KILKA UWAG TYCZĄCYCH SIĘ

FUNKCYJ WIELOWYMIAROWYCH

PRZEZ

Władysława TRZASKĘ.

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa dnia 7 września 1871 roku.

Wiadomo w jaki sposób Koszi (Cauchy) opierając się na ilościach *złożonych* (¹) (urojonych) drugiego stopnia zbudował teorję funkcyj, która następnie rozwinięta znakomitemi pracami panów Pjuize (Puiseux), Brijo (Briot) i Bukie (Bouquet), Żordan (Jordan), Loran (Laurent) i innych, stanowi dzisiaj gałęź matematyki, odznaczającą się ścisłością i wykończeniem.

Poniżéj znajdzie czytelnik uogólnienie pewnéj małéj cząstki tych pojęć Kosziego, oraz dowodzenie pewnego twierdzenia tyczącego się pewnego rodzaju funkcyj tak uogólnionych.

Hamilton (²) zdaje się być pierwszym, który zaczął uważać ilości złożone w całéj ogólności. Po nim najbardziéj uprawiali ten przedmiot liczni matematycy angielscy jak Cayley, Kirkman, de Morgan, John i Charles Graves, Carmichael, Cockle i wielu innych. Powstało tym sposobem wiele odmian ilości złożonych obdarzonych różnemi własnościami, jak *couples*, *douplets*, *triplets*, *tessarines*, *octaves*, *quaternions*, *pluquaternions*, *sets*, *algebra of the* n*th character* i t. d. Pomiędzy matematykami innych krajów zasługuje na uwagę przed innemi Koszi, który dał początek tak zwanym *kluczom algiebrycznym* (*clefs algébriques*), (³) a które według zdania Hamiltona są szczególnym przypadkiem jego *sets* i późniejszemi od tych ostatnich. Możnaby tu wspomnieć innych jeszcze, lecz prace ich w ogólności nieliczne z wyjątkiem prac włoskiego matematyka pana Bellawitis (Bellavitis) twórcy teorji zwanéj przez niego *Metodo* albo *Calcolo delle Equipollenze* (⁴), oraz naszego ziomka pana Wawrzyńca Żmurki, który zebrał prace swoje nad ilościami złożonemi przestrzeni trojwymiarowéj i ogłosił takowe we Lwowie w roku 1864 w obszerném dwutomowém dziele (⁵). Zwrócimy też także uwagę na rachunek gieometryczny szwedzkiego matematyka pana Dillner. Kończąc tę krótką wycieczkę historyczną o ilościach złożonych, dodam, że najbardziéj rozwiniętą (po ilościach złożonych drugiego stopnia) jest dzisiaj bez zaprzeczenia teorja *czwórków* (⁶) (quaternions) stworzona przez Hamiltona, który oprócz prac umieszczonych w różnych pismach czasowych a poświęconych jużto teorji czwórków, już też ich zastosowaniom do geometryi, mechaniki, fizyki, i t. d. poświęcił téj teorji nadto dwa obszerne dzieła. Teorja czwórków doczekała się już w Anglji dzieł wykładowych (elementarnych) między któremi piękne dzieło pana Tet

(Tait) zajmować będzie długo pierwsze miejsce (7) tak pod względem wykładu, jako też z powodu licznych i rozmaitych zastosowań.

Przystąpię teraz do określenia pewnych ilości złożonych podług pojęć Hamiltona i do rozciągnięcia do nich pojęcia funkcji Kosziego.

Hamilton w swych poszukiwaniach uważał ilości złożone najogólniejsze pod nazwiskiem *sets*. Jako szczególny przypadek tych *sets* czyli *ilości zbiorowych*, z powodów pewnych rozumowań teoryecznych nastręczyły mu się ilości, które nazwę *złożonemi wielowymiarowemi* a które określę w następujący sposób.

Oznaczmy przez $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_l$ jedności urojone jakiekolwiek, przez $z_1, z_2, \ldots, z_l$ tyleż ilości rzeczywistych, wtedy wyrażenie

$$z = \iota_1 z_1 + \iota_2 z_2 + \ldots + \iota_l z_l$$

nazwiemy *ilością złożoną lwymiarową* lub w ogólności *wielowymiarową*. Dodam przytém, że zmieniłem cokolwiek znakowanie Hamiltona, który pisał dopiero wymienioną ilość z w ten sposób

$$z = z_1\chi_1 + z_2\chi_2 + \ldots + z_l\chi_l$$

w czém poszedłem za przykładem znakomitego matematyka angielskiego pana Kelc (Cayley), który podobnegoż znakowania używał przedemną.

Uważmy teraz dwie ilości $l$wymiarowe

$$z = \iota_1 z_1 + \iota_2 z_2 + \ldots + \iota_l z_l; \quad u = \iota_1 u_1 + \iota_2 u_2 + \ldots + \iota_l u_l,$$

takie, że ilości rzeczywiste $u_1, u_2, \ldots, u_l$, są funkcjami rzeczywistemi, choćby najogólniejszemi ilości rzeczywistych $z_1, z_2, \ldots, z_l$, to wtedy każdemu znaczeniu ilości z odpowiada znaczenie ilości u. Uogólniając więc myśl Kosziego, nazwiemy ilość u *funkcją lwymiarową ilości* z, lub w ogólności *funkcją wielowymiarową*.

Naprzykład jeżeli

$$l = 2, \quad \iota_1 = 1, \quad \iota_2 = \sqrt{-1}$$

znajdziemy się w dziedzinie funkcyj dwuwymiarowych a w szczególności w przypadku teorji Kosziego, która służyła za wzór do wyżéj opisanego uogólnienia pojęcia funkcji.

Jeżeli zaś

$$l = 3, \ \iota_1 = 1, \ \iota_2 = \sqrt{-1}, \ \iota_3 = \sqrt{-1}$$

będziemy w dziedzinie funkcyj trójwymiarowych a w szczególności w przypadku ilości złożonych uważanych po raz pierwszy przez pana Żmurkę.

