LE ALGEBRE DEL 3° ORDINE (*)

Nell'anno accademico 1922-'23, in accordo con un programma di studii che mi ero proposto di promuovere e di cui detti cenno in una Nota presentata per il *Rendiconto* di quest'Accademia (1), indicai ad una mia allieva, come tema della tesi di laurea, la classificazione e lo studio delle proprietà più notevoli delle algebre del 3° ordine definite nei vari corpi numerici.

La ricerca non fu allora portata a termine, nè, per ragioni varie, ebbi più occasione di interessarmi allo svolgimento di quel programma.

Indotto a riprenderlo in esame per taluni studi o miei o che vengono compiendo il prof. SPAMPINATO e i suoi allievi, comincio con l'assegnare mediante questa Memoria la classificazione completa delle algebre del 3° ordine, alla quale taluni miei recenti risultati, che si troveranno richiamati più innanzi, mi hanno permesso di arrivare con estrema rapidità. Tralascio invece quasi del tutto lo studio delle proprietà dei singoli tipi, che, del resto, non presenterebbe difficoltà di sorta.

§ 1. IL CASO SEMI-SEMPLICE.

1. Sia A un'algebra del 3° ordine in un corpo numerico Γ, e supponiamo in primo luogo, che essa sia semi-semplice.

(*) *Mem. Reale Acc. di Scienze Fisiche e Mat. di Napoli*, (2) 20 (1935), n. 13.

(1) G. SCORZA, *Le algebre doppie* (Rend. di questa Accademia, vol. XXVIII, 1922, pp. 65-79).

Essendo di ordine > 1, essa sarà certo dotata di modulo [2]; inoltre, o sarà addirittura semplice, o sarà somma diretta di algebre semplici dotate di modulo. Intanto un'algebra semplice con modulo, il cui ordine sia un numero primo, è addirittura primitiva e potenziale [3], dunque, nell'ipotesi fatta, l'algebra A

a) o è primitiva e potenziale, indi può considerarsi come un corpo algebrico dedotto da Γ mediante un polinomio irriducibile di 3^0 grado;

b) o è somma diretta di due algebre primitive A_1 e A_2, con A_1 del 2^0 ordine A_2 del 1^0, di guisa che A_1 può riguardarsi come un corpo algebrico dedotto da Γ mediante un polinomio irriducibile di 2^0 grado e A_2 come un corpo numerico isomorfo a Γ;

c) o è somma diretta di tre algebre primitive A_1, A_2, A_3 del 1^0 ordine, ognuna delle quali può riguardarsi come un corpo numerico isomorfo a Γ.

2. Nella prima alternativa A è l'algebra potenziale generata da un elemento il quale abbia per equazione minima un'equazione in Γ irriducibile e del 3^0 grado:

$$\varphi(\xi) = 0. \tag{1}$$

Se

$$\psi(\xi) = 0 \tag{2}$$

è anch'essa un'equazione in Γ irriducibile di 3^0 grado ed A' è l'algebra legata ad essa come A alla (1), si può domandare a qual patto A ed A' riescono equivalenti.

La risposta è immediata: occorre e basta che in A esista un elemento con l'equazione minima (2); cioè che:

La (2) *sia una trasformata di* TSCHIRNHAUSEN *della* (1).

3. Nell'alternativa *b*), rispetto a due convenienti unità u_1 e u_2, la tavola di moltiplicazione dell'algebra A_1, se il sottocorpo fondamentale di Γ non è isomorfo a $C[2]$, si può supporre del tipo

$$u_1^2 = u_1, \quad u_1 u_2 = u_2 u_1 = u_2, \quad u_2^2 = \alpha u_1 \tag{3}$$

con α numero di Γ non quadrato; se invece quel sottocorpo è isomorfo a $C[2]$ si può supporre o del tipo (3), o del tipo

$$u_1^2 = u_1, \quad u_1 u_2 = u_2 u_1 = u_2, \quad u_2^2 = \alpha u_1 + u_2, \tag{4}$$

[2] G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), pag. 277.
[3] Loc. cit. [2] pag. 335 e pag. 329.

con α numero di Γ, che in Γ non possa mettersi sotto la forma $\lambda + \lambda^2$ [4].

Ma, allora, se u_3 è il modulo di A_2, la tavola di moltiplicazione di A rispetto alle unità u_1, u_2, u_3 riesce:

(I)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	0
u_2	u_2	αu_1	0
u_3	0	0	u_3

,

oppure

(II)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	0
u_2	u_2	$\alpha u_1 + u_2$	0
u_3	0	0	u_3

,

il modulo di A essendo dato, in ogni caso, da $u_1 + u_3$.

