la teoria generale degli interi algebrici che al ROSATI ha permesso di dedurre profonde proprietà delle corrispondenze, e le così dette algebre a più unità, da cui, se mi è lecito ricordarlo, ho mostrato come possano esser dedotte conseguenze interessanti per tutte quelle branche di geometria ed analisi che si dipartono come da tronco comune dalla teoria delle matrici riemanniane.

*
* *

Che più si salga in alto, meglio si colga il lato estetico della matematica è ben naturale, a qual modo che più elevata è la cima da cui si guarda, più vasto e grandioso è il panorama che si gode; ma non è detto — e me ne appello a quanti nella loro giovinezza abbiano avuto la fortuna di farne la conoscenza sotto la guida di un insegnante che non fosse uno stanco fonografico ripetitore di rifritture manualistiche — non è detto che la matematica elementare sia del tutto inadatta a suscitare impressioni di bellezza.

Perchè — si tenga ben presente — la matematica che si insegna nelle scuole secondarie è ben poca cosa in confronto di quanto di essa non vi penetra, nè può penetrarvi; ma è tutt'altro che un'inezia nel quadro generale della cultura.

Essa è il campo nel quale il pensiero umano ha trovato per la prima volta, con assoluta pienezza, l'indicibile gioia di dominare con la ragione i dati bruti dell'esperienza sensibile, di introdurre l'ordine nel caos delle apparenze; il campo nel quale la logica ha fatto le sue prime armi, conseguite le prime grandi vittorie e guadagnata la sicura fiducia nelle sue forze.

La sistemazione delle proprietà geometriche suggerite dall'esperienza in un corpo razionale di dottrine, costituitasi attraverso lunghe penose ricerche dei geometri greci e giunta a noi nella codificazione definitiva dei classici *Elementi* di Euclide, ha importanza enorme e per la matematica e per la filosofia. Tra le quali, in quel periodo eroico della speculazione, correvano tanto intimi rapporti che non può formarsi una chiara idea di parecchi problemi agitati dai filosofi greci chi non si premunisca della necessaria preparazione specifica per coglierne il sostrato matematico e valutarne esattamente la portata.

Cosí, ad esempio, come hanno mostrato il Tannery e lo Zeuthen, i famosi λόγοι di Zenone Eleate non sono che la riduzione all'assurdo delle tesi sostenute dai pitagorici sulla struttura atomistica dello spazio e del tempo in aperto contrasto con la scoperta, ad essi appunto dovuta, dell'esistenza di grandezze fra loro incommensurabili; e il Milhaud, il Vailati e l'Enriquez hanno dato plausibili interpretazioni della teoria platonica delle idee considerandola nei suoi rapporti con la matematica.

I dialoghi platonici sono una meraviglia d'arte e di bellezza, in gran parte perchè sono una vivacissima commovente riproduzione del drammatico travaglio a traverso il quale il pensiero esce fuori del pelago tempestoso delle sensazioni per approdare alle rive serene delle idee. Ora — si ricordi il *Menone !* — sarebbe ingenuo supporre che di tale travaglio l'autore non vedesse gli esempi più cospicui negli sforzi dei geometri per costituire le loro conoscenze in sistema razionale, cui, come è ben noto, egli stesso efficacemente partecipava. E non è senza significato a tale proposito che uno dei dialoghi nei quali meglio rifulge la singolarissima divina figura del filosofo-poeta, che seppe mirabilmente congiungere la più alta potenza speculativa con la più snella agilità fantastica, è pur quello nel quale si giudica una vera meraviglia l'esser TEETETO ed altri allievi del geometra TEODORO risaliti da pochi esempi del maestro alla determinazione completa degli interi a radici quadrate irrazionali, e si esorta il giovane TEETETO a non disperare delle sue forze, di fronte all'insuccesso dei suoi primi tentativi nel cercare di definire che cosa sia conoscenza, appunto per la prova che esse avevan dato di sè in quella questione matematica.

