Z teorji liczb niewymiernych.*)

§ 1. Wiadomo, że przekątna kwadratu jest niespółmierna z jego bokiem. Dowód tego twierdzenia**) daje się krótko streścić w sposób następujący: oznaczmy przez ρ_1 przekątną kwadratu, przez ρ_2 jego bok; przez ρ_i, (gdzie i oznacza dowolną liczbę całkowitą większą od liczby 2), oznaczmy resztę podziału odcinka ρ_{i-2} na części równe odcinkowi ρ_{i-1}; udowadnia się, że żaden z odcinków ciągu

$$(1) \qquad \rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots \rho_n, \dots$$

nie jest zerowym***) i przeto ciąg ten jest nieskończony, skąd na mocy pewnego twierdzenia wynika, że odcinki ρ_1, ρ_2 są ze sobą niespółmierne.

Między odcinkami ciągu (1) zachodzą, jak łatwo okazać za pomocą zasadniczych własności trójkąta, związki

$$(2) \qquad \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 + \rho_3 \\ \rho_h = 2\rho_{h+1} + \rho_{h+2} \end{cases} \quad (h = 2, 3, 4, \dots)$$

Jak wiadomo, odcinek ρ_1 określa przy odcinku ρ_2 jako jednostce, pewien przekrój****) liczb wymiernych na dwie klasy K_1 i K_2, zdefiniowane w ten sposób, iż do klasy K_1 zalicza się każdą liczbę wymierną, mierzącą przy jednostce ρ_2 odcinek mniejszy od odcinka ρ_1, każda zaś liczba wymierna klasy K_2 mierzy przy jednostce ρ_2 odcinek większy od odcinka ρ_1.

Ten przekrój—oznaczmy go literą P—ma własności następujące: każda z klas K_1, K_2 jest zbiorem nieskończonym, każda liczba klasy K_1 mniejsza jest od każdej liczby klasy K_2 i ani nie ma największej liczby wymiernej w klasie K_1, ani też nie ma najmniejszej liczby wymiernej w klasie K_2.

Chodzi w niniejszej notatce o to, aby przekrój (P), określony dotąd geo-

---

*) W notatce mówimy w § 1 i 2 *jedynie* o liczbach bezwzględnych: całkowitych, ułamkowych i wymiernych.

**) Zob. Arytmetyka teoretyczna prof. Zaremby (Kraków 1912), Str. 28—31.

***) Zob. Zaremba: Arytmetyka teoretyczna, str. 21.

****) Zob. Zaremba: Arytmetyka teoretyczna, str. 178.

metrycznie, zdefiniować arytmetycznie*). W tym celu wyszukamy pewne własności liczb wymiernych z klas K_1 i K_2.

Zauważmy, że łatwo udowodnić:

Twierdzenie I. Jeżeli liczba wymierna w_1 należy do klasy K_1 przekroju (P), to każda liczba wymierna nie większa od liczby w_1 także należy do klasy K_1.

Twierdzenie II. Jeżeli liczba wymierna w_2 należy do klasy K_2 przekroju (P), to każda liczba wymierna nie mniejsza od liczby w_2 należy również do klasy K_2.

Oznaczmy teraz przez p dowolną liczbę całkowitą większą od zera, przez δ taki odcinek, aby było

$$\rho_2 = p\delta \;; \tag{3}$$

ponieważ odcinek δ istnieje i nie jest zerowy, więc możemy wyznaczyć taką liczbę całkowitą m, iżby było

$$m\delta < \rho_1 < (m+1)\delta \;, \tag{4}$$

skąd wynika, że istnieje odcinek α, nie zerowy i mniejszy od odcinka δ i taki, że jest

$$\rho_1 = m\delta + \alpha \;, \tag{5}$$

przeto z liczb ułamkowych

$$\frac{m}{p}\,,\; \frac{m+1}{p} \tag{6}$$

pierwsza należy do klasy K_1, druga do klasy K_2 przekroju (P). Wyszukamy własności tych liczb (6).