Tenendo presente quanto è detto nei n[i] 6, 7 e 8 della mia Nota citata in [1], si riconosce subito:

1.º *che la tavola di moltiplicazione di A non può mai esser ricondotta indifferentemente alla forma* (I) *o* (II);

2.º *che se la tavola di A è riconducibile alla forma* (I) [*alla forma* (II)] *ed A' è un'algebra in Γ definita dalla tavola, che si ottiene da* (I) [*da* (II)] *cambiando α in α', perchè A ed A' riescano equivalenti occorre e basta che sia $\alpha' = \alpha\varrho^2$ [$\alpha + \alpha' = \varrho + \varrho^2$], con ϱ numero di Γ.*

4. Nell'alternativa *c*), detti u_1, u_2, u_3 i moduli di A_1, A_2, A_3 — per modo che $u_1 + u_2 + u_3$ è quello di A —, rispetto alle unità u_1, u_2, u_3 la tavola di moltiplicazione di A è data da

(III)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	0
u_2	0	u_2	0
u_3	0	0	u_3

.

[4] Loc. cit. [1] pag. 70.

§ 2. IL CASO PSEUDONULLO

5. Supponiamo in secondo luogo che A sia pseudonulla e indichiamone l'indice con r. Sarà $4 \geq r \geq 2$ e quindi r è 4, 3 o 2.

Esaminiamo successivamente i tre casi.

6. Se $r = 4$, A è potenziale e generata da un elemento v con l'equazione minima $\xi^4 = 0$; quindi, se si pone $u_1 = v$, $u_2 = v^2$, $u_3 = v^3$, la sua tavola di moltiplicazione si potrà supporre data da

(IV)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_2	u_3	0
u_2	u_3	0	0
u_3	0	0	0

7. Se $r = 3$, sarà $A > A^2 > A^3 = 0$ e l'ordine di A^2, non potendo essere nè 3, nè 2 (5), sarà necessariamente eguale ad 1.

Ora due casi possono presentarsi, e cioè, o in A vi è almeno un elemento (pseudonullo) di rango 3, o ciascun elemento di A è a quadrato nullo.

Si dia il primo caso e sia u_1 un elemento di A a rango 3; sarà $u_1^2 \neq 0$ e, se si pone, $u_3 = u_1^2$, u_1 e u_3 saranno due elementi indipendenti di A; inoltre A^2, essendo del 1^0 ordine, sarà l'insieme dei multipli scalari di u_3.

Il prodotto $u_1 A$ è un sistema contenuto in A^2 e $\neq 0$; quindi è necessariamente del 1^0 ordine e gli elementi di A, ognuno dei quali ha un nullifico sinistro in u_1, costituiscono un sistema S di ordine 2. Naturalmente S contiene A^2, ma non u_1; e dunque, se u_2 è un elemento di S esterno ad A^2, u_1, u_2, u_3 sono tre elementi indipendenti di A.

Assumiamoli come unità di A e cerchiamo di determinare la corrispondente tavola di moltiplicazione.

Per quanto è stato detto e per il fatto che $A^3 = 0$, è intanto

$$(5) \qquad u_1^2 = u_3 \,,\; u_1 u_2 = 0 \;,\; u_1 u_3 = u_3 u_1 = u_2 u_3 = u_3 u_2 = u_3^2 = 0.$$

(5) Se l'ordine di A^2 fosse 2, lo *scarto* di A sarebbe 1, A sarebbe potenziale e il suo indice sarebbe non 3, ma 4. Cfr. G. SCORZA, *Sulla struttura delle algebre pseudonulle* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, settembre 1934).

Quanto ai prodotti $u_2 u_1$ e u_2^2, essi, come elementi di A^2, dovranno esser multipli scalari di u_3. Ma, se è $u_2 u_1 = \lambda u_3$, con $\lambda \neq 0$, si può supporre $\lambda = 1$, perchè alla considerazione di u_2 potrebbe esser sostituita quella di $\frac{u_2}{\lambda}$ senza alterare le (5); dunque nel caso in discorso la tavola di moltiplicazione di A può supporsi o del tipo

(V)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_3	0	0
u_2	u_3	αu_3	0
u_3	0	0	0

,

o del tipo

(VI)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_3	0	0
u_2	0	αu_3	0
u_3	0	0	0

.

