SULLA RIDUZIONE A FORMA CANONICA DI UNA CLASSE SPECIALE DI MATRICI(*)

Con due Note, portanti il medesimo titolo di questa e pubblicate nei fascicoli dell'8 gennaio e 5 marzo 1933 dei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, il dott. Salvatore AMANTE ha risoluto il problema della caratterizzazione delle matrici a forma canonica equivalenti a matrici (nel corpo complesso) del tipo

$$x = \begin{Vmatrix} a_1 , & a_2 , & a_3 , & \ldots & a_{n-1} , & a_n \\ 0 , & a_1 , & a_2 , & \ldots & a_{n-2} , & a_{n-1} \\ 0 , & 0 , & a_1 , & \ldots & a_{n-3} , & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 , & 0 , & 0 , & \ldots & 0 , & a_1 \end{Vmatrix} .$$

Il metodo che egli segue porta a considerazioni, per quanto di natura elementare, discretamente faticose: non mi sembra pertanto del tutto inutile mostrare come ai suoi risultati si possa pervenire per via agevole e piana quando si tenga conto della teoria generale della riduzione a forma canonica delle matrici ad elementi complessi.

1. Si indichi con $c_{r,s}$ la matrice quadrata d'ordine n per la quale l'elemento di posto (r , s) è 1 e tutti gli altri sono nulli; indi si ponga

$$I_k = \sum_i^{1..n-k+1} c_{i,i+k-1} \qquad (k = 1 , 2 , \ldots , n),$$

(*) *Rend. Reale Acc. di Scienze Fisiche e Mat. di Napoli,* (4) 4 (1934), pp. 154-156.

di guisa che I_1 sarà la matrice identica di ordine n e per la matrice x si avrà

$$x = a_1 I_1 + a_2 I_2 + \dots + a_n I_n .$$

Le radici caratteristiche di x sono tutte eguali ad a_1; per conseguenza la matrice canonica ad essa equivalente si troverà determinando la *segnatura* (1) della matrice (pseudonulla o nulla):

$$y = a_2 I_2 + \dots + a_n I_n .$$

Scartato il caso privo di interesse in cui è $y = 0$, supponiamo che le $a_2, \dots, a_n$ non siano tutte nulle; e fra esse sia a_{h+1} la prima non nulla, di guisa che potrà scriversi

$$y = a_{h+1} I_{h+1} + \dots + a_n I_n .$$

Da

$$I_k = \sum_i^{1..n-k+1} c_{i,i+k-1} \, , \quad I_{k'} = \sum_j^{1..n-k'+1} c_{j,j+k'-1}$$

badando che

$$c_{i,j}\, c_{r,s} = \begin{cases} 0 \, , & \text{se } j \neq r \\ c_{i,s} \, , & \text{se } j = r \, , \end{cases}$$

si trae

$$I_k I_{k'} = \sum_i^{1..n-k+1} \sum_j^{1..n-k'+1} c_{i,i+k-1}\, c_{j,j+k'-1} =$$

$$= \sum_i^{1..n-k-k'+2} c_{i,i+k+k'-2} = I_{k+k'-1} \, ,$$

se $k + k' - 1 \leq n$, e

$$I_k I_{k'} = 0$$

se $k + k' - 1 > n$.

(1) Per questa nozione e per quanto segue veggasi G. Scorza, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921) pag. 421 e seg.ti

Ciò porta che le $I_1, \dots, I_n$ sono a due a due permutabili, e che:

$$y^2 = a_{h+1}^2 I_{2h+1} + \dots , \tag{1}$$

$$y^3 = a_{h+1}^3 I_{3h+1} + \dots , \tag{2}$$

e, in generale, per $sh + 1 \leq n$

$$y^s = a_{h+1}^s I_{sh+1} + \dots , \tag{3}$$

dove nei secondi membri delle (1), (2), (3) si è indicato soltanto il termine che interessa, cioè quello che contiene la I_k con indice minimo.

Indicati con q ed r il quoziente e il resto della divisione di $n - 1$ per h, si avrà dunque

$$y^s = a_{h+1}^s I_{sh+1} + \dots \qquad \text{per } s = 1, 2, \dots, q$$

$$y^{q+1} = 0 .$$

Le caratteristiche delle matrici

$$y, y^2, \dots, y^q, y^{q+1}$$

sono

$$n - h, n - 2h, \dots n - qh, 0,$$

quindi le loro nullità sono

$$h, 2h, \dots qh, n$$

e la segnatura di y è

$$(h, h, \dots, h, r + 1)$$

dove il numero dei termini eguali ad h è q.

Segue che la matrice canonica equivalente ad x, con la terminologia del CIPOLLA adottata dal dott. AMANTE, ha $r + 1$ catene di ordine q ed $h - r - 1$ catene di ordine $q - 1$.

In ciò consiste il teorema enunciato dal dott. AMANTE, teorema che, naturalmente, è invertibile.