Z równości (2), (3) i (4) otrzymamy z łatwością, że

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_3 = (m+1-p)\delta - (\delta - \alpha) \\ \rho_4 = (3p-2m)\delta - 2\alpha \end{array}\right. \tag{7}$$

stąd wynika, że

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{m+1}{p} > 1 \\[2ex] \dfrac{m}{p} < \dfrac{3}{2}. \end{array}\right. \tag{8}$$

Równości (7) i (8) nasuwają przypuszczenie, że zachodzą następujące równości dla odcinków ciągu (1)

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_{2n-1} = [B_n(m+1) - A_n p]\delta - B_n(\delta - \alpha) \\ \rho_{2n} = [A'_n p - B'_n m]\delta - B'_n\alpha \;, \end{array}\right. \tag{9}$$

*) Zob. Zaremba: Arytmetyka teoretyczna, str. 158.

gdzie liczby A_n, B_n, A'_n, B'_n są liczbami całkowitemi (oczywiście zależnemi nie tylko od liczby n, ale także i od liczby p), liczba zaś całkowita n nie jest mniejsza od liczby 2. Przypuśćmy nadto, że zachodzą równości

$$(10) \quad \begin{cases} A_n^2 = 2B_n^2 - 1 \\ A'^2_n = 2B'^2_n + 1 \end{cases}$$

$$(11) \quad A_n A'_n = 2B_n B'_n - 1 \ ,$$

stąd wynika, że

$$(11\text{-bis}) \quad B_n \, . \, B'_n \neq 0 \ .$$

Dla wartości $n=3$ równości (9, 10, 11, 11-bis) są słuszne. Przyjmując że te równości są prawdziwe dla wartości $n=k$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą nie mniejszą od liczby 2, łatwo na mocy równości

$$\rho_{2k-1} = 2\rho_{2k} + \rho_{2k+1}$$

$$\rho_{2k} = 2\rho_{2k+1} + \rho_{2k+2}$$

otrzymuje się

$$(12) \quad \begin{cases} \rho_{2k+1} = [B_{k+1}(m+1) - A_{k+1}p]\delta - B_{k+1}(\delta - \alpha) \\ \rho_{2k+2} = [A'_{k+1}p - B'_{k+1}m]\delta - B'_{k+1}\alpha \ , \end{cases}$$

gdzie położyliśmy

$$(13) \quad \begin{cases} A_{k+1} = A_k + 2A'_k ; \quad B_{k+1} = B_k + 2B'_k \\ A'_{k+1} = 2A_k + 5A'_k ; \ B'_{k+1} = 2B_k + 5B'_k \end{cases} .$$

Z równości (10) i (11) napisanych dla wartości $n=k$ i z równości (13) otrzymujemy, że

$$A^2_{k+1} = 2B^2_{k+1} - 1 \ ; \ A'^2_{k+1} = 2B'^2_{k+1} + 1$$

$$A_{k+1}A'_{k+1} = 2B_{k+1}B'_{k+1} - 1 \ ,$$

a nadto, że

$$(14) \quad B_{k+1} > B_k \ ; \ B'_{k+1} > B'_k \ .$$

Innemi słowy: równości (10) i (11) są słuszne dla wartości $n=k+1$. Na mocy zasady indukcji matematycznej *) równości (9) (10) i (11) są słuszne dla każdej całkowitej liczby n, byle nie mniejszej od liczby 2.

Z równości (9) i (10) otrzymujemy dalej

$$(15) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{m+1}{p}\right)^2 > 2 - \dfrac{1}{B^2_n} \\ \left(\dfrac{m}{p}\right)^2 < 2 + \dfrac{1}{B'^2_n} \end{cases} \quad n \geqq 2 \ .$$

---

*) Zob. Zaremba: Zarys pierwotnych zasad teorji liczb całkowitych. (Kraków 1907).

Stąd i z równości (14) i z uwagi, że liczby B_n, B'_n są całkowite, twierdzę, że wynika, iż jest też

$$\left(\frac{m+1}{p}\right)^2 > 2\,;\ \left(\frac{m}{p}\right)^2 < 2\ . \tag{16}$$

Wykażmy pierwszą z nierówności (16); przypuśćmy, że jest

$$\left(\frac{m+1}{p}\right)^2 < 2\ , \tag{17}$$

(wiemy bowiem, że kwadrat ułamka nie może być równy liczbie 2). Na mocy nierówności (14) i (17) można znaleźć taką liczbę całkowitą n nie mniejszą od liczby 2, iżby było

$$\frac{1}{B^2_n} < 2 - \left(\frac{m+1}{p}\right)^2$$

przeto byłoby

$$\left(\frac{m+1}{p}\right)^2 < 2 - \frac{1}{B^2_n}\ .$$

co jest sprzeczne z pierwszą z nierówności (15); tymsamym udowodniliśmy prawdziwości pierwszej z nierówności (16), podobnie dowodzi się i drugiej z nierówności (16).