Si dia il secondo caso e siano u_1, u_2, u_3 tre elementi indipendenti di A, con u_3 in A^2. Sarà

$$u_1^2 = u_2^2 = u_1 u_3 = u_3 u_1 = u_2 u_3 = u_3 u_2 = u_3^2 = 0,$$

e inoltre

$$u_1 u_2 = \alpha u_3, \quad u_2 u_1 = \beta u_3,$$

con α e β numeri di Γ; quindi il quadrato dell'elemento corrente di A

$$\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3$$

sarà dato da

$$\xi_1 \xi_2 (\alpha + \beta) u_3 .$$

Ma questo ha da esser nullo qualunque siano ξ_1 e ξ_2, dunque

$$\alpha + \beta = 0.$$

Intanto α e $\beta = -\alpha$ non possono essere entrambi nulli, perchè altrimenti A sarebbe una zero-algebra e il suo indice sarebbe 2, non 3; dunque, nel caso in discorso, è $\alpha \neq 0$ e sostituendo αu_3

ad u_3, la tavola di moltiplicazione di A può supporsi data da

(VII)

	u_1	u_2	u_3
u_1	0	u_3	0
u_2	$-u_3$	0	0
u_3	0	0	0

.

Riassumendo:

Quando l'algebra A è pseudonulla e di indice 3 essa può supporsi definita da una tavola di moltiplicazione del tipo (V), (VI) *o* (VII).

Si noti che:

Algebre con tavole di due diversi di questi tre tipi non sono certo equivalenti fra di loro.

E infatti un'algebra con la tavola (VII) ha nulli tutti i quadrati dei suoi elementi, mentre ciò non accade per quelle del tipo (V) oppure (VI). E infine le algebre con tavole del tipo (VI) sono commutative, mentre quelle rispondenti a tavole del tipo (V) non sono tali.

8. Ma possiamo aggiungere qualche cosa di più preciso: possiamo dimostrare cioè che:

Due algebre in Γ, le quali siano definite da tavole di moltiplicazione del tipo (V) *con valori diversi del parametro α, non sono certo equivalenti tra di loro*;

e che:

Due algebre in Γ, le quali siano definite da tavole di moltiplicazione del tipo (VI), *sono equivalenti quando, e solo quando, dei due valori del parametro α ad esse corrispondenti, uno è eguale al prodotto dell'altro per un quadrato.*

Si supponga, in primo luogo, che A sia definita dalla (V) e che A' sia un'algebra in Γ la quale rispetto alle unità u'_1, u'_2, u'_3 abbia la tavola di moltiplicazione:

	u'_1	u'_2	u'_3
u'_1	u'_3	0	0
u'_2	u'_3	$\alpha' u'_3$	0
u'_3	0	0	0

.

Dico che A ed A' sono equivalenti solo a patto che sia $\alpha = \alpha'$.

E infatti si supponga che A ed A' siano equivalenti: A dovrà possedere un gruppo di unità v_1, v_2, v_3, i cui prodotti a due a due siano forniti dallo schema:

	v_1	v_2	v_3
v_1	v_3	0	0
v_2	v_3	$\alpha' v_3$	0
v_3	0	0	0

.

Pongasi

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
v_1 &= \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 \, , \\
v_2 &= \lambda' u_1 + \mu' u_2 + \nu' u_3 \, , \\
v_3 &= \lambda'' u_1 + \mu'' u_2 + \nu'' u_3 \, ,
\end{aligned}
$$

con le $\lambda, \ldots, \nu''$ numeri convenienti di Γ. Sarà:

$$0 = v_1 v_3 = (\lambda\lambda'' + \mu\lambda'' + \alpha\mu\mu'') u_3 \, ,$$

$$0 = v_3 v_1 = (\lambda\lambda'' + \lambda\mu'' + \alpha\mu\mu'') u_3 \, ;$$

indi

$$\lambda\lambda'' + \mu\lambda'' + \alpha\mu\mu'' = 0, \qquad \lambda\lambda'' + \lambda\mu'' + \alpha\mu\mu'' = 0,$$

e, sottraendo,

$$(7) \qquad \lambda\mu'' - \mu\lambda'' = 0.$$

In maniera simile, badando che i prodotti $v_2 v_3$ e $v_3 v_2$ sono nulli, si trova

$$(8) \qquad \lambda' \mu'' - \mu' \lambda'' = 0.$$

Poichè nelle (6), rappresentanti una trasformazione di coordinate in Γ, il determinante dei coefficienti deve esser diverso da zero, la coesistenza delle (7) e (8) porta che è, necessariamente,

