LE ALGEBRE DEL 4° ORDINE (*)

Questa Memoria, continuando lo svolgimento di un programma indicato già da qualche tempo e ripreso in esame da pochi mesi a questa parte (1), porge la classificazione completa delle algebre del 4° ordine, qualunque sia il corpo numerico nel quale si intendono definite.

Classificazioni parziali di algebre del 4° ordine erano state già affrontate da altri, in quanto E. STUDY (2) ha enumerato i tipi distinti di algebre di quell'ordine dotate di modulo e definite nel corpo complesso, R. B. ALLEN (3) ha considerato quelle riferentisi a sottocorpi del corpo complesso, e K. S. GHENT (4) quelle pseudonulle; ma nessuno finora si era posto il problema in tutta la sua generalità. Nè è da tacere che, se ai risultati dello STUDY, limitatosi per altro alla risoluzione del problema sotto ipotesi fortemente semplificatrici, non è da muovere alcun appunto, quelli dei sigg. ALLEN e GHENT lasciano assai a desiderare.

(*) *Mem. Reale Acc. di Scienze Fisiche e Mat. di Napoli,* (2) 20 (1935), n. 14.

(1) Cfr. G. SCORZA, *a) Le algebre doppie* (Rendic. di questa R. Accademia, vol. XXXIII, 1922, pp. 65-79; *b) Le algebre del 3° ordine* (Atti di questa R. Accademia, vol. XX, serie 2, n.° 13).

(2) E. STUDY, *Ueber systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der transformationsgruppe* (Monatsh. für Math. und Phys., 1890, pp. 283-355).

(3) R. B. ALLEN, *On hypercomplex number systems belonging to an arbitrary domain of rationality* (Trans. of the Am. Math. Society, vol. 9, pp. 203-218).

(4) K. S. GHENT, *A note on nilpotent algebras in four units* (Bull. of the Am. Math. Soc., vol. 40 (1934), pp. 331-338).

Basti dire che mentre i tipi di algebre del 4^0 ordine pseudonulle ed irriducibili, distinti di fronte alla relazione di equivalenza, sono 18, lo ALLEN ne enumera 14, ed il GHENT 9.

Come ha osservato il GHENT, dei 14 tipi dell'ALLEN 13 soltanto sono realizzabili e questi egli riconduce a 9; ma nessuno dei due si è preoccupato di far vedere che i tipi enumerati sono veramente distinti e che con essi sono davvero esauriti tutti quelli possibili.

Vi è luogo inoltre ad un ulteriore appunto critico.

Quando a definire un certo tipo d'algebra si adduce la forma, alla quale, procedendo opportunamente, può esser ricondotta la sua tavola di moltiplicazione, ed in questa compariscono dei parametri indeterminati, non si può dire che con ciò esso è stato nettamente caratterizzato di fronte alla relazione di equivalenza, se non quando sia chiarito come l'algebra si comporta di fronte a codesta relazione al variare dei detti parametri; se non quando, cioè, sia stabilito a qual patto riescono isomorfe algebre rispondenti a due assegnati sistemi di valori per quei parametri.

Di problemi di tal natura, qui sottoposti quante volte occorra a discussione esauriente e minuziosa, nessuno dei tre autori citati si preoccupa; ora, se per tal modo lo STUDY non è andato incontro ad inconvenienti gravi, dati i limiti che egli aveva imposti alla sua trattazione, a forti manchevolezze invece sono stati da ciò indotti lo ALLEN ed il GHENT. Così, ad esempio, nella classificazione del GHENT i tipi di algebre del 4^0 ordine pseudonulle, irriducibili e di indice 4 sono due, e in ciascuna delle tavole di moltiplicazione che li definiscono comparisce un parametro indeterminato; ma il GHENT non osserva che per ciascuna di codeste tavole i valori del parametro che conducono a tipi veramente distinti sono soltanto due, e che anzi per una di esse uno di tali valori va escluso, se si vuole che l'algebra corrispondente sia irriducibile (5).

Ritengo inutile accennare fin d'ora, sia pure in breve, ai risultati che qui si ottengono e che sono riassunti alla conclusione della Memoria; ma forse mette conto richiamar l'attenzione del lettore sulla peculiare importanza che per la ricerca attuale rivestono i corpi numerici, il cui sottocorpo fondamentale è esaurito dallo zero

(5) La determinazione di tutte le algebre pseudonulle di ordine e indice n è stata da me compiuta nella Nota: *Sopra una classe di algebre pseudonulle* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 70, 1934-35-XIII). Veggasi in essa la singolarità che a riguardo di tale determinazione presenta il caso $n = 4$.

e dall'unità, o, in altri termini, quei corpi per ognun dei quali è $2 = 0$. Mentre, ad esempio, di algebre del 4^0 ordine primitive e col rango 2 non ne esistono che nei corpi infiniti e pei corpi di tal natura nei quali è $2 \neq 0$ esse si raccolgono in un'unica categoria — quella dei così detti *quaternioni generalizzati* —, per i corpi, nei quali è $2 = 0$, accanto a codesta categoria se ne presenta una altra da essa totalmente diversa.

Mi sia lecito, infine, far rilevare che il metodo, cui in questo e nei miei lavori precedenti citati in (1) è inspirata la ricerca, è tale che non solo conduce ad enumerare tutti i tipi possibili, ma anche ne pone via via in chiaro risalto le principali proprietà di struttura.

Capitolo I.

IL CASO SEMI-SEMPLICE

1. Sia A un'algebra semi-semplice del 4^0 ordine in un corpo numerico Γ.

Poichè il suo ordine è > 1, essa è certo dotata di modulo (6); quindi, se non è semplice, è somma diretta di algebre semplici tutte dotate di modulo.

Un'algebra semplice con modulo può sempre considerarsi come il prodotto di un'algebra primitiva per un'algebra regolare; ma l'ordine di un'algebra regolare è un quadrato perfetto, dunque:

Se A è semplice, essa o è

a) addirittura primitiva, o è

b) regolare.

Quando A è somma diretta di algebre semplici dotate di modulo, queste, non potendo essere che di ordine 3, 2 o 1, sono necessariamente primitive; quindi:

Se A è semi-semplice, ma non semplice, essa è somma diretta

c) di due algebre primitive degli ordini 3 *ed* 1 *; o*

d) di due algebre primitive, entrambe del 2^0 *ordine; o*

(6) Cfr. G. Scorza, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921) pag. 277.

e) di tre algebre primitive, di cui una del 2^0 ordine e due del 1^0; o, infine,

f) di quattro algebre primitive del 1^0 ordine.

Esaminiamo separatamente le varie alternative.

2. *Alternativa a).*

Qui il rango di A, dovendo essere un divisore di 4 (7) e non potendo essere 1, è 4 o 2.

Se è 4, A è potenziale, ossia può riguardarsi come un corpo numerico dedotto da Γ mediante un polinomio, ivi irriducibile, di 4^0 grado. E avvertasi che, *se Γ è finito,* per un bel teorema dello WEDDERBURN, *A non può esser primitiva, se non a patto di essere potenziale e, quindi, di riescire del tipo ora descritto* (8).

Se è 2, *indi Γ necessariamente infinito,* per arrivare alla piena determinazione di A, conviene procedere nel modo che ora passiamo ad esporre (9).

3. Sia A primitiva e di rango 2 e sia (u_1, u_2, u_3, u_4) un suo aggregato di unità, con l'ipotesi che u_1 sia il modulo.

Dico che:

In A esiste almeno un sistema di ordine 3 tale che ciascun suo elemento abbia per quadrato un multiplo scalare del modulo.

Posto

$$u_i u_j = \sum_l^{1...4} \gamma_{i,j,l} u_l$$

cioè indicate con le $\gamma_{i,j,l}$ le costanti di moltiplicazione relative alle unità u_i, il quadrato dell'elemento x di A con le coordinate ξ_i, cioè di

$$x = \sum_i^{1...4} \xi_i u_i,$$

(7) Loc. cit. (6), pag. 328.

(8) Loc. cit. (6), pag. 454.

(9) Il ragionamento che segue è meno semplice di quello che per il caso del corpo reale il DICKSON indicò per la prima volta nel suo trattatello *Linear algebras* (n° 16 of the « Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. », Cambridge, University Press, 1914) e più tardi fu adoperato per altri corpi da me (*Le algebre di ordine qualunque e le matrici di* RIEMANN, Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, t. 45, 1921, pp. 1-204, n° 147 della Parte Prima) e dal DICKSON (*Algebren und ihre Zahlentheorie*, Zürich und Leipzig, Orell Füssli Verlag, pag. 43-44). Ma ciò è dovuto a necessità di cose: il ragionamento in discorso esige in modo essenziale che si tratti di corpi nei quali sia $2 \neq 0$.

sarà

$$\sum_{i,j}^{1\dots4} \xi_i \xi_j u_i u_j = \sum_{i,j,l}^{1\dots4} \gamma_{i,j,l} \xi_i \xi_j u_l,$$

e quindi per le sue coordinate η_l si avrà

$$\eta_l = \sum_{i,j}^{1\dots4} \gamma_{i,j,l} \xi_i \xi_j .$$

Ora supporre che A sia di rango 2 equivale a supporre che u_1, x ed x^2, qualunque sia x, siano dipendenti, dunque la caratteristica della matrice

$$\left\| \begin{matrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \end{matrix} \right\|$$

qualunque siano le ξ_i è inferiore a 3, ed è

(1) $$\xi_2 \eta_3 = \xi_3 \eta_2 ,$$

(2) $$\xi_3 \eta_4 = \xi_4 \eta_3 ,$$

(3) $$\xi_4 \eta_2 = \xi_2 \eta_4 .$$

In virtù delle (1) e (3), η_2 è nullo per $\xi_2 = 0$ e $\xi_3 \neq 0$, qualunque siano ξ_1 e ξ_4, ed è nullo per $\xi_2 = 0$ e $\xi_4 \neq 0$, qualunque siano ξ_1 e ξ_3.

Ciò porta che nell'espressione di η_2 mediante le ξ_i debbono mancare i termini che non contengono a fattore ξ_2, e che quindi per η_2 si ha un'eguaglianza del tipo

$$\eta_2 = (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4) \xi_2 ,$$

con le α numeri di Γ.

Dopo ciò le (1) e (3) dànno

$$\eta_3 = (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4) \xi_3 ,$$

$$\eta_4 = (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4) \xi_4 ;$$

e per conseguenza sarà

$$x^2 = \eta_1 u_1 + (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4)(\xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4),$$

ossia

$$x^2 = [\eta_1 - (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4) \xi_1] u_1 + \\ + (\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4) x.$$

Quest'uguaglianza mostra che il quadrato di x riesce certo un multiplo scalare di u_1, se

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4 = 0 ;$$

e dunque in A esiste, come volevasi, almeno un sistema di ordine 3, tale che ciascun suo elemento abbia per quadrato un multiplo scalare di u_1.

4. Dal teorema ora dimostrato discende che in A esistono certo due elementi, indipendenti fra loro e da u_1, tali che i loro quadrati e quelli delle loro combinazioni lineari risultino multipli scalari di u_1; dunque possiamo supporre di avere scelto u_2 e u_3, sì che risulti

$$u_2^2 = \alpha u_1, \quad u_3^2 = \beta u_1, \quad (u_2 + u_3)^2 = \gamma u_1, \tag{4}$$

indi

$$u_2 u_3 + u_3 u_2 = (\gamma - \alpha - \beta) u_1 . \tag{5}$$

Dico che:

Se in Γ è $2 \neq 0$, nella (5) *si può supporre $\gamma - \alpha - \beta = 0$; se in Γ è $2 = 0$, nella* (5) *si può supporre che $\gamma - \alpha - \beta$ sia* 0 *o* 1.

Supponiamo che nella (5) si abbia $\gamma - \alpha - \beta \neq 0$, e che in Γ sia $2 \neq 0$.

Se si pone

$$v_3 = u_2 - \frac{2\alpha}{\gamma - \alpha - \beta} u_3 ,$$

badando alle (4) e (5) si avrà

$$u_2 v_3 + v_3 u_2 = 0.$$

Ora, essendo $2 \neq 0$, per l'ipotesi fatta su Γ, e $\alpha \neq 0$, per l'ipotesi che A sia primitiva, indi non contenga divisori dello zero, riesce $2\alpha \neq 0$ e v_3 indipendente da u_2; dunque basta considerare v_3 al posto di u_3 per ottenere che i quadrati di u_2 e v_3 siano multipli scalari di u_1 e che si abbia inoltre

$$u_2 v_3 + v_3 u_2 = 0.$$

Adesso si tenga ferma l'ipotesi che sia $\gamma - \alpha - \beta \neq 0$, ma si supponga che in Γ sia $2 = 0$.

Allora, posto

$$v_3 = u_2 + \frac{1}{\gamma - \alpha - \beta} u_3 ,$$

v_3 sarà indipendente da u_2, il suo quadrato sarà un multiplo scalare di u_1 e infine risulterà

$$u_2 v_3 + v_3 u_2 = u_1 .$$

Con ciò l'asserzione fatta è dimostrata; ossia è dimostrato che:

Le unità u_2 e u_3 possono supporsi scelte di tal maniera che, se in Γ è $2 \neq 0$, risulti

$$(6) \qquad u_2^2 = \alpha u_1 , \quad u_3^2 = \beta u_1 , \quad u_2 u_3 + u_3 u_2 = 0 ;$$

e che, se in Γ è $2 = 0$, o sussistano relazioni come le (6) *o sussistano relazioni del tipo*

$$(7) \qquad u_2^2 = \alpha u_1 , \quad u_3^2 = \beta u_1 , \quad u_2 u_3 + u_3 u_2 = u_1 .$$

5. Valgano le (6).

Gli elementi u_1, u_2 generano in A una sotto-algebra primitiva del 2° ordine, quindi, per un teorema noto [10],

$$u_1 , u_2 , u_3 , u_2 u_3$$

sono indipendenti. Ciò porta che è lecito supporre

$$u_2 u_3 = u_4 , \quad \text{indi} \quad u_3 u_2 = - u_4 ;$$

dopo di che si avrà:

$$u_2 u_4 = u_2^2 u_3 = \alpha u_3 , \quad u_4 u_2 = u_2 u_3 \cdot u_2 = - u_3 u_2^2 = - \alpha u_3 ;$$

$$u_3 u_4 = u_3 \cdot u_2 u_3 = - u_3^2 u_2 = - \beta u_2 , \quad u_4 u_3 = u_2 u_3^2 = \beta u_2 ;$$

$$u_4^2 = u_2 \cdot u_3 u_2 \cdot u_3 = - u_2 \cdot u_2 u_3 \cdot u_3 = - \alpha\beta\, u_1 ;$$

[10] Loc. cit. [6], pag. 327.

e la tavola di moltiplicazione di A sarà del tipo

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & \alpha u_1 & u_4 & \alpha u_3 \\ u_3 & -u_4 & \beta u_1 & -\beta u_2 \\ u_4 & -\alpha u_3 & \beta u_2 & -\alpha\beta u_1 \end{array},$$

dove — e lo stesso si intenda detto per tutte le tabelle che seguono — all'incrocio della i^{ma} orizzontale con la j^{ma} verticale comparisce il valore del prodotto $u_i u_j$.

Valgano invece le (7).

Come prima si può supporre

$$u_2 u_3 = u_4 ;$$

e allora, badando che nelle ipotesi attuali è $2 = 0$, per modo che ogni numero di Γ coincide col suo opposto, per l'ultima delle (7) sarà

$$u_3 u_2 = u_1 + u_4 .$$

Dopo ciò risulterà

$$u_2 u_4 = u_2^2 u_3 = \alpha u_3 ; \; u_4 u_2 = u_2 \cdot u_3 u_2 = u_2 (u_1 + u_4) = u_2 + \alpha u_3 ;$$

$$u_4 u_3 = u_2 u_3^2 = \beta u_2 ; \; u_3 u_4 = u_3 u_2 \cdot u_3 = (u_1 + u_4) u_3 = u_3 + \beta u_2 ;$$

$$u_4^2 = u_2 \cdot u_3 u_2 \cdot u_3 = u_2 (u_1 + u_4) u_3 = (u_2 + \alpha u_3) u_3 = u_4 + \alpha\beta u_1 ;$$

e quindi la tavola di moltiplicazione di A sarà data da

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & \alpha u_1 & u_4 & \alpha u_3 \\ u_3 & u_1 + u_4 & \beta u_1 & u_3 + \beta u_2 \\ u_4 & u_2 + \alpha u_3 & \beta u_2 & u_4 + \alpha\beta u_1 \end{array}.$$

Il quadrato dell'elemento corrente

$$x = \sum_i^{1\ldots4} \xi_i u_i ,$$

quando per A vale la (I), è dato da

$$x^2 = (-\xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 - \alpha\beta\xi_4^2)\, u_1 + 2\xi_1 x\,; \tag{8}$$

quando invece vale la (II) (indi in Γ è $2 = 0$), è dato da

$$x^2 = (\xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 + \alpha\beta\xi_4^2 + \xi_2\,\xi_3 + \xi_1\,\xi_4)\, u_1 + \xi_4\, x. \tag{9}$$

Poichè A si suppone primitiva, x non può essere mai un divisore dello zero, quindi nella (8) l'espressione

$$\Phi = -\xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 - \alpha\beta\xi_4^2$$

non può essere nulla, se non a patto che tali siano tutte le ξ (11); e lo stesso deve accadere nella (9) per l'espressione

$$\Psi = \xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 + \alpha\beta\xi_4^2 + \xi_2\,\xi_3 + \xi_1\,\xi_4\,.$$

La discussione fatta permette intanto di asserire che:

Se A è primitiva e di rango 2, essa può supporsi come definita da una tavola di moltiplicazione del tipo (I) *o* (II). *Quanto ad α e β, essi debbono esser numeri di Γ tali che, nel primo caso, la Φ, nel secondo, la Ψ non riesca nulla, se non a patto che tali siano tutte le ξ. Il corpo Γ è, in ogni caso, infinito ed è lecito supporre che per A valga la tabella* (II) *solo se in Γ è $2 = 0$.*

6. Il teorema cui siamo pervenuti può essere precisato.

In primo luogo dimostriamo che:

L'espressione Φ è nulla solo a patto, che siano nulle tutte le ξ, quando, e solo quando, in Γ il numero α non è un quadrato e il numero β non è della forma $\lambda^2 - \alpha\mu^2$, con λ e μ numeri di Γ.

Se fosse $\alpha = \varrho^2$, con ϱ numero di Γ, oppure $\beta = \lambda^2 - \alpha\mu^2$, con λ e μ in Γ, sarebbe $\Phi = 0$ per

$$\xi_1 = \varrho, \quad \xi_2 = 1, \quad \xi_3 = \xi_4 = 0,$$

o per

$$\xi_1 = \lambda, \quad \xi_2 = \mu, \quad \xi_3 = 1, \quad \xi_4 = 0;$$

e dunque le condizioni per α e β, di cui nell'enunciato, sono necessarie.

(11) Loc. cit. (6), pag. 228.

Per dimostrarne la sufficienza, supponiamole soddisfatte e supponiamo che per certi valori delle ξ sia

$$(10) \qquad -\xi_1^2+\alpha\xi_2^2+\beta\xi_3^2-\alpha\beta\xi_4^2=0.$$

Consideriamo l'espressione $\xi_3^2-\alpha\xi_4^2$: si vede subito che essa è nulla.

E infatti, se non fosse tale, dalla (10) si trarrebbe

$$\beta=\frac{\xi_1^2-\alpha\xi_2^2}{\xi_3^2-\alpha\xi_4^2}=\frac{(\xi_1\xi_3-\alpha\xi_2\xi_4)^2}{\xi_3^2-\alpha\xi_4^2}-\alpha\frac{(\xi_2\xi_3-\xi_1\xi_4)^2}{\xi_3^2-\alpha\xi_4^2},$$

e β, contro l'ipotesi, sarebbe della forma $\lambda^2-\alpha\mu^2$.

Ma allora da $\xi_3^2-\alpha\xi_4^2=0$ e dal fatto che α non è un quadrato si trae che è $\xi_3=\xi_4=0$; dopo di che la (10) si riduce a $\xi_1^2-\alpha\xi_2^2=0$ e dà che è pure $\xi_1=\xi_2=0$ ([12]).

In secondo luogo è opportuno mostrar con un esempio che *anche in corpi (infiniti, ma) a sottocorpo fondamentale finito possono esistere algebre primitive del tipo* (I).

Infatti si supponga che Γ sia il corpo derivato da $C[p]$ ([13]) con l'aggiunta di due indeterminate ξ ed η. In esso nè ξ è un quadrato, nè η è della forma $\lambda^2-\xi\mu^2$, con λ e μ in Γ (cioè frazioni algebriche in $C[p]$ con le indeterminate ξ ed η).

E infatti, se fosse

$$\xi=\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^2,$$

con φ e ψ polinomi in $C[p]$, con le indeterminate ξ ed η, primi fra loro, sarebbe

$$\xi\psi^2=\varphi^2,$$

cioè un polinomio di grado dispari coinciderebbe con uno di grado pari; e se fosse

$$\eta=\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^2-\xi\left(\frac{\varphi_1}{\psi_1}\right)^2,$$

([12]) Questo teorema e la relativa dimostrazione sono del DICKSON (*Algebren und ihre Zahlentheorie,* già cit., pag. 46-47).

([13]) Come nel trattato citato in ([6]), indico con $C[p]$ il corpo finito costituito dalle classi di interi mod p, con p numero primo.

con (φ, ψ) e (φ_1, ψ_1) coppie di polinomi in $C[p]$ con le indeterminate ξ ed η, primi fra loro, sarebbe

$$\eta\psi^2\psi_1^2 = \varphi^2\psi_1^2 - \xi\varphi_1^2\psi^2 . \tag{11}$$

Ora si vede facilmente che anche un'eguaglianza di questo tipo è assurda.

Ed invero, se essa valesse, ψ, essendo primo con φ, dovrebbe dividere ψ_1; e, posto $\psi_1 = \psi\chi$, la (11) divisa per ψ^2, diventerebbe

$$\eta\psi^2\chi^2 = \varphi^2\chi^2 - \xi\varphi_1^2 ,$$

ossia scrivendo ψ_2 per $\psi\chi$ e φ_2 per $\varphi\chi$,

$$\eta\psi_2^2 = \varphi_2^2 - \xi\varphi_1^2 . \tag{12}$$

Dalla (12) si deduce

$$\eta\psi_{2,0}^2 = \varphi_{2,0}^2 ,$$

se $\psi_{2,0}$ e $\varphi_{2,0}$ indicano ciò che diventano ψ_2 e φ_2 per $\xi = 0$; ma allora è certo $\psi_{2,0} = 0$, indi anche $\varphi_{2,0} = 0$, perchè altrimenti η risulterebbe in Γ un quadrato; e dunque ψ_2 e φ_2 sono entrambi divisibili per ξ.

Posto

$$\psi_2 = \xi^k\psi_3 , \qquad \varphi_2 = \xi^h\varphi_3 ,$$

con ψ_3 e φ_3 non divisibili per ξ, la (12), divisa per ξ, diventa

$$\eta\xi^{2k-1}\,\psi_3^2 = \xi^{2h-1}\,\varphi_3^2 - \varphi_1^2 . \tag{13}$$

Sia $k \geq h$. Allora ξ^{2h-1} deve dividere φ_1^2; poniamo

$$\varphi_1 = \xi^l\varphi_4 ,$$

con φ_4 non divisibile per ξ. Sarà

$$\varphi_1^2 = \xi^{2l}\varphi_4^2 ,$$

e qui poichè $2l$ è pari e deve riuscire non inferiore a $2h-1$, sarà certo $2l > 2h - 1$.

Dopo ciò la (13) fornisce

$$\eta \xi^{2(k-h)} \psi_3^2 = \varphi_3^2 - \xi^{2(l-h)+1} \varphi_4^2 . \tag{14}$$

Ora, o è $k > h$, e la (14) è assurda, perchè φ_3 non è divisibile per ξ, o è $k = h$, e la (14) diviene

$$\eta \psi_3^2 = \varphi_3^2 - \xi^{2(l-h)+1} \varphi_4^2 ,$$

indi è parimenti assurda, perchè qui, a differenza di quanto più sopra è stato detto per la (12), ψ_3 e φ_3, per $\xi = 0$, sono certo non nulli.

In maniera simile si dimostra che la (13) è assurda, se si suppone $k < h$; quindi si conclude che la (I), fattovi $\alpha = \xi$ e $\beta = \eta$, definisce nel corpo Γ qui considerato, un'algebra primitiva.

Notisi che quando nel corpo Γ è $2 = 0$, l'algebra definita dalla (I) riesce commutativa, quindi può considerarsi come un corpo numerico contenente un sottocorpo isomorfo a Γ. Aggiungasi che allora la formula (8) diviene

$$x^2 = (\xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 + \alpha\beta\xi_4^2)\, u_1 ,$$

e dunque *nel caso in discorso ogni elemento dell'algebra ha per quadrato un multiplo scalare del modulo.*

Dimostriamo infine che:

Esistono realmente corpi infiniti pei quali è $2 = 0$ e nei quali è possibile assegnare delle algebre primitive con tavole di moltiplicazione del tipo (II).

Sia Γ il corpo che deriva da $C[2]$ mediante l'aggiunta di due indeterminate α e β; e si consideri in Γ l'algebra definita dalla (II) con la condizione che in essa α e β siano le dette indeterminate.

Per dimostrare che codesta algebra è primitiva bisogna far vedere che non è possibile far risultare

$$\xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 + \alpha\beta\xi_4^2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_4 = 0, \tag{15}$$

con le ξ_i numeri di Γ non tutti nulli.

Suppongasi, in primo luogo, che valga la (15) e sia $\xi_4 = 0$. Dico che anche ξ_1, ξ_2 e ξ_3 sono nulli.

Un numero di Γ è, nel caso attuale, una frazione algebrica in $C[2]$ con le indeterminate α e β; ebbene supponiamo che per

$$\xi_1 = \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\psi(\alpha, \beta)}, \qquad \xi_2 = \frac{\varphi_2(\alpha, \beta)}{\psi(\alpha, \beta)}, \qquad \xi_3 = \frac{\varphi_3(\alpha, \beta)}{\psi(\alpha, \beta)}, \tag{16}$$

con le φ_i e ψ polinomi in α e β, si abbia

$$(17) \qquad \xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 + \xi_2\xi_3 = 0,$$

ossia

$$(18) \qquad \varphi_1^2 + \alpha\varphi_2^2 + \beta\varphi_3^2 + \varphi_2\varphi_3 = 0.$$

Supponiamo, se è possibile, che φ_1, φ_2, φ_3 siano tutti non nulli e indichiamo con m_i il grado complessivo di φ_i in α e β.