Jeżeliby było

$$l = 4, \ \iota_1 = 1, \ \iota_2 = i, \ \iota_3 = j, \ \iota_4 = k,$$

które to jedności urojone ulegają prawom następującym

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

$$ij = k = -ji, \ jk = i = -kj, \ ki = j = -ik,$$

i t. d. używanym przez Hamiltona, będziemy w dziedzinie funkcyj czterowymiarowych, a mianowicie w przypadku teorji *czwórków* tak świetnie rozpoczętéj i uprawianéj przez tego znakomitego matematyka. I t. d.

Określenia funkcji *ciągłéj*, *jednowartościowéj* (8) (monodrôme), *jednopochodnéj* (9) (monogène) *doskonałéj* (10) (synectique), jakie zrobił Koszi, dają się z łatwością rozciągnąć i do funkcyj wielowymiarowych. I tak, funkcja $l$wymiarowa u zmiennéj niezależnéj $l$wymiarowéj z będzie w pewnym zakresie téjże zmiennéj :

a) *ciągła*, jeżeli w témże zakresie zmieniając zmienną niezależną z w sposób ciągły albo raczéj ilości $z_1, z_2, \ldots, z_l$, funkcja u zmienia się także w sposób ciągły, a raczéj ilości $u_1, u_2, \ldots, u_l$.

b) *jednowartościowa*, jeżeli pomimo wszelkich możebnych zmian zmiennéj niezależnéj z wewnątrz zakresu, ilekroć razy zmienna niezależna wróci do pierwotnego znaczenia, funkcja powraca również do pierwotnego znaczenia

c) *jednopochodna*, jeżeli pochodna $\frac{du}{dz}$ w uważanym zakresie, ma przy każdém znaczeniu zmiennéj niezależnéj z jedno tylko znaczenie niezależne od przyrostku dz.

d) *doskonała*, jeżeli w danym zakresie jest jednocześnie skończoną (co do znaczeń), ciągłą, jednowartościową i jednopochodną.

Własności powyższe gdyby się zdarzyły i na samych granicach zakresu, lub w zakresie nieograniczonym, to w określeniu funkcji wyrazićby to można odpowiednio przez dodanie wyrazu i *na granicy*, lub wymieniając sam przymiot tylko.

Zajmę się teraz bliżéj funkcjami dwu i trójwymiarowemi, które możnaby nazwać *gieometrycznemi*, gdyż dają się łatwo przedstawić gieometrycznie, gdy przeciwnie funkcje więcéj jak trójwymiarowe nazwać ogólnie *hipergieometrycznemi*, gdyż zdaje się, że tegoż przymiotu nie posiadają.

Wiadomo, że Koszi używając przedstawiania ilości złożonych drugiego stopnia, podanego jeszcze przez znakomitego matematyka angielskiego Wallis'a w dziele: *Treatise of Algebra*, *London*, 1685, przedstawia funkcję u zmiennéj z, za pomocą dwóch płaszczyzn Z i U na których współrzędne prostokątne dwóch punktów odpowiadających z i u są odpowiednio z_1, z_2, i v_1, v_2. To przedstawienie można, rozciągnąć do wszelkich funkcyj dwuwymiarowych.

Podobnież dwie przestrzenie trójwymiarowe Z i U w których odpowiednio współrzędne prostokątne z_1, z_2, z_3 i u_1, u_2, u_3, oznaczają pozornie dwóch punktów odpowiadających z i u mogą służyć do przedstawienia gieometrycznego wszelkich funkcyj trójwymiarowych. Pan Żmurko stworzył właśnie swe ilości urojone do przedstawienia przestrzeni trójwymiarowéj. Uwaga więc tycząca przestrzeni trójwymiarowéj jest podobném uogólnieniem myśli pana Żmurki, jak poprzedzająca tycząca płaszczyzny jest uogólnieniem myśli Koszíego.

Funkcja $l$wymiarowa

$$u = f(z)$$

jest *okresowa* (11) (périodique), jeżeli istnieje ilość $l$wymiarowa stała a taka, że przy wszelkiém znaczeniu zmiennéj niezależnéj z jest zawsze

$$f(z + a) = f(z)$$

i wtedy ilość a nazywa się *okresem* (période) funkcji u.

Wrazie funkcyj *gieometrycznych* to jest dwu i trójwymiarowych jeżeli a, oznacza okres funkcji, poprowadziwszy odpowiednio przez punkta

$$z + ra, \qquad (-\infty \leqq r \gtreqless + \infty)$$

gdzie r jest liczbą całkowitą, linje i powierzchnie równoległe, podzieliwszy odpowiednie płaszczyznę i przestrzeń trójwymiarową na pasy i warstwy takie, że funkcja w każdym z nich przybierać będzie wszystkie swe możebne znaczenia. Linje i powierzchnie używane pospolicie do tego celu są proste i płaszczyzny.

Gdyby w razie funkcji dwuwymiarowéj istniały dwa okresy $a = \iota_1 a_1 + \iota_2 a_2$, $b = \iota_1 b_1 + \iota_2 b_2$, to jeżeli wykreślimy na płaszczyznie przedstawiającéj funkcję dwuwymiarową punkta $z + ra$ wychodząc naprzykład z punktu

$$z = 0$$

punkta te będą się znajdować na prostéj przechodzącéj przez początek współrzędnych w odległościach równych $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Jeżeli drugi okres b jest tego rodzaju że punkta

$$sb, \quad (-\infty \leqq s \stackrel{=}{<} +\infty)$$

(gdzie s jest liczbą całkowitą rzeczywistą) nie leżą na prostéj na któréj leżą punkta

$$ra, \quad (-\infty \leqq r \stackrel{=}{<} +\infty)$$

lecz na innéj prostéj, przechodzącéj wszakże przez początek współrzędnych, to wtedy widzimy, że punkta

$$z + ra + sb, \quad (-\infty \leqq r \stackrel{=}{<} +\infty), \quad (-\infty \leqq s \stackrel{=}{<} +\infty)$$

są wierzchołkami równoległoboków (mających boki równe $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$) które wypełniają płaszczyznę i funkcja dwuwymiarowa przybiera wewnątrz każdego z tych równoległoboków wszystkie swe możebne znaczenia.