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' \neq 0 \text{ e } \nu'' \neq 0.$$

La prima di queste diseguaglianze, posta a raffronto con le (7), (8), mostra che è $\lambda'' = \mu'' = 0$, quindi resta

$$v_3 = \nu'' u_3 \text{, ossia } u_3 = \frac{v_3}{\nu''} \text{ (}^6\text{)}.$$

Dopo ciò, da

$$v_3 = v_1^2 = (\lambda^2 + \lambda\mu + \alpha\mu^2)\frac{v_3}{\nu''},$$

$$0 = v_1 v_2 = (\lambda\lambda' + \mu\lambda' + \alpha\mu\mu')\frac{v_3}{\nu''},$$

$$v_3 = v_2 v_1 = (\lambda\lambda' + \lambda\mu' + \alpha\mu\mu')\frac{v_3}{\nu''},$$

$$\alpha' v_3 = v_2^2 = (\lambda'^2 + \lambda'\mu' + \alpha\mu'^2)\frac{v_3}{\nu''},$$

si ricava

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda\mu + \alpha\mu^2 &= \nu'', \\ \lambda\lambda' + \mu\lambda' + \alpha\mu\mu' &= 0, \\ \lambda\lambda' + \lambda\mu' + \alpha\mu\mu' &= \nu''. \\ \lambda'^2 + \lambda'\mu' + \alpha\mu'^2 &= \alpha'\nu''. \end{aligned}$$

La seconda e la terza di queste eguaglianze, risolute rispetto a λ' e μ', ove si tenga conto della prima e si ricordi che $\nu'' \neq 0$, dànno

$$\lambda' = -\alpha\mu, \quad \mu' = \lambda + \mu,$$

dopo di che la quarta, sostituendo per λ', μ' questi valori e tenendo conto della prima, dà

$$\alpha\nu'' = \alpha' \nu'', \text{ ossia } \alpha = \alpha'.$$

Con ciò il primo dei due teoremi enunciati è dimostrato.

Si supponga, in secondo luogo, che A sia definita dalla (VI) e che A' sia un'algebra in Γ definita dalla tabella:

	u'_1	u'_2	u'_3
u'_1	u'_3	0	0
u'_2	0	$\alpha' u'_3$	0
u'_3	0	0	0

.

(6) Che v_3 debba esprimersi a mezzo della sola u_3 potrebbe dedursi più rapidamente osservando che i multipli scalari di u_3 o di v_3 debbono coincidere con gli elementi di A^2 e quindi fra di loro.

Dico che A ed A' sono equivalenti quando, e solo quando, è $\alpha' = \delta^2 \alpha$, con δ numero di Γ.

Suppongasi, infatti, che A ed A' siano equivalenti; esisteranno in A tre unità v_1, v_2, v_3 che si combineranno fra di loro, rispetto alla moltiplicazione, secondo lo schema

(9)

	v_1	v_2	v_3
v_1	v_3	0	0
v_2	0	$\alpha' v_3$	0
v_3	0	0	0

Si supponga che le v_i si esprimano per mezzo delle u_i con le (6); scrivendo che debbono esser nulli i prodotti $v_1 v_3 = v_3 v_1$, $v_2 v_3 = v_3 v_2$ e v_3^2, si trova che deve essere

$$\lambda\lambda'' + \alpha\mu\mu'' = 0, \quad \lambda'\lambda'' + \alpha\mu'\mu'' = 0, \quad \lambda''^2 + \alpha\mu''^2 = 0,$$

dalle quali si deduce

$$(\lambda\mu' - \lambda'\mu)\lambda'' = 0, \quad (\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')\lambda'' = 0, \quad (\lambda\mu'' - \lambda''\mu)\lambda'' = 0.$$

Di qua, ricordando che il determinante dei coefficienti delle (6) è $\neq 0$, si trae $\lambda'' = 0$; dopo di che, non potendo essere $\mu = \mu' = \mu'' = 0$, è $\alpha\mu'' = 0$, ossia $\alpha \neq 0$ e $\mu'' = 0$, oppure $\alpha = 0$.