I gradi di

$$\varphi_1^2, \qquad \alpha\varphi_2^2, \qquad \beta\varphi_3^2, \qquad \varphi_2\varphi_3$$

saranno

$$2m_1, \qquad 2m_2 + 1, \qquad 2m_3 + 1, \qquad m_2 + m_3;$$

e poichè in Γ, essendo $2 = 0$, il quadrato di una somma è la somma dei quadrati dei singoli addendi, i termini di φ_1^2 saranno tutti di gradi pari tanto rispetto ad α, quanto rispetto a β; mentre i termini di $\alpha\varphi_2^2$ (di $\beta\varphi_3^2$) saranno tutti di grado dispari rispetto ad α (a β) e di grado pari rispetto a β (ad α).

Ciò porta che nessun termine di uno qualsiasi dei tre polinomi φ_1^2, $\alpha\varphi_2^2$, $\beta\varphi_3^2$ può esser simile a un termine di uno degli altri due; d'altronde in $\varphi_2\varphi_3$ non vi possono essere termini simili ai termini di grado $2m_2 + 1$ di $\alpha\varphi_2^2$, se $m_2 \geq m_3$, o ai termini di grado $2m_3 + 1$ di $\beta\varphi_3^2$, se $m_2 \leq m_3$; dunque con φ_1, φ_2, φ_3 non nulli non è possibile che sia soddisfatta la (18), cioè non è possibile che valga la (17) con le ξ_i in Γ e non nulle.

Dopo quel che è stato detto è chiaro che neppure è possibile soddisfare alla (18) con uno o due soltanto dei polinomi φ_i eguali a zero, cioè alla (17) con una o due soltanto delle ξ_i nulle, e dunque resta stabilito che, se vale la (15) ed è $\xi_4 = 0$, anche le ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono nulle.

Ciò significa che nell'algebra qui presa in esame il sistema del 3^0 ordine generato da u_1, u_2, u_3 è privo di divisori dello zero, e che, se

$$x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 x_4$$

è un divisore dello zero, per esso è necessariamente

$$x^2 = \xi_4 x$$

con $\xi_4 \neq 0$, indi, per ogni intero positivo r

$$x^r = \xi_4^{r-1}\, x.$$

Ma allora x non è certo pseudonullo e dunque l'algebra è, intanto, semi-semplice; di guisa che, se non fosse primitiva, sarebbe o regolare o riducibile. Ma se fosse regolare, cioè fosse equivalente all'algebra delle matrici di 2^0 ordine in Γ, contro quel che è stato dimostrato, conterrebbe degli elementi pseudonulli; e, se fosse riducibile, non potrebbe contenere un sistema del 3^0 ordine privo di divisori dello zero, perchè in essa sarebbero tutti divisori dello zero gli elementi non nulli delle sue componenti irriducibili e tra queste, o ve ne sarebbe una di ordine ≥ 2, o ve ne sarebbero tre di ordine 1 aventi per somma un'algebra del 3^0 ordine, i cui elementi non nulli riuscirebbero tutti dei divisori dello zero per l'algebra considerata; e allora, giacchè in un'algebra del 4^0 ordine un sistema del 3^0 ordine e una sotto-algebra di ordine ≥ 2 hanno necessariamente degli elementi non nulli comuni, il sistema generato da u_1, u_2, u_3 non potrebbe esser privo di divisori dello zero.

Si conclude che l'algebra considerata è, come volevasi, primitiva.

7. Una ulteriore precisazione di quanto è stato detto nei n^{i} 5 e 6 è fornita dai seguenti due teoremi.

Se A ed A' sono due algebre primitive del 4^0 ordine nel corpo Γ, definite, la prima, dalla tavola di moltiplicazione (I), *la seconda, da quella che se ne ricava ponendo le u'_i per le u_i, α' per α e β' per β, perchè A ed A' riescano equivalenti occorre e basta che sia*

$$(19)\qquad \begin{aligned} \alpha' &= \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 - \alpha\beta\xi_4^2\,, \\ \beta' &= \alpha\eta_2^2 + \beta\eta_3^2 - \alpha\beta\eta_4^2\,, \\ 0 &= \alpha\xi_2\eta_2 + \beta\xi_3\eta_3 - \alpha\beta\xi_4\eta_4\,, \end{aligned}$$

con le ξ, η numeri di Γ, se in Γ è $2 \neq 0$; se no, che sia

$$(20)\qquad \begin{aligned} \alpha' &= \xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 + \alpha\beta\xi_4^2\,, \\ \beta' &= \eta_1^2 + \alpha\eta_2^2 + \beta\eta_3^2 + \alpha\beta\eta_4^2\,, \end{aligned}$$

con le ξ e η numeri di Γ.

Infatti si supponga che A ed A' siano equivalenti e sia v_i l'elemento di A omologo ad u'_i in una corrispondenza d'isomorfismo tra A ed A'. Sarà v_1 il modulo di A e quindi si avrà intanto $v_1 = u_1$; poi per v_2 e v_3 dovrà essere

$$(21) \qquad v_2^2 = \alpha' u_1 , \quad v_3^2 = \beta' u_1 , \quad v_2 v_3 + v_3 v_2 = 0.$$

Ora si faccia l'ipotesi che in Γ sia $2 \neq 0$.

In base alla (8) gli elementi di A aventi per quadrati dei multipli scalari del modulo senza essere essi stessi dei multipli sì fatti, sono tutti e solo quelli del sistema generato da u_2, u_3, u_4, quindi dovrà essere intanto

$$(22) \qquad \begin{aligned} v_2 &= \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4 , \\ v_3 &= \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3 + \eta_4 u_4 , \end{aligned}$$

con le ξ, η numeri convenienti di Γ.

Ma dalle (22), badando alla (8) e alla (I), si trae

$$v_2^2 = (\alpha \xi_2^2 + \beta \xi_3^2 - \alpha\beta \xi_4^2)\, u_1 ,$$

$$v_3^2 = (\alpha \eta_2^2 + \beta \eta_3^2 - \alpha\beta \eta_4^2)\, u_1 ,$$

$$v_2 v_3 + v_3 v_2 = 2\,(\alpha \xi_2 \eta_2 + \beta \xi_3 \eta_3 - \alpha\beta \xi_4 \eta_4)\, u_1 ,$$

quindi, confrontando con le (21), dovrà essere, come volevasi,

$$\alpha' = \alpha \xi_2^2 + \beta \xi_3^2 - \alpha\beta \xi_4^2 ,$$

$$\beta' = \alpha \eta_2^2 + \beta \eta_3^2 - \alpha\beta \eta_4^2 ,$$

$$0 = \alpha \xi_2 \eta_2 + \beta \xi_3 \eta_3 - \alpha\beta \xi_4 \eta_4 .$$

Suppongasi invece che in Γ sia $2 = 0$.

Allora ogni elemento di A ha per quadrato un multiplo scalare del modulo, quindi per v_2 e v_3 si avranno delle uguaglianze del tipo

$$v_2 = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4 ,$$

$$v_3 = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3 + \eta_4 u_4 ,$$

con le ξ, η numeri di Γ, e sarà

$$v_2^2 = (\xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 + \alpha\beta\xi_4^2)\, u_1\,,$$

$$v_3^2 = (\eta_1^2 + \alpha\eta_2^2 + \beta\eta_3^2 + \alpha\beta\eta_4^2)\, u_1\,,$$

indi, come volevasi,

$$\alpha' = \xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 + \alpha\beta\xi_4^2\,,$$

$$\beta' = \eta_1^2 + \alpha\eta_2^2 + \beta\eta_3^2 + \alpha\beta\eta_4^2\,.$$

Con ciò la necessità della condizione, di cui nell'enunciato, è dimostrata.

Per stabilirne la sufficienza si supponga che per le α, β, α', β' sussistano le (19) o le (20), secondo che in Γ è $2 \neq 0$ o $2 = 0$.

Nel primo caso, si considerino in A gli elementi v_2 e v_3 per i quali è

$$v_2 = \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4\,,$$

$$v_3 = \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3 + \eta_4 u_4\,;$$

sarà, in base alle (19),

$$v_2^2 = \alpha' u_1\,, \quad v_3^2 = \beta' u_1\,, \quad v_2 v_3 + v_3 v_2 = 0\,;$$

inoltre v_2 e v_3, certo indipendenti da u_1 riescono anche indipendenti fra di loro, perchè altrimenti le η riescirebbero proporzionali alle ξ e, indicato con ϱ il fattore di proporzionalità, risulterebbe

$$\beta' = \alpha' \varrho^2\,,$$

mentre ciò non è possibile per quanto è stato dimostrato nel n^0 6.

Ma allora, posto

$$v_4 = v_2 v_3\,,$$

u_1, v_2, v_3, v_4 risultano indipendenti e la tavola di moltiplicazione di A rispetto ad essi si ottiene da quella di A' cambiando u_1' in u_1 e u_i' $(i = 2, 3, 4)$ in v_i. Il che significa appunto che A ed A' sono equivalenti.

Nel secondo caso, cioè quando in Γ è $2 = 0$, e valgono le (20), si considerino in A gli elementi v_2 e v_3 per i quali è

$$v_2 = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4 ,$$
$$v_3 = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3 + \eta_4 u_4 ,$$

indi, in base alle (20),

$$v_2^2 = \alpha' u_1 , \qquad v_3^2 = \beta' u_1 .$$

Inoltre, essendo A commutativa e $2 = 0$, sarà pure

$$v_2 v_3 + v_3 v_2 = 2 v_2 v_3 = 0.$$

Ora u_1, v_2, v_3 sono certo indipendenti, perchè da

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

segue

$$0 = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)^2 = (\lambda_1^2 + \alpha' \lambda_2^2 + \beta' \lambda_3^2)\, v_1$$

cioè

$$\lambda_1^2 + \alpha' \lambda_2^2 + \beta' \lambda_3^2 = 0,$$

e questa eguaglianza, per quanto è stato osservato precedentemente, non può sussistere se non a patto che siano nulle tutte le λ; quindi è chiaro che basta prendere come unità di A u_1, v_2, v_3 e $v_4 = v_2 v_3$ per metterne in evidenza l'isomorfismo con A'.

Il teorema che per le algebre definite da tabelle del tipo (II) è analogo a quello ora dimostrato per le algebre rispondenti a tabelle del tipo (I) è il seguente:

Se A ed A' sono algebre primitive nel corpo Γ rispondenti la prima alla tavola di moltiplicazione (II), *la seconda a quella che se ne ricava cambiando le u nelle u' ed α, β in α' e β' — di guisa che Γ è infinito e in esso è $2 = 0$ —, A ed A' sono equivalenti quando, e solo quando, sussistono per α, β, α', β' delle uguaglianze del tipo*

$$\alpha' = \xi_1^2 + \alpha \xi_2^2 + \beta \xi_3^2 + \xi_2 \xi_3 ,$$
(23)
$$\beta' = \eta_1^2 + \alpha \eta_2^2 + \beta \eta_3^2 + \eta_2 \eta_3$$

con le ξ, η numeri di Γ e

(24) $$\xi_2 \eta_3 + \xi_3 \eta_2 = 1.$$

Suppongasi, infatti, che A ed A' siano equivalenti e che v_i sia l'elemento di A omologo ad u'_i in una corrispondenza di isomorfismo tra A ed A'. Sarà

$$(25) \qquad v_1 = u_1 , \quad v_2^2 = \alpha' u_1 , \quad v_3^2 = \beta' u_1 \quad \text{e} \quad v_2 v_3 + v_3 v_2 = u_1 ;$$

inoltre, poichè nel caso attuale, in base alla (9), un elemento di A che non sia un multiplo scalare del modulo non può avere per quadrato un tale multiplo, se non a patto che esso appartenga al sistema generato da u_1, u_2, u_3, sussisteranno per v_2 e v_3 delle eguaglianze del tipo

$$v_2 = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 ,$$

$$v_3 = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3 ,$$

con le ξ, η numeri di Γ.

Di qua badando alla (II), si ricava

$$v_2^2 = (\xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 + \xi_2\xi_3) u_1 ,$$

$$v_3^2 = (\eta_1^2 + \alpha\eta_2^2 + \beta\eta_3^2 + \eta_2\eta_3) u_1 ,$$

$$\begin{cases} v_2 v_3 = (\xi_1\eta_1 + \alpha\xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_2 + \beta\xi_3\eta_3) u_1 + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) u_2 + \\ \qquad\qquad + (\xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1) u_3 + (\xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2) u_4 , \\ v_3 v_2 = (\xi_1\eta_1 + \alpha\xi_2\eta_2 + \xi_2\eta_3 + \beta\xi_2\eta_3) u_1 + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) u_2 + \\ \qquad\qquad + (\xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1) u_3 + (\xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2) u_4 , \end{cases}$$

e

$$v_2 v_3 + v_3 v_2 = (\xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2) u_1 ;$$

quindi, confrontando con le (25), si ha, come volevasi,

$$\alpha' = \xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \beta\xi_3^2 + \xi_2\xi_3 ,$$

$$\beta' = \eta_1^2 + \alpha\eta_2^2 + \beta\eta_3^2 + \eta_2\eta_3 ,$$

$$\xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2 = 1.$$

Suppongasi inversamente che per le algebre A ed A' sussistano le (23) e (24).

Posto

$$v_1 = u_1\,,\quad v_2 = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3\,,\quad v_3 = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 + \eta_3 u_3\,,$$

si riconosce subito che per gli elementi v_1, v_2, v_3 di A, in base alle (23) e (24), riesce

$$v_2^2 = \alpha' v_1\,,\qquad v_3^2 = \beta' v_1 \quad \text{e} \quad v_2 v_3 + v_3 v_2 = v_1\,.$$

D'altronde v_1, v_2, v_3 sono anche indipendenti, perchè nel corpo in discorso è

$$\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 = \xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2 = 1,$$

dunque basta prendere v_1, v_2, v_3 e $v_4 = v_2 v_3$ come unità di A per metterne in evidenza l'isomorfismo con l'algebra A'.

Notisi a proposito di quanto è stato detto in questo n^0 che:

Se in Γ è $2 = 0$ due algebre in esso primitive che siano, l'una, del tipo (I), *l'altra, del tipo* (II) *non sono certo equivalenti;* giacchè la prima, data l'ipotesi su Γ, è commutativa, mentre la seconda non è tale.

8. *Le alternative b), c), d), e), f).*

La determinazione delle algebre del 4^0 ordine presentanti le alternative $b), c), \ldots, f)$ è tanto immediata che potremmo anche fare a meno di fermarci su di essa.

Comunque per essere completi limitiamoci ad indicare le tavole di moltiplicazione da cui i detti tipi di algebre si possono supporre definiti.

Alternativa b).

Qui l'algebra A è isomorfa all'algebra di tutte le matrici di 2^0 ordine in Γ e dunque possono scegliersi in essa quattro unità c_{ij} $(i, j = 1, 2)$ che si combinino per prodotti secondo lo schema:

$$\text{(III)} \qquad c_{i,j}\, c_{h,k} = \begin{cases} 0\ , & \text{se } j \neq h\,, \\ c_{i,k}\,, & \text{se } j = h\,. \end{cases}$$

Alternativa c).

Un'algebra primitiva del 3^0 ordine è potenziale; e dunque nell'alternativa in discorso l'algebra A è generata da quattro unità

u_1, u_2, u_3, u_4, per le quali è

$$\text{(IV)}\qquad \begin{gathered} u_1^2 = u_1, \quad u_1u_4 = u_4u_1 = 0, \quad u_4^2 = u_4, \\ u_1u_2 = u_2u_1 = u_2, \quad u_3 = u_2^2, \\ u_2^3 + \alpha u_2^2 + \beta u_2 + \gamma u_1 = 0, \end{gathered}$$

dove α, β, γ sono numeri di Γ tali che il polinomio

$$\xi^3 + \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma$$

riesca irriducibile in Γ.

Naturalmente *il modulo dell'algebra* (IV) *è* $u_1 + u_4$.

Alternative d), e), f).

Le algebre presentanti le alternative *d*), *e*), *f*) sono, complessivamente, quelle definite da tabelle dei seguenti tipi:

$$\text{(V)}\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & u_4 & \beta u_3 \end{matrix}, \qquad \text{(VI)}\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & u_4 & \beta u_3 + u_4 \end{matrix},$$

(α, β non quadrati) (α non quadrato)
(β non della forma $\lambda + \lambda^2$)

$$\text{(VII)}\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 + u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & u_4 & \beta u_3 + u_4 \end{matrix},$$

(α, β non della forma $\lambda + \lambda^2$)

$$\text{(VIII)}\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{matrix}, \qquad \text{(IX)}\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 + u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{matrix},$$

(α non quadrato) (α non della forma $\lambda + \lambda^2$)

$$\text{(X)}\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{matrix}.$$

Di esse rispondono

all'alternativa d) quelle con le tabelle (V), (VI), (VII);

» e) » » (VIII), (IX);

» f) la rimanente.

Come è chiaro:

Per le algebre definite dalle tabelle (V), (VI), (VII) *il modulo è* $u_1 + u_3$; *per quelle con le tabelle* (VIII) *e* (IX) *il modulo è* $u_1 + u_3 + u_4$; *per l'algebra* (X) *è* $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.

Quanto ai numeri α e β di Γ, che compariscono nelle (V), ..., (IX), essi debbono soddisfare, caso per caso, alle condizioni registrate sotto ciascuna tabella, dove λ, quando vi comparisce, sta pur esso per un numero di Γ.

Non mi fermo ad indicare di qual natura ha da essere il corpo Γ perchè in esso possano esistere algebre dei tipi (V), ..., (IX), nè sotto quali condizioni riescano isomorfe due algebre rispondenti a uno medesimo di codesti tipi, trattandosi di questioni che sono di risposta immediata, ove si tenga conto di osservazioni che ho già fatte altrove [14].

Infine è chiaro che algebre le quali appartengano a due diversi dei tipi (V), ..., (X) non possono essere isomorfe.

Capitolo III.

IL CASO PSEUDONULLO.

§ 1. LE ALGEBRE CON L'INDICE $r \neq 3$.

9. Passiamo ora alla trattazione del caso indicato nel titolo di questo capitolo e supponiamo pertanto che A sia un'algebra pseudonulla del 4º ordine nel corpo numerico Γ.

Per l'indice r di A si avrà $5 \geq r \geq 2$ e dunque r è 5, 4, 3 o 2.

Se $r = 5$, A è potenziale [15], ossia si può supporre definita da

(14) Per quanto è detto a proposito dei numeri α e β e delle tabelle (V) — (IX) veggasi loc. cit. (1) a), nⁱ 7, 8, 10.

(15) Loc. cit. (6), pag. 322.

una tavola di moltiplicazione del tipo

$$\text{(XI)} \qquad \begin{matrix} u_2 & u_3 & u_4 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; ;$$

se $r = 4$, per teoremi stabiliti in una Nota precedente ([16]), A non può essere che di uno dei quattro tipi definiti dalle tabelle

$$\text{(XII)} \quad \begin{matrix} u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & u_4 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; , \qquad \text{(XIII)} \quad \begin{matrix} 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & u_4 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; ,$$

$$\text{(XIV)} \quad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & u_4 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; , \qquad \text{(XV)} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & u_4 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; ;$$

se $r = 2$, A è la zero-algebra con la tavola di moltiplicazione

$$\text{(XVI)} \qquad u_i u_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4) \; ;$$

quindi non resta che considerare il caso in cui $r = 3$.

Avvertasi prima di procedere oltre che:

Algebre rispondenti a due diverse delle tabelle (XI), ..., (XVI) *non sono certo isomorfe*;

e che, per teoremi stabiliti altrove:

Le algebre dei tipi (XI), ..., (XIV) *sono tutte irriducibili*, mentre *sono evidentemente riducibili quelle dei tipi* (XV) e (XVI) ([17]).

([16]) Loc. cit. ([5]).

([17]) Veggasi loc. cit. ([5]) e G. SCORZA, *Le algebre per ognuna delle quali la sotto-algebra eccezionale è potenziale* (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 70, 1934-XIII). Colgo l'occasione per riparare ad una mia dimenticanza, e cioè per avvertire che il criterio di riducibilità per le algebre potenziali, di cui nella Nota ora citata, per il caso delle algebre potenziali, con modulo, era stato già assegnato dal DICKSON nella sua Memoria: *The rational linear algebras of maximum and minimum ranks* (Proceed. of the London Math. Soc., (2) vol. 22, 1923, pp. 143-162). Ma anche per quel caso la dimostrazione del DICKSON è assai complicata, in confronto a quella molto semplice della mia Nota.

§ 2. LE ALGEBRE CON L'INDICE 3 E IL QUADRATO DEL 2^0 ORDINE.

10. Se l'indice di A è 3, ossia è

$$A > A^2 > A^3 = 0,$$

l'algebra A^2, non potendo essere del 3^0 ordine, chè altrimenti A sarebbe potenziale (18), indi dell'indice 5, è dell'ordine 2 o 1.

In questo paragrafo intendiamo discutere il caso in cui l'ordine di A^2 è 2.

11. Sia S un sistema complementare di A^2 in A; di guisa che S sarà del 2^0 ordine e sarà inoltre

$$A = S + A^2, \quad S \cap A^2 = 0$$

ed

$$A^2 = S^2.$$

Se u_1 e u_2 sono elementi indipendenti di S, S^2 sarà il sistema generato da $u_1^2, u_2^2, u_1 u_2$ e $u_2 u_1$; ma S^2 coincide con A^2, dunque degli elementi

$$u_1^2, u_2^2, u_1 u_2 \text{ e } u_2 u_1$$

due sono indipendenti e generano A^2.

Dico che:

È lecito supporre non nullo almeno uno dei quadrati u_1^2 e u_2^2.

Infatti, se fosse

$$u_1^2 = u_2^2 = 0,$$

sarebbero indipendenti $u_1 u_2$ e $u_2 u_1$, e sarebbe

$$u_1 u_2 + u_2 u_1 \neq 0.$$

Ma allora, risultando

$$(u_1 + u_2)^2 = u_1 u_2 + u_2 u_1 \neq 0.$$

basterebbe, in S, sostituire la considerazione di $u_1 + u_2$ a quella di u_1 per ottenere lo scopo voluto.

(18) G. SCORZA, *Sulla struttura delle algebre psuedonulle* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XX, serie 6ª, 2º sem., 1934-XII, pp. 148-149), pag. 146.

In conformità di quanto ora è stato detto possiamo porre

$$u_1^2 = u_3 , \tag{26}$$

con u_3 elemento non nullo di A^2, indi esterno ad S.

Ora due casi possono presentarsi; e cioè:

a) o i quadrati degli elementi di S sono tutti dei multipli scalari di u_3;

b) o esiste in S un elemento (almeno) col quadrato indipendente da u_3.

Esaminiamoli separatamente.

12. *Caso a*).

Qui si ha

$$u_2^2 = \alpha u_3 , \tag{27}$$

con α numero di Γ; e inoltre almeno uno dei prodotti $u_1 u_2$ e $u_2 u_1$ sarà (un elemento di A^2) indipendente da u_3. Ma da

$$(u_1 + u_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_1 u_2 + u_2 u_1 = (\alpha + 1) u_3 + u_1 u_2 + u_2 u_1 ,$$

e dal fatto che $(u_1 + u_2)^2$ è, per ipotesi, un multiplo scalare di u_3, segue che se dei prodotti $u_1 u_2$ e $u_2 u_1$ uno fosse un multiplo scalare di u_3 tale sarebbe anche l'altro, dunque ognuno dei prodotti $u_1 u_2$ e $u_2 u_1$ è indipendente da u_3 e posto

$$u_1 u_2 = u_4 . \tag{28}$$

si ha, in primo luogo, che (u_1 , u_2 , u_3 , u_4) può considerarsi come un aggregato di unità di A, e, in secondo luogo, che per il prodotto $u_2 u_1$ sussiste un'eguaglianza del tipo

$$u_2 u_1 = \beta u_3 - u_4 , \tag{29}$$

una volta che $u_1 u_2 + u_2 u_1$ deve risultare un multiplo scalare di u_3.

Dico ora che:

Nella (29) β *può supporsi senz'altro nullo, se in* Γ *è* $2 \neq 0$; *se no,* β *può supporsi eguale ad* 1 *o a* 0.

Suppongasi, infatti, che nella (29) sia $\beta \neq 0$.

Allora basta passare dalle u_i alle unità

$$v_1 = u_1 , v_2 = u_1 - \frac{u_2}{\beta} , \; v_3 = u_3 , \; v_4 = u_3 - \frac{u_4}{\beta}$$

per ottenere che riesca

$$v_1^2 = v_3\,,\ v_1\,v_2 = v_4\,,\ v_2\,v_1 = v_3 - v_4\,,\ v_2^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}\,v_3\,;$$

di guisa che, *qualunque* sia Γ, è lecito supporre che nella (29) si abbia $\beta = 1$ o $\beta = 0$.

Ma suppongasi che in Γ sia $2 \neq 0$, e che nella (29) sia $\beta = 1$. Allora, ponendo

$$v_1 = u_1\,,\quad v_2 = u_1 - 2u_2\,,\quad v_3 = u_3\,,\, v_4 = u_3 - 2u_4\,,$$

le v_i risultano indipendenti e per esse risulta

$$v_1^2 = v_3\,,\ v_1\,v_2 = v_4\,,\ v_2\,v_1 = -\,v_4\,,\ v_2^2 = (4\alpha - 1)\,v_3\,.$$

Con ciò l'asserto è dimostrato, e avvertasi che:

Quando in Γ è $2 = 0$, il supporre nella* (29) *$\beta = 1$ o $\beta = 0$ dà luogo a due tipi essenzialmente distinti.

Ed invero, poichè, nell'ipotesi che sia $2 = 0$, ogni numero di Γ coincide col suo opposto, l'algebra A, se nella (29) si fa $\beta = 0$, riesce commutativa, mentre non è tale, se ivi si fa $\beta = 1$.