È ben noto infine che, secondo ARISTOTILE, a torto qualche sofista, tra cui ARISTIPPO, accusava le matematiche di non dir nulla intorno al bello ed al bene; poichè esse, sebbene non ne pronunzino i nomi, ne parlano in sommo grado rilevandone le manifestazioni nei rapporti delle cose.

*
* *

Ne parlano, si, in sommo grado, ciò è fuori dubbio; se ne avvide ARISTOTILE, infinitamente più agevole è accorgersene oggi dinanzi allo spettacolo magnifico e solenne del loro sviluppo grandioso. Ma ne parlano con voce che non tollera frastuoni estranei, che non si coglie se non avvicinata con animo puro, libero, sgombro di scorie, cioè di preoccupazioni utilitarie; aperto soltanto, con totale abbandono, al fascino divino della contemplazione serena.

Un'opera di matematica può leggersi con l'appassionato interesse col quale si seguono le avventure dei personaggi di un romanzo ben concepito, narrate con prosa limpida e vivace: ma a patto che chi la compone non si attenga pigramente a norme fissate da consuetudini, non riproduca pedissequamente disegni tracciati da altri; ma ripensi e rimaneggi il tutto, da sè, con piena consapevolezza, argomento per argomento, dello stato in cui la scienza, nell'atto che egli scrive, ha saputo portarlo. Non gli sfuggiranno così le nuove situazioni che per i progressi via via realizzati son venute a crearsi nelle teorie prese di mira e che talvolta obbligano a mutarne, *ab imis fundamentis,* l'assetto tradizionale; e quando la sua opera sarà compiuta non avrà sentor di muffa e di stantio, bensì darà quel senso di fragrante freschezza che sempre diffondono intorno a sè le creazioni originali dello spirito umano.

Una lezione di matematica può essere un'opera d'arte e non uno stanco ripetio di postulati, teoremi e corollari infilzati l'un dietro l'altro con smorta meccanicità quasi si trattasse delle parole irrelate di una filastrocca da bambini; ma a patto che chi l'impartisce non si presenti dinanzi alla scolaresca senza essersi reso, per profonde, diuturne meditazioni precedenti, tanto sicuro padrone di ciò che ha da dire, da poterlo esporre non quale apparisce da un punto di vista arbitrariamente prescelto e prefissato, — quello, poniamo, del libro di testo che eventualmente si segue, scritto magari da chi parla, ma per un pubblico fittizio e irreale — sibbene quale si configura dal punto di vista, che, a volta a volta, suggerisce la particolare, determinata, *attuale* situazione sua e dell'uditorio cui si rivolge. Suggerimenti che non saranno male interpretati, ove soccorrano la passione per la scuola e la simpatia pei giovani coi quali si viene in contatto!

Non v'è miniera tanto sfruttata che non nasconda ancora qualche pietra preziosa, con cui premiare le fatiche del ricercatore pertinace; non v'è campo sì bene mietuto, che nulla offra all'opera delle spigolatrici; non v'è argomento così trito che non permetta, a chi lo ricontempli con sguardo fresco ed acuto, di arricchirlo di qualche ulteriore osservazione, piegarlo a qualche ulteriore riscontro, presentarlo ai discenti in maniera tale da farlo apparire come balzante su, allora per allora, leggero, spontaneo e nuovo, dal vivo fluir del discorso.

I teoremi son quel che sono, d'accordo; ma non sono cose morte, pietra contro pietra, immobili, inerti come possono apparire a chi scorra con occhio disattento un trattato d'analisi o di geometria, a chi legge e non pensa.

Non sono anelli di una catena, disposti in serie lineare, quella e non altra, realizzata dal particolare testo che si legge; sono nodi di una ampia fittissima rete che, qualunque di esso si sollevi, tosto è seguito dagli altri nel suo movimento.

Basta investirli della luce del pensiero perchè diventino cose vive, perchè rivelino una straordinaria mobilità, una sveltissima attitudine ad organizzarsi liberamente fra loro in formazioni nuove ed inaspettate, perchè si recingano agli occhi di chi li rivive del luminoso splendore della Bellezza.