Si dia la prima alternativa. Sarà

$$v_3 = \nu'' u_3 \text{ (7)}$$

con $\nu'' \neq 0$, e poi

$$v_3 = v_1^2 = (\lambda^2 + \alpha\mu^2) u_3 = \frac{\lambda^2 + \alpha\mu^2}{\nu''} v_3,$$

$$0 = v_1 v_2 = (\lambda\lambda' + \alpha\mu\mu') u_3 = \frac{\lambda\lambda' + \alpha\mu\mu'}{\nu''} v_3,$$

$$\alpha' v_3 = v_2^2 = (\lambda'^2 + \alpha\mu'^2) u_3 = \frac{\lambda'^2 + \alpha\mu'^2}{\nu''} v_3;$$

(7) Cfr. nota (6).

quindi dovrà essere

$$\lambda^2 + \alpha\mu^2 = \nu'' ,$$
$$\lambda\lambda' + \alpha\mu\mu' = 0 ,$$
$$\lambda'^2 + \alpha\mu'^2 = \alpha' \nu''.$$

Le prime due di queste eguaglianze, badando che è $\lambda\mu' - \lambda'\mu \neq 0$, dànno

$$\lambda = \frac{\nu'' \mu'}{\lambda\mu' - \lambda' \mu}, \qquad \alpha\mu = \frac{-\nu'' \lambda'}{\lambda\mu' - \lambda' \mu},$$

ossia

$$\lambda' = -\frac{\alpha \mu}{\nu''}(\lambda\mu' - \lambda' \mu), \qquad \mu' = \frac{\lambda}{\nu''}(\lambda\mu' - \lambda' \mu);$$

quindi, sostituendo nell'ultima e tenendo conto della prima, viene

$$\alpha' \nu'' = \alpha \frac{(\lambda\mu' - \lambda' \mu)^2}{\nu''},$$

ossia, come volevasi,

$$\alpha' = \alpha \left(\frac{\lambda\mu' - \lambda'\mu}{\nu''}\right)^2.$$

Sia adesso $\alpha = 0$. Sarà

$$0 = v_1 v_2 = \lambda\lambda' u_3 \quad , \qquad \text{indi } \lambda\lambda' = 0 ;$$
$$v_3 = v_1^2 \quad = \lambda^2 u_3 \quad , \qquad \text{indi } \lambda \neq 0 \text{ e } \lambda' = 0 ;$$
$$\alpha' v_3 = v_2^2 \quad = \lambda'^2 u_3 = 0 , \qquad \text{indi anche } \alpha' = 0 ;$$

e potrà ancora dirsi che α' è il prodotto di α per un quadrato.

Viceversa, suppongasi $\alpha' = \alpha\varrho^2$, con ϱ numero di Γ e con α ed α' non entrambi nulli, chè altrimenti il teorema sarebbe evidente. Con la trasformazione

$$v_1 = u_1 ,$$
$$v_2 = \varrho u_2 ,$$
$$v_3 = u_3 ,$$

la tabella (VI) si muta nella (9).

9. Resta da considerare il caso in cui l'indice r di A è 2; ma allora A è una zero-algebra e la sua tavola di moltiplicazione rispetto a tre sue unità u_1, u_2, u_3 comunque scelte è data da

$$\text{(VIII)} \qquad u_i u_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

10. Si osservi che:

Dei cinque tipi di algebre pseudonulle, coi quali ci siamo imbattuti in questo paragrafo, conducono ad algebre irriducibili i tipi (IV), (V), (VI) *per* $\alpha \neq 0$ *e* (VII), *ad algebre riducibili i tipi* (VI) *per* $\alpha = 0$ *e* (VIII).

Suppongasi, infatti, che la nostra algebra A sia pseudonulla e riducibile, di guisa che potrà porsi

$$A = A_1 \dot{+} A_2$$

con A_1 e A_2 algebre del 2° e 1° ordine rispettivamente.

Se l'indice di $A_i \, (i = 1, 2)$ si indica con r_i, sarà r eguale al non minore dei numeri r_i; intanto $r_1 \leq 3$ ed $r_2 \leq 2$, dunque r, nell'ipotesi fatta, è al più eguale a 3. Ciò dimostra intanto che le algebre del tipo (IV) sono irriducibili.

Sia $r = 3$; allora è necessariamente $r_1 = 3$ ed $r_2 = 2$, quindi A_1 è un'algebra potenziale, ed A contiene certo degli elementi di rango 3. Ma le algebre del tipo (VII) sono di indice 3 e non contengono elementi di rango 3, dunque esse sono, come volevasi, irriducibili.