Riassumendo abbiamo che:

Nel caso a) la tavola di moltiplicazione di A può esser ricondotta alla forma

$$\text{(XVII)}\qquad \begin{array}{cccc} u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ -\,u_4 & \alpha u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\,,$$

se in Γ è $2 \neq 0$; se no, può esser ricondotta o al tipo* (XVII) *o al tipo

$$\text{(XVIII)}\qquad \begin{array}{cccc} u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 + u_4 & \alpha u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\,.$$

13. A complemento del teorema ora stabilito dimostriamo in primo luogo che:

Se le algebre A ed A' sono definite nel corpo Γ, la prima dalla (XVII), *la seconda, dalla tavola che se ne deduce cambiando le u_i nelle u'_i e α in α', esse sono equivalenti, se in Γ è $2 \neq 0$, quando, e solo quando, è $\alpha' = \alpha\varrho^2$, con ϱ numero di Γ non nullo; se in Γ è $2 = 0$, quando, e solo quando, è*

$$\alpha' = \frac{\sigma_1^2 + \alpha\sigma_2^2}{\varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2}$$

con le ϱ e σ numeri di Γ pei quali riesca

$$\varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2 \neq 0 \text{ e } \varrho_1\sigma_2 + \varrho_2\sigma_1 = 0.$$

Suppongasi che A ed A' siano isomorfe e che quindi esistano in A quattro elementi indipendenti v_1, v_2, v_3, v_4 per i quali sia

$$v_1^2 = v_3, v_1 v_2 = v_4, \; v_2 v_1 = -v_4, v_2^2 = \alpha' v_3 . \tag{30}$$

I quadrati degli elementi di A, senza esser tutti nulli, dovranno esser tutti multipli scalari tanto di u_3, quanto di v_3; dunque bisognerà intanto che sia

$$v_3 = \lambda u_3 , \tag{31}$$

con λ numero di Γ diverso da zero.

Ora poniamo

$$\begin{aligned} v_1 &= \varrho_1 u_1 + \varrho_2 u_2 + \varrho_3 u_3 + \varrho_4 u_4 , \\ v_2 &= \sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 + \sigma_3 u_3 + \sigma_4 u_4 , \end{aligned} \tag{32}$$

con le ϱ e σ numeri di Γ; attesa l'indipendenza di v_1 e v_2 da v_3 e v_4, cioè dagli elementi di A^2, sarà

$$\Delta = \varrho_1\sigma_2 - \varrho_2\sigma_1 \neq 0, \tag{33}$$

e dalle (31) e (32), badando alla (XVII), si dedurrà

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (\varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2)\, u_3 = \frac{\varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2}{\lambda} v_3 , \\ v_2^2 &= (\sigma_1^2 + \alpha\sigma_2^2)\, u_3 = \frac{\sigma_1^2 + \alpha\sigma_2^2}{\lambda} v_3 , \\ v_1 v_2 + v_2 v_1 &= 2(\varrho_1\sigma_1 + \alpha\varrho_2\sigma) \frac{v_3}{\lambda} . \end{aligned} \tag{34}$$

Ciò premesso, si supponga che in Γ sia $2 \neq 0$.

Allora dalle (34), poste a raffronto con le (30), si trae

$$(35) \qquad \begin{aligned} \varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2 &= \lambda, \\ \sigma_1^2 + \alpha\sigma_2^2 &= \alpha'\lambda, \\ \varrho_1\sigma_1 + \alpha\varrho_2\sigma_2 &= 0\,; \end{aligned}$$

dalla (33) e dall'ultima delle (35) si deduce

$$\sigma_1 = -\frac{\Delta}{\varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2}\alpha\varrho_2\,, \qquad \sigma_2 = \frac{\Delta}{\varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2}\varrho_1\,,$$

dopo di che viene

$$\alpha' = \frac{\sigma_1^2 + \alpha\sigma_2^2}{\varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2} = \frac{\Delta^2}{(\varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2)^2}\alpha\,;$$

dunque α' non può differire da α che per un fattore quadrato non nullo.

Inversamente, suppongasi che sia $\alpha' = \alpha\varrho^2$, con $\varrho \neq 0$.

Allora per accorgersi che A ed A' realmente si equivalgono basta eseguire in A il cambiamento di unità rappresentato dalle formule

$$v_1 = u_1\,,\; v_2 = \varrho u_2\,,\; v_3 = u_3\,,\; v_4 = \varrho u_4\,.$$

Supponiamo ora che in Γ sia $2 = 0$. Allora la (33) può scriversi

$$(36) \qquad \varrho_1\sigma_2 + \varrho_2\sigma_1 \neq 0,$$

le prime due delle (34) confrontate con la (30) dànno

$$(37) \qquad \alpha' = \frac{\sigma_1^2 + \alpha\sigma_2^2}{\varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2} \quad \text{con} \quad \varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2 \neq 0,$$

e l'ultima delle (34), diventando

$$v_1 v_2 + v_2 v_1 = 0$$

si accorda senz'altro con le (30).

Dico che, inversamente, se valgono per α ed α' le (37) e (36), le algebre A ed A' sono isomorfe.

Infatti, se si eseguisce in A il cambiamento di unità rappresentato dalle formule

$$v_1 = \varrho_1 u_1 + \varrho_2 u_2 ,$$

$$v_2 = \sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 ,$$

$$v_3 = (\varrho_1^2 + \alpha\varrho_2^2) u_3 ,$$

$$v_4 = (\varrho_1\sigma_1 + \alpha\varrho_2 \sigma_2) u_3 + (\varrho_1 \sigma_2 + \varrho_2 \sigma_1) u_4$$

la sua tavola di moltiplicazione rispetto alle v_i riesce appunto quella indicata dalle (30).

Mette conto di osservare che, anche nelle ipotesi attuali, α' riesce, o no, un quadrato in Γ, secondo che tale è α.

Ed invero, se $\alpha = \tau^2$, con τ in Γ, badando che in Γ è $2 = 0$ si ricava

$$\alpha' = \frac{\sigma_1^2 + \tau^2 \sigma_2^2}{\varrho_1^2 + \tau^2 \varrho_2^2} = \left(\frac{\sigma_1 + \tau\sigma_2}{\varrho_1 + \tau\varrho_2}\right)^2;$$

e poichè la relazione che intercede fra le algebre A ed A', quando siano equivalenti, è simmetrica, è chiaro che, se α' è un quadrato quando è tale α, inversamente sarà un quadrato α quando sia tale α'.

Avvertasi inoltre che, se α non è un quadrato in Γ, ampliando Γ nel corpo algebrico Γ' dedotto da Γ mediante il polinomio, ivi irriducibile $\zeta^2 + \alpha$, posto $\alpha = \tau'^2$, con τ' in Γ', riesce

$$\alpha' = \left(\frac{\sigma_1 + \tau' \sigma_2}{\varrho_1 + \tau' \varrho_2}\right)^2,$$

cioè $\sqrt{\alpha'}$ funzione lineare fratta di $\sqrt{\alpha}$ con coefficienti in Γ.

Un ragionamento, che, dopo quello or ora sviluppato, non presenta alcuna difficoltà, permette di dimostrare, in secondo luogo, che:

Se le algebre A ed A' nel corpo Γ per il quale è $2 = 0$ sono definite, la prima, dalla (XVIII), *la seconda, dalla tavola di moltiplicazione che se ne deduce cambiando α in α', perchè esse siano equivalenti occorre e basta che possano determinarsi in Γ dei numeri $\varrho_1, \varrho_2, \sigma_1$ e σ_2 per i quali sia*

$$\varrho_1^2 + \varrho_1 \varrho_2 + \alpha\varrho_2^2 = \varrho_1 \sigma_2 + \varrho_2 \sigma_1 \neq 0 \quad e \quad \alpha' = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \alpha\sigma_2^2}{\varrho_1 \sigma_2 + \varrho_2 \sigma_1}.$$

14. *Caso b*).

Passiamo ora al caso *b*), cioè vi sia in S un elemento col quadrato indipendente da u_3. Supponendo, come è lecito, che tale elemento sia u_2, e posto

$$u_2^2 = u_4 ,$$

u_1, u_2, u_3 e u_4 saranno elementi indipendenti di A i quali si combineranno per prodotti secondo uno schema del tipo

$$(38) \qquad \begin{array}{cccc} u_3 & \alpha u_3 + \beta u_4 & 0 & 0 \\ \gamma u_3 + \delta u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ numeri di Γ.

Per l'algebra A definita dalla (38) il quadrato dell'elemento corrente x, con le coordinate λ_i,

$$x = \sum_i^{1 \ldots 4} \lambda_i u_i ,$$

è

$$x^2 = \lambda_1 [\lambda_1 + (\alpha + \gamma) \lambda_2] u_3 + \lambda_2 [(\beta + \delta) \lambda_1 + \lambda_2] u_4 ;$$

quindi riesce $x^2 = 0$ solo quando sia

$$(39) \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

oppure

$$(40) \qquad \lambda_1 + (\alpha + \gamma) \lambda_2 = 0 \quad \text{e} \quad (\beta + \delta) \lambda_1 + \lambda_2 = 0.$$

Se

$$1 - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) \neq 0,$$

le (40) equivalgono alle (39) e gli elementi di A a quadrato nullo sono *soltanto* quelli di A^2.

Supponiamo che sia invece

$$(41) \qquad 1 - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = 0 .$$

Allora, per

$$\lambda_2 = -(\beta + \delta) \lambda_1 = - \frac{\lambda_1}{\alpha + \gamma} ,$$

il quadrato di x, cioè di

$$\lambda_1 [u_1 - (\beta + \delta) u_2] + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$$

riesce nullo, senza che x, se $\lambda_1 \neq 0$, stia in A^2.

15. Ebbene supponiamo precisamente che valga la (41); allora, o è $\beta = \gamma = 0$, indi $\alpha\delta = 1$, o possono determinarsi in Γ due numeri λ e μ sì che si abbia

$$\lambda (\beta + \delta) + \mu \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\beta\lambda}{\beta + \delta} + \gamma\mu \neq 0. \tag{42}$$

Se è $\beta = \gamma = 0$ e $\delta = \frac{1}{\alpha}$, ossia

$$u_1^2 = u_3\,,\; u_1 u_2 = \alpha u_3\,,\; u_2 u_1 = \frac{u_4}{\alpha}\,,\; u_2^2 = u_4\,,$$

ponendo

$$v_1 = u_1\,,\; v_2 = u_1 - \frac{u_2}{\alpha}, \quad v_3 = u_3\,,\; v_4 = u_3 - \frac{u_4}{\alpha^2}\,,$$

le v_i risultano indipendenti e per i loro prodotti si ha

$$v_1^2 = v_3\,,\; v_1 v_2 = 0\,, \quad v_2 v_1 = v_4\,,\; v_2^2 = 0\,;$$

quindi, sotto le ipotesi attuali, riferendo l'algebra alle unità v_i e indicando quest'ultime di nuovo con le u_i, può supporsi che essa sia definita da una tavola di moltiplicazione del tipo

$$\text{(XIX)} \qquad \begin{matrix} u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,.$$

Se invece λ e μ sono numeri di Γ pei quali siano soddisfatte le (42), si ponga

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda u_1 + \mu u_2\,, \\ v_2 &= u_1 - (\beta + \delta) u_2\,, \\ v_3 &= [\lambda (\beta + \delta) + \mu] \left[\frac{\lambda}{\beta + \delta} u_3 + \mu u_4\right], \\ v_4 &= [\lambda (\beta + \delta) + \mu] [\gamma u_3 - \beta u_4]\,; \end{aligned}$$

le v_i saranno indipendenti e per i loro prodotti si avrà, badando alla (41) e indicando con α' e β' dei convenienti numeri di Γ,

$$v_1^2 = v_3 \, , \; v_1 \, v_2 = v_4 \, , \; v_2 \, v_1 = \alpha' v_3 + \beta' \, v_4 \, , \; v_2^2 = 0 \, ;$$

quindi, prendendo le v_i come unità dell'algebra, questa riesce intanto definita dalla tavola di moltiplicazione

$$\begin{array}{cccc} v_3 & v_4 & 0 & 0 \\ \alpha' v_3 + \beta' v_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} , \tag{43}$$

nella quale sarà da supporre $\beta' \neq -1$, giacchè altrimenti i quadrati degli elementi di A sarebbero tutti multipli scalari di u_3.

Dico che:

Nella (43) *è lecito supporre che sia* $\alpha' = 1$ *o* $\alpha' = 0$; *e che, quando in essa è* $\alpha' = 1$, *si può supporre* $\beta' = 0$.

E infatti si supponga che sia $\alpha' \neq 0$: allora basta passare dalle unità v_i alle unità w_i, con

$$w_1 = v_1 \, , \; w_2 = \frac{v_2}{\alpha'} \, , \; w_3 = v_3 \, , \; w_4 = \frac{v_4}{\alpha'} \, ,$$

per ottenere che le w_i si combinino per prodotti secondo uno schema del tipo (43) nel quale al posto di α' comparisca 1.

Ciò giustifica la prima parte della nostra proposizione.

Per giustificare la seconda si supponga che nella (43) sia $\alpha' = 1$; allora se è $\beta' \neq 0$, ricordando che è necessariamente $\beta' \neq -1$, basta passare dalle unità v_i alle unità w_i, con

$$w_1 = v_1 + \beta' v_2, \, w_2 = (\beta' + 1) \, v_2 \, , \, w_3 = (\beta' + 1) \, (v_3 + \beta' v_4), \, w_4 = (\beta' + 1) v_4$$

per ottenere

$$w_1^2 = w_3 \, , \; w_1 \, w_2 = w_4 \, , \; w_2 \, w_1 = w_3 \, , \; w_2^2 = 0.$$

Con ciò le affermazioni fatte sono pienamente stabilite.

Riassumendo la discussione compiuta in questo n° si ha che:

Quando per l'algebra A si verifica il caso b) ed esistono elementi a quadrato nullo non contenuti in A^2, *la sua tavola di moltiplicazione* *può sempre immaginarsi come ricondotta al tipo* (XIX) *o ad uno dei seguenti due :*

$$(\mathrm{XX}) \quad \begin{matrix} u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad (\mathrm{XXI}) \quad \begin{matrix} u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ \alpha u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

dove nella (XXI) *è da supporre* $\alpha \neq -1$.

Notisi subito che:

I tre tipi di algebre (XIX), (XX) *e* (XXI) *sono veramente distinti di fronte alla relazione di equivalenza.*

Infatti per gli elementi di A

$$x = \sum_i^{1\dots 4} \lambda_i u_i \quad \text{e} \quad y = \sum_i^{1\dots 4} \varrho_i u_i ,$$

con le λ e ϱ numeri di Γ, si ha

$$x^2 = \lambda_1^2 u_3 + \lambda_1 \lambda_2 u_4 , \qquad xy = \lambda_1 \varrho_1 u_3 + \lambda_2 \varrho_1 u_4 ,$$

oppure

$$x^2 = \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda_2) u_3 + \lambda_1 \lambda_2 u_4 , \qquad xy = \varrho_1 (\lambda_1 + \lambda_2) u_3 + \lambda_1 \varrho_2 u_4 ,$$

oppure

$$x^2 = \lambda_1^2 u_3 + (\alpha + 1) \lambda_1 \lambda_2 u_4 , \qquad xy = \lambda_1 \varrho_1 u_3 + (\lambda_1 \varrho_2 + \alpha \lambda_2 \varrho_1) u_4 ,$$

secondo che si è nel caso (XIX), (XX) o (XXI).

Allora gli elementi a quadrato non nullo sono, per tutte e tre le alternative, quelli per i quali è $\lambda_1 \neq 0$; ma nel caso della (XIX) *ogni* tale elemento è nullifico sinistro per gli elementi di un sistema del 3⁰ ordine — quello generato da u_2, u_3, u_4 — ; nel caso della (XXI) godono di tale proprietà solo quegli elementi a quadrato non nullo per i quali è $\lambda_2 = -\lambda_1$; e nel caso della (XXI) ogni tale elemento è nullifico sinistro soltanto per gli elementi di A^2.

16. A proposito di quanto è detto al n⁰ precedente giova osservare che:

Se A ed A' sono le algebre in Γ definite, la prima, dalla tabella (XXI), *e, la seconda, da quella che se ne ricava cambiando α in α', A ed A' riescono equivalenti quando, e solo quando, è $\alpha = \alpha'$.*

Infatti siano v_1, v_2, v_3, v_4 quattro elementi indipendenti di A per i quali sia

$$v_1^2 = v_3, \quad v_1 v_2 = v_4, \quad v_2 v_1 = \alpha' v_4, \quad v_2^2 = 0,$$

e pongasi

$$v_1 = \sum_i^{1...4} \lambda_i u_i \quad \text{e} \quad v_2 = \sum_i^{1...4} \varrho_i u_i .$$

Sarà

$$v_2^2 = \varrho_1^2 u_3 + (\alpha + 1) \varrho_1 \varrho_2 u_4;$$

ma $v_2^2 = 0$, dunque $\varrho_1 = 0$ e resta

$$v_2 = \varrho_2 u_2 + \varrho_3 u_3 + \varrho_4 u_4 .$$

Dopo ciò si ha

$$v_1 v_2 = \lambda_1 \varrho_2 u_4, \quad v_2 v_1 = \alpha \lambda_1 \varrho_2 u_4 ;$$

ma è pure

$$v_1 v_2 = v_4 \quad \text{e} \quad v_2 v_1 = \alpha' v_4 ,$$

dunque è

$$\alpha' v_4 = \alpha v_4 , \quad \text{indi} \quad \alpha' = \alpha.$$

17. Supponiamo ora che per A si verifichi bensì il caso b), ma che in essa non esistano elementi a quadrato nullo all'infuori di quelli di A^2; cioè immaginiamo che la sua tavola di moltiplicazione sia data dalla (38) e che in questa sia

$$1 - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) \neq 0.$$

Dico che:

Nella (38) *può supporsi* $\alpha = 1$ *; oppure* $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1$ *; oppure* $\alpha = \beta = 0, \ \gamma = 1$ *; oppure* $\alpha = \beta = \gamma = 0, \ \delta = 1$ *; o, infine,* $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Infatti si supponga che nella (38) sia $\alpha \neq 0$; allora basta passare dalle unità u_i alle unità v_i date da

$$v_1 = \alpha u_1 , \quad v_2 = u_2 , \quad v_3 = \alpha^2 u_3 , \quad v_4 = u_4$$

per cangiare la (38) in una tavola di moltiplicazione dello stesso tipo nella quale il coefficiente che prende il posto di α sia eguale a 1. Con ciò è dimostrato, intanto, che nella (38) il coefficiente α può supporsi eguale a 1 o 0.

Suppongasi ora che nella (38) si abbia $\alpha = 0$, cioè che sia

$$u_1^2 = u_3\,, \quad u_1\,u_2 = \beta u_4\,, \quad u_2\,u_1 = \gamma u_3 + \delta u_4\,, \quad u_2^2 = u_4\,.$$

Se $\beta \neq 0$, ponendo

$$v_1 = u_1\,, \quad v_2 = \beta u_2\,, \quad v_3 = u_3\,, \quad v_4 = \beta^2 u_4$$

si trova

$$v_1^2 = v_3\,, \quad v_1\,v_2 = v_4\,, \quad v_2\,v_1 = \beta\gamma v_3 + \frac{\delta}{\beta}\,v_4\,, \quad v_2^2 = v_4\,;$$

dunque, se nella (38) è $\alpha = 0$, β può supporsi eguale a 1 o 0.

Ebbene supponiamo che nella (38) sia $\alpha = 0$, $\beta = 1$, cioè che si abbia

$$u_1^2 = u_3\,, \quad u_1\,u_2 = u_4\,, \quad u_2\,u_1 = \gamma u_3 + \delta u_4\,, \quad u_2^2 = u_4\,.$$

Se qui è $\gamma \neq 1$, gli elementi

$$v_1 = u_1 - u_2\,, \quad v_2 = u_2\,, \quad v_3 = (1-\gamma)\,u_3 - \delta u_4\,, \quad v_4 = u_4$$

sono indipendenti, e per essi si ha

$$v_1^2 = v_3\,, \quad v_1\,v_2 = 0, \quad v_2\,v_1 = \frac{1}{1-\gamma}\,[\gamma v_3 + (\delta + \gamma - 1)\,v_4]\,, \quad v_2^2 = v_4\,;$$

dunque, se nella (38) è $\alpha = 0$, è lecito supporre o che sia $\beta = \gamma = 1$, o che sia $\beta = 0$.

Dopo ciò per giustificare pienamente l'asserzione fatta più sopra basta osservare che, se nella (38) è $\alpha = \beta = 0$, ma $\gamma \neq 0$, essa mediante il cambiamento di unità definito dalle formule

$$v_1 = \gamma u_1\,, \quad v_2 = u_2\,, \quad v_3 = \gamma^2 u_3\,, \quad v_4 = u_4$$

si muta in una tavola del medesimo tipo nella quale è 1 il coefficiente che prende il posto di γ; e se nella (38) è $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ma $\delta \neq 0$, basta sostituire alle unità u_i le unità v_i, per le quali è

$$v_1 = u_1\,, \quad v_2 = \delta u_2\,, \quad v_3 = u_3\,, \quad v_4 = \delta^2 u_4\,,$$

per passare da essa ad una tavola del medesimo tipo nella quale è 1 il coefficiente che prende il posto di δ.

Da quanto ora è stato dimostrato si deduce, mutando convenientemente le notazioni, che:

Se per l'algebra A si verifica il caso b), ma in essa non esistono elementi a quadrato nullo non contenuti in A^2, la sua tavola di moltiplicazione può essere ricondotta ad uno dei seguenti cinque tipi:

$$(\mathrm{XXII})\quad \begin{matrix} u_3 & u_3+\alpha u_4 & 0 & 0 \\ \beta u_3+\gamma u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad (\mathrm{XXIII})\quad \begin{matrix} u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3+\alpha u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

$$(\beta+1)(\alpha+\gamma)\neq 1 \qquad\qquad \alpha\neq 0$$

$$(\mathrm{XXIV})\quad \begin{matrix} u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_3+\alpha u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad (\mathrm{XXV})\quad \begin{matrix} u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

$$\alpha\neq 1$$

$$(\mathrm{XXVI})\quad \begin{matrix} u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

dove i numeri di Γ che vi compariscono sono soggetti alle limitazioni registrate sotto le relative tabelle.

18. Le limitazioni, di cui qui si parla, esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè le algebre definite dalle tabelle (XXII), (XXIII) e (XXIV) presentino realmente le proprietà volute dall'enunciato; ma come risulterà tra poco, non sempre bastano a garantire che algebre rispondenti a due diverse delle cinque tabelle indicate dal teorema riescano distinte di fronte alla relazione di equivalenza.

19. Per chiarire nettamente le cose cominciamo dal dimostrare che:

Se A ed A' sono le algebre definite nel corpo Γ dalla tabella (XXII) *e da quella che se ne ricava cambiando α, β, γ in α', β', γ',* *perchè A ed A' riescano equivalenti occorre e basta che sia*

$$\alpha' = \frac{\alpha\lambda_1^2 + (1 - \gamma + \alpha\beta)\,\lambda_1\,\lambda_2 + \beta\lambda_2^2}{\gamma\mu_1^2 + (1 + \gamma - \alpha\beta)\,\mu_1\,\mu_2 + \mu_2^2}$$

$$\beta' = \frac{\alpha\mu_1^2 + (1 + \gamma - \alpha\beta)\,\mu_1\,\mu_2 + \beta\mu_2^2}{\gamma\mu_1^2 + (1 + \gamma - \alpha\beta)\,\mu_1\,\mu_2 + \mu_2^2}$$

$$\gamma' = \frac{\gamma\lambda_1^2 + (1 + \gamma - \alpha\beta)\,\lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_2^2}{\gamma\mu_1^2 + (1 + \gamma - \alpha\beta)\,\mu_1\,\mu_2 + \mu_2^2}$$

con le λ e μ numeri di Γ per i quali si abbia

$$\lambda_1\,\mu_2 - \lambda_2\,\mu_1 \neq 0 \quad e$$

$$\gamma\mu_1^2 + (1 + \gamma - \alpha\beta)\,\mu_1\,\mu_2 + \mu_2^2 =$$

$$= \lambda_1\,\mu_2 + \lambda_2\,\mu_1 + (\beta + 1)\,\lambda_2\,\mu_2 + (\alpha + \gamma)\,\lambda_1\,\mu_1 \neq 0.$$

Infatti si supponga che A ed A' siano equivalenti e si indichino con v_1, v_2, v_3, v_4 quattro elementi indipendenti di A per i quali si abbia

$$(44) \qquad v_1^2 = v_3\,, \quad v_1\,v_2 = v_3 + \alpha' v_4\,, \quad v_2\,v_1 = \beta' v_3 + \gamma' v_4\,, \quad v_2^2 = v_4\,.$$

Se si pone

$$w_1 = v_1 + t_1\,, \quad w_2 = v_2 + t_2\,, \quad w_3 = v_3\,, \quad w_4 = v_4$$

con t_1 e t_2 elementi di A^2 si ha

$$w_1^2 = w_3\,, \quad w_1\,w_2 = w_3 + \alpha' w_4\,, \quad w_2\,w_1 = \beta' w_3 + \gamma' w_4\,, \quad w_2^2 = w_4\,.$$

Ciò significa che le (44) restano inalterate se da v_1 e v_2 si sottraggono degli elementi di A^2; e dunque si può supporre che nelle (44) v_1 e v_2 siano combinazioni lineari di u_1 e u_2.