Nierówności (17) wyrażają na mocy tw. I i II własności liczb wymiernych należących do klas K_1 i K_2 przekroju P.

§ 2. Stąd wynika, że przekrój (P), określony dotąd gieometrycznie można określić i arytmetycznie; oznaczmy przez Q przekrój następujący: niech do klasy pierwszej L_1 przekroju Q należą te liczby wymierne, których kwadrat jest mniejszy od liczby 2, a pozostałe liczby wymierne*) niech należą do klasy drugiej L_2; powiadam, że przekroje (P) i (Q) są identyczne, t. zn. że każda liczba wymierna, należąca do klasy pierwszej jednego z przekrojów (P) i (Q) należy także do klasy pierwszej drugiego z tych przekrojów.

Oznaczmy przez w liczbę wymierną klasy L_1 przekroju Q, a więc liczbę o własności $w^2 < 2$; oznaczmy przez p mianownik jednego z ułamków równych liczbie w; jest więc $p \neq 0$. Niech m oznacza taką liczbę całkowitą, iżby z ułamków (6), pierwszy należał do klasy K_1 przekroju P, drugi do klasy K_2 tego przekroju; liczby (6), jak okazaliśmy w § 1, spełniają nierówności (16), widzimy, że $w \leqq \frac{m}{p}$, w przeciwnym razie byłoby $w \geqq \frac{m+1}{p}$, a więc też $w^2 > 2$ wbrew założeniu; na mocy tw. I liczba w należy do klasy K_1 przekroju (P). Oznaczmy teraz przez u dowolną liczbę wymierną klasy K_1 przekroju (P) i przez p mianownik jednego z ułamków równych liczbie u; jest więc $p \neq 0$; oznaczmy dalej liczbę całkowitą m w ten sposób, aby pierwszy z ułamków

*) Zob. pierwszy odsyłacz na str. 463.

(6) należał do klasy K_1 przekroju (P), a drugi z nich do klasy K_2 tego przekroju; oczywiście na mocy tw. I i II

$$u \leqq \frac{m}{p}$$

i przeto stąd i z drugiej z nierówności (16) otrzymujemy nierówność

$$u^2 < 2$$

przeto liczba wymierna u należy też do klasy L_1 przekroju Q. Okazaliśmy więc, że przekroje (P) i (Q) są identyczne i tym samym, że przekrój (P), określony gieometrycznie daje się też określić arytmetycznie.

§ 3. Winienem teraz wyjaśnić stosunek logiczny rozważań § 1 i 2 do wyniku otrzymanego przez zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC, jaki otrzymamy, przeprowadzając przekątną BC w kwadracie $ABCD$. Otóż zastosowanie twierdzenia Pitagorasa wymaga wymierzenia boku BC przy jednostce np. AB *), ale ponieważ te odcinki są ze sobą niespółmierne, przeto zakres liczb rozporządzalnych winien być conajmniej zbiorem liczb bezwzględnych, t. zn. zbiorem otrzymanym przez połączenie zbioru liczb wymiernych ze zbiorem liczb niewymiernych. Nadto zwrócić trzeba i na to uwagę, że twierdzenie Pitagorasa wymaga poprzedniego określenia i działań zasadniczych na liczbach bezwzględnych. Tymczasem rozumowania § 1 i § 2 obywają się zupełnie bez określenia liczb niewymiernych; wystarcza dla rozważań § 1 i § 2, aby rozporządzalny zakres liczb był zbiorem liczb wymiernych bezwzględnych, t. j. zbiorem otrzymanym przez połączenie zbioru liczb całkowitych bezwzględnych ze zbiorem liczb ułamkowych bezwzględnych.

Kraków. *A. Hoborski.*

---

*) Wszelki odcinek spółmierny z jednym z odcinkow AB, BC jest z konieczności niespółmierny z drugim z tych dwu odcinków.