Si supponga ora che, nell'argomentazione del n° 7 conducente ai tipi (V) e (VI), u_1 sia precisamente l'elemento che genera A_1; A_1 sarà l'algebra determinata dalle unità u_1 e $u_1^2 = u_3$, e A_2 dovrà esser costituita dai multipli scalari di un elemento, a quadrato nullo, indipendente da u_3 e avente un nullifico in u_1.

Ora, per le algebre definite da tabelle del tipo (V) u_1 riesce nullifico soltanto per i multipli scalari di u_3, dunque codeste algebre sono irriducibili; per le algebre definite da tabelle del tipo (VI) u_1 riesce un nullifico per tutti e solo gli elementi del tipo $\lambda u_2 + \mu u_3$, con λ e μ numeri di Γ, dunque A_2 sarà la zero-algebra generata da un elemento di questa forma con $\lambda \neq 0$. Ma da $x = \lambda u_2 + \mu u_3$ segue, badando alla (VI), $x^2 = \alpha \lambda^2 u_3$ che è zero quando $\alpha \neq 0$ soltanto per $\lambda = 0$, dunque per $\alpha \neq 0$ la (VI) definisce algebre irriducibili.

Che le algebre del tipo (VI) con $\alpha = 0$ o quelle del tipo (VIII) siano riducibili è evidente, dunque ecc.

§ 3. IL CASO GENERALE.

11. Supponiamo ora che A non sia nè semi-semplice, nè pseudonulla, indi dotata di sotto algebra eccezionale propria E.

L'ordine di E potrà essere 2 o. 1; esaminiamo separatamente i due casi.

12. L'ordine di E sia 2; il suo indice potrà essere 3 o 2.

Se l'indice è 3, essa è potenziale e allora, per teoremi noti [8], secondo che è priva o dotata di modulo, A è la somma diretta o non diretta di un'algebra di 1^0 ordine con modulo l di E; per conseguenza essa si può considerare come definita da una tavola di moltiplicazione del tipo

(IX)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	0
u_2	0	u_3	0
u_3	0	0	0

,

o del tipo

(X)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	u_3
u_2	u_2	u_3	0
u_3	u_3	0	0

.

Se l'indice di E è 2, indi E una zero algebra, indichiamo con E_1, E_2, E_3, E_4 i sistemi costituiti dagli elementi di E che in un automodulo principale u_1 di A hanno, rispettivamente, un modulo, o un modulo sinistro e un nullifico destro, o un modulo destro e un nullifico sinistro, o, infine, un nullifico.

Notisi che, se u_1' è un ulteriore automodulo principale di A, è

$$u_1' = u_1 + e',$$

(8) G. Scorza, *Le algebre per ciascuna delle quali la sotto-algebra eccezionale è potenziale* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, nov. 1934).

con e' elemento convenientemente di E, e che se x è un elemento qualsiasi di E, essendo questa una zero-algebra, si ha

$$u'_1 x = u_1 x \quad \text{e} \quad x u'_1 = x u_1 .$$

Ciò porta che la definizione dei sistemi E_i non dipende dalla scelta di u_1 fra gli automoduli principali di A.

A norma di un teorema da me stabilito altrove (9), sarà

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 ,$$

e i sistemi E_i saranno complementari in E.

Essendo 2 l'ordine di E, i casi possibili saranno:

1) E_1 di ordine 2, $E_2 = E_3 = E_4 = 0$;
2) E_1 ed E_2 di ordine 1, $E_3 = E_4 = 0$;
3) E_1 ed E_3 » » $E_2 = E_4 = 0$;
4) E_1 ed E_4 » » $E_2 = E_3 = 0$;
5) E_2 di ordine 2, $E_1 = E_3 = E_4 = 0$;
6) E_2, E_3 di ordine 1, $E_1 = E_4 = 0$;
7) E_2, E_4 » » $E_1 = E_3 = 0$;
8) E_3 di ordine 2, $E_1 = E_2 = E_4 = 0$;
9) E_3, E_4 di ordine 1, $E_1 = E_2 = 0$;
10) E_4, di ordine 2, $E_1 = E_2 = E_3 = 0$.

Ebbene, indichiamo con u_2 e u_3 due elementi indipendenti di E. Essi o apparterranno entrambi a uno stesso dei quattro sistemi E_i, se di questi uno solo è $\neq 0$, o saranno situati, uno per ciascuno, nei due di quei quattro sistemi che sono di ordine 1.