Poniamo che si abbia

$$(45) \qquad v_1 = \lambda_1\,u_1 + \lambda_2\,u_2\,, \quad v_2 = \mu_1\,u_1 + \mu_2\,u_2\,,$$

di guisa che, attesa l'indipendenza di v_1 e v_2 sarà

$$(46) \qquad \lambda_1\,\mu_2 - \lambda_2\,\mu_1 = 0.$$

Le (45), badando alla (XXII) dànno

$$
(47)\quad
\begin{aligned}
v_1^2 &= \lambda_1 [\lambda_1 + (\beta+1)\lambda_2]\, u_3 + \lambda_2 [\lambda_2 + (\alpha+\gamma)\lambda_1]\, u_4 ,\\
v_2^2 &= \mu_1 [\mu_1 + (\beta+1)\mu_2]\, u_3 + \mu_2 [\mu_2 + (\alpha+\gamma)\mu_1]\, u_4 ,\\
v_1 v_2 &= (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2 + \beta\lambda_2 \mu_1)\, u_3 + (\alpha\lambda_1 \mu_2 + \gamma\lambda_2 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)\, u_4 ,\\
v_2 v_1 &= (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_1 + \beta\lambda_1 \mu_2)\, u_3 + (\alpha\lambda_2 \mu_1 + \gamma\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_2)\, u_4 ;
\end{aligned}
$$

quindi, confrontando con le (44) dovrà essere

$$
(48)\quad
\begin{aligned}
v_3 &= \lambda_1 [\lambda_1 + (\beta+1)\lambda_2]\, u_3 + \lambda_2 [\lambda_2 + (\alpha+\gamma)\lambda_1]\, u_4 ,\\
v_4 &= \mu_1 [\mu_1 + (\beta+1)\mu_2]\, u_3 + \mu_2 [\mu_2 + (\alpha+\gamma)\mu_1]\, u_4 ,
\end{aligned}
$$

e inoltre

$$
(49)\quad
\begin{aligned}
\lambda_1\mu_1 + \lambda_1\mu_2 + \beta\lambda_2\mu_1 &= \lambda_1 [\lambda_1 + (\beta+1)\lambda_2] + \alpha'\mu_1 [\mu_1 + (\beta+1)\mu_2],\\
\alpha\lambda_1\mu_2 + \gamma\lambda_2\mu_1 + \lambda_2\mu_2 &= \lambda_2 [\lambda_2 + (\alpha+\gamma)\lambda_1] + \alpha'\mu_2 [\mu_2 + (\alpha+\gamma)\mu_1],\\
\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_1 + \beta\lambda_1\mu_2 &= \beta'\lambda_1 [\lambda_1 + (\beta+1)\lambda_2] + \gamma'\mu_1 [\mu_1 + (\beta+1)\mu_2],\\
\alpha\lambda_2\mu_1 + \gamma\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_2 &= \beta'\lambda_2 [\lambda_2 + (\alpha+\gamma)\lambda_1] + \gamma'\mu_2 [\mu_2 + (\alpha+\gamma)\mu_1].
\end{aligned}
$$

Attesa l'indipendenza di v_3 e v_4, il determinante

$$
\begin{vmatrix}
\lambda_1 [\lambda_1 + (\beta+1)\lambda_2], & \mu_1 [\mu_1 + (\beta+1)\mu_2] \\
\lambda_2 [\lambda_2 + (\alpha+\gamma)\lambda_1], & \mu_2 [\mu_2 + (\alpha+\gamma)\mu_1]
\end{vmatrix}
= (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)\, \Delta,
$$

dove Δ sta per

$$
\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 + (\beta+1)\lambda_2 \mu_2 + (\alpha+\gamma)\lambda_1 \mu_1 ,
$$

è diverso da zero; quindi perchè coesistano le prime due e le ultime due delle (49) è necessario che sia

$$
(50)\quad
\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{1}{\Delta} [\alpha\lambda_1^2 + (1-\gamma+\alpha\beta)\lambda_1 \lambda_2 + \beta\lambda_2^2],\\
1 &= \frac{1}{\Delta} [\alpha\mu_1^2 + (1+\gamma-\alpha\beta)\mu_1 \mu_2 + \mu_2^2],
\end{aligned}
$$

$$\beta' = \frac{1}{\varDelta}\,[\alpha\mu_1^2 + (1 - \gamma + \alpha\beta)\,\mu_1\,\mu_2 + \beta\mu_2^2]\,,$$

$$\gamma' = \frac{1}{\varDelta}\,[\gamma\lambda_1^2 + (1 + \gamma - \alpha\beta)\,\lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_2^2]\,.$$

Con ciò è stabilito che la condizione di cui nell'enunciato è necessaria; dopo di che la sua sufficienza si riconosce osservando che dalla coesistenza delle (50) — le quali implicano $\varDelta \neq 0$ — segue quella delle (49), di guisa che, se le (50) e la (46) sono soddisfatte, gli elementi v_i di A definiti dalle (45) e (48) riescono indipendenti e si combinano per prodotti a norma delle (44).

Dimostriamo, in secondo luogo, che:

Se A ed A' sono le algebre definite nel corpo Γ dalla tabella (XXIII) *e da quella che se ne ricava cambiando α in α', condizione necessaria e sufficiente, perchè A ed A' si equivalgano è che sia $\alpha' = \alpha\varrho^2$, con ϱ numero di Γ diverso da zero.*

Siano A ed A' equivalenti, e in conformità di ciò siano v_1, v_2, v_3, v_4 quattro elementi indipendenti di A per i quali si abbia

$$v_1^2 = v_3\,, \quad v_1\,v_2 = v_4\,, \quad v_2\,v_1 = v_3 + \alpha' v_4\,, \quad v_2^2 = v_4\,. \tag{51}$$

Come precedentemente si può supporre che v_1 e v_2 siano combinazioni lineari di u_1 e u_2; ma, posto

$$v_1 = \lambda_1\,u_1 + \lambda_2\,u_2\,, \quad v_2 = \mu_1\,u_1 + \mu_2\,u_2\,, \tag{52}$$

con

$$\lambda_1\,\mu_2 - \lambda_2\,\mu_1 \neq 0, \tag{53}$$

si ha

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \lambda_1\,(\lambda_1 + \lambda_2)\,u_3 + \lambda_2\,[\lambda_3 + (\alpha + 1)\,\lambda_1]\,u_4\,, \\ v_2^2 &= \mu_1\,(\mu_1 + \mu_2)\,u_3 + \mu_2\,[\mu_2 + (\alpha + 1)\,\mu_1]\,u_4\,, \\ v_1\,v_2 &= \mu_1\,(\lambda_1 + \lambda_2)\,u_3 + (\lambda_1\,\mu_2 + \alpha\lambda_2\,\mu_1 + \lambda_2\,\mu_2)\,u_4\,, \\ v_2\,v_1 &= \lambda_1\,(\mu_1 + \mu_2)\,u_3 + (\lambda_2\,\mu_1 + \alpha\lambda_1\,\mu_2 + \lambda_2\,\mu_2)\,u_4\,; \end{aligned} \tag{54}$$

quindi bisogna che sia

$$\begin{aligned} v_3 &= \lambda_1\,(\lambda_1 + \lambda_2)\,u_3 + \lambda_2\,[\lambda_2 + (\alpha + 1)\,\lambda_1]\,u_4\,, \\ v_4 &= \mu_1\,(\mu_1 + \mu_2)\,u_3 + \mu_2\,[\mu_2 + (\alpha + 1)\,\mu_1]\,u_4\,, \end{aligned} \tag{55}$$

e inoltre

$$\mu_1(\lambda_1+\lambda_2)=\mu_1(\mu_1+\mu_2), \tag{56}$$

$$\lambda_1\mu_2+\alpha\lambda_2\mu_1+\lambda_2\mu_2=\mu_2[\mu_2+(\alpha+1)\mu_1], \tag{57}$$

$$\lambda_1(\mu_1+\mu_2)=\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)+\alpha'\mu_1(\mu_1+\mu_2), \tag{58}$$

$$\lambda_2\mu_1+\alpha\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_2=\lambda_2[\lambda_2+(\alpha+1)\lambda_1]+\alpha'\mu_2[\mu_2+(\alpha+1)\mu_1]. \tag{59}$$

La (56) dà $\lambda_1+\lambda_2=\mu_1+\mu_2$, oppure $\mu_1=0$.

La (57) per $\lambda_1+\lambda_2=\mu_1+\mu_2$, ossia $\mu_1=\lambda_1+\lambda_2-\mu_2$, badando che $\alpha\neq 0$, dà

$$(\lambda_2-\mu_2)(\lambda_1+\lambda_2-\mu_2)=0\,;$$

ma non può essere $\lambda_2=\mu_2$, perchè se no sarebbe anche $\lambda_1=\mu_1$, in contrasto con la (53), dunque è $\lambda_1+\lambda_2=\mu_2$ e per conseguenza $\mu_1=0$.

D'altronde la (57) per $\mu_1=0$, indi, in virtù della (53), $\mu_2\neq 0$, dà $\lambda_1+\lambda_2=\mu_2$, dunque è, in ogni caso, $\mu_1=0$ e $\lambda_1+\lambda_2=\mu_2$. Dopo ciò la (58) diventa identica, e la (59) fornisce, come volevasi,

$$\alpha'=\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}\alpha.$$

Inversamente, sia $\alpha'=\alpha\varrho^2$, con ϱ numero di Γ non nullo.

Allora per accorgersi dell'equivalenza di A ed A' basta eseguire in A il cambiamento di unità rappresentato dalle formule

$$v_1=\varrho u_1+(1-\varrho)u_2,\, v_2=u_2,\, v_3=\varrho u_3+(1-\varrho+\alpha\varrho-\alpha\varrho^2)\,u_4,\, v_4=u_4.$$

Infine dimostriamo che:

Se A ed A' sono due algebre in Γ definite, l'una, dalla tabella (XXIV) l'altra, da quella che se ne ricava cambiando α in α', A ed A' sono equivalenti, quando, e solo quando, è $\alpha=\alpha'$.

E infatti, se si suppone che

$$v_1=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2\,,\qquad v_2=\mu_1u_1+\mu_2u_2$$

con

$$\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1\neq 0 \tag{60}$$

siano elementi di A, per i quali sia

$$v_1^2=v_3\,,\quad v_1v_2=0,\quad v_2v_1=v_3+\alpha'v_4\,,\quad v_2^2=v_4\,,$$

si trova che deve essere

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\,\mu_1 = 0, \tag{61}$$

$$\lambda_2\,(\alpha\mu_1 + \mu_2) = 0, \tag{62}$$

$$\lambda_1\,(\mu_1 + \mu_2) = \lambda_1\,(\lambda_1 + \lambda_2) + \alpha'\mu_1\,(\mu_1 + \mu_2), \tag{63}$$

$$(\alpha\lambda_1 + \lambda_2)\,\mu_2 = \lambda_2\,(\alpha\lambda_1 + \lambda_2) + \alpha'\mu_2\,(\mu_2 + \alpha\mu_1). \tag{64}$$

La (61) dà $\mu_1 = 0$, oppure $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Sia $\mu_1 = 0$. Allora, badando alla (60), dalla (62) si trae $\lambda_2 = 0$, indi dalla (63) $\mu_2 = \lambda_1 \neq 0$; dopo di che la (64) diventa $\alpha\lambda_1^2 = \alpha'\lambda_1^2$, e dà, come volevasi, $\alpha = \alpha'$.

Sia $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Allora, per la (60), è $\lambda_2 = -\lambda_1 \neq 0$, e la (62) dà $\mu_2 = -\alpha\mu_1$. Dopo ciò le (63) e (64) diventano

$$\lambda_1\,\mu_1\,(1 - \alpha) = \alpha'\mu_1^2\,(1 - \alpha), \tag{65}$$

$$\alpha\lambda_1\,\mu_1\,(1 - \alpha) = \lambda_1^2\,(1 - \alpha). \tag{66}$$

Ma è $1 - \alpha \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$, dunque nella (66) è $\mu_1 \neq 0$ e $\alpha\mu_1 = \lambda_1$, e allora la (65) dà, come volevasi, $\alpha = \alpha'$.

20. Andiamo ora a vedere a quali condizioni debbono soddisfare le costanti α, β, γ perchè l'algebra definita dalla tabella (XXII) possa essere considerata più semplicemente come un'algebra del tipo (XXIII), (XXIV), (XXV) o (XXVI).

Se,

$$v_1 = \lambda_1\,u_1 + \lambda_2\,u_2\,, \qquad v_2 = \mu_1\,u_1 + \mu_2\,u_2$$

sono due elementi dell'algebra A definita dalla tabella (XXII) tali che

$$v_1\,,\, v_2\,,\, v_1^2 \text{ e } v_2^2$$

siano indipendenti, per il che, come risulta da un'osservazione del n^0 precedente, occorre e basta che sia

$$\lambda_1\,\mu_2 - \lambda_2\,\mu_1 \neq 0 \text{ e } \Delta = \lambda_1\,\mu_2 + \lambda_2\,\mu_1 + (\beta + 1)\,\lambda_2\,\mu_2 + \\ + (\alpha + \gamma)\,\lambda_1\,\mu_1 \neq 0, \tag{67}$$

l'algebra A è riconducibile al tipo (XXIII) o (XXIV), se è, per un conveniente valore di α',

$$v_1\,v_2 = v_2^2\,, \quad v_2\,v_1 = v_1^2 + \alpha'\,v_2^2\,, \tag{68}$$

o, rispettivamente

(69) $$v_1 v_2 = 0, \quad v_2 v_1 = v_1^2 + \alpha' v_2^2 ;$$

e può esser ricondotta al tipo (XXV) o (XXVI), se è

(70) $$v_1 v_2 = 0, \quad v_2 v_1 = v_2^2 ,$$

o, rispettivamente,

(71) $$v_1 v_2 = v_2 v_1 = 0.$$

Le (68), (69), (70) e (71), per le (47) del nº precedente si traducono, ordinatamente, nei sistemi di equazioni

$$(72)\begin{cases} \lambda_1 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2 + \beta\lambda_2 \mu_1 = \mu_1 [\mu_1 + (\beta+1)\mu_2], \\ \alpha\lambda_1 \mu_2 + \gamma\lambda_2 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = \mu_2 [\mu_2 + (\alpha+\gamma)\mu_1], \\ \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_1 + \beta\lambda_1 \mu_2 = \lambda_1 [\lambda_1 + (\beta+1)\lambda_2] + \alpha' \mu_1 [\mu_1 + (\beta+1)\mu_2], \\ \alpha\lambda_2 \mu_1 + \gamma\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_2 = \lambda_2 [\lambda_2 + (\alpha+\gamma)\lambda_1] + \alpha' \mu_2 [\mu_2 + (\alpha+\gamma)\mu_1]; \end{cases}$$

$$(73)\begin{cases} \lambda_1 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2 + \beta\lambda_2 \mu_1 = 0, \\ \alpha\lambda_1 \mu_2 + \gamma\lambda_2 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = 0, \\ \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_1 + \beta\lambda_1 \mu_2 = \lambda_1 [\lambda_1 + (\beta+1)\lambda_2] + \alpha' \mu_1 [\mu_1 + (\beta+1)\mu_2], \\ \alpha\lambda_2 \mu_1 + \gamma\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_2 = \lambda_2 [\lambda_2 + (\alpha+\gamma)\lambda_1] + \alpha' \mu_2 [\mu_2 + (\alpha+\gamma)\mu_1]; \end{cases}$$

$$(74)\begin{cases} \lambda_1 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2 + \beta\lambda_2 \mu_1 = 0, \\ \alpha\lambda_1 \mu_2 + \gamma\lambda_2 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = 0, \\ \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_1 + \beta\lambda_1 \mu_2 = \mu_1 [\mu_1 + (\beta+1)\mu_2], \\ \alpha\lambda_2 \mu_1 + \gamma\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_2 = \mu_2 [\mu_2 + (\alpha+\gamma)\mu_1]; \end{cases}$$

$$(75)\begin{cases} \lambda_1 \mu_1 + \lambda_1 \mu_2 + \beta\lambda_2 \mu_1 = 0, \\ \alpha\lambda_1 \mu_2 + \gamma\lambda_2 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = 0, \\ \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_1 + \beta\lambda_1 \mu_2 = 0, \\ \alpha\lambda_2 \mu_1 + \gamma\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_2 = 0. \end{cases}$$

Confrontando le (72), (73), (74), (75) con le (49) e badando che queste ultime sotto la condizione (67) equivalgono alle (50), si vede subito, senza bisogno di calcoli ulteriori, che le (72) equivalgono alle relazioni

$$(76)\quad \begin{cases} \Delta = \alpha\lambda_1^2 + (1-\gamma+\alpha\beta)\lambda_1\lambda_2 + \beta\lambda_2^2 = \alpha\mu_1^2 + (1-\gamma+\alpha\beta)\mu_1\mu_2 + \beta\mu_2^2, \\ \gamma\mu_1^2 + (1+\gamma-\alpha\beta)\mu_1\mu_2 + \mu_2^2 = 0, \end{cases}$$

e

$$(77)\quad \alpha' = \frac{\gamma\lambda_1^2 + (1+\gamma-\alpha\beta)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}{\Delta};$$

le (73) alle relazioni

$$(78)\quad \begin{cases} \alpha\lambda_1^2 + (1-\gamma+\alpha\beta)\lambda_1\lambda_2 + \beta\lambda_2^2 = 0, \\ \gamma\mu_1^2 + (1+\gamma-\alpha\beta)\mu_1\mu_2 + \mu_2^2 = 0, \\ \alpha\mu_1^2 + (1-\gamma+\alpha\beta)\mu_1\mu_2 + \beta\mu_2^2 = 0, \end{cases}$$

e

$$(79)\quad \alpha' = \frac{\gamma\lambda_1^2 + (1+\gamma-\alpha\beta)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}{\Delta};$$

le (74) al sistema

$$(80)\quad \begin{cases} \alpha\lambda_1^2 + (1-\gamma+\alpha\beta)\lambda_1\lambda_2 + \beta\lambda_2^2 = 0, \\ \gamma\mu_1^2 + (1+\gamma-\alpha\beta)\mu_1\mu_2 + \mu_2^2 = 0, \\ \alpha\mu_1^2 + (1-\gamma+\alpha\beta)\mu_1\mu_2 + \beta\mu_2^2 = 0, \\ \gamma\lambda_1^2 + (1+\gamma-\alpha\beta)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \Delta; \end{cases}$$

e infine le (75) al sistema

$$(81)\quad \begin{cases} \alpha\lambda_1^2 + (1-\gamma+\alpha\beta)\lambda_1\lambda_2 + \beta\lambda_2^2 = 0, \\ \gamma\mu_1^2 + (1+\gamma-\alpha\beta)\mu_1\mu_2 + \mu_2^2 = 0, \\ \alpha\mu_1^2 + (1-\gamma+\alpha\beta)\mu_1\mu_2 + \beta\mu_2^2 = 0, \\ \gamma\lambda_1^2 + (1+\gamma-\alpha\beta)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = 0. \end{cases}$$

Da ciò una serie di teoremi i quali assegnano le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono soddisfare le costanti α, β, γ della tabella (XXII), perchè l'algebra da questa definita possa esser ricondotta al tipo (XXIII), (XXIV), (XXV) o (XXVI).

Lasciando gli altri alla cura del lettore, ci accontenteremo, in primo luogo, di enunciare in termini espliciti il seguente:

L'algebra definita dalla tabella (XXII) *può esser ricondotta al tipo* (XXIII) *quando, e solo quando, è possibile associare alle costanti* α, β, γ *dei numeri di* $\Gamma, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ *e* μ_2 *pei quali coesistano le* (67) *e* (76); *nel qual caso l'algebra di tipo* (XXIII), *cui essa equivale, risponde alla tabella che si ottiene dalla* (XXIII) *ponendovi per* α *il numero* α' *dato dalla* (77).

Inoltre faremo osservare che le (81) implicano, come facilmente si vede, le eguaglianze

$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = 1 \tag{82}$$

circostanza evidente *a priori* se si vuole che la tabella (XXII) definisca un'algebra del tipo (XXVI), indi commutativa; ma le (82) non bastano a garentire che l'algebra (XXII) è riconducibile al tipo (XXVI).

Così, ad es., il lettore si persuade subito che, se $\alpha = \beta = \gamma = 1$ e Γ è il corpo reale, l'algebra definita dalla (XXII) è commutativa, ma non è riducibile al tipo (XXVI).

21. A compiuto chiarimento dell'osservazione fatta nel n° 18 dimostriamo ora che:

Algebre rispondenti a due diverse delle quattro tabelle (XXIII), (XXIV), (XXV) *e* (XXVI) *non sono isomorfe, eccettuato il caso in cui una di esse risponda alla tabella* (XXIV) *con* $\alpha = 0$ *e l'altra alla tabella* (XXV).

Intanto è evidente che un'algebra del tipo (XXVI) è essenzialmente diversa da quelle dei tipi (XXIII), (XXIV) e (XXV), perchè essa è commutativa, mentre quest'ultime non sono tali.

Poi si osservi che per gli elementi

$$x = \sum_i^{1..4} \lambda_i u_i, \qquad y = \sum_i^{1..4} \varrho_i u_i,$$

con le coordinate λ_i e ϱ_i si ha

$$xy = \varrho_1 (\lambda_1 + \lambda_2) u_3 + [\alpha\lambda_2 \varrho_1 + \varrho_2 (\lambda_1 + \lambda_2)] u_4,$$

oppure

$$xy = \varrho_1 (\lambda_1 + \lambda_2) u_3 + \lambda_2 (\alpha\varrho_1 + \varrho_2) u_4,$$

o, infine,

$$xy = \lambda_1 \varrho_1 u_3 + \lambda_2 (\varrho_1 + \varrho_2) u_4,$$

secondo che l'algebra di cui si tratta è del tipo (XXIII), (XXIV) o (XXV); e che x riesce nullifico sinistro per tutti gli elementi di una sotto-algebra che è almeno del 3^0 ordine, se, e soltanto se, non sono indipendenti le due equazioni nelle ϱ_i che si ottengono annullando i coefficienti di u_3 e u_4 nell'espressione del prodotto xy. Ma allora x gode di tale proprietà,

nel caso della (XXIII), se è $\begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2, & 0 \\ \alpha\lambda_2 & , \lambda_1 + \lambda_2 \end{vmatrix} = 0,$

ossia $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$;

nel caso della (XXIV), se è $\begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2, & 0 \\ \alpha\lambda_2 & , \lambda_2 \end{vmatrix} = 0,$

ossia $\lambda_2 = 0$, oppure $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$;

nel caso della (XXV), se è $\begin{vmatrix} \lambda_1 & , 0 \\ \lambda_2 & , \lambda_2 \end{vmatrix} = 0,$

ossia $\lambda_1 = 0$, oppure $\lambda_2 = 0$;

per conseguenza gli elementi dotati della proprietà in discorso costituiscono un unico sistema del 3^0 ordine nel caso della (XXIII), mentre ne costituiscono due nei casi delle (XXIV) e (XXV).

Ciò significa che un'algebra del tipo (XXIII) non è mai isomorfa ad un'algebra che sia del tipo (XXIV) o (XXV).

Resta a far vedere che l'algebra definita dalla (XXIV) non è riconducibile al tipo (XXV), se non a patto che nella (XXIV) sia $\alpha = 0$.

Per questo si osservi che per l'algebra definita dalla (XXV) accanto ad

$$xy = \varrho_1 (\lambda_1 + \lambda_2) u_3 + \lambda_2 (\alpha\varrho_1 + \varrho_2) u_4 ,$$

si ha

$$y^2 = \varrho_1 (\varrho_1 + \varrho_2) u_3 + \varrho_2 (\alpha\varrho_1 + \varrho_2) u_4 ,$$

ed

$$yx = \lambda_1 (\varrho_1 + \varrho_2) u_3 + \varrho_2 (\alpha\lambda_1 + \lambda_2) u_4 ;$$

e che pertanto riesce

$$xy = 0 \text{ e } y^2 = yx,$$

con x ed y indipendenti da u_3 ed u_4, quando, e solo quando, sia

$$\lambda_1 \varrho_2 - \lambda_1 \varrho_1 \neq 0, \tag{83}$$

(84) $$\varrho_1(\lambda_1+\lambda_2)=0,$$

(85) $$\lambda_2(\alpha\varrho_1+\varrho_2)=0,$$

(86) $$(\lambda_1-\varrho_1)(\varrho_1+\varrho_2)=0,$$

(87) $$\varrho_2(\alpha\varrho_1+\varrho_2-\alpha\lambda_1-\lambda_2)=0.$$

La (84) dà $\varrho_1=0$, oppure $\lambda_1+\lambda_2=0$.

Quando è $\varrho_1=0$, è impossibile accordare la (83) con le (85) e (86), perchè queste divengono $\lambda_2\varrho_2=0$ e $\lambda_1\varrho_2=0$ e quindi, in contrasto con la (83), o è $\varrho_2=0$, o è $\lambda_1=\lambda_2=0$; quando è λ_1+ $+\lambda_2=0$, indi, per la (83), $\lambda_2=-\lambda_1\neq 0$, la (85) dà $\varrho_2=-\alpha\varrho_1$ e la (86) e (87) diventano

$$(1-\alpha)\varrho_1(\lambda_1-\varrho_1)=0,\quad \alpha(1-\alpha)\lambda_1\varrho_1=0;$$

ossia, badando che $\lambda_1\neq 0$ e che, per la (XXIV), è $\alpha\neq 1$,

$$\varrho_1(\lambda_1-\varrho_1)=0,\quad \alpha\varrho_1=0.$$

Se fosse $\varrho_1=0$, sarebbe anche, in contrasto con la (83), $\varrho_2=-\alpha\varrho_1=0$, dunque le (83), ..., (86) non sono compatibili che quando $\alpha=0$, nel qual caso si soddisfa ad esse prendendo $\lambda_1=$ $=\varrho_1=-\lambda_2\neq 0$ e $\varrho_2=0$.

Con ciò il teorema è pienamente dimostrato e si vede inoltre che, quando per la tabella (XXIV) è $\alpha=0$, ossia è

$$u_1^2=u_3,\quad u_1u_2=0,\quad u_2u_1=u_3,\quad u_2^2=u_4,$$

basta eseguire il cambiamento di unità indicato dalle formule

$$v_1=u_1-u_2,\quad v_2=u_1,\quad v_3=u_4,\quad v_4=u_3,$$

per convertirla in una tabella del tipo (XXV).

22. Chiudiamo questo paragrafo dimostrando che:

Un'algebra pseudonulla del 4° ordine, con l'indice 3 e il quadrato del 2° ordine, è riducibile, quando, e solo quando può pensarsi come definita da una tabella del tipo (XXVI).

Infatti sia A una sì fatta algebra riducibile, e sia

$$A=A_1\dotplus A_2.$$

Sarà

$$A^2 = A_1^2 \dotplus A_2^2 ,$$

e poichè A^2 è del 2⁰ ordine, o una delle A_1^2 e A_2^2 sarà zero e l'altra, per es. A_1^2, del 2^0 ordine, o A_1^2 e A_2^2 saranno entrambe del 1^0 ordine.

La prima alternativa è da scartare perchè, se essa si verificasse, A_1 sarebbe del 3^0 ordine e potenziale [19], cioè di indice 4, mentre A è di indice 3; resta dunque la seconda, la quale implica che A_1 e A_2 sono del 2^0 ordine e potenziali. Ma allora la tabella di A può esser supposta del tipo (XXVI), giacchè la tabella (XXVI) definisce appunto un'algebra che è somma diretta delle due generate, l'una, da u_1 e $u_2 = u_1^2$, l'altra, da u_2 e $u_4 = u_2^2$.

§ 3. LE ALGEBRE CON L'INDICE 3 E IL QUADRATO DEL 1^0 ORDINE.

22. Se l'algebra A è pseudonulla, con l'indice 3 e il quadrato del 1^0 ordine due casi possono presentarsi; e cioè:

a) o essa contiene qualche elemento a quadrato non nullo;

b) o tutti i suoi elementi sono a quadrato nullo.

Esaminiamoli separatamente.

23. *Caso a*).