Podobnież *w ogólności* do funkcyj trójwymiarowych. Jeżeli funkcja jest trójokresową, któréj okresami niech będą a, b, c, poprowadźmy odpowiednio przez punkta

$$tc, \quad (-\infty \leqq t \stackrel{=}{<} +\infty),$$
$$sb, \quad (-\infty \leqq s \stackrel{=}{<} +\infty),$$
$$ra, \quad (-\infty \leqq r \stackrel{=}{<} +\infty),$$

(gdzie r, s, t oznaczają liczby całkowite rzeczywiste) płaszczyzny równoległe do trzech płaszczyzn przechodzących odpowiednio przez punkta

$$0, \quad a, \quad b$$
$$0, \quad c, \quad a$$
$$0, \quad b, \quad c$$

to przestrzeń wypełnioną będzie przez równoległościany równe sobie, i w każdym z nich funkcja przybierać będzie wszystkie swe możebne znaczenia. W razie zaś, gdyby funkcja była dwuokresową, możnaby uważać ją jako trójokresową któréj okres trzeci jest nieskończony i dowolnego kierunku i wtedy przestrzeń podzielonąby była na równoległościany nieograniczone w jednym kierunku, i w każdym z nich funkcja przybierałaby podobnież wszystkie swe możebne znaczenia.

Powiedziałem wyżéj *w ogólności* dla tego, że jeżeliby okresy były tego rodzaju że punkta im odpowiadające

$$z + ra + sb \quad \text{lub} \quad z + ra + sb + tc,$$
$$(-\infty \leqq r \stackrel{=}{<} +\infty), \quad (-\infty \leqq s \stackrel{=}{<} +\infty), \quad (-\infty \leqq t \stackrel{=}{<} +\infty)$$

przypadły na jednéj prostéj w razie funkji dwuwymiarowéj dwuokresowéj, albo też na jednéj prostéj lub płaszczyznie w razie funkcji trójwymiarowéj, wtedy przedstawienie okresów przestałoby być wyrazistém jak w ogólnym przypadku. Niżéj zwrócę jeszcze uwagę czytelnika na te szczególne przypadki z powodu, że takowe wpływają czasami na zmniejszenie liczby okresów, lub też na naturę saméj funkcji.

Gdyby w razie funkcyj gieometrycznych to jest dwu lub trójwymiarowych funkcja miała większą liczbę okresów od liczby wymiarów, przedstawienie powyższe przestałoby być wyrazistém i nastręcza mimowolnie pytanie czy to się zdarzyć może i w jakich warunkach. Otóż w odpowiedzi na to pytanie dowiodę następującego twierdzenia.

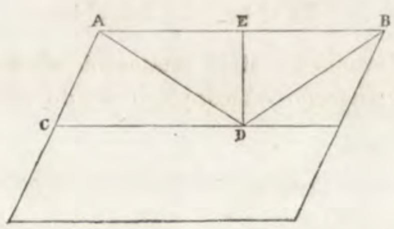
Jeżeli ilości $l$wymiarowe ulegają zwykłym prawom dodawania algiebrycznego ([12]) *to wtedy funkcja $l$wymiarowa tegoż rodzaju niebędąca stałą i mająca skończoną liczbę znaczeń dla każdego znaczenia zmiennéj niezależnéj nie może być więcéj jak $l$okresową, to jest mieć więcéj jak l okresów różnych, rozumiejąc przez okresy różne takie tylko, które nie są summami wielokrotników całkowitych innych okresów w mniejszéj liczbie.*

Dowiedziemy tego twierdzenia dla funkcyj gieometrycznych to jest w razie $l=2$ i $l=3$. Wrazie funkcyj Koszicgo twierdzenie jest znaném i istnieje wiele jego dowodzeń. Dowodzenia te stosują się do wszelkich funkcyj dwuwymiarowych. Podam jednakże jedno dowodzenie dla oszczędzenia czytelnikowi szukania i dlatego, że bieg dowodzenia jest ten sam jak w przypadku $l=3$, który dotąd o ile mi wiadomo nie został ani spostrzeżonym, ani udowodnionym.

Nim jednakże przystąpię do dowodu twierdzenia wyżéj wymienionego, dowiodę poprzednio dwóch następujących twierdzeń pomocniczych :

a) *Punkt leżący nie za obrębem powierzchni równoległoboku, jest odległy przynajmniéj od jednego z czterech wierzchołków tegoż równoległoboku, mniéj jak na długość największego z boków równoległoboku.*

b) *Punkt leżący nie za obrębem objętości równoległościanu jest odległy przynajmniéj od jednego z ośmiu wierzchołków tegoż równoległościanu, mniéj jak na długość największéj z krawędzi równoległościanu.*



Co do równoległoboku, zważywszy, że tenże jest symetrycznym względem punktu przecięcia dwóch jego przekątnych, zwanego niekiedy *środkiem*, i że jeżeli punkt nieleżący za obrębem równoległoboku porusza prostopadle ku jednemu z boków, to odległości tegoż punktu ruchomego od dwóch wierzchołków wspomnianego dopiero boku maleją, a odległości od dwóch pozostałych wierzchołków równoległoboku rosną, wnieść można, że twierdzenie jest prawdziwém zawsze, jeżeli dowiedziemy go dla punktów linji przechodzącéj przez *środek* równoległoboku (a którą dlatego nazwiemy *średnicą* dla krótkości) równoległéj do jednego z boków równoległoboku. Dowiedziemy więc twierdzenia uprośćionego następującego :

Punkt którykolwiek średnicy równoległéj do jednego z boków równoległoboku, jest odległy przynajmniéj od jédnego z pomiędzy dwóch wierzchołków leżących na tymże boku, mniéj jak na długość największego z boków równoległoboku.

Oznaczmy przez a, b wielkości boków równoległoboku w porządku nierosnącym, przez k kąt *między niemi zawarty*, który co zawsze można weźmiemy rozwartym lub prostym, przez A wierzchołek kąta k, zaś pozostały koniec boku a przez B. Przypuścimy nadto, że średnica o której mowa w twierdzeniu jest równoległą do boku a.

Przypuśćmy teraz, że punkt o którym mowa w twierdzeniu przebiega średnicę w kierunku równoległym do kierunku od A ku B, jego odległości więc od tych ostatnich, podług jak kąt k jest rozwarty lub prosty zmieniają się w następujący sposób. Pierwsza odległość to jest od A zaczyna maleć a późniéj rośnie lub od razu ciągle rośnie, podczas gdy druga odległość od B ciągle i zawsze maleje. Zwrócimy przytém uwagę, że odległości punktu poruszającego się od punktów A i B są sobie równe gdy tenże znajduje się na przecięciu średnicy z prostopadłą do niéj przechodzącą przez środek boku a i odległości są wtedy równe $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+(b\,\mathrm{wst}\,k)^2}$. Dodajmy że przecięcie to istnieje zawsze wewnątrz równoległoboku, bo pochyłe do średnicy wychodzące z punktu B leżą z jednéj strony prostopadłéj przechodzącéj przez tenże punkt i zadość czynią nierówności

$$\tfrac{1}{2}b<\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+(b\,\mathrm{wst}\,k)^2}$$

albowiem takowa zmienia się na inną widoczną

$$(b\,\mathrm{dos}\,k)^2<a^2$$

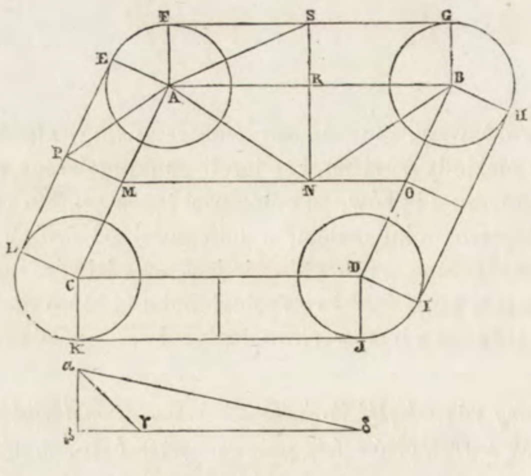
gdyż założenia $b\leqq a$. Wrazie zaś kąta k prostego, rachunek pozostanie ten sam tylko krótsza z pochyłych jest prostopadłą. Zbierając razem co powiedziałem wyżéj pokaże się, że twierdzenie będzie dowiedzioném, jeżeli go usprawiedliwimy dla dwóch punktów C i D, których odległości od punktu A są $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+(b\,\mathrm{wst}\,k)^2}$. Pozostaje więc dowieść dwóch nierówności

$$\tfrac{1}{2}b<a,\qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+(b\,\mathrm{wst}\,k)^2}<a.$$

Pierwsze strony tych nierówności będą największe, gdy $b=a$ i kąt k prosty, dostateczném więc jest uważać je w tym najniedogodniejszym przypadku. Takowe z łatwością przemienić można na

$$2a<a,\qquad 2a^2<4a^2$$

i twierdzenie z powodu ich widoczności zostaje ostatecznie dowiedzioném. Twierdzenie zresztą jest szczególnym przypadkiem następującego odnoszącego się do równoległościanu, przypuszczając, że jedna z krawędzi jest zerem.



Co do równoległościanu, zważywszy, że tenże jest symetrycznym względem punktu przecięcia czterech jego przekątnych wewnętrznych zwanego środkiem równoległościanu i przypuszczając, że punkt nieleżący za obrębem równoległościanu porusza się prostopadle ku jednéj ze ścian tegoż, spostrzeżemy że odległośći punktu ruchomego od czterech wierzchołków wymienionéj dopiero ściany maleją, a odległości od czterech pozostałych wierzchołków równoległościanu rosną, i wniesiemy, że twierdzenie będzie dowiedzionéni, jeżeli potrafimy go udowodnić dla punktów leżących na płaszczyznie przechodzącéj przez *środek* równoległościanu, (którą z tego powodu dla krótkości nazwiemy *średnicową*) równoległéj do jednéj ze ścian równoległościanu. Dowiedziemy więc twierdzenia uprośćionego następującego :

Punkt którykolwiek płaszczyzny średnicowéj równoległéj do jednéj ze ścian równoległościanu, jest odległy przynajmniéj od jednego z pomiędzy czterech wierzchołków téjże ściany mniéj niż na długość największéj krawędzi równoległościanu.

Oznaczmy przez a, b, c wielkości krawędzi równoległościanu w porządku nierosnącym, przez k kąt rozwarty lub prosty *zawarty* między bokami a i b, przez l kąt ostry między bokiem c i prostopadłą do ściany zawierającéj kąt k. Kąty k i l zawsze w ten sposób dobrać można. Przypuśćmy nadto, że płaszczyzna średnicowa jest równoległą do ściany zawierającéj boki a, b a zatém i kąt k.

Wyobraźmy teraz rzut prostopadły ściany zawierającéj boki a i b na płaszczyznę średnicową do niéj równoległą. Ściana rzuci się więc w naturalnéj swéj wielkości. Nazwijmy dla ułatwienia A rzut wierzchołka kąta k, B rzut drugiego końca boku a, C rzut podobny końca boku b, D rzut pozostałego wierzchołka ściany uważanéj.

Płaszczyzna średnicowa przecina równoległościan według równoległoboku równego równoległobokowi ABDC, którego boki są równoległe do boków równoległoboku ABDC, a wierzchołki znajdują się odpowiednio na czterech kołach zakreślonych z punktów A, B, C, D promieniem $\frac{1}{2}c \operatorname{wst} l$. Jeżeli poprowadzimy do tych czterech kół styczne zewnętrzne równoległe do boków równoległoboku ABDC, spostrzeżemy, że równoległobok podług którego przecina płaszczyzna średnicowa równoległościan, nie wyjdzie po za obręb powierzchni ograniczonéj czterema łukami kół zakreślonych promieniem $\frac{1}{2}c \operatorname{wst} l$, mianowicie łukami EF, GH, IJ, KL z czterema prostemi FG, HI, JK, LE.

Jeżeli oprócz tego ze czterech wierzchołków ściany, któréj rzut wyżéj robiliśmy na płaszczyznę średnicową, zakreślimy cztery kule promieniem równym największéj krawędzi a, takowe przetną płaszczyznę średnicową podług czterech kół zakreślonych z punktów A, B, C, D promieniem $\sqrt{a^2-(\frac{1}{2}c \operatorname{dos} l)^2}$ i pozostanie dowieść, że powierzchnia EFGHIJKL nie zawiera ani jednego punktu takiego, któregoby odległość od jednego przynajmniéj z punktów A, B, C, D była wieksza od $\sqrt{a^2-(\frac{1}{2}c \operatorname{dos} l)^2}$.

Punkta powierzchni EFGHIJKL leżą albo zewnątrz równoległoboku ABDC lub wewnątrz. Uważmy więc naprzód, czy ostatnie punkta zadość czynią twierdzeniu, w drugiéj zaś części dowodzenia zajmiemy się punktami pozostałemi.

Ponieważ równoległobok ABDC jest symetrycznym względem swego środka, i ponieważ punkt nieleżący za jego obrębem a poruszający się prostopadle do boku a sprawia, że odległości jego od punktów A i B maleją podczas gdy odległości od punktów C i D rosną, i że to samo możnaby powiedzieć o trzech pozostałych bokach, dostateczném więc będzie zapewnić się czy punkta średnicy MO równoległéj do boku a mają zawsze przynajmniéj jednę z odległości od punktów A i B mniejszą od $\sqrt{a^2-(\frac{1}{2}c \operatorname{dos} l)^2}$.

Uważając więc punkt przebiegający tę średnicę w kierunku równoległym w kierunku od A ku B spostrzeżemy, że w razie kąta rozwartego k odległość punktu ruchomego od punktu A jest równą $\frac{1}{2}b$ poczém maleje, przechodzi przez najmniejszość $\frac{1}{2}b \operatorname{wst} k$ a późniéj rośnie, w razie zaś kąta k prostego od razu zaczyna rosnąć ; odległość zaś od punktu B zawsze maleje. W tym przebiegu odległości punktu poruszającego się od punktów A i B stają się równe sobie i $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+(b \operatorname{wst} k)^2}$ gdy punkt znajdzie się na przecięciu średnicy równoległoboku ABDC z prostopadłą do niéj przechodzącą przez środek boku AB. To przecięcie istnieje zawsze wewnątrz ABDC gdyż pochyłe jednostronne BO i BN do téjże średnicy zadość czynią nierówności BO < BN czyli

$$\tfrac{1}{2}b < \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + (b\,\mathrm{wst}k)^2}$$

któréj już raz wyżéj dowiedliśmy.

Zbierając więc co powiedziałem o punkcie przebiegającym średnicę MO widzimy, że zawsze przynajmniéj jedna z jego odległości nie przechodzi długości AM lub AN czyli $\frac{1}{2}b$ lub $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+(b\,\mathrm{wst}k)^2}$ które pozostaje dowieść, że są mniejszemi od $\sqrt{a^2-(\frac{1}{2}c\,\mathrm{dos}l)^2}$ czyli udowodnić dwóch następujących nierówności

$$\tfrac{1}{2}b < \sqrt{a^2-(\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{dos}l)^2}; \qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+(b\,\mathrm{wst}k)^2} < \sqrt{a^2-(\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{dos}l)^2}$$

Tym nierównościom można nadać kształty

$$4a^2 < b^2 + c^2(\mathrm{dos}l)^2; \qquad 3a^2 < b^2(\mathrm{wst}k)^2 + c^2(\mathrm{dos}l)^2$$

których drugie strony są największemi gdy $a = b = c$, i $(\mathrm{wst}k)^2 = (\mathrm{dos}l)^2 = 1$ i dają nawet w tym najniekorzystniejszym przypadku

$$4a^2 < 2a^2; \qquad 3a^2 < 2a^2$$

zkąd zatém wnieść można, że są prawdziwemi.

Pozostaje teraz uważać punkta powierzchni EFGHIJKL leżące na zewnątrz powierzchni ABDC. Całą tę powierzchnię można podzielić na cztery części takie, jak ARSFEPM prowadząc przez środki boków równoległoboku ABDC prostopadłe do tychże boków, i rozumie się, że co powiemy o téj części to samo stosuje się i do trzech pozostałych. Dowiedziemy więc, że punkta zawarte w części ARSFEPM są odległe od punktu A mniéj niż na odległość $\sqrt{a^2-(\frac{1}{2}c\,\mathrm{dos}l)^2}$.

Uważmy punkt poruszający się po obwodzie ARSFEPM wychodzący z punktu A w kierunku ku R. Odległość jego od A ciągle rośnie nawet gdy przejdzie B idąc ku S gdyż długości pochyłych ciągle rosną. Przeszedłszy S i idąc ku F odległość punktu ruchomego od punktu A maleje, poczém przeszedłszy F idąc ku S zachowują długość równą $\frac{1}{2}c\,\mathrm{wst}l$, przeszedłszy E idąc ku P odległość zaczyna rosnąć. Przeszedłszy nakoniec P przechodząc M i wracając do A odległość ciągle maleje. Pokazuje się więc ostatecznie, że odległość punktu ruchomego od punktu A przechodzi w punktach S i P największe znaczenia, które są AP i AS to jest $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+(c\,\mathrm{wst}l)^2}$ i $\frac{1}{2}\sqrt{b^2+(c\,\mathrm{wst}l)^2}$ i widocznie z powodu, że z założenia $b \leq a$ więc odległość AS nigdy mniejszą od AP nie jest. Ponieważ nadto widoczném jest, że punkta położone wewnątrz części ARSFEPM są tém bardziéj bliższe punktu A aniżeli punkt S, pozostaje więc dla dowiedzenia w zupełności twierdzenia dla równoległościanu, tylko udowodnić nierówność

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+(c\,\mathrm{wst}l)^2} < \sqrt{a^2-(\tfrac{1}{2}c\,\mathrm{dos}l)^2}$$

czyli

$$c^2 < 3a^2$$

która nawet w najniekorzystniejszym razie $c = a$ nie przestaje być prawdziwą.

Twierdzenia dopiero dowiedzione tyczące równoległoboku i równoległościanu, prowadzą do dowodzenia gieometrycznego twierdzenia algiebrycznego następującego:

Jeżeli

$$a_{s,t}, \qquad (1 \leq s \overline{\overline{<}} l+1), \qquad (1 \leq t \overline{\overline{<}} l)$$

oznaczają ilości rzeczywiste, takie, że pomiędzy niemi nie istnieje jednocześnie l *związków kształtu*

$$0 = \sum_{s=1}^{s=t+1} r_s a_{s,t} \quad ; \quad (1 \leqq t \stackrel{=}{<} l)$$

jeżeli nadto znaczenia wyrażeń

$$\sum_{t=1}^{t=l} a^2_{s,t} \quad ; \quad (1 \leqq s \stackrel{=}{<} l)$$

jest największe przy $s = 1$; *wtedy istnieje zawsze* l *takich liczb całkowitych rzeczywistych*

$$r_s, \qquad (1 \leqq s \stackrel{=}{<} l)$$

które zadość czynią nierówności

$$\sum_{t=1}^{t=l} \left\{ \sum_{s=1}^{s=l+1} r_s a_{s,t} - a_{l+1,t} \right\}^2 < \sum_{t=1}^{t=l} a^2_{r,t}$$

Rozumie się, że dowodzenia stosują się tylko do dwóch przypadków mianowicie

$$l = 2 \quad \text{i} \quad l = 3,$$

nie będę się jednak nad niém zatrzymywał, i przejdę do dowodu twierdzenia głównego tyczącego funkcyj okresowych dwu i trójwymiarowych.

a) *Funkcja dwuwymiarowa, niebędąca stałą i mająca skończoną liczbę znaczeń dla każdego znaczenia zmiennéj niezależnéj, lub jeżeli nieskończoną to różniących się o ilości skończone, nie może być więcéj jak dwuokresową, to jest mieć więcéj jak dwa okresy różne, zastrzegając, że ilości dwuwymiarowe ulegają zwykłym prawom dodawania algiebrycznego.*

Gdyby twierdzenie było prawdziwém, byłby wtedy przynajmniéj trzeci okres różny od dwóch okresów różnych przypuszczonych i możnaby było wybrać z pomiędzy nich dwa zwroty najmniejsze ([13]). Poprowadziwszy więc na płaszczyznie Z przedstawiającéj zmienną niezależną z, dwa układy prostych równoległych do dwóch prostych przechodzących przez punkta 0 i a, oraz przez punkta 0 i b, (a, b, c oznaczają trzy okresy funkcji dwuwymiarowéj uważanéj, ustawione co do długości w porządku nie malejącym) takowe podzielą całą płaszczyznę Z na równoległoboki. Jeżeli teraz z jednego z wierzchołków któregokolwiek z równoległoboków poprowadzimy prostą wyobrażającą trzeci okres (tak co do wielkości jakoteż i kierunku), to drugi koniec téj prostéj nie upadnie w żadnym z wierzchołków tego lub innego równoległoboku, lecz wewnątrz, gdyż inaczéj trzeci okres byłby summą wielokrotników dwóch pierwszych okresów a zatém nie byłby różnym, co przeciwne założeniu.

Lecz na mocy twierdzenia o równoległoboku wyżéj dowiedzionego, ten drugi koniec linji przedstawiającéj trzeci okres funkcji, jest bliższy przynajmniéj z wierzchołków równoległoboku w którym się znajduje, aniżeli na długość największego z boków tegoż równoległoboku, czyli wielkość jednego z dwóch okresów najmniejszych. Wniesiemy więc, że dwóch najmniejszych okresów dobrać nie można, bowiem odległość o któréj dopiero mówiliśmy jest okresem mniejszym od jednego z dwóch najmniejszych przypuszczonych i że przeciwnie, można je dobrać mniejszemi od wszelkich długości danych jakkolwiek małych.

Skoro więc funkcja przy zmianach zmiennéj niezależnéj, mniejszéj od wszelkiéj danéj ilości jakkolwiek małéj, nie zmienia swego znaczenia, jest więc albo stałą, albo też ma nieskończoną liczbę znaczeń nieskończenie mało się różniących przy każdém znaczeniu zmiennéj niezależnéj. Przypuszczając więc istnienie trzech okresów różnych wychodzimy zawsze z zastrzeżeń twierdzenia, i tym sposobem twierdzenie zostaje dowiedzionóm dla funkcyj dwuwymiarowych.

Przejdziemy teraz do funkcyj trójwymiarowych dla których twierdzenie nie zostało o ile mi wiadomo, ani spostrzeżonóm, ani dowiedzionóm.

b) *Funkcja trójwymiarowa niebędąca stałą i mająca skończoną liczbę znaczeń dla każdego znaczenia zmiennéj niezależnéj, lub jeżeli nieskończoną to różniących się o ilości skończone, nie może być więcéj jak trójokresową, to jest mieć więcéj jak trzy okresy różne, zastrzegając, że ilości trójwymiarowe ulegają zwykłym prawom dodawania algiebrycznego.*

Gdyby twierdzenie nie było prawdziwém, byłby wtedy przynajmniéj czwarty okres różny od trzech okresów różnych przypuszczonych i możnaby wybrać z pomiędzy nich trzy zwroty najmniejsze. Poprowadziwszy w przestrzeni Z przedstawiającéj zmienną niezależną z trzy układy płaszczyzn równoległych do trzech płaszczyzn oznaczonych przez punkta $0, b, c$; $a, 0, c$; $a, b, 0$; (a, b, c, d oznaczają tu cztery okresy funkcji w porządku nie malejącym) i które to płaszczyzny podzielą przestrzeń Z na równoległościany, których krawędziami będą wielkości trzech najmniejszych okresów. Jeżeli teraz z jednego z wierzchołków któregokolwiek z równoległościanów, poprowadzimy prostą wyobrażającą czwarty okres (tak co do wielkości jak i kierunku), drugi jéj koniec nie upadnie w żadnym z wierzchołków tegoż lub innego równoległościanu, lecz wewnątrz, gdyż inaczéj czwarty okres byłby summą wielokrotników trzech pierwszych okresów, to jest nie byłby różnym, co przeciwne założeniu.

Lecz na mocy twierdzenia o równoległościanie, wyżéj dowiedzionego, ten drugi koniec prostéj wyobrażający czwarty okres funkcji, jest bliżéj jednego z wierzchołków równoległościanu, w którym się znajduje, jak na długość największéj krawędzi równoległościanu, czyli wielkość jednego ze trzech okresów najmniejszych. Wniesiemy więc, że trzech najmniejszych okresów dobrać nie można, bowiem odległość o któréj mówiliśmy można uważać jako okres mniejszy od jednego ze trzech najmniejszych przypuszczonych, i że przeciwnie, można zawsze dobrać trzy okresy mniejsze od trzech ilości danych jakkolwiek małych.

Skoro więc funkcja przy zmianach zmiennéj niezależnéj, mniejszych od wszelkiéj danéj ilości jakkolwiek małéj, nie zmienia swego znaczenia, jest więc albo stałą, albo też ma nieskończoną liczbę znaczeń nieskończenie mało się różniących przy każdém znaczeniu zmiennéj niezależnéj. Przypuszczenie więc istnienia czterech okresów różnych, prowadzi nieuniknienie do sprzeczności z twierdzeniem, i dowodzi twierdzenia w zupełności.

Dokończywszy dowodu twierdzenia głównego zakończę kilku wyrazami odnoszącemi się do szczególnego przypadku, gdy przy przedstawianiu funkcyj dwu lub trójwymiarowych okresowych zdarzy się, że okresy są tego rodzaju, że punkta

$$z = ra + sb, \quad z + ra + sb + tc, \quad \left(-\infty \leqq \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \overline{\overline{<}} + \infty\right)$$

przypadają na jednéj prostéj lub na jednéj płasczyznie.

Jeżeliby w razie funkcji okresowéj dwuwymiarowéj, punkta o których mowa leżały na linji jednéj prostéj, mogłoby się zdarzyć oprócz tego, że wielkości dwóch okresów odpowiednich byłyby współmierne lub nie. W pierwszym razie funkcja byłaby tylko jednookresową, w drugim zaś byłaby stałą lub posiadałaby nieskończoną liczbę znaczeń różniących się między sobą nieskończenie mało dla każdego znaczenia zmiennéj niezależnéj.

Oznaczmy bowiem przez w_1, w_2 wielkości dwóch okresów a_1, a_2 funkcji, które przypuśćmy naprzód współmiernemi i których największą wspólną miarą niech będzie w. Jeżeli więc r_1, r_2 oznaczają liczby całkowite pierwsze między sobą stosowne, to można napisać

$$w_1 = wr_1, \quad w_2 = wr_2$$

punkta więc odpowiadające okresom i leżące w linji prostéj wyrażą się przez

$$z + a_1 s_1 + a_2 s_2 = w(r_1 s_1 + r_2 s_2)$$

gdzie s_1, s_2, oznaczają liczby całkowite rzeczywiste dowolne. Ponieważ r_1, r_2 są pierwszemi między sobą można więc na zasadzie znanego twierdzenia algiebrycznego dobrać całkowite s_1, s_2 tak że

$$r_1 s_1 + r_2 s_2 = 1$$

i funkcja mieć będzie widocznie jeden tylko okres a, którego wielkość w.

Jeżeliby zaś wielkości w_1, w_2 okresów były niewspółmierne, wtedy według znanéj własności ułamków ciągłych spostrzeżemy, że różnica pomiędzy znaczeniem bezwzględném ułamku $\frac{w_1}{w_2}$ i dostatecznie odległym ułamkiem przywróconym jest mniejszą bezwzględnie od jedności podzielonéj przez kwadrat z mianownika tegoż ułamku przywróconego, i który to mianownik można wziąć większym od wszelkiéj ilości danéj jakkolwiek wielkiéj, biorąc tylko ułamek przywrócony dostatecznie odległy. Wniesiemy ztąd, że wielkość wyrażenia $a_1 s_1 + a_2 s_2$ można wtedy uczynić mniejszą od wszelkiéj ilości danéj jakkolwiek małéj. Skoro więc funkcja niezmienia swego znaczenia przy tak małéj jak się podoba zmianie znaczenia zmiennéj niezależnéj, jest więc stałą lub też ma nieskończoną liczbę znaczeń nieskończenie mało się różniących dla każdego znaczenia zmiennéj niezależnéj, jak to wyżéj powiedziano.

Jakkolwiek to dowiedziono już dla funkcji Kosziego, powtórzyłem dowód dla dogodności czytelnika, zwracając przytém uwagę, że się to stosuje do wszelkich funkcyj dwuwymiarowych.

Gdyby w razie funkcyj trójwymiarowych dwuokresowych, zdarzyło się, że punkta odpowiadające okresom były na jednéj linji prostéj wyciągnęlibyśmy podobneż wnioski mianowicie w razie współmierności wielkościokresów, zmniejszenie liczby okresów; w razie zaś niewspółmierności funkcja byłaby stałą lub miałaby nieskończoną liczbę znaczeń nieskończenie mało się różniących dla każdego znaczenia zmiennéj niezależnéj.

Jeżeliby zaś w razie funkcji trójokresowéj trójwymiarowéj zdarzyło, że punkta odpowiadając trzem okresom a_1, a_2, a_3, a mianowicie punkta

$$z + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3$$

(gdzie s_1, s_2, s_3, oznaczają całkowite rzeczywiste) dowolne znajdowały się na jednéj płasczyznie, można by wtedy uważać daną funkcję na téjże płasczyznie lub na wszelkiéj płasczyznie równoległéj, jako dwuwymiarową mającą trzy okresy różne. Na mocy więc twierdzenia wyżéj dowiedzionego, wnieślibyśmy, że funkcja jest stałą lub też ma nieskończoną liczbę znaczeń nieskończenie mało się różniących dla każdego znaczenia zmiennéj niezależnéj.

(1) Używam tu nazwy *ilość złożona* (complesse, complex i t. d.) zamiast pospolicie używanéj *ilość urojona*, gdyż pierwsza lepiéj rzecz przedstawia i dzisiaj jest prawie ogólnie używaną w językach włoskim, angielskim i t. d. Zostawiam jednakże nazwę *jedność urojona* zgodnie z matematykami cywilizowanego Zachodu, gdyż rzeczywiście natura jéj ma coś niepojętego w prawidła, coś że tak powiem fantastycznego, gdyż nadajemy jéj własności najrozmaitsze jakie uznajemy za stosowne do skrócenia lub ulatwienia w rozwiązaniu zadania lub dowodzeniu twierdzenia które mamy na uwadze.

(2) Najlepszą wskazówką w rozwoju teorji ilości złożonych [uważanych po raz pierwszy przez matematyków włoskich a mianowicie Kardana (CARDANO)] jest zdaje mi się przedmowa obszerna jaką zrobił Hamilton do swego dzieła: *Lectures on Quaternions,... By Sir* WILLIAM ROWAN HAMILTON,... *Dublin*: *Hodges and Smith,... London*: *Whittaker and Co,... Cambridge* : *Macmillan and Co.* 1853, 8ka, stronic 71, 64, 736, 2. Dodamy tu jeszcze dzieło pośmiertne

tegoż wielkiego matematyka: *Elements of Quaternions. By the late Sir* William Rowan Hamilton,... *Edited by his son* William Edwin Hamilton,... *London: Longmans, Green, and Co.* 1866. 8ka, stronic 6, 2, 60, 762. Dwa dopiero wymienione dzieła stanowią dwie obszerne prace jakie Hamilton zostawił w tym przedmiocie.

(3) Czytelnik znajdzie takową obszernie rozwiniętą w pracy Kosziego: *Mémoire sur les clefs algébriques* zawartéj na stronicach 356 do 400, tomu 4 pisma: *Exercises d'analyse et de physique mathématique, par le Baron* Augustin Cauchy,... *Paris, Bachelier,...* 1840, 1841, 1844, 1847, tomów 4, 4ka. Zdaje się jednakże, że pierwsze prace Kosziego nad *kluczami algiebrycznemi* sięgają 1853 roku i zatém przytoczona wyżéj praca nie jest wcześniejszą.

(4) Z pomiędzy licznych i pięknych prac Pana Bellawitis przytoczę następujące, naprzód dla tego, że Hamilton zdaje się ich wcale nie znać i dla tego że rzeczywiście zasługują na uwagę.

a) *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica* (*Calcolo delle equipollenze*); *Padova*, 1835.

b) *Saggio sull'algebra degli imaginarii*; *Venezia*, 1852.

c) *Sposizione del metodo delle equipollenze*; *Modena*, 1854.

d) *Calcolo dei quaternioni di W. R. Hamilton, e sua relazione col metodo delle equipollenze*; *Modena*, 1858.

e) *Sposizione dei nuovi metodi di geometria analitica*; *Venezia*, 1860.

f) *Determinazione numerica delle radici imaginarie delle equazioni algebriche*; *Venezia*, 1864.

h) *Elementi di geometria, di trigonometria e di geometria analitica,... Padova*, 1862.

(5) *Wykład Matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach. Napisał* Wawrzyniec Żmurko,... *Nakładem Włodzimierza Hr. Dzieduszyckiego. Lwów. Z drukarni Kornela Pillera.* 1864. 8ka, 2 tomy, tom pierwszy zawiera stronic 24, 372, 4; drugi zaś zawiera stronic 26, 698, 8.

(6) Po raz pierwszy zdaje mi się przychodzi użyć wyrazu polskiego odpowiadającego wyrazowi angielskiemu *quaternion*. W niewiadomości, czy kto już go przetłumaczył ośmielam się użyć wyrazu *czwórek*, który zdaje mi się przypominać poczwórną naturę tego rodzaju ilości i tłomaczyć niejako nazwisko nadane przez Hamiltona.

(7) *An elementary treatise on quaternions by* P. G. Tait,... *Oxford, at the Clarendon press*, 1867. *London. Macmillan and Co. publishers to the University of Oxford.* 8ka stronic 20 i 320.

(8) (9) (10) (11) Nazwisk tych użył Pan Folkierski w swym dziele: *Zasady Rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami.... Tom I.... Nakładem bibljoteki Kórnickiéj. Paryż, księgarnia Luxemburska,... Warszawa, księgarnia M. Glücksberga ....* 1870. 8ka, stronic 50 i 1088, odpowiednio na stronicach 664 i następnych, 704 i następnych, 718 i następnych, oraz na stronicy 15.

(12) To jest jeżeli

$$(\iota_1 a_1 + \iota_2 a_2 + \ldots + \iota_l a_l) + (\iota_1 b_1 + \iota_2 b_2 + \ldots + \iota_l b_l) = \iota_1(a_1 + b_1) + \iota_2(a_2 b_2) + \ldots + \iota_l(a_l + b_l)$$

(13) Nazywamy tu odpowiednio z powodów gieometrycznych *długością* lub *wielkością* ilości dwu i trójwymiarowéj

$$\iota_1 z_1 + \iota_2 z_2, \quad \text{i} \quad \iota_1 z_1 + \iota_2 z_2 + \iota_3 z_3$$

wyrażenia dodatnie

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \quad \text{i} \quad \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$$

To określenie *wielkości* ilości wielowymiarowéj stosuje się i do ilości więcéj jak trójwymiarowych, i nazywamy z pomiędzy dwóch ilości wielowymiarowych większą tę, która ma wielkość większą. Nakoniec dodam jeszcze, że kierunek linji przechodzącéj przez początek współrzędnych i przez punkt z_1, z_2 lub z_1, z_2, z_3 nazwiemy kierunkiem ilości dwu lub trójwymiarowéj.