Allora corrispondentemente alle dieci alternative or ora enumerate la tavola di moltiplicazione di A rispetto ad u_1, u_2, u_3 può presentare i seguenti dieci aspetti:

(XI)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	u_3
u_2	u_2	0	0
u_3	u_3	0	0

, (XII)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	u_3
u_2	u_2	0	0
u_3	0	0	0

, (XIII)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	0
u_2	u_2	0	0
u_3	u_3	0	0

,

(9) Loc. cit. (8), § 2.

$$
(\mathrm{XIV})\ \begin{array}{c|c|c|c|}
 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline
u_1 & u_1 & u_2 & 0 \\ \hline
u_2 & u_2 & 0 & 0 \\ \hline
u_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}\ ,\quad
(\mathrm{XV})\ \begin{array}{c|c|c|c|}
 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline
u_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline
u_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
u_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}\ ,\quad
(\mathrm{XVI})\ \begin{array}{c|c|c|c|}
 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline
u_1 & u_1 & u_2 & 0 \\ \hline
u_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
u_3 & u_3 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}\ ,
$$

$$
(\mathrm{XVII})\ \begin{array}{c|c|c|c|}
 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline
u_1 & u_1 & u_2 & 0 \\ \hline
u_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
u_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}\ ,\quad
(\mathrm{XVIII})\ \begin{array}{c|c|c|c|}
 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline
u_1 & u_1 & 0 & 0 \\ \hline
u_2 & u_2 & 0 & 0 \\ \hline
u_3 & u_3 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}\ ,\quad
(\mathrm{XIX})\ \begin{array}{c|c|c|c|}
 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline
u_1 & u_1 & 0 & 0 \\ \hline
u_2 & u_2 & 0 & 0 \\ \hline
u_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}\ ,
$$

$$
(\mathrm{XX})\ \begin{array}{c|c|c|c|}
 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline
u_1 & u_1 & 0 & 0 \\ \hline
u_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
u_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}\ .
$$

È chiaro che:

Algebre corrispondenti a tavole di moltiplicazione diverse fra le dieci ora indicate non sono certo equivalenti fra di loro;

e che:

Le algebre corrispondenti alle tavole (XIV), (XVII), (XIX) *e* (XX) *sono riducibili, essendo somme dirette, le prime tre, delle algebre generate l'una da* u_1 *e* u_2, *l'altra da* u_3, *e l'ultima, delle tre algebre generate da* u_1, u_2 *e* u_3.

Si verifica inoltre agevolmente che:

Le algebre definite dalle (XI), (XIV) *e* (XX) *hanno un unico automodulo in* u_1, *il quale per la prima è addirittura modulo*; *quelle definite dalle* (XII) *e* (XIII) *hanno come automoduli tutti e solo gli elementi del tipo* $u_1 + \lambda u_3$, *con* λ *numero di* Γ — *automoduli che, per la prima, sono tutti moduli sinistri e per la seconda moduli destri* —; *quelle definite dalle* (XV), (XVI) *e* (XVIII) *hanno come automoduli tutti e solo gli elementi del tipo* $u_1 + \lambda u_2 + \mu u_3$, *con* λ, μ *numeri di* Γ, *i quali per la prima sono tutti moduli sinistri e per l'ultima tutti moduli destri; infine quelle definite dalle* (XVII) *e* (XIX) *hanno come automoduli tutti e solo gli elementi del tipo* $u_1 + \lambda u_2$, *con* λ *numero di* Γ.

Ciò posto, si può dimostrare a complemento della penultima proposizione che:

Le algebre definite dalle (XI), (XII), (XIII), (XV), (XVI) *e* (XVIII) *sono irriducibili.*

Che sia tale quella definita dalla (XI) è evidente, perchè essa è a modulo primitivo; per quelle definite dalle (XII), (XIII), (XV) e (XVIII) si dimostra in maniera uniforme; basterà dunque fissare l'attenzione, per es., sull'algebra definita dalla (XII) e su quella definita dalla (XVI).

Supponiamo, se è possibile, che A sia definita dalla (XII) o dalla (XVI) e che si abbia

$$A = A_1 + A_2 ,$$

con A_1 e A_2 algebre convenienti.