Si dia il caso *a*) e sia x un elemento di A con $x^2 \neq 0$. Da

$$x^2 \neq 0, \qquad xA \leq A^2, \qquad Ax \leq A^2$$

e dal fatto, che A^2 è del 1^0 ordine, si deduce che è proprio

$$xA = Ax = A^2,$$

e che, dunque, se S_x e T_x sono i sistemi costituiti dagli elementi di A ognun dei quali ha in x, rispettivamente, un nullifico sinistro o un nullifico destro, S_x e T_x riescono due sotto-algebre di A del 3^0 ordine, contenenti A^2, ma non l'elemento x.

Ora:

a_1) o almeno per un x di A con $x^2 \neq 0$ le corrispondenti sotto-algebre S_x e T_x coincidono;

a_2) o comunque si scelga x fra gli elementi di A a quadrato non nullo le sotto-algebre S_x e T_x sono distinte.

[19] Loc. cit. [18].

24. *Sotto-caso* a_1).

Valga l'alternativa a_1) e sia u_1 un elemento di A con $u_1^2 \neq 0$, e per il quale coincidano, diciamo in B, le corrispondenti sotto-algebre S_{u_1} e T_{u_1}; di guisa che B sarà la sotto-algebra degli elementi di A ognun dei quali ha in u_1 un nullifico.

Poichè B non contiene u_1, si otterrà un gruppo di unità di A associando u_1 ad un gruppo, (u_2, u_3, u_4), di unità di B.

Ora da $B \leq A$, segue $B^2 \leq A^2$, cioè che l'indice di B è 3 o 2; dunque, per quanto ho stabilito altrove [20] u_2, u_3 e u_4 si possono supporre scelte in modo che per esse si abbia

$$u_i\, u_4 = u_4\, u_i = 0 \qquad (i = 2, 3, 4),$$

e inoltre

$$u_2^2 = u_3\, u_2 = u_4\,, \qquad u_2\, u_3 = 0, \qquad u_3^2 = \beta u_4\,,$$

oppure

$$u_2^2 = u_4\,, \quad u_2\, u_3 = u_3\, u_2 = 0, \quad u_3^2 = \beta u_4\,.$$

oppure

$$u_2^2 = 0, \qquad u_2\, u_3 = -\, u_3\, u_2 = 0, \qquad u_3^2 = 0,$$

o infine

$$u_2^2 = u_2\, u_3 = u_3\, u_2 = u_3^2 = 0.$$

Dopo ciò per u_1 si avrà $u_1^2 = \alpha u_4$, con $\alpha \neq 0$; e qui, come mostra il cambiamento di unità definito dalle formule

$$v_1 = u_1\,, \quad v_2 = \alpha u_2\,, \quad v_3 = u_3\,, \quad v_4 = \alpha u_4\,,$$

si può supporre $\alpha = 1$, se per le u_2, u_3, u_4 vale la penultima delle quattro alternative or ora indicate.

Segue che nelle ipotesi attuali la tavola di moltiplicazione di A potrà esser ricondotta ad uno dei seguenti quattro tipi:

$$\text{(XXVII)} \quad \begin{matrix} \alpha u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & \beta u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad \text{(XXVIII)} \quad \begin{matrix} \alpha u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,,$$

[20] Loc. cit. [1], *b*), n° 7.

$$(\text{XXIX})\quad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \\ 0 & -u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad (\text{XXX})\quad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,,$$

dove α nelle tavole nelle quali comparisce è soggetta evidentemente alla condizione di non esser nullo.

25. Se

$$x = \sum_i^{1..4} \lambda_i u_i\,, \quad y = \sum_i^{1..4} \varrho_i u_i$$

sono, nell'algebra A definita dalla (XXVII), gli elementi con le coordinate λ_i e ϱ_i, per x^2, xy e yx si ha

$$x^2 = (\alpha\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \beta\lambda_3^2 + \lambda_2\,\lambda_3)\,u_4\,,$$

$$xy = (\alpha\lambda_1\,\varrho_1 + \lambda_2\,\varrho_2 + \lambda_3\,\varrho_2 + \beta\lambda_3\,\varrho_3)\,u_4\,,$$

$$yx = (\alpha\lambda_1\,\varrho_1 + \lambda_2\,\varrho_2 + \lambda_2\,\varrho_3 + \beta\lambda_3\,\varrho_3)\,u_4\,;$$

quindi perchè la sotto-algebra costituita dagli elementi di A, che hanno in x un nullifico sinistro, coincida con quella formata dagli elementi, che ivi hanno un nullifico destro, occorre e basta che si equivalgano le due equazioni nelle ϱ

$$\alpha\lambda_1\,\varrho_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)\,\varrho_2 + \beta\lambda_3\,\varrho_3 = 0,$$

$$\alpha\lambda_1\,\varrho_1 + \lambda_2\,\varrho_2 + (\lambda_2 + \beta\lambda_3)\,\varrho_3 = 0,$$

cioè che sia

$$(88)\qquad \lambda_2^2 + \lambda_2\,\lambda_3 + \beta\lambda_3^2 = 0, \quad \alpha\lambda_1\,\lambda_2 = 0, \quad \alpha\lambda_1\,\lambda_3 = 0.$$

Poichè nelle ipotesi attuali è $\alpha \neq 0$, le (88) richiedono che sia

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2^2 + \lambda_2\,\lambda_3 + \beta\lambda_3^2 = 0$$

oppure

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0\,.$$

Nella prima alternativa è $x^3 = 0$; quindi, se si vuole che le sotto-algebre in discorso coincidano e che riesca inoltre $x^2 \neq 0$

bisogna supporre

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_4 u_4 \quad \text{e} \quad \lambda_1 \neq 0 \; ;$$

nel qual caso le dette sotto-algebre coincidono con quella avente per unità u_2, u_3, u_4, indicata più sopra con B, e per x^2 si ha $x^2 = \alpha\lambda_1^2 u_4$.

Ciò significa che quando per ridurre la tavola di moltiplicazione dell'algebra A al tipo (XXVII) si parte da un elemento a quadrato non nullo, qualunque sia questo elemento la relativa algebra B non muta. Ma allora basta ricordare un teorema stabilito altrove ([21]) per riconoscere che:

Se A ed A' sono le algebre nel corpo Γ definite, la prima, dalla tabella (XXVII), *l'altra, da quella che se ne ottiene cambiando α in α' e β in β', perchè A ed A' siano equivalenti occorre e basta che sia $\alpha' = \alpha\varrho^2$, con ϱ numero di Γ (non nullo) e $\beta' = \beta$.*

26. Supponiamo di voler eseguire un cambiamento di unità nell'algebra A definita dalla tabella (XXVIII), in maniera però da non alterare la forma della sua tavola di moltiplicazione.

Delle nuove unità, v_1, v_2, v_3, v_4, una, naturalmente, dovrà appartenere ad A^2; posto che essa sia v_4, questa non potrà differire da u_4 che per un fattore numerico (non nullo). Quanto alle rimanenti, possiamo supporle combinazioni lineari delle sole u_1, u_2, u_3, perchè alterare le v_i per multipli scalari di u_4 non ha influenza sulla tavola di moltiplicazione ad esse relativa.

Poniamo dunque

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \,, \\ v_2 &= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 \,, \\ v_3 &= \nu_1 u_1 + \nu_2 u_3 + \nu_3 u_3 \,, \\ v_4 &= \qquad\qquad\qquad\quad \varrho u_4 \,, \end{aligned}$$

sotto l'ipotesi, beninteso, che sia

$$\varrho \begin{vmatrix} \lambda_1 \,, & \lambda_2 \,, & \lambda_3 \\ \mu_1 \,, & \mu_2 \,, & \mu_3 \\ \nu_1 \,, & \nu_2 \,, & \nu_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{89}$$

([21]) Loc. cit. ([1]), *b*), n. 8.

Se vogliamo che le v_i si combinino fra di loro per prodotti secondo uno schema del tipo (XXVIII), dove le costanti α e β siano sostituite da α' e β', dovrà essere

$$\begin{aligned} &\alpha\lambda_1^2+\lambda_2^2+\beta\lambda_3^2=\alpha'\varrho\,,\\ &\alpha\mu_1^2+\mu_2^2+\beta\mu_3^2=\varrho\quad,\\ &\alpha\nu_1^2+\nu_2^2+\beta\nu_3^2=\beta'\varrho\,,\\ &\alpha\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\beta\lambda_3\mu_3=0,\\ &\alpha\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\beta\mu_3\nu_3=0,\\ &\alpha\nu_1\lambda_1+\nu_2\lambda_2+\beta\nu_3\lambda_3=0. \end{aligned} \tag{90}$$

Qui sono da distinguere due casi, secondo che è $\beta=0$ o $\beta\neq0$.

Se $\beta=0$, le (90) diventano:

(91) $\alpha\lambda_1^2+\lambda_2^2=\alpha'\varrho$, (92) $\alpha\mu_1^2+\mu_2^2=\varrho$, (93) $\alpha\nu_1^2+\nu_2^2=\beta'\varrho$,

(94) $\alpha\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2=0$, (95) $\alpha\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2=0$, (96) $\alpha\nu_1\lambda_1+\nu_2\lambda_2=0$.

Poichè α, α' e ϱ sono diversi da zero, le (91) e (92) portano che nè le λ_1, λ_2, nè le μ_1, μ_2 possono essere entrambe nulle; dopo di che le (94) e (95) dànno

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\,, & \lambda_2 \\ \nu_1\,, & \nu_2 \end{vmatrix}=0$$

e, indicando con τ un conveniente numero di Γ,

$$\nu_1=\lambda_1\tau\quad,\quad \nu_2=\lambda_2\tau.$$

Di qua discende

$$0=\alpha\nu_1\lambda_1+\nu_2\lambda_2=\tau(\alpha\lambda_1^2+\lambda_2^2)=\alpha'\varrho\tau\,,$$

cioè $\tau=0$, quindi è $\nu_1=\nu_2=0$ e, per la (93), $\beta'=0$.

Ma allora, per la (89), è

$$\varDelta=\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1\neq0\,;$$

e di qua e dalle (94), (92) e (91) si trae, successivamente,

$$\lambda_1 = \frac{\Delta\mu_2}{\alpha\mu_1^2 + \mu_2^2} = \frac{\Delta\mu_2}{\varrho}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\alpha\Delta\mu_1}{\alpha\mu_1^2 + \mu_2^2} = -\frac{\alpha\Delta\mu_1}{\varrho}$$

$$\alpha' = \alpha\frac{\Delta^2}{\varrho^2}\,.$$

Si ha così che α' non differisce da α che per un fattore quadrato, il quale disponendo delle λ_1, λ_2, μ_1 e μ_2 si può far essere un qualunque quadrato non nullo di Γ.

Supponiamo ora $\beta \neq 0$, di guisa che sarà pure $\beta' \neq 0$, giacchè altrimenti, per il ragionamento fatto, sarebbe pure $\beta = 0$.

Allora, posto

(97) $\sigma_1 = \lambda_2\nu_3 - \lambda_3\nu_2\,,\ \sigma_2 = \lambda_3\nu_1 - \lambda_1\nu_3\,,\ \sigma_3 = \lambda_1\nu_2 - \lambda_2\nu_1\,,$

si ricava, indicato con σ un fattore di proporzionalità,

$$\mu_1 = \beta\sigma_1\sigma\,,\ \mu_2 = \alpha\beta\sigma_2\sigma\,,\ \mu_3 = \alpha\sigma_3\sigma\,,$$

$$\varrho = \alpha\beta\sigma^2(\beta\sigma_1^2 + \alpha\beta\sigma_2^2 + \alpha\sigma_3^2),$$

e infine

(98) $$\alpha' = \frac{\alpha\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \beta\lambda_3^2}{\alpha\beta\sigma^2(\beta\sigma_1^2 + \alpha\beta\sigma_2^2 + \alpha\sigma_3^2)}\,,\qquad \beta' = \frac{\alpha\nu_1^2 + \nu_2^2 + \beta\nu_3^2}{\alpha\beta\sigma^2(\beta\sigma_1^2 + \alpha\beta\sigma_2^2 + \alpha\sigma_3^2)}\,.$$

Raccogliendo le osservazioni fatte si ha il teorema:

Se A ed A' sono le algebre nel corpo Γ definite dalla tavola di moltiplicazione (XXVIII) *e da quella che se ne ricava cambiando α in α' e β in β', esse sono equivalenti quando, e solo quando, o β e β' sono entrambi nulli ed è $\alpha' = \alpha\varrho^2$, con ϱ $(\neq 0)$ numero di Γ, o β e β' sono entrambi diversi da zero ed è possibile trovare in Γ dei numeri λ_i e ν_i e σ tali che sia*

$$\alpha\lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \beta\lambda_3\nu_3 = 0$$

e inoltre valgano le (98), *con le σ_i definite dalle* (97).

27. A conclusione di quanto siamo venuti dicendo sulle algebre presentanti il caso a_1) dimostriamo che:

Algebre nel corpo Γ rispondenti a due diverse delle tabelle indicate nel n⁰ 24 sono certo non isomorfe, se in Γ è $2 \neq 0$; se invece in Γ è $2 = 0$, il fatto in discorso sussiste soltanto per le tabelle (XXVII), (XXVIII) *e* (XXX), *giacchè la* (XXIX) *con un cambiamento di unità può esser ricondotta al tipo* (XXVIII).

In Γ sia $2 \neq 0$. Allora il teorema si giustifica osservando:

1⁰ che le algebre dei tipi (XXVII) e (XXIX) non sono commutative, mentre sono tali quelle degli altri due;

2⁰ che in un'algebra del tipo (XXVII) la sotto-algebra costituita dagli elementi aventi un nullifico in un assegnato elemento a quadrato non nullo non varia al variar di quest'ultimo ed ammette elementi a quadrato non nullo, mentre nell'algebra definita dalla tavola di moltiplicazione (XXIX) gli elementi della sotto-algebra rispondente nel modo ora detto ad u_1 sono tutti a quadrato nullo;

3⁰ infine che per l'algebra definita dalla tabella (XXVIII) i nullifici sono tutti, e solo, gli elementi del tipo λu_4, con $\lambda \neq 0$, o del tipo di $\lambda u_3 + \mu u_4$, con λ e μ non entrambi nulli, secondo che è $\beta \neq 0$ o $\beta = 0$; mentre per quella definita dalla tabella (XXX) i nullifici sono tutti, e solo, gli elementi del tipo $\lambda u_2 + \mu u_3 + \nu u_4$, con λ, μ, ν, non tutti nulli.

In Γ sia, invece, $2 = 0$.

Allora per quanto riguarda le tabelle (XXVII), (XXVIII), e (XXX) nulla è da mutare in ciò che è stato detto nell'ipotesi precedente; ma, stavolta, la tavola (XXIX), riuscendo $u_4 = -u_4$ definisce, come la (XXVIII) un'algebra commutativa, e con la trasformazione di unità rappresenta dalle formule

$$v_1 = u_1 + u_2 \ , \ v_2 = u_1 + u_3 \ , \ v_3 = u_1 + u_2 + u_3 \ ; \ v_4 = u_4 \ ,$$

si muta in

$$\begin{matrix} v_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \ ,$$

cioè in una tabella del tipo (XXVIII).

28. *Sotto-caso* a_2).

Valga ora il sottocaso a_2) e, detto u_1 un elemento di A con $u_1^2 \neq 0$, si consideri l'intersezione delle corrispondenti sotto-algebre S_{u_1} e T_{u_1}. Essa sarà una sotto-algebra V del 2º ordine contenente A^2, e dunque, se u_4 è l'elemento di A^2 eguale ad u_1^2, u_2 un elemento di V esterno ad A^2 e infine u_3 un elemento di S_{u_1} esterno a V, le u_i saranno quattro elementi indipendenti di A e i loro prodotti a due a due saranno forniti da uno schema del tipo

$$\begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha u_4 & \beta u_4 & 0 \\ u_4 & \gamma u_4 & \delta u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \tag{99}$$

dove il prodotto $u_3 u_1$, che è certo un multiplo scalare non nullo di u_4 si è supposto eguale senz'altro ad u_4, perchè in caso contrario avremmo potuto ridurci a codesto caso mutando u_3 per un conveniente fattore numerico.

Si osservi subito che *se* $\alpha \neq 0$, *nella* (99) *si può supporre* $\beta = 0$ *e* $\gamma = 1$.

E infatti, se $\alpha \neq 0$, basta sostituire alla considerazione di u_3 quella dell'elemento $-\dfrac{\beta}{\alpha} u_2 + u_3$, per dare alla tavola di moltiplicazione di A la forma (99) con $\beta = 0$. Ora, quando nella (99) è $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$, è impossibile che sia $\gamma = 0$, perchè altrimenti u_2 riescirebbe a quadrato non nullo e nullifico per u_1, u_3, u_4, cioè A non presenterebbe il caso a_2), bensì il caso a_1); dunque quando è $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$ è certo $\gamma \neq 0$. Ed allora basta sostituire alla considerazione di u_2 quella di un suo conveniente multiplo scalare per ottenere che la tavola di moltiplicazione di A presenti la forma (99) con $\beta = 0$, $\gamma = 1$ e il coefficiente che prende il posto di α ancora diverso da zero.

Notisi, in secondo luogo, che *se nella* (99) *è* $\alpha = \beta = 0$, *è pure necessariamente* $\gamma = 0$.

E infatti, se fosse $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq 0$, l'elemento $\gamma u_1 - u_2$ riescirebbe a quadrato non nullo e nullifico per u_2, u_3 ed u_4; cioè l'algebra A non presenterebbe il caso a_2), bensì il caso a_1).

Se nella (99) si suppone $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ basta sostituire ad u_2 un suo conveniente multiplo scalare per ottenere che riesca eguale ad 1 il coefficiente che prende il posto di β; dunque nelle ipotesi attuali l'algebra A può pensarsi intanto, come definita da una tavola di moltiplicazione della forma

$$
(100) \qquad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & u_4 & \delta u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \;, \qquad\qquad (101) \qquad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \\ u_4 & \gamma u_4 & \delta u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \text{o}
$$

$$
(102) \qquad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & \delta u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \;.
$$

29. Ma le cose possono essere ulteriormente precisate.

Per questo cominciamo dal dimostrare che:

L'algebra definita dalla (100) *risponde al caso* a_2), *se, e solo se,* $\alpha = -1$.

Si consideri, infatti, nell'algebra A in discorso l'elemento $v = u_1 - u_2$. Si verifica subito che esso è un nullifico per $\alpha u_1 + u_2$, u_3 e u_4 e che per il suo quadrato si ha

$$v^2 = (\alpha + 1)\, u_4 \,;$$

ma dunque è necessario che sia $\alpha + 1 = 0$, perchè altrimenti, contro l'ipotesi, v sarebbe un elemento di A a quadrato non nullo, per il quale coinciderebbero le corrispondenti sotto-algebre S_v e T_v.

Ebbene, supponiamo $\alpha = -1$ e andiamo a vedere se, sotto tale condizione, A risponda veramente al caso a_2), che qui si sta esaminando.

Se x, y sono suoi elementi, con le coordinate λ_i e ϱ_i, si ha

$$xy = (\lambda_1 \varrho_1 + \lambda_3 \varrho_1 - \lambda_2 \varrho_2 + \lambda_3 \varrho_2 + \delta\lambda_3 \varrho_3)\, u_4 \,,$$

$$yx = (\lambda_1 \varrho_1 + \lambda_1 \varrho_3 - \lambda_2 \varrho_2 + \lambda_2 \varrho_3 + \delta\lambda_3 \varrho_3)\, u_4 \,;$$

quindi per x le sotto-algebre corrispondenti S_x e T_x coincideranno, se, e solo se, le due equazioni nelle ϱ_i

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\, \varrho_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\, \varrho_2 + \delta\lambda_3\, \varrho_3 = 0 \,,$$

$$\lambda_1 \varrho_1 - \lambda_2 \varrho_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \delta\lambda_3)\, \varrho_3 = 0$$

riescono equivalenti; per il che occorre e basta che si abbia

$$(103) \qquad \lambda_3(\lambda_1+\lambda_2)=0,$$

$$(104) \qquad \lambda_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_3(\lambda_2+\delta\lambda_3)=0,$$

$$(105) \qquad -\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)+\lambda_3(\lambda_1+\delta\lambda_3)=0.$$

La (103) esige che sia $\lambda_3=0$, oppure $\lambda_2=-\lambda_1$.
Per $\lambda_3=0$ le (104) e (105) diventano

$$\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2)=0, \qquad \lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)=0$$

e dànno $\lambda_2=-\lambda_1$, oppure $\lambda_2=\lambda_1=0$, cioè in ogni caso, $\lambda_2=-\lambda_1$.
Per $\lambda_2=-\lambda_1$ le (104) e (105) si accordano nel dare $\delta\lambda_3^2=0$; dunque non si soddisfa alle (103), (104) e (105) che supponendo

$$\lambda_2=-\lambda_1 \quad \text{e} \quad \delta\lambda_3^2=0.$$

Ora il quadrato di x, per il quale si ha

$$x^2=(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2^2+\lambda_2\lambda_3+\delta\lambda_3^2)\,u_4\,,$$

risulta nullo, quando è $\lambda_2=-\lambda_1$ e $\delta\lambda_3^2=0$, dunque, come volevasi, non esistono in A elementi a quadrato non nullo e per ognun dei quali coincidano le corrispondenti sotto-algebre S_x e T_x.

30. Dimostriamo, in secondo luogo, che:
L'algebra definita dalla tabella (101) *risponde al caso* a_2), *se, e solo se, è* $\gamma=1$.
Che la condizione indicata sia necessaria si giustifica osservando che l'elemento $v=(1-\gamma)\,u_1+u_2$ è un nullifico per ogni elemento dell'algebra A definita dalla (101), le cui coordinate ϱ_i soddisfacciano alla condizione

$$(1-\gamma)\,\varrho_1+\varrho_3=0$$

e che per il quadrato di v si ha

$$v^2=(1-\gamma)^2\,u_4\,.$$

Resta a dimostrare che è sufficiente.

Ebbene, si supponga $\gamma = 1$, e, detti x, y gli elementi con le coordinate λ_i e ϱ_i, si osservi che è

$$xy = (\lambda_1 \varrho_1 + \lambda_2 \varrho_3 + \lambda_3 \varrho_1 + \lambda_3 \varrho_2 + \delta\lambda_3 \varrho_3) u_4,$$

$$yx = (\lambda_1 \varrho_1 + \lambda_3 \varrho_2 + \lambda_1 \varrho_3 + \lambda_2 \varrho_3 + \delta\lambda_3 \varrho_3) u_4;$$

quindi le sotto-algebre S_x e T_x coincidono, se sono equivalenti le equazioni nelle ϱ_i

$$(\lambda_1 + \lambda_3) \varrho_1 + \lambda_3 \varrho_2 + (\lambda_2 + \delta\lambda_3) \varrho_3 = 0,$$

$$\lambda_1 \varrho_1 + \lambda_3 \varrho_2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \delta\lambda_3) \varrho_3 = 0;$$

ossia, se è

$$\lambda_3^2 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 + \delta\lambda_3^2 = 0,$$

o, in altri termini, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.

Ma, essendo

$$x^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 + 2\lambda_2 \lambda_3 + \delta\lambda_3^2) u_4,$$

x^2 riesce nullo per $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, dunque ecc.

31. Infine si osservi che, per l'algebra definita dalla (102), i prodotti xy e yx degli elementi x, y con le coordinate λ_i e ϱ_i sono dati da

$$xy = (\lambda_1 \varrho_1 + \lambda_3 \varrho_1 + \delta\lambda_3 \varrho_3) u_4,$$

$$yx = (\lambda_1 \varrho_1 + \lambda_1 \varrho_3 + \delta\lambda_3 \varrho_3) u_4,$$

e le equazioni nelle ϱ_i

$$(\lambda_1 + \lambda_3) \varrho_1 + \delta\lambda_3 \varrho_3 = 0,$$

$$\lambda_1 \varrho_1 + (\lambda_1 + \delta\lambda_3) \varrho_3 = 0$$

si equivalgono quando, e solo quando, è

$$\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 + \delta\lambda_3^2 = 0,$$

nel qual caso risulta

$$x^2 = (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_3 + \delta\lambda_3^2) u_4 = 0.$$

Ciò significa che:

L'algebra definita dalla (102) *presenta per ogni valore di* δ *il caso* a_2).

32. Risulta da quanto precede che le tavole di moltiplicazione delle algebre che qui si stanno esaminando possono esser tutte ricondotte a tavole dei seguenti tre tipi:

$$(106) \quad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & u_4 & \delta u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad (107) \quad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \\ u_4 & u_4 & \delta u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

$$(108) \quad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & \delta u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Ma ora possiamo dimostrare che:

Quando nella tabella (106) *è* $\delta \neq 0$, *e soltanto in tal caso, con un cambiamento di unità la tavola di moltiplicazione dell'algebra da essa definita può esser mutata in una del tipo* (107).

Si supponga che, cambiando nelle v_i le unità u_i dell'algebra definita dalla (106), la tavola di moltiplicazione assuma la forma (107).

Senza venir meno alla generalità si può supporre, per ragioni già addotte,

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 , \\ v_2 &= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 , \\ v_3 &= \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \nu_3 u_3 , \\ v_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad \varrho u_4 , \end{aligned}$$

con

$$\varrho \begin{vmatrix} \lambda_1 , & \lambda_2 , & \lambda_3 \\ \mu_1 , & \mu_2 , & \mu_3 \\ \nu_1 , & \nu_2 , & \nu_3 \end{vmatrix} \neq 0 ;$$

e poichè deve risultare

$$v_1 v_2 = v_2 v_1 = v_1 v_3 = 0\,, \quad v_3 v_1 = v_2 v_3 = v_3 v_2 = v_4\,,$$

$$v_1^2 = v_4\,, \quad v_2^2 = 0, \quad v_3^2 = \delta v_4\,,$$

con δ numero opportuno, bisognerà che risulti

$$\lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_1 + \lambda_3 \mu_2 + \delta\lambda_3 \mu_3 = 0,$$

$$\lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 + \lambda_1 \mu_3 + \lambda_2 \mu_3 + \delta\lambda_3 \mu_3 = 0,$$

$$\lambda_1 \nu_1 - \lambda_2 \nu_2 + \lambda_3 \nu_1 + \lambda_3 \nu_2 + \delta\lambda_3 \nu_3 = 0,$$

$$\lambda_1 \nu_1 - \lambda_2 \nu_2 + \lambda_1 \nu_3 + \lambda_2 \nu_3 + \delta\lambda_3 \nu_3 = \varrho,$$

$$\mu_1 \nu_1 - \mu_2 \nu_2 + \mu_3 \nu_1 + \mu_3 \nu_2 + \delta\mu_3 \nu_3 = \varrho,$$

$$\mu_1 \nu_1 - \mu_2 \nu_2 + \mu_1 \nu_3 + \mu_2 \nu_3 + \delta\mu_3 \nu_3 = \varrho,$$

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 + \delta\lambda_3^2 = \varrho,$$

$$\mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3 + \delta\mu_3^2 = 0,$$

$$\nu_1^2 - \nu_2^2 + \nu_1 \nu_3 + \nu_2 \nu_3 + \delta\nu_3^2 = \varrho\delta'.$$

Dalle prime tre coppie di queste equazioni combinandole per sottrazione si trae

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\,\mu_3 - \lambda_3\,(\mu_1 + \mu_2) = 0, \quad (\lambda_1 + \lambda_2)\,\nu_3 - \lambda_3\,(\nu_1 + \nu_2) = \varrho,$$

$$(\nu_1 + \nu_2)\,\mu_3 - \nu_3\,(\mu_1 + \mu_2) = 0,$$

ed, essendo $\varrho \neq 0$, la seconda di queste eguaglianze confrontata con le altre due dà

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 = 0.$$

Dopo ciò la prima delle nostre equazioni diventa

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\,\mu_1 = 0\,;$$

ma qui è certo $\mu_1 \neq 0$, perchè altrimenti risulterebbe $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ e $v_2 = 0$; dunque è $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ e la terzultima equazione si converte nell'altra

$$\delta\lambda_3^2 = \varrho .$$

Quest'uguaglianza, essendo $\varrho \neq 0$, è assurda, se $\delta = 0$, dunque se $\delta = 0$ la tabella (106) non è riconducibile alla forma (107). Invece, se $\delta \neq 0$, basterebbe continuare la discussione del nostro sistema di equazioni per riconoscere la verità della proposizione enunciata: ma è più sbrigativo osservare che in quel caso basta ricorrere al cambiamento di unità definito dalle formule

$$v_1 = u_1 - u_2 - u_3 ,$$

$$v_2 = u_1 - u_2 ,$$

$$v_3 = \delta u_1 ,$$

$$v_4 = \delta u_4$$

per dare alla tavola di moltiplicazione della nostra algebra la forma (107).

33. Da quanto siamo venuti dicendo si conclude che:

Un'algebra, la quale presenti il caso a_2), può sempre pensarsi come definita da una tavola di moltiplicazione del tipo

$$\text{(XXXI)} \quad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} , \qquad \text{(XXXII)} \quad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \\ u_4 & u_4 & \delta u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} ,$$

o

$$\text{(XXXIII)} \quad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & \delta u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} .$$

Notisi subito, a tal proposito, che:

Algebre di uno stesso corpo rispondenti a due diverse di queste tre tabelle non sono certo isomorfe.

E infatti la cosa è stata già dimostrata per algrbre rispondenti, l'una, alla tabella (XXXI), l'altra alla tabella (XXXII); per compiere la dimostrazione basta osservare che, come si verifica immediatamente, l'algebra definita dalla (XXXIII) ha come nullifici tutte (e solo) le combinazioni lineari (non nulle) di u_2 e u_4, mentre le algebre definite dalle (XXXI) e (XXXII) non hanno come nullifici che i multipli scalari (non nulli) di u_4.

34. Dimostriamo ora che:

Se A ed A' sono le algebre nel corpo Γ definite dalla tavola di moltiplicazione (XXXII) *e da quella che se ne ottiene cambiando δ in δ', A ed A' sono senz'altro equivalenti, se in Γ è $2 \neq 0$; se no, sono equivalenti, quando, e solo quando, è $\delta + \delta' = \lambda + \lambda^2$, con λ numero di Γ.*

Andiamo a vedere, infatti, se è possibile convertire la tavola di moltiplicazione in discorso in un'altra del medesimo tipo nella quale δ sia sostituito da δ' mediante una trasformazione di unità che, senza venir meno alla generalità, si può supporre rappresentata da formule del tipo

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 , \\ v_2 &= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 , \\ v_3 &= \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \nu_3 u_3 , \\ v_4 &= \varrho u_4 . \end{aligned}$$

Per questo, come è chiaro, sarà necessario e sufficiente poter determinare i numeri $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \varrho$ in modo da soddisfare alla diseguaglianza

$$\varrho \begin{vmatrix} \lambda_1 , & \lambda_2 , & \lambda_3 \\ \mu_1 , & \mu_2 , & \mu_3 \\ \nu_1 , & \nu_2 , & \nu_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ed al sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_3 + \lambda_3 \mu_1 + \lambda_3 \mu_2 + \delta\lambda_3 \mu_3 &= 0 , \\ \lambda_1 \mu_1 + \lambda_3 \mu_2 + \lambda_1 \mu_3 + \lambda_2 \mu_3 + \delta\lambda_3 \mu_3 &= 0 , \\ \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_3 + \lambda_3 \nu_1 + \lambda_3 \nu_2 + \delta\lambda_3 \nu_3 &= 0 , \\ \lambda_1 \nu_1 + \lambda_3 \nu_2 + \lambda_1 \nu_3 + \lambda_2 \nu_3 + \delta\lambda_3 \nu_3 &= \varrho , \\ \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_3 + \mu_3 \nu_1 + \mu_3 \nu_2 + \delta\mu_3 \nu_3 &= \varrho , \\ \mu_1 \nu_1 + \mu_3 \nu_2 + \mu_1 \nu_3 + \mu_2 \nu_3 + \delta\mu_3 \nu_3 &= \varrho , \end{aligned}$$

$$\lambda_1^2 + 2\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 + \delta\lambda_3^2 = \varrho ,$$

$$\mu_1^2 + 2\mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_3 + \delta\mu_3^2 = 0 ,$$

$$\nu_1^2 + 2\nu_2 \nu_3 + \nu_1 \nu_3 + \delta\nu_3^2 = \varrho\delta' .$$

Dalle prime tre coppie di equazioni di codesto sistema, combinate per sottrazione, si trae

$$\lambda_1 \mu_3 - \lambda_3 \mu_1 = 0 \ , \ \lambda_1 \nu_3 - \lambda_3 \nu_1 = \varrho \neq 0 \ , \ \nu_1 \mu_3 - \nu_3 \mu_1 = 0$$

quindi è $\mu_1 = \mu_3 = 0$.

Dopo ciò la prima equazione dà $\lambda_3 \mu_2 = 0$, ossia $\lambda_3 = 0$, perchè, essendo già $\mu_1 = \mu_3 = 0$, non può essere $\mu_2 = 0$; e il sistema, cui si deve soddisfare, diventa

$$\lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_3 = 0 \ , \ \lambda_1 \nu_1 + \lambda_1 \nu_3 + \lambda_2 \nu_3 = \varrho \ , \ \mu_2 \nu_3 = \varrho \, , \ \lambda_1^2 = \varrho \, ,$$

$$\nu_1^2 + 2\nu_2 \nu_3 + \nu_1 \nu_3 + \delta\nu_3^2 = \varrho\delta' .$$

Le prime quattro di queste equazioni forniscono

$$\nu_3 = \lambda_1 = \mu_2 \ , \ \nu_1 = -\lambda_2 \ , \ \varrho = \lambda_1^2 ,$$

e quindi l'ultima di esse diventa

$$\lambda_2^2 + 2\nu_2 \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2 + \delta'\lambda_1^2 = \delta'\lambda_1^2 .$$

Ora, se in Γ è $2 \neq 0$, a questa si può soddisfare prendendo

$$\nu_2 = \frac{(\delta' - \delta)\, \lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1} ;$$

ma, se in Γ è $2 = 0$, essa può scriversi

$$(\delta + \delta')\, \lambda_1^2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 ,$$

ossia

$$\delta + \delta' = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 ,$$

per conseguenza ad essa non si potrà soddisfare che quando la somma $\delta + \delta'$ possa mettersi sotto la forma $\lambda + \lambda^2$, con λ numero di Γ; nel qual caso basterà fare $\lambda_2 = \lambda\lambda_1$. Con ciò il teorema è pienamente dimostrato.

Da esso discende che:

Ove si tratti di algebre definite in un corpo per il quale sia $2 \neq 0$, *la tabella* (XXXII) *può esser sostituita dall'altra più semplice:*

$$\text{(XXXII}'\text{)} \qquad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \\ u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; .$$

Benchè si tratti di cosa implicitamente contenuta nella discussione or ora compiuta si osservi che per passare dalla (XXXII) ad una tabella del tipo (XXXII'), allorchè in Γ è $2 \neq 0$, basta ricorrere alla trasformazione di unità

$$v_1 = u_1 + u_2 \, , \; v_2 = u_2 \, , \; v_3 = -u_1 - \frac{\delta}{2} u_2 + u_3 \, , \; v_4 = u_4 \, ;$$

e per passare dalla tabella (XXXII) ad un'altra del medesimo tipo con δ' al posto di δ, allorchè in Γ è $2 = 0$ ed è $\delta + \delta' = \lambda + \lambda^2$, con λ numero di Γ, basta ricorrere alla trasformazione

$$v_1 = u_1 + \lambda u_2 \, , \; v_2 = u_2 \, , \; v_3 = -\lambda u_1 + u_3 \, , \; v_4 = u_4 .$$

35. Il teorema per le algebre del tipo (XXXIII) analogo a quello or ora dimostrato per le algebre del tipo (XXXII) è il seguente:

Due algebre definite nel corpo Γ da tabelle che siano entrambe del tipo (XXXIII) *riescono equivalenti se, e solo se, i relativi valori del parametro δ sono eguali.*

Infatti si supponga che nell'algebra A definita dalla (XXXIII) la trasformazione di unità con le formule

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \, , \\ v_2 &= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 \, , \\ v_3 &= \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 + \nu_3 u_3 \, , \\ v_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad \varrho u_4 \, , \end{aligned}$$

non muti la forma della tavola di moltiplicazione, ma cambi δ in δ'.

Sarà, in particolare,

$$\lambda_1\nu_1 + \lambda_3\nu_1 + \delta\lambda_3\nu_3 = 0 ,$$

$$\lambda_1\nu_1 + \lambda_1\nu_3 + \delta\lambda_3\nu_3 = \varrho ,$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_3 + \delta\lambda_3^2 = \varrho ,$$

$$\nu_1^2 + \nu_1\nu_3 + \delta\nu_3^2 = \delta'\varrho .$$

Di queste eguaglianze, le prime due, badando alla terza, dànno

$$\nu_1 = -\delta\lambda_3 , \quad \nu_3 = \lambda_1 + \lambda_3 ;$$

dopo di che, sostituendo nell'ultima e tenendo ancora conto della terza, si ha

$$\delta\varrho = \delta'\varrho ,$$

cioè, come volevasi, $\delta = \delta'$.

36. *Caso b)*.

Si dia ora il caso *b*), cioè i quadrati degli elementi di A siano tutti nulli.

Allora comunque si fissino le unità u_i di A deve essere

$$u_iu_j = -u_ju_i ,$$

giacchè per ipotesi ha da risultare

$$u_i^2 = u_j^2 = (u_i + u_j)^2 = 0 .$$

Supposto di prendere u_4 in A^2 e u_1 fuori di A^2, u_1 ha da risultare nullifico sinistro — indi nullifico addirittura — almeno per gli elementi di una sotto-algebra del 3⁰ ordine (contenente, beninteso, u_1 e u_4), dunque è lecito supporre che u_2 appartenga a codesta sotto-algebra e la tavola di moltiplicazione assume intanto la forma

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \alpha u_4 & 0 \\ 0 & 0 & \beta u_4 & 0 \\ -\alpha u_4 & -\beta u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Se $\alpha \neq 0$, può supporsi $\alpha = 1$ sostituendo ad u_1 un suo conveniente multiplo scalare; se $\beta \neq 0$, può supporsi $\beta = 1$ mutando in modo analogo u_2; α e β non possono essere entrambi nulli, perchè A nel caso attuale non è una zero-algebra; dunque non resta, se non supporre che α e β siano entrambi eguali ad 1, oppure che uno di essi — ed è indifferente quale, poniamo α — sia eguale a 0 e l'altro ad 1. Ma quando $\alpha = \beta = 1$ eseguendo la trasformazione di unità

$$v_1 = u_1 - u_2, \quad v_2 = u_2, \quad v_3 = u_3, \quad v_4 = u_4$$

si passa ad una tavola di moltiplicazione del tipo or ora indicato, nella quale è nullo il coefficiente che prende il posto di α, dunque:

Il caso b) non porta che ad un unico tipo d'algebre, quello caratterizzato dalla tabella

$$(\mathrm{XXXIV}) \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \\ 0 & -u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \; .$$

37. A compimento della discussione eseguita in questo paragrafo dimostriamo che:

Un'algebra pseudonulla del 4^0 *ordine, con l'indice* 3 *e il quadrato del* 1^0 *ordine, è riducibile, qnando e solo quando, può pensarsi come rispondente ad una tabella del tipo* (XXVIII) con $\beta = 0$, *o dei tipi* (XXX), (XXXIII) *e* (XXXIV).

Infatti sia A una tale algebra riducibile e sia

$$A = A_1 \dot{+} A_2 \, .$$

Sarà

$$A^2 = A_1^2 \dot{+} A_2^2 \, ,$$

ma A^2 è del 1^0 ordine, dunque A_1^2, per fissar le idee, è del 1^0 ordine e $A_2^2 = 0$. Ma allora o A_1 e A_2 sono del 2^0 ordine, con A_1 potenziale e A_2 zero-algebra; o A_1 è del 3^0 ordine e con l'indice 3 e A_2 è una zero-algebra del 1^0 ordine. Corrispondentemente, l'algebra A o è del tipo (XXX), o è di uno dei tipi (XXXIII), (XXXIV) e (XXVIII) con $\beta = 0$.

Capitolo III

IL CASO GENERALE

§ 1. Le algebre con sotto-algebra eccezionale del 3^0 ordine.

38. Supponiamo ora che A sia un'algebra del 4^0 ordine nel corpo Γ non semi-semplice e non pseudonulla, indi dotata di sotto-algebra eccezionale propria E.

L'ordine m di E potrà essere 3, 2 o 1, e per il suo indice r, se $m = 3$, si avrà $4 \geq r \geq 2$, se $m = 2$, $3 \geq r \geq 2$, se $m = 2$, $r = 2$.

39. *Prima alternativa*: $r = 4$.

Qui la sotto-algebra E riesce potenziale ed A, per teoremi stabiliti altrove,[22] o è priva di modulo ed è somma diretta di E e di un'algebra del 1^0 ordine con modulo, o è dotata di modulo ed è somma (non diretta) di E e dell'algebra del 1^0 ordine generata dal modulo.

In altri termini l'algebra A può pensarsi come definita da una tabella del tipo

$$(\mathrm{XXXV}) \quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & u_4 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad \text{o } (\mathrm{XXXVI}) \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_4 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,.$$

Occorre appena avvertire che *questi due tipi di algebre sono distinti di fronte alla relazione di equivalenza* e che *di essi il primo risponde ad algebre riducibili, il secondo ad algebre irriducibili.*

40. *Seconda alternativa*: $r = 3$.

Se l'indice r è 3, l'algebra E rispetto a tre sue unità, convenientemente scelte, u_2, u_3, u_4 non può presentare che una delle tre

(22) Loc. cit. (17).

seguenti tavole di moltiplicazione ([23]):

$$
(109)\quad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & \alpha u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad (110)\quad \begin{matrix} u_4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad (111)\quad \begin{matrix} 0 & u_4 & 0 \\ -u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,.
$$

In ogni caso l'algebra E^2, invariante in A, riesce del 1^0 ordine e consta dei multipli scalari di u_4; ciò porta che, se u_1 è un automodulo di A — necessariamente primitivo e principale, una volta che $A-E$ è del 1^0 ordine —, u_4 ha in u_1 un modulo, o un modulo sinistro e un nullifico destro, o un nullifico sinistro e un modulo destro, o, infine un nullifico ([24]).

Se per E vale la tabella (110) con $\alpha \neq 0$, E risulta, oltre che commutativa, irriducibile; e allora, per teoremi stabiliti altrove ([25]), in u_1 gli elementi di E hanno tutti un modulo o tutti un nullifico; resta a vedere che cosa può dirsi a tal proposito, se per E valgono le tabelle (109) o (111), o, se pur valendo la (110), è, in questa, $\alpha = 0$.

41. Dimostriamo in primo luogo che:

Se la tavola di moltiplicazione di E è la (109) *e in questa è $\alpha \neq 0$, in u_1 gli elementi di E non possono avere che o tutti un modulo, o tutti un nullifico.*

Data l'invarianza di E in A i prodotti $u_1 u_2$ e $u_2 u_1$ sono, al pari di u_2, elementi di E, e dunque sussistono delle eguaglianze del tipo

$$
(112)\qquad u_1 u_2 = \lambda u_2 + \mu u_3 + \nu u_4\,, \qquad u_2 u_1 = \varrho u_2 + \sigma u_3 + \tau u_4\,,
$$

con $\lambda, \dots, \tau$ numeri convenienti. Da esse si deduce, badando alla (109),

$$
u_1 u_2 u_3 = \begin{cases} u_1 \cdot u_2 u_3 = 0, \\ u_1 u_2 \cdot u_3 = \alpha\mu u_4\,, \end{cases} \qquad u_3 u_2 u_1 = \begin{cases} u_3 u_2 \cdot u_1 = u_4 u_1\,, \\ u_3 \cdot u_2 u_1 = (\varrho + \alpha\sigma)\, u_4\,, \end{cases}
$$

$$
u_1 u_2^2 = \begin{cases} u_1 u_2^2 = u_1 u_4\,, \\ u_1 u_2 \cdot u_2 = (\lambda + \mu)\, u_4\,, \end{cases} \qquad u_2^2 u_1 = \begin{cases} u_2^2 \cdot u_1 = u_4 u_1\,, \\ u_2 \cdot u_2 u_1 = \varrho\, u_4\,, \end{cases}
$$

([23]) Loc. cit. ([20]).

([24]) Loc. cit. ([17]), n^0 4.

([25]) Loc. cit. ([17]), ultima annotazione a piè di pagina.

dunque è $\mu = \sigma = 0$,

$$u_1 u_4 = \lambda u_4 , \quad u_4 u_1 = \varrho u_4$$

e resta

$$u_1 u_2 = \lambda u_2 + \nu u_4 , \quad u_2 u_1 = \varrho u_2 + \tau u_4 .$$

Ma è pure

$$u_1 u_2 = u_1^2 u_2 = \lambda u_1 u_2 + \nu u_1 u_4 = \lambda^2 u_2 + 2\lambda\nu u_4 ,$$

$$u_2 u_1 = u_2 u_1^2 = \varrho u_2 u_1 + \tau u_4 u_1 = \varrho^2 u_2 + 2\varrho\tau u_4 ,$$

dunque si ha

$$\lambda = \lambda^2 , \quad \varrho = \varrho^2 , \quad \nu = \tau = 0 ,$$

e

$$u_1 u_2 = \lambda u_2 , \quad u_2 u_1 = \varrho u_2 ,$$

dove ognuno dei numeri λ e ϱ — d'accordo con un'osservazione già fatta a proposito di u_1 e u_4 — è 0 o 1.

Ma λ e ϱ sono insieme nulli o insieme eguali ad 1, perchè, se fosse, ad es.,

$$u_1 u_2 = u_2 \quad \text{e} \quad u_2 u_1 = 0 ,$$

sarebbe

$$0 = u_2 u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1 u_2 = u_2^2 = u_4 ;$$

dunque è dimostrato intanto che, in u_1, u_2 e u_4 hanno entrambi un modulo, o entrambi un nullifico.

Dico ora che u_1 si comporta rispetto ad u_3 come rispetto ad u_2 e u_4.

E infatti è chiaro intanto che sussistono delle eguaglianze del tipo

$$u_1 u_3 = \lambda' u_2 + \mu' u_3 + \nu' u_4 , \quad u_3 u_1 = \varrho' u_2 + \sigma' u_3 + \tau' u_4$$

con $\lambda', \dots, \tau'$ numeri convenienti.

Da esse si deduce

$$u_1 u_4 = u_1 \cdot u_3 u_2 = u_1 u_3 \cdot u_2 = (\lambda' + \mu') u_4 ,$$

$$\alpha u_1 u_4 = u_1 \cdot u_3^2 = u_1 u_3 \cdot u_3 = \alpha\mu' u_4 ,$$

$$0 = u_2 u_3 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_3 u_1 = \varrho' u_4 ,$$

$$\alpha u_4 u_1 = u_3^2 \cdot u_1 = u_3 \cdot u_3 u_1 = (\varrho' + \alpha\sigma') u_4 ;$$

quindi, secondo che u_4 ha in u_1 un modulo o un nullifico, si ha

$$\mu' = 1 , \quad \lambda' = 0 , \quad \varrho' = 0 , \quad \sigma' = 1$$

oppure

$$\lambda' = \mu' = \varrho' = \sigma' = 0.$$

Nel primo caso rimane

$$u_1 u_3 = u_3 + \nu' u_4 , \quad u_3 u_1 = u_3 + \tau' u_4 ,$$

da cui

$$u_1 u_3 = u_1^2 u_3 = u_1 u_3 + \nu' u_1 u_4 = u_1 u_3 + \nu' u_4 ,$$

$$u_3 u_1 = u_3 u_1^2 = u_3 u_1 + \tau' u_4 u_1 = u_3 u_1 + \tau' u_4 ,$$

indi $\nu' = \tau' = 0$ e

$$u_1 u_3 = u_3 u_1 = u_3 ;$$

nel secondo

$$u_1 u_3 = \nu' u_4 , \quad u_3 u_1 = \tau' u_4 ,$$

da cui

$$u_1 u_3 = u_1^2 u_3 = \nu' u_1 u_4 = 0 \quad \text{e} \quad u_3 u_1 = u_3 u_1^2 = \tau' u_4 u_1 = 0 .$$

Con ciò il teorema è pienamente dimostrato.

42. Dimostriamo in secondo luogo che:

Se la tavola di moltiplicazione di E è la (111), *in u_1 gli elementi di E non possono avere che o tutti un modulo, o tutti un nullifico.*

È lecito supporre, naturalmente, che anche qui sussistano eguaglianze come la (112); ma, stavolta, badando alla (111) da esse si dedurranno le altre

$$u_1 u_4 = u_1 \cdot u_2 u_3 = u_1 u_2 \cdot u_3 = \lambda u_4 ,$$

$$u_4 u_1 = - u_3 u_2 \cdot u_1 = - u_3 \cdot u_2 u_1 = \varrho u_4 ,$$

$$0 = u_1 \cdot u_2^2 = u_1 u_2 \cdot u_2 = - \mu u_4 ,$$

$$0 = u_2^2 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 u_1 = \sigma u_4 ;$$

per conseguenza sarà $\mu = \sigma = 0$ e

$$u_1 u_2 = \lambda u_2 + \nu u_4 , \quad u_2 u_1 = \varrho u_2 + \tau u_4$$

$$u_1 u_4 = \lambda u_4 , \qquad u_4 u_1 = \varrho u_4 .$$

Di qua si trae, come nel n⁰ precedente, che $\nu = \tau = 0$, che ciascuno dei numeri λ e ϱ è 0 o 1 e che u_2 e u_4 avranno, in u_1, entrambi, un modulo, un nullifico, un modulo sinistro e un nullifico destro, o un nullifico sinistro e un modulo destro.

In pari modo si vede che u_3 si comporta rispetto ad u_1 come u_4.

Ma non può essere, ad es.,

$$u_1 u_4 = u_4 \quad \text{e} \quad u_4 u_1 = 0,$$

perchè sarebbe pure

$$u_1 u_2 = u_2 \quad \text{e} \quad u_3 u_1 = 0,$$

indi

$$0 = u_3 u_1 \cdot u_2 = u_3 \cdot u_1 u_2 = u_3 u_2 = u_4,$$

dunque ecc.

Dal teorema ora dimostrato e da quello del n⁰ precedente si deduce che:

Se per E vale una delle tabelle (109), (110) *o* (111), *e nelle prime due è* $\alpha \neq 0$, *l'algebra A può supporsi come definita da una tavola di moltiplicazione di uno dei seguenti sei tipi*

$$(\text{XXXVII}) \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & u_4 & \alpha u_4 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad (\text{XXXVIII}) \quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & \alpha u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

$$(\text{XXXIX}) \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & \alpha u_4 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad (\text{XL}) \quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

$$(\text{XLI}) \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & 0 & u_4 & 0 \\ u_3 & -u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad (\text{XLII}) \quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \\ 0 & -u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Quando per E vale la (109) o la (110) l'ipotesi che sia $\alpha \neq 0$ è necessaria per poter garentire che la tavola di moltiplicazione di

A può certo ricondursi a uno dei relativi tipi indicati qui sopra: ma questi anche se vi si fa $\alpha = 0$ rispondono bene a delle algebre per le quali la sotto-algebra eccezionale presenta la forma (109) o (110) con $\alpha = 0$. Solo che in tal caso, come tra poco vedremo, accanto a quei tipi se ne hanno degli altri che saranno anch'essi nettamente caratterizzati.

Agli effetti della enumerazione dei tipi diversi di algebre del 4^0 ordine che qui veniamo compiendo, noi supporremo pertanto che nelle quattro tabelle qui sopra scritte che contengono la costante α questa possa essere, o non, diversa da zero.

43. Supponiamo ora che per E valga la (109) con $\alpha = 0$ e partiamo dalle eguaglianze

$$u_1 u_2 = \lambda u_2 + \mu u_3 + \nu u_4 \quad , \quad u_2 u_1 = \varrho u_2 + \sigma u_3 + \tau u_4 ,$$

$$u_1 u_3 = \lambda' u_2 + \mu' u_3 + \nu' u_4 \quad , \quad u_3 u_1 = \varrho' u_2 + \sigma' u_3 + \tau' u_4 .$$

Sarà, come precedentemente,

$$u_1 u_4 = (\lambda + \mu)\, u_4 \quad , \quad u_4 u_1 = \varrho u_4 ,$$

$$u_1 u_4 = (\lambda' + \mu')\, u_4 \quad , \qquad 0 = \varrho' u_4 ,$$

indi, ricordando il comportamento di u_1 rispetto ad u_4,

$$\lambda + \mu = \lambda' + \mu' = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad \varrho = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad \varrho' = 0.$$

Inoltre sarà

$$u_2 u_1 u_2 = \begin{cases} u_2 \cdot u_1 u_2 = \lambda u_4 \quad , \\ u_2 u_1 \cdot u_2 = (\varrho + \sigma) u_4 , \end{cases} \qquad u_2 u_1 u_3 = \begin{cases} u_2 \cdot u_1 u_3 = \lambda' u_4 , \\ u_2 u_1 \cdot u_3 = 0 \quad , \end{cases}$$

$$u_3 u_1 u_2 = \begin{cases} u_3 u_1 \cdot u_2 = (\varrho' + \sigma') u_4 = \sigma' u_4 , \\ u_3 \cdot u_1 u_2 = \lambda u_4 ; \end{cases}$$

per conseguenza si avrà

$$\lambda = \varrho + \sigma , \quad \lambda' = 0 , \quad \sigma' = \lambda ,$$

indi

$$\sigma = \lambda - \varrho , \quad \mu' = \lambda + \mu ,$$

e

$$u_2u_1=\varrho u_2+(\lambda-\varrho)u_3+\tau u_4\,, \quad u_1u_3=(\lambda+\mu)u_3+\nu' u_4\,, \quad u_3u_1=\lambda u_3+\tau' u_4\,.$$

Dopo ciò, osservando che è pure

$$u_1u_2=u_1^2u_2=\lambda u_1u_2+\mu u_1u_3+\nu u_1u_4=\lambda^2u_2+\mu(2\lambda+\mu)u_3+(2\lambda\nu+\mu\nu+\mu\nu')u_4\,,$$

$$u_2u_1=u_2u_1^2=\varrho u_2u_1+(\lambda-\varrho)u_3u_1+\tau u_4u_1=\varrho^2u_2+(\lambda^2-\varrho^2)u_3+(2\varrho\tau+\lambda\tau'-\varrho\tau')u_4\,,$$

$$u_1u_3=u_1^2u_3=(\lambda+\mu)u_1u_3+\nu' u_1u_4=(\lambda+\mu)^2u_3+2\nu'(\lambda+\mu)u_4\,,$$

$$u_3u_1=u_3u_1^2=\lambda u_3u_1+\tau' u_4u_1=\lambda^2u_3+\tau'(\lambda+\varrho)u_4\,,$$

per le costanti $\lambda\,,\ldots,\tau'$ si trovano le ulteriori condizioni

$$\lambda=\lambda^2\,, \quad \mu=\mu\,(2\lambda+\mu)\,, \quad \nu=2\lambda\nu+\mu\nu+\mu\nu', \quad \lambda-\varrho=\lambda^2-\varrho^2,$$

$$\tau=2\varrho\tau+\lambda\tau'-\varrho\tau', \quad \nu'=2\nu'\,(\lambda+\mu)\,, \quad \tau'=(\lambda+\varrho)\,\tau'\,;$$

di guisa che per esse non sono possibili che le seguenti alternative:

$\lambda=0,\ \mu=0\ ,\ \nu=0\ ,\ \varrho=0,\ \sigma=0\ ,\ \tau=0\ ,\ \lambda'=0,\ \mu'=0,\ \nu'=0,\ \varrho'=0,\ \sigma'=0,\ \tau'=0,$

$\lambda=1,\ \mu=-1,\ \nu$ arb., $\varrho=0,\ \sigma=1\ ,\ \tau$ arb., $\lambda'=0,\ \mu'=0,\ \nu'=0,\ \varrho'=0,\ \sigma'=1,\ \tau'=\tau,$

$\lambda=0,\ \mu=0\ ,\ \nu=0\ ,\ \varrho=1,\ \sigma=-1,\ \tau$ arb., $\lambda'=0,\ \mu'=0,\ \nu'=0,\ \varrho'=0,\ \sigma'=0,\ \tau'=\tau,$

$\lambda=1,\ \mu=-1,\ \nu$ arb., $\varrho=1,\ \sigma=0\ ,\ \tau=0\ ,\ \lambda'=0,\ \mu'=0,\ \nu'=0,\ \varrho'=0,\ \sigma'=1,\ \tau'=0,$

$\lambda=0,\ \mu=1\ ,\ \nu$ arb., $\varrho=1,\ \sigma=-1,\ \tau$ arb., $\lambda'=0,\ \mu'=1,\ \nu'=0,\ \varrho'=0,\ \sigma'=0,\ \tau'=\tau,$

$\lambda=1,\ \mu=0\ ,\ \nu=0\ ,\ \varrho=1,\ \sigma=0\ ,\ \tau=0\ ,\ \lambda'=0,\ \mu'=1,\ \nu'=0,\ \varrho'=0,\ \sigma'=1,\ \tau'=0,$

$\lambda=0,\ \mu=1\ ,\ \nu$ arb., $\varrho=0,\ \sigma=0\ ,\ \tau=0\ ,\ \lambda'=0,\ \mu'=1,\ \nu'=0,\ \varrho'=0,\ \sigma'=0,\ \tau'=0,$

$\lambda=1,\ \mu=0\ ,\ \nu=0\ ,\ \varrho=0,\ \sigma=1\ ,\ \tau$ arb., $\lambda'=0,\ \mu'=1,\ \nu'=0,\ \varrho'=0,\ \sigma'=1,\ \tau'=\tau,$

Di esse la prima e la sesta conducono per l'algebra A a tavole di moltiplicazione che si deducono dalle (XXXVIII) e (XXXVII) facendovi $\alpha=0$; le altre sei danno per A le tabelle:

$$(113)\quad \begin{matrix} u_1 & u_2-u_3+\nu_4 u_4 & 0 & 0 \\ u_3+\tau u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3+\tau u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad (114)\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2-u_3+\tau u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ \tau u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,,$$

$$(115)\quad \begin{matrix} u_1 & u_2-u_3+\nu u_4 & 0 & 0 \\ u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad (116)\quad \begin{matrix} u_1 & u_3+\nu u_4 & u_3 & u_4 \\ u_2-u_3+\tau u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ \tau u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,,$$

$$(117)\quad \begin{matrix} u_1 & u_3+\nu u_4 & u_3 & u_4 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad (118)\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_3+\tau u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3+\tau u_4 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,.$$

Applicando

alla (113) la trasformazione di unità $v_1=u_1\,,\ v_2=u_2-u_3+\nu u_4\,,\ v_3=u_3\,,\ v_4=u_4\,;$

» (114) » » $v_1=u_1\,,\ v_2=u_2-u_3+\tau u_4\,,\ v_3=u_3-\tau u_4\,,\ v_4=u_4\,;$

» (115) » » $v_1=u_1\,,\ v_2=u_2-u_3+\nu u_4\,,\ v_3=u_3\,,\ v_4=u_4\,;$

» (116) » » $v_1=u_1\,,\ v_2=u_2-u_3-\nu u_4\,,\ v_3=u_3-\tau u_4\,,\ v_4=u_4\,;$

» (117) » » $v_1=u_1\,,\ v_2=u_2-u_3-\nu u_4\,,\ v_3=u_3+\tau u_4\,,\ v_4=u_4\,;$

» (118) » » $v_1=u_1\,,\ v_2=u_2-u_3\,,\ v_3=u_3+\tau u_4\,,\ v_4=u_4\,;$

e tornando a indicare con le u_i le nuove unità v_i, si trovano per l'algebra A i sei nuovi tipi:

$$(\mathrm{XLIII})\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad (\mathrm{XLIV})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,,$$

$$(\mathrm{XLV})\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad (\mathrm{XLVI})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & u_4 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,,$$

$$(\mathrm{XLVII})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad (\mathrm{XLVIII})\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,,$$

44. Per E valga ora la (110) con $\alpha = 0$.

Qui la discussione, come passiamo a far vedere, può essere notevolmente abbreviata.

Attesa l'invarianza di E in A, E può decomporsi rispetto all'automodulo u_1 nella somma di quattro sistemi complementari E_1, E_2, E_3, E_4, dei quali E_1 è costituito dagli elementi di E che in u_1 hanno un modulo, E_2 (E_3) dagli elementi che in u_1 hanno un modulo (nullifico) sinistro e un nullifico (modulo) destro, e, infine E_4, da quelli che in u_1 hanno un nullifico.

Poichè gli elementi di E a quadrato nullo sono soltanto quelli di un sistema del 2° ordine, vi è in E almeno un elemento a quadrato non nullo — e possiamo supporre che sia u_2 — il quale fa parte di uno dei sistemi E_i. Ma, per una ragione già addotta nel n° 41, u_2 non può appartenere nè ad E_2, nè ad E_3, dunque u_2 sta in E_1, oppure in E_4 e allora, essendo $u_4 = u_2^2$, anche u_4 starà, rispettivamente, in E_1 o in E_4. Sarà, pertanto,

$$u_1u_2 = u_2u_1 = \lambda u_2\,, \qquad u_1u_4 = u_4u_1 = \lambda u_4\,,$$

con λ eguale a 0 o 1.

Poniamo ora

$$u_1u_3 = \lambda' u_2 + \mu' u_3 + \nu' u_4\,, \qquad u_3u_1 = \varrho' u_2 + \sigma' u_3 + \tau' u_4\,;$$

essendo

$$0 = u_1\cdot u_3u_2 = u_1u_3\cdot u_2 = \lambda' u_2^2 = \lambda' u_4\,,$$

$$0 = u_2u_3\cdot u_1 = u_2\cdot u_3u_1 = \varrho' u_2^2 = \varrho' u_4\,,$$

sarà $\lambda' = \varrho' = 0$, quindi rimarrà

$$u_1 u_3 = \mu' u_3 + \nu' u_4 \,, \qquad u_3 u_1 = \sigma' u_3 + \tau' u_4 \,.$$

Dopo ciò, osservando che è

$$u_1 u_3 = u_1^2\, u_3 \,, \quad u_3 u_1 = u_3 u_1^2 \,, \quad u_1 u_3 u_1 = \begin{cases} u_1 u_3 \cdot u_1 \\ u_1 \cdot u_3 u_1 \end{cases}$$

si trovano per le costanti $\lambda\,, \mu', \nu', \sigma', \tau'$ le relazioni

$$\mu' = \mu'^2, \quad \nu' = \nu'(\lambda + \mu'), \quad \sigma' = \sigma'^2, \quad \tau' = \tau'(\lambda + \sigma'), \quad \tau'(\mu' - \lambda) = \nu'(\sigma' - \lambda)$$

e dunque per esse non sono possibili che le seguenti alternative:

$$\lambda = 0, \quad \mu' = 0, \quad \nu' = 0, \quad \sigma' = 0, \quad \tau' = 0,$$

$$\lambda = 0, \quad \mu' = 0, \quad \nu' = 0, \quad \sigma' = 1, \quad \tau' \text{ arb.},$$

$$\lambda = 0, \quad \mu' = 1, \quad \nu' \text{ arb.}, \quad \sigma' = 0, \quad \tau' = 0,$$

$$\lambda = 0, \quad \mu' = 1, \quad \nu' \text{ arb.}, \quad \sigma' = 1, \quad \tau' = \nu',$$

$$\lambda = 1, \quad \mu' = 0, \quad \nu' \text{ arb.}, \quad \sigma' = 0, \quad \tau' = \nu',$$

$$\lambda = 1, \quad \mu' = 0, \quad \nu' \text{ arb.}, \quad \sigma' = 1, \quad \tau' = 0,$$

$$\lambda = 1, \quad \mu' = 1, \quad \nu' = 0, \quad \sigma' = 0, \quad \tau' \text{ arb.},$$

$$\lambda = 1, \quad \mu' = 1, \quad \nu' = 0, \quad \sigma' = 1, \quad \tau' = 0.$$

La prima e l'ultima dànno come tavole di moltiplicazione per A quelle che si deducono dalle (XXXIX) e (XL) facendovi $\alpha = 0$; quindi di nuovi tipi per l'algebra A non si trovano che quelli caratterizzati dalle seguenti tabelle:

$$\begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 + \tau' u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 + \nu' u_4 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,,$$

$$\begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 + \nu' u_4 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 + \nu' u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} , \qquad \begin{matrix} u_1 & u_2 & \nu' u_4 & u_4 \\ u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ \nu' u_4 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} ,$$

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & \nu' u_4 & u_4 \\ u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} , \qquad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ \tau' u_4 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} .$$

Le quali, ove si applichino, ordinatamente, alla prima, alla seconda e terza, alla quarta e quinta, e alla sesta le trasformazioni di unità definite dalle formule

$$v_1 = u_1 , \; v_2 = u_2 , \; v_3 = u_3 + \tau' u_4 , \; v_4 = u_4 ,$$
$$v_1 = u_1 , \; v_2 = u_2 , \; v_3 = u_3 + \nu' u_4 , \; v_4 = u_4 ,$$
$$v_1 = u_1 , \; v_2 = u_2 , \; v_3 = u_3 - \nu' u_4 , \; v_4 = u_4 ,$$
$$v_1 = u_1 , \; v_2 = u_2 , \; v_3 = u_3 - \tau' u_4 , \; v_4 = u_4 ,$$

e si tornino ad indicare con le u le nuove unità, si convertono nelle altre più semplici:

$$(\mathrm{XLIX}) \quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} , \qquad (\mathrm{L}) \quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} ,$$

$$(\mathrm{LI}) \quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} , \qquad (\mathrm{LII}) \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & u_4 \\ u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} ,$$

$$(\mathrm{LIII}) \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & u_4 \\ u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} , \qquad (\mathrm{LIV}) \quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} .$$

45. A conclusione di quanto è stato detto dal n⁰ 40 in poi dimostriamo, in primo luogo che:

Algebre rispondenti a due diverse delle tabelle portanti i n[i] *da* (XXXVII) *a* (LIV) *non sono certo isomorfe.*

È chiaro intanto che non possono essere isomorfe algebre definite da tabelle che rispondono a tipi diversi della sotto-algebra eccezionale, e che non sono certamente tali le algebre con le tavole di moltiplicazione (XLI) e (XLII) — che sono le sole con E del tipo (111) —, perchè la prima è dotata di modulo, mentre la seconda ne è priva. Il teorema sarà dunque pienamente dimostrato, quando sia stabilito per le otto tabelle (XXXVII), (XXXVIII), (XLIII), ... , (XLVIII), corrispondenti ad algebre con E del tipo (109), e per le otto tabelle (XXXIX), (XL), (XLIX), ... , (LIV), corrispondenti ad algebre con E del tipo (110).

Ora ciò discende dalle seguenti osservazioni:

a) le algebre di tipo (XXXVII) e (XXXIX) sono dotate di modulo, mentre tutte le altre delle due ottuple ne sono prive;

b) l'algebra definita dalla tabella (XXXVIII) non ammette che il solo automodulo u_1; mentre gli automoduli dell'algebra rispondente alla

(XLIII) sono tutti, e solo, gli elementi	della	forma	$u_1+\lambda u_2+\mu u_3+\lambda\mu u_4$,
(XLIV) o (XLVIII)	»	»	»	$u_1+\lambda u_2+\mu u_4$,
(XLV) o (XLVII)	»	»	»	$u_1+\lambda u_3+\mu u_4$,
(XLVI)	»	»	»	$u_1+\lambda u_2+\mu u_3-\lambda\mu u_4$,

con λ e μ numeri di Γ;

c) la sotto-algebra eccezionale, che per le algebre dei tipi (XLIII), ... , (XLVIII) si può supporre definita dalla tavola di moltiplicazione

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

non ammette altri elementi a quadrato nullo che quelli dei due sistemi generati, l'uno, da u_2 e u_4, l'altro, da u_3 e u_4; e come subito si riscontra il comportamento di questi due sistemi rispetto agli automoduli non è mai il medesimo per algebre relative a tabelle diverse;

d) le algebre definite dalle tabelle (XL), (LI) e (LII) non ammettono che il solo automodulo u_1, mentre quelle definite dalle tabelle (XLIX), (L), (LIII) e (LIV) ammettono come automoduli tutti, e solo, gli elementi della forma $u_1 + \lambda u_3$, con λ numero di Γ;

e) gli elementi a quadrato nullo per le algebre definite dalle tabelle (XLIX), ..., (LIV) e dalla (XL) per $\alpha = 0$ sono tutti, e solo, quelli del sistema generato da u_3 e u_4; e che il comportamento di questo sistema rispetto agli automoduli dell'algebra, cui a volta a volta appartiene, muta da caso a caso.

In secondo luogo dimostriamo che:

Delle tabelle (XXXVII), . . . , (LIV) *definiscono algebre riducibili soltanto le* (XXXVIII), (XL), (XLII), (XLIX), (L), (LI) *e* (LII).

Suppongasi che l'algebra A definita da una delle tabelle in discorso sia riducibile e che sia

$$A = A_1 \dotplus A_2 .$$

Se E_i è la sotto-algebra eccezionale o lo zero di A_i, secondo che A_i non è, od è, semi-semplice, per la sotto-algebra eccezionale E di A si avrà

$$E = E_1 \dotplus E_2 .$$

Ora E riesce riducibile solo quando per essa valga la tabella (110) con $\alpha = 0$, nel qual caso è somma diretta dell'algebra potenziale P del 2° ordine generata da u_2 e della zero-algebra Z costituita dai multipli scalari di u_3; dunque, se per E vale la tabella (109), (110) con $\alpha \neq 0$, o (111), necessariamente una delle E_i, poniamo E_1, eguaglia E e l'altra è nulla; e può essere, poniamo, $E_1 = P$ ed $E_2 = Z$ solo quando per E vale la (110) con $\alpha = 0$.

Nella prima alternativa è $A_1 = E$, indi A_2 un'algebra del 1° ordine generata da un automodulo di A nel quale gli elementi di E hanno tutti un nullifico; nella seconda, o è $A_1 = P$ ed A_2 un'algebra del 2° ordine con la sotto-algebra eccezionale Z, o è A_1 un'algebra del 3° ordine con la sotto-algebra eccezionale P e $A_2 = Z$.

Si riconosce così che delle algebre qui prese in esame sono riducibili soltanto quelle rispondenti alle tabelle più sopra enumerate.

Avvertasi infine che la questione di decidere come si comporta, di fronte alla relazione di equivalenza, l'algebra definita da una tavola di moltiplicazione di uno dei quattro tipi (XXXVII) — (XL), al variare del parametro α, si riconduce alla questione analoga per le algebre del 3^0 ordine definite dalle tabelle (109) o (110); cioè ad una questione che abbiamo già risoluta nella Memoria citata in ([1]) *b*).

46. *Terza alternativa:* $r = 2$.

Indichiamo ancora con u_1 un automodulo (necessariamente primitivo e principale) di A e rispetto ad u_1 distribuiamo gli elementi di E in quattro sistemi complementari E_1, E_2, E_3, E_4 al modo indicato nel n^0 44.

Poichè la somma degli ordini di questi sistemi è 3, indicato con n_i l'ordine di E_i, i casi possibili saranno 20: in quattro di essi, uno degli ordini n_i sarà eguale a 3 e gli altri a 0; in dodici, uno degli ordini n_i sarà eguale a 2 e, degli altri due, uno sarà eguale ad 1, l'altro a 0; e nei rimanenti quattro, tre degli ordini n_i saranno eguali ad 1 e il rimanente eguale a 0.

Scegliendo, a volta a volta, come unità di A u_1 e tre elementi indipendenti di E, ognun dei quali appartenga a uno dei sistemi (non nulli) E_i badando che qui E è una zero-algebra, si trovano per la corrispondente tavola di moltiplicazione di A i seguenti tipi:

$$\text{(LV)} \quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{(LVI)} \quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{(LVII)} \quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{(LVIII)} \quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{(LIX)} \quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{(LX)} \quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$(\mathrm{LXI})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad (\mathrm{LXII})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$(\mathrm{LXIII})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad (\mathrm{LXIV})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$(\mathrm{LXV})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & u_4 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad (\mathrm{LXVI})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & u_4 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$(\mathrm{LXVII})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad (\mathrm{LXVIII})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$(\mathrm{LXIX})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad (\mathrm{LXX})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$(\mathrm{LXXI})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad (\mathrm{LXXII})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$(\mathrm{LXXIII})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad (\mathrm{LXXIV})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Essendo E una zero-algebra, la sua decomposizione nei sistemi E_i non dipende dal particolare automodulo di A rispetto a cui è compiuta [26]; quindi è senz'altro evidente che:

Le algebre definite dalle tavole di moltiplicazione (LV) ,...., (LXXIV) *sono tutte distinte di fronte alla relazione di equivalenza.*

Inoltre si riconosce subito che:

Di esse sono riducibili soltanto quelle rispondenti alle tavole (LVIII), (LXI), (LXIV), (LXVII), (LXVIII), (LXIX), (LXX), (LXXI), (LXXII), (LXXIII).

§ 2. Le algebre con sotto-algebra eccezionale del 2^0 ordine.

47. Qui per l'ordine m della sotto-algebra eccezionale E si ha $m = 2$, quindi l'indice r è 3 o 2.

Se $r = 3$, indi E potenziale, in base a una mia Nota già citata [27] si ha subito che:

1) o A è priva di modulo e allora è la somma diretta di E e di un'algebra semi-semplice del 2^0 ordine, la quale ultima o è primitiva o è somma diretta di due algebre del 1^0 ordine con modulo;

2) oppure A è dotata di modulo ed è la somma diretta di due algebre con modulo, l'una, del 1^0 ordine, l'altra del 3^0, quest'ultima essendo somma (non diretta) di E e dell'algebra generata dal suo modulo.

Segue che nell'ipotesi attuale la tavola di moltiplicazione di A può esser ricondotta ad uno dei seguenti aspetti:

$$(\mathrm{LXXV})\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad (\mathrm{LXXVI})\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 + u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,,$$

(α non quadrato) (α non del tipo $\lambda + \lambda^2$)

[26] Loc. cit. [1], b), n⁰ 12.

[27] Loc. cit. [17].

$$
\text{(LXXVII)} \quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad \text{(LXXVIII)} \quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & u_3 & u_4 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \end{matrix}\,.
$$

Naturalmente:

Algebre rispondenti a due diverse delle tabelle ora indicate non sono certo isomorfe;

e risulta subito da teoremi noti ([28]) in quali corpi possano esistere algebre con tavole di moltiplicazione dei tipi (LXXV) e (LXXVI), e come in codeste tabelle si debba far variare il parametro α, se si vuole che l'algebra corrispondente non muti di fronte alla relazione di equivalenza.

Supponiamo ora che sia $r = 2$, ossia E una zero-algebra e distinguiamo due casi, secondo che:

a) $A - E$ è primitiva, o

b) somma diretta di due algebre del 1° ordine con modulo.

48. *Caso a*): *$A - E$ primitiva.*

Indichiamo con $[x]$ la classe mod E individuata da un elemento di A che sia stato denotato con x; di guisa che, se u_1 è un automodulo principale di A, $[u_1]$ sarà il modulo di $A - E$. Allora l'ipotesi che $A - E$ sia primitiva si traduce nel fatto che $A - E$ è generata dal modulo $[u_1]$ e da un suo elemento $[u_2]$ per il quale o è

$$[u^2]^2 = \alpha\,[u_1],$$

con α non quadrato, o è

$$[u^2]^2 = \alpha\,[u_1] + [u_2],$$

con α non del tipo $\lambda + \lambda^2$, nel qual caso in Γ è necessariamente $2 = 0$.

Quanto poi al comportamento di E rispetto ad u_1 si ha che posto

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4\,,$$

dove le E_i hanno per E ed u_1 i significati precedentemente chiariti

([28]) Loc. cit. ([14]).

o uno dei sistemi E_i è del 2^0 ordine e gli altri tre sono nulli, o due dei sistemi E_i sono del 1^0 ordine e gli altri due sono nulli.

Ma possiamo dimostrare che questa seconda alternativa deve essere esclusa facendo vedere che:

Non possono esservi in E due elementi u_3 e u_4, tali che u_1 sia modulo sinistro per u_3 e nullifico sinistro per u_4, oppure tali che u_1 sia modulo destro per u_3 e nullifico destro per u_4.

Se è possibile, sia in primo luogo,

$$u_1 u_3 = u_3 \quad \text{e} \quad u_1 u_4 = 0.$$

Essendo

$$[u_1][u_2] = [u_2][u_1] = [u_2],$$

si ha

(119) $$u_1 u_2 = u_2 + e_1, \quad u_2 u_1 = u_2 + e_2,$$

con e_1 ed e_2 elementi di E; inoltre, giacchè $u_2 u_3$ è in E al pari di u_3, sussisterà un'equazione del tipo

$$u_2 u_3 = \lambda u_3 + \mu u_4,$$

con λ e μ numeri di Γ.

Ciò posto, da

$$u_1 u_2 u_3 = \begin{cases} u_1 \cdot u_2 u_3 = u_1(\lambda u_3 + \mu u_4) = \lambda u_3, \\ u_1 u_2 \cdot u_3 = (u_2 + e_1) u_3 = u_2 u_3, \end{cases}$$

si trae $u_2 u_3 = \lambda u_3$. Ma allora sarebbe

$$u_2^2 u_3 = \lambda u_2 u_3 = \lambda^2 u_3;$$

ed essendo

$$[u_2]^2 = \alpha [u_1], \quad \text{oppure} \quad [u_2]^2 = \alpha [u_1] + [u_2],$$

ossia

(120) $$u_2^2 = \alpha u_1 + e', \quad \text{oppure} \quad u_2^2 = \alpha u_1 + u_2 + e'',$$

con e' ed e'' elementi di E, si avrebbe

$$\lambda^2 u_3 = (\alpha u_1 + e') u_3 = \alpha u_3, \quad \text{oppure} \quad \lambda^2 u_3 = (\alpha u_1 + u_2 + e'') u_3 = \alpha u_3 + \lambda u_3$$

cioè

$$\alpha = \lambda^2, \quad \text{oppure} \quad \lambda^2 = \alpha + \lambda,$$

in contrasto con l'ipotesi, nella prima alternativa, che α non è quadrato e, nella seconda, che in Γ è $2=0$ e α non del tipo $\lambda+\lambda^2$, o, ciò che allora è lo stesso, del tipo $-\lambda+\lambda^2$.

In maniera simile si dimostra che non è possibile si abbia

$$u_3 u_1 = u_3 \quad \text{e} \quad u_4 u_1 = 0,$$

sostituendo la considerazione del prodotto $u_3 u_2 u_1$ a quella di $u_1 u_2 u_3$.

Segue da quanto ora è stato provato che il caso attuale si scinde naturalmente in otto sotto-casi a_i $(i=1,\dots,8)$ secondo che si suppone che sia di 2° ordine E_1, E_2, E_3 o E_4, e che per u_1 e u_2 valga la prima o la seconda delle (126).

49. *Sotto-caso* a_1): $E = E_1$, $u_2^2 = \alpha u_1 + e'$.

Qui le (119), badando che u_1 è modulo per ogni elemento di E, dànno

$$u_1 u_2 = u_1^2 u_2 = u_1 \cdot u_1 u_2 = u_1(u_2 + e_1) = u_1 u_2 + e_1,$$

$$u_2 u_1 = u_2 u_1^2 = u_2 u_1 \cdot u_1 = (u_2 + e_2) u_1 = u_2 u_1 + e_2,$$

dunque è $e_1 = e_2 = 0$ e le (119) diventano

$$u_1 u_2 = u_2 u_1 = u_2 .$$

Notisi ora che da $u_2 e = 0$, con e elemento di E, segue

$$0 = u_2^2 e = (\alpha u_1 + e') e = \alpha e, \quad \text{ossia} \quad e = 0 ;$$

quindi, se u_3 è un qualsiasi elemento non nullo di E, è certo $u_2^2 u_3 \neq 0$. Ma si vede, come nel n° precedente, che non può essere $u_2 u_3$ un multiplo scalare di u_3, dunque, posto $u_2 u_3 = u_4$, u_4 riesce indipendente da u_3, come unità di A possono assumersi u_1, u_2, u_3 e u_4, e per il prodotto $u_2 u_4$ si ha

$$u_2 u_4 = u_2^2 u_3 = (\alpha u_1 + e') u_3 = \alpha u_3 .$$

Restano a considerarsi i prodotti $u_3 u_2$ e $u_4 u_2$.

Poniamo, come è lecito,

$$u_3 u_2 = \varrho u_3 + \sigma u_4 ,$$

con ϱ e σ numeri di Γ. Sarà

$$u_4 u_1 = u_2 u_3 u_2 = u_2 \cdot u_3 u_2 = \varrho u_2 u_3 + \sigma u_2 u_4 = \varrho u_4 + \alpha \sigma u_3 ,$$

e inoltre

$$u_3 u_2^2 = \begin{cases} u_3 u_2 \cdot u_2 = \varrho u_3 u_2 + \sigma u_4 u_2 = (\varrho^2 + \alpha\sigma^2) u_3 + 2\varrho\sigma u_4 , \\ u_3 \cdot u_2^2 = u_3 (\alpha u_1 + e') = \alpha u_3 , \end{cases}$$

quindi bisognerà che sia

$$\varrho^2 + \alpha\sigma^2 = \alpha \quad \text{e} \quad 2\varrho\sigma = 0.$$

Ora non può essere $\sigma = 0$, perchè resterebbe $\alpha = \varrho^2$, mentre α non è un quadrato; dunque, o in Γ è $2 \neq 0$, e allora $\varrho = 0$ e $\sigma = \pm 1$; o in Γ è $2 = 0$, e allora può scriversi

$$\alpha (1 + \sigma^2) = \varrho^2, \quad \text{ossia} \quad \alpha (1 + \sigma)^2 = \varrho^2,$$

e quindi, non potendo essere α eguale a un quadrato sarà ancora $\varrho = 0$, e per conseguenza $\sigma = 1$.

Supponγasi $\varrho = 0$ e $\sigma = 1$, e si consideri la tavola di moltiplicazione

$$(121) \qquad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & \alpha u_1 + e' & u_4 & \alpha u_3 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & \alpha u_3 & 0 & 0 \end{array},$$

che così si ottiene, dove per e' sussisterà, naturalmente, un'eguaglianza del tipo

$$e' = \beta u_3 + \gamma u_4 .$$

Se in Γ è $2 \neq 0$, eseguendo il cangiamento di unità definito dalle formule

$$v_1 = u_1 , \ v_2 = u_2 - \frac{\gamma}{2} u_3 - \frac{\beta}{2\alpha} u_4 , \ v_3 = u_3 , \ v_4 = u_4 ,$$

e tornando ad indicare le nuove unità con le u_i, la (121) si converte nella tabella

$$(\text{LXXIX}) \qquad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & \alpha u_1 & u_4 & \alpha u_3 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & \alpha u_3 & 0 & 0 \end{array}.$$

Se invece in Γ è $2=0$ e le costanti β e γ non sono entrambe nulle, la (121) *non può ricondursi alla forma* (LXXIX).

Infatti, quando in Γ è $2=0$, per il quadrato dell'elemento x dell'algebra (121) con le coordinate λ_i, si ha

$$x^2 = (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4)^2 = (\lambda_1^2 + \alpha\lambda_2^2) u_1 + \beta\lambda_2^2 u_3 + \gamma\lambda_2^2 u_4 ,$$

e quindi, se β e γ non sono entrambe nulle, non è possibile far riescire x^2 un multiplo scalare del modulo, se non a patto di fare $\lambda_2 = 0$.

Però quando in Γ è $2=0$ e β, γ non sono entrambi nulli, di guisa che essendo α un non quadrato sarà pure $\beta^2 - \alpha\gamma^2 \neq 0$, facendo

$$v_1 = u_1 , \quad v_2 = u_2 , \quad v_3 = \beta u_3 + \gamma u_4 , \quad v_4 = \alpha\gamma u_3 + \beta u_4$$

e tornando ad indicare le v_i con le u_i, alla (121) può darsi la forma più semplice

$$\text{(LXXX)} \qquad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & \alpha u_1 + u_3 & u_4 & \alpha u_3 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & \alpha u_3 & 0 & 0 \end{array} ;$$

a proposito della quale è da avvertire che di essa è da tener conto solo quando in Γ sia $2=0$ e inoltre Γ sia infinito, perchè, com'è noto, in un corpo finito, pel quale sia $2=0$, ogni numero è quadrato.

Suppongasi infine che in Γ sia $2 \neq 0$ e che si abbia $\varrho = 0$ e $\sigma = -1$.

Allora è

$$u_3 u_2 = - u_4 , \quad u_4 u_2 = - \alpha u_3 ;$$

inoltre, essendo

$$u_2^3 = \begin{cases} u_2^2 \cdot u_2 = (\alpha u_1 + \beta u_3 + \gamma u_4) u_2 = \alpha u_2 - \beta u_4 - \alpha\gamma u_3 , \\ u_2 \cdot u_2^2 = u_2 (\alpha u_1 + \beta u_3 + \gamma u_4) = \alpha u_2 + \beta u_4 + \alpha\gamma u_3 , \end{cases}$$

si ha $\beta = \gamma = 0$ e quindi si ottiene la tabella

$$\text{(LXXXI)} \qquad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & \alpha u_1 & u_4 & \alpha u_3 \\ u_3 & - u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & -\alpha u_3 & 0 & 0 \end{array} .$$

Occorre appena avvertire che:

Le tre tabelle trovate in questo n^0 *definiscono algebre tutte diverse di fronte alla relazione di equivalenza.*

Ciò è stato dimostrato per le prime due — da prendere simultaneamente in considerazione solo quando Γ è infinito ed in esso è $2 = 0$ —; e dopo ciò è evidente per tutte e tre, perchè l'algebra definita dalla terza, a differenza di quelle definite dalle altre due, non è commutativa.

Si osservi che l'elemento $v = u_1 + u_2$ dell'algebra con la tavola di moltiplicazione (LXXX) — di guisa che Γ è infinito ed in esso è $2 = 0$ — ha per equazione minima

$$\xi^4 + (1 + \alpha)^2 = 0\,;$$

d'altronde $1 + \alpha$, in virtù delle richiamate proprietà di Γ, è un non quadrato al pari di α, dunque l'algebra in discorso è quella potenziale che in una mia Nota precedente ([29]) ho addotta come esempio atto a mostrare che il teorema fondamentale dello WEDDERBURN sulla struttura delle algebre non pseudonulle e non semi-semplici non può essere esteso ai corpi infiniti, ma a sottocorpo fondamentale finito.

50. *Sotto-caso* a_2): $E = E_1\,,\ u_2^2 = \alpha u_1 + u_2 + e''$.

Si dimostra come nel n^0 precedente che

$$u_1\, u_2 = u_2\, u_1 = u_2\,,$$

che $u_2\, u_3$ è diverso da zero qualunque sia l'elemento non nullo u_3 di E e che, posto $u_2\, u_3 = u_4$, le u_i possono assumersi come unità di A.

Dopo ciò si ha

$$u_2\, u_4 = u_2^2\, u_3 = \alpha u_3 + u_4\,;$$

e, se si pone

$$u_3\, u_2 = \varrho u_3 + \sigma u_4\,,$$

si trova dapprima

$$u_4\, u_2 = u_2\, u_3 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_3\, u_2 = \varrho u_2\, u_3 + \sigma u_2\, u_4 = \alpha\sigma u_3 + (\varrho + \sigma)\, u_4\,,$$

([29]) G. SCORZA, *Sopra un teorema fondamentale della teoria delle algebre* (Rend. della R. Accad. dei Lincei, agosto 1934). Che l'algebra definita dalla tabella (LXXX) faccia eccezione al teorema dello WEDDERBURN trovasi rilevato anche nel recentissimo libro del DEURING: *Algebren* (Berlin, Springer, 1935) pag. 25.

e poi, utilizzando l'osservazione

$$u_3 u_2 \cdot u_2 = u_3 \cdot u_2^2$$

e ricordando che qui in Γ è $2 = 0$, si vede che ha da essere

$$\alpha + \varrho = \varrho^2 + \alpha\sigma^2 \quad \text{e} \quad \sigma = \sigma^2 .$$

Supporre $\sigma = 0$ non è possibile, perchè resterebbe $\alpha + \varrho = \varrho^2$, o, ciò che fa lo stesso, $\alpha = \varrho + \varrho^2$, mentre α non è di tal forma, dunque è $\sigma = 1$ e $\varrho = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$.

Se $\varrho = 0$ e $\sigma = 1$ si ha per A la tavola di moltiplicazione

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & \alpha u_1 + u_2 + e'' & u_4 & \alpha u_3 + u_4 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & \alpha u_3 + u_4 & 0 & 0 \end{array},$$

nella quale è lecito supporre $e'' = 0$, perchè a questo caso potremmo ricondurci, se fosse $0 \neq e'' = \beta u_3 + \gamma u_4$, mediante il cambiamento di unità

$$v_1 = u_1 ,$$
$$v_2 = u_2 + \beta u_3 + \gamma u_4 ,$$
$$v_3 = \beta u_3 + \gamma u_4 ,$$
$$v_4 = \alpha\gamma u_3 + (\beta + \gamma) u_4,$$

ove, si noti, sarebbe bene, come deve essere

$$\beta(\beta + \gamma) - \alpha\gamma^2 \neq 0,$$

perchè, se no, risulterebbe

$$\alpha = \frac{\beta}{\gamma} + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2.$$

Se $\varrho = \sigma = 1$, si ha

$$u_3 u_2 = u_3 + u_4 , \quad u_4 u_2 = \alpha u_3 ;$$

poi, badando che

$$u_2^3 = \begin{cases} u_2^2 \cdot u_2 = (\alpha u_1 + u_2 + e'')\, u_2 = \alpha u_2 + \alpha u_1 + u_2 + e'' + e'' u_2 \,, \\ u_2 \cdot u_2^2 = u_2 (\alpha u_1 + u_2 + e'') = \alpha u_2 + \alpha u_1 + u_2 + e'' + u_2 e'' \,, \end{cases}$$

si ottiene

$$e'' u_2 = u_2 e'',$$

e di qua, posto che sia $e'' = \beta u_3 + \gamma u_4$ si trae

$$\beta + \beta\gamma = \alpha\gamma \quad \text{e} \quad \beta = \beta + \gamma \,,$$

ossia $\beta = \gamma = 0$.

Abbiamo pertanto che nelle ipotesi attuali la tavola di moltiplicazione di A può pensarsi del tipo

$$\text{(LXXXII)} \qquad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & \alpha u_1 + u_2 & u_4 & \alpha u_3 + u_4 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & \alpha u_3 + u_4 & 0 & 0 \end{matrix} \,,$$

o del tipo

$$\text{(LXXXIII)} \qquad \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & \alpha u_1 + u_2 & u_4 & \alpha u_3 + u_4 \\ u_3 & u_3 + u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & \alpha u_3 & 0 & 0 \end{matrix} \,;$$

ed è chiaro che *si tratta qui di due tipi distinti rispetto alla relazione di equivalenza,* perchè dei due uno solo è commutativo.

51. *Sotto-caso* a_3): $E = E_2\,,\ u_2^2 = \alpha u_1 + e'$.

Qui u_1 è per ogni elemento di E modulo sinistro e nullifico destro.

Una prima conseguenza di codesta circostanza è che nella $u_2 u_1 = u_2 + e_2$ si può supporre $e_2 = 0$, perchè altrimenti alla considerazione di u_2 si sostituirebbe quella di $v_2 = u_2 + e_2$ — appartenente sempre alla classe $[u_2]$ — e verrebbe

$$v_2 v_1 = (u_2 + e_2)\, u_1 = u_2 u_1 = u_2 + e_2 = v_2 \,.$$

Poniamo dunque $u_2 u_1 = u_2$.

Premesso ciò, dico che nelle

$$u_1 u_2 = u_2 + e_1 \quad \text{e} \quad u_2^2 = u_2 + e'$$

è $e_1 = e' = 0$ e che inoltre u_2 è nullifico destro per ogni elemento di E.

Infatti da

$$u_2 + e_1 = u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_2 u_1 = u_1 u_2 \cdot u_1 = (u_2 + e_2) u_1 = u_2 u_1 = u_2 ,$$

ed

$$u_2^2 = u_2 \cdot u_2 u_1 = u_2^2 \cdot u_1 = (\alpha u_1 + e') u_1 = \alpha u_1 ,$$

si trae appunto $e_1 = e' = 0$; e, detto e un qualsiasi elemento di E, si ha

$$eu_2 = e \cdot u_2 = e \cdot u_1 u_2 = eu_1 \cdot u_2 = 0.$$

Dal fatto che u_1 è modulo sinistro per ogni elemento di E segue, come nel n⁰ 49, che $u_2 u_3$ è diverso da zero qualunque sia l'elemento non nullo u_3 di E e che, posto $u_2 u_3 = u_4$, indi

$$u_2 u_4 = u_2^2 u_3 = \alpha u_1 u_3 = \alpha u_3$$

le u_i possono assumersi come unità di A. La relativa tavola di moltiplicazione riesce allora del tipo

$$\text{(LXXXIV)} \qquad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & \alpha u_1 & u_4 & \alpha u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

52. *Sotto-caso* a_4): $E = E_2$, $u_2^2 = \alpha u_1 + u_2 + e''$.

Procedendo come or ora si vede intanto che si può supporre $u_2 u_1 = u_2$: dopo ciò si dimostra che riesce

$$u_1 u_2 = u_2 , \; u_2^2 = \alpha u_1 + u_2 , \; E u_2 = 0$$

e che, indicato con u_3 un qualsiasi elemento non nullo di E e posto $u_2 u_3 = u_4$, le u_i si possono assumere come unità di A

rispetto alle quali la sua tavola di moltiplicazione risulta

$$(\mathrm{LXXXV})\qquad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & \alpha u_1 + u_2 & u_4 & \alpha u_3 + u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

53. *Sotto-casi* a_5) *e* a_6): $E = E_3$, $u_2^2 = \alpha u_1 + e'$, *oppure* $u_2^2 = \alpha u_1 + u_2 + e''$.

Poichè u_1 in queste due alternative è per ogni elemento di E nullifico sinistro e modulo destro, una discussione perfettamente simile a quella dei due n[i] precedenti dà che in esse la tavola di moltiplicazione di A può esser ricondotta al tipo

$$(\mathrm{LXXXVI})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 & 0 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & \alpha u_3 & 0 & 0 \end{array}, \text{ o al tipo } (\mathrm{LXXXVII})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 + u_2 & 0 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ u_4 & \alpha u_3 + u_4 & 0 & 0 \end{array}.$$

54. *Sotto-casi* a_7) *e* a_8): $E = E_4$, $u_2^2 = \alpha u_1 + e'$, *oppure* $u_2^2 = \alpha u_1 + u_2 + e''$.

Questa volta u_1 è un nullifico per ogni elemento di E.

Allora si vede al solito modo che, scegliendo convenientemente u_2 nella classe $[u_2]$, può supporsi $u_1 u_2 = u_2$; e che da ciò segue $u_2 u_1 = u_2$ e $u_2^2 = \alpha u_1$, oppure $u_2^2 = \alpha u_1 + u_2$. Ma da $u_1 u_2 = u_2 u_1 = u_2$ si deduce che u_2 è, al pari di u_1, un nullifico per ogni elemento di E, dunque nelle ipotesi attuali la tavola di moltiplicazione di A può pensarsi del tipo

$$(\mathrm{LXXXVIII})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \text{ o del tipo } (\mathrm{LXXXIX})\quad \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 + u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

55. Che i tipi di algebre enumerati dal n[0] 51 in poi siano tutti distinti di fronte alla relazione di isomorfismo è evidente; e si dimostra subito che:

Fra gli undici tipi di algebre che presentano il caso a), incon-

trati dal n^0 48 *in poi, soltanto quelli che corrispondono alle tabelle* (LXXXVIII) *e* (LXXXIX) *sono riducibili.*

Si supponga che A sia una delle algebre in discorso, la quale riesca riducibile e pongasi

$$A_1 = A_1 \dotplus A_2 .$$

Sarà

$$E = E_1 \dotplus E_2 ,$$

dove E_i è la sotto-algebra eccezionale di A_i o lo zero, se tale sotto-algebra manca; ed $A - E$ sarà equivalente ad un'algebra che sia somma diretta di algebre equivalenti ad $A_1 - E_1$ e $A_2 - E_2$ (e qui, beninteso, $A_i - E_i$ sta per A_i, se $E_i = 0$). Ma $A - E$, essendo primitiva è irriducibile, dunque delle due algebre $A_i - E_i$, una, poniamo $A_1 - E_1$, è del 2^0 ordine, e l'altra, $A_2 - E_2$ è nulla; il che significa che A_2 è pseudonulla. Ma allora gli automoduli di A sono quelli di A_1 e in ciascuno di essi ogni elemento di A_2 (cioè una parte degli elementi di E) deve avere un nullifico.

Tanto basta per riconoscere la verità dell'enunciato.

Le condizioni di equivalenza per algebre definite da tabelle del tipo (LXXXVIII), oppure (LXXXIX), con valori diversi del parametro α, trattandosi di algebre riducibili, si deducono immediatamente — come già è stato accennato in un caso precedente — da quelle note per le algebre del 2^0 ordine primitive. Ma una tale circostanza sussiste anche per le algebre dei nove tipi, fra gli undici or ora considerati, che non sono riducibili, poichè nelle tabelle che li definiscono non compariscono altri parametri all'infuori di quello, α, che dipende dall'algebra $A - E$. Può dirsi pertanto che:

Due algebre rispondenti a tabelle di uno medesimo dei detti nove tipi riescono isomorfe quando, e solo quando, sono tali le algebre complementari delle rispettive sotto-algebre eccezionali.

56. *Caso b*): $A - E$ *riducibile.*

Qui $A - E$ è somma diretta di due algebre del 1^0 ordine con modulo; per conseguenza ($A - E$, indi) A ha per segnatura (1 , 1).

Sia u un automodulo principale di A e sia, in conformità dell'ipotesi,

$$u = u_1 + u_2 ,$$

con u_1 e u_2 automoduli primitivi mutuamente nullifici.

Se in u_1, o in u_2 — poniamo, in u_1 — gli elementi di E hanno tutti un nullifico, A è somma diretta dell'algebra del 1^0

ordine generata da u_1 e della sotto-algebra del 3^0 ordine generata da u_2 e dagli elementi di E. Quest'ultima sarà allora definita da una tabella di una delle 10 forme indicate coi n^i da (XI) a (XX) nel n^0 12 della Memoria già citata sulle algebre del 3^0 ordine e quindi A sarà definita da una tavola di moltiplicazione di uno dei seguenti 10 tipi:

$$\text{(XC)}\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{(XCI)}\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{(XCII)}\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{(XCIII)}\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{(XCIV)}\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{(XCV)}\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{(XCVI)}\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{(XCVII)}\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{(XCVIII)}\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{(XCIX)}\quad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Esclusi questi casi, nè u_1, nè u_2 potrà essere un nullifico per tutti gli elementi di E; e per conseguenza nè u_1, nè u_2 potrà essere un modulo per tutti gli elementi di E, perchè, se, ad es., u_1

fosse un modulo per ogni elemento di E, u_2 sarebbe per essi un nullifico.

Allora, se $E_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ sono i sistemi complementari di E aventi rispetto ad u_1 i significati precedentemente chiariti, ed E'_i sono quelli aventi i significati analoghi rispetto ad u_2, nei casi che ancora restano da considerare nessuno dei sistemi E_1, E_4, E'_1 od E'_4 potrà essere di ordine 2.

Ciò significa che in ognuno di tali casi:

b_1) o è del 2° ordine uno dei sistemi E_2, E_3, E'_2 o E'_3;

b_2) o nessuno dei sistemi E_i o E'_i risulterà del 2° ordine.

57. *Alternativa* b_1).

Sia E_2 del 2° ordine; cioè si supponga che in u_1 gli elementi di E abbiano tutti un modulo sinistro e un nullifico destro.

Allora in u_2 gli elementi di E avranno tutti un nullifico sinistro, E'_1 ed E'_2 saranno nulli, e quindi, non potendo essere E'_4 del 2° ordine, o sarà E'_3 del 2° ordine ed $E'_4 = 0$, o E'_3 ed E'_4 saranno entrambi del 1° ordine.

Prendiamo come unità di A u_1, u_2 e due elementi indipendenti u_3, u_4 di E appartenenti entrambi ad E'_3, se $E = E'_3$, appartenenti il primo ad E'_3 e il secondo ad E'_4, se E'_2 ed E'_4 sono, ciascuno, del 1° ordine. Corrispondentemente la tavola di moltiplicazione di A sarà del tipo

$$(\mathrm{C})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & u_4 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \end{matrix}\,, \qquad \text{o del tipo (CI)} \quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & u_4 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\,.$$

Si supponga invece che sia E_3 del 2° ordine, cioè che gli elementi di E abbiano tutti in u_1 un nullifico sinistro e un modulo destro; indi in u_2 un nullifico destro. Sarà $E'_1 = E'_3 = 0$, e per conseguenza, non potendo essere E'_4 del 2° ordine, o sarà E'_2 del 2° ordine ed $E'_4 = 0$, o E'_2 ed E'_4 saranno entrambi del 1° ordine.

Ma, se fosse E'_2 del 2° ordine, basterebbe scambiare u_1 con u_2 per riconoscere che A sarebbe un'algebra del tipo (C), dunque come nuovo ulteriore tipo rispondente all'alternativa b_1) non si ottiene che quello definito dalla tabella

$$(\mathrm{CII})\qquad \begin{array}{cccc} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

dove naturalmente le unità u_3 ed u_4 si intendono prese, la prima, in E'_2, la seconda in E'_4.

58. *Alternativa* b_2).

Per determinare simultaneamente i diversi casi che presentano l'alternativa b_2) partiamo dalle seguenti considerazioni.

Si supponga che u_3 ed u_4 siano due elementi indipendenti di A presi, uno per ciascuno, nei due sistemi E_i che sono del 1^0 ordine; sarà

$$(122)\qquad u_1u_3 = \alpha u_3\,,\quad u_3u_1 = \beta u_3\,,\quad u_1u_4 = \gamma u_4\,,\quad u_4u_1 = \delta u_4\,,$$

e ognuno dei numeri α, β, γ, δ sarà 1 o 0.

Poniamo che, insieme con le (122), per i prodotti u_2u_3, u_3u_2, u_2u_4, u_4u_2, che al pari di u_3 e u_4, sono elementi di E, si abbia

$$(123)\qquad u_2u_3 = \alpha' u_3 + \lambda u_4\,,\quad u_3u_2 = \beta' u_3 + \mu u_4\,,\quad u_2u_4 = \varrho u_3 + \gamma' u_4\,,$$
$$u_4u_2 = \sigma u_3 + \delta' u_4\,.$$

Allora guardando alla successione di eguaglianze

$$u_2u_3 = u_2^2\cdot u_3 = u_2\cdot u_2u_3 = \alpha' u_2u_3 + \lambda u_2u_4 = (\alpha'^2 + \lambda\varrho)u_3 + \lambda(\alpha' + \gamma')u_4\,,$$
$$u_2u_4 = u_2^2\cdot u_4 = u_2\cdot u_2u_4 = \varrho u_2u_3 + \gamma' u_2u_4 = \varrho(\alpha' + \gamma')u_3 + (\gamma'^2 + \lambda\varrho)u_4\,,$$
$$u_3u_2 = u_3\cdot u_2^2 = u_3u_2\cdot u_2 = \beta' u_3u_2 + \mu u_4u_2 = (\beta'^2 + \mu\sigma)u_3 + \mu(\beta' + \delta')u_4\,,$$
$$u_4u_2 = u_4\cdot u_2^2 = u_4u_2\cdot u_2 = \sigma u_3u_2 + \delta' u_4u_2 = \sigma(\beta' + \delta')u_3 + (\delta'^2 + \mu\sigma)u_4\,,$$

$$0 = u_1u_2\cdot u_3 = u_1\cdot u_2u_3 = \alpha\alpha' u_3 + \lambda\gamma u_4\,,$$
$$0 = u_3\cdot u_2u_1 = u_3u_2\cdot u_1 = \beta\beta' u_3 + \mu\delta u_4\,,$$
$$0 = u_1u_2\cdot u_4 = u_1\cdot u_2u_4 = \alpha\varrho u_3 + \gamma\gamma' u_4\,,$$
$$0 = u_4\cdot u_2u_1 = u_4u_2\cdot u_1 = \beta\sigma u_3 + \delta\delta' u_4\,,$$

$$u_2u_3u_1 = \begin{cases} u_2 \cdot u_3u_1 = \beta u_2u_3 = \alpha'\beta u_3 + \beta\lambda u_4\,, \\ u_2u_3 \cdot u_1 = \alpha u_3u_1 + \lambda u_4u_1 = \alpha'\beta u_3 + \delta\lambda u_4\,, \end{cases}$$

$$u_2u_4u_1 = \begin{cases} u_2 \cdot u_4u_1 = \delta u_2u_4 = \delta\varrho u_3 \quad + \delta\gamma' u_4\,, \\ u_2u_4 \cdot u_1 = \varrho u_3u_1 + \gamma' u_4u_1 = \beta\varrho u_3 + \delta\gamma' u_4\,, \end{cases}$$

$$u_1u_3u_2 = \begin{cases} u_1 \cdot u_3u_2 = \beta' u_1