Se A corrisponde alla (XII), poichè u_1 è per essa un modulo sinistro, posto

$$u_1 = v_1 + v_2 ,$$

con v_i in $A_i\,(i = 1, 2)$, dovrà essere v_i modulo sinistro per A_i, indi automodulo di A. Ma allora sarà

$$v_1 = u_1 + \lambda' u_3 , \qquad v_2 = u_1 + \lambda'' u_3 ,$$

con λ', λ'' numeri opportuni di Γ, indi

$$u_1 = 2u_1 + (\lambda' + \lambda'') u_3 ,$$

relazione, che, data l'indipendenza di u_1 , u_3, è assurda.

Se A, invece, corrisponde alla (XVI), u_1, come automodulo di A, o è somma di due automoduli, appartenenti l'uno ad A_1 e l'altro ad A_2, o appartiene ad una delle algebre A_i, poniamo ad A_1. Ora la prima alternativa si esclude con ragionamento simile a quello or ora indicato; la seconda si esclude osservando che, se u_1 appartenesse ad A_1, sarebbe un nullifico per ciascun elemento di A_2, mentre non esistono elementi non nulli di A, pei quali u_1 sia un nullifico; dunque ecc.

13. Consideriamo, infine, il caso in cui E sia del 1° ordine. Allora basta applicare un teorema contenuto nella mia Nota già citata in (8), per riconoscere che, nel caso attuale:

L'algebra A;

1) *è la somma diretta di un'algebra primitiva del 2° ordine e di E, per modo che la sua tavola di moltiplicazione può supporsi*

del tipo

(XXI)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	0
u_2	u_2	αu_1	0
u_3	0	0	0

, *o del tipo* (XXII)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	u_2	0
u_2	u_2	$\alpha u_1 + u_2$	0
u_3	0	0	0

,

a proposito dei quali sono da fare osservazioni analoghe a quelle fatte pei tipi (I) *e* (II) *nel n*^{0} 3; *oppure*

2) *è la somma diretta di due algebre del* 1^0 *ordine con modulo e di E, ossia corrisponde ad una tavola di moltiplicazione del tipo*

(XXIII)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	0
u_2	0	u_2	0
u_3	0	0	0

;

oppure

3) *è la somma diretta di un'algebra del* 1^0 *ordine, contenente E, dotata di modulo o, soltanto, di moduli sinistri (destri) e di una algebra del* 1^0 *ordine con modulo, ossia corrisponde ad una tavola di moltiplicazione di uno dei tre seguenti tipi:*

(XXIV)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	u_3
u_2	0	u_2	0
u_3	u_3	0	0

, (XXV)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	u_3
u_2	0	u_2	0
u_3	0	0	0

, (XXVI)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	0
u_2	0	u_2	0
u_3	u_3	0	0

;

o infine

4) *è l'algebra irriducibile definita dalla tavola di moltiplicazione:*

(XXVII)

	u_1	u_2	u_3
u_1	u_1	0	u_3
u_2	0	u_2	0
u_3	0	u_3	0

.

14. La ricerca compiuta in questa Memoria, dopo aver osservato che le tavole di moltiplicazione, nelle quali ci siamo via via

imbattuti, come si verifica facilmente adoperando teoremi noti, rispondono tutte ad algebre realmente esistenti ([10]), può esser riassunta nel seguente enunciato complessivo:

Le algebre del 3^0 ordine, prescindendo da quelle che si riducono a corpi numerici, di fronte alla relazione di equivalenza, non possono essere che di 27 *tipi differenti. Di questi,* 7 *conducono ad algebre con modulo,* 20 *ad algebre prive di modulo; ed eccettuato il tipo* (VI), *che può dar luogo ad algebre irriducibili o riducibili, secondo che per esso è $\alpha \neq 0$ o $\alpha = 0$, dei rimanenti,* 11 *conducono ad algebre irriducibili,* 15 *ad algebre riducibili.*

([10]) I teoremi cui qui si allude sono quelli che si trovano ai n[i] 202 (pag. 305), 204 (pag. 307) e 187 (pag. 290) del volume citato in ([2]). Naturalmente — occorre appena rilevarlo — esistono realmente algebre rispondenti ai tipi (I), (II), (XXI), (XXII) soltanto per quei corpi che ammettono numeri α dotati delle proprietà ivi richieste.

Notisi, infine, che i cinque tipi di algebre complesse dotate di modulo, determinati già dallo STUDY e ritrovati rapidamente dalla sig.na CARBONARO (nel *Rendiconto* di questa R. Accademia pel 1933, pp. 171-175) con l'uso dei teoremi generali della teoria delle algebre, sono quelli che corrispondono alle tabelle quivi portanti i n.[ri] III, X, XI, XXIV e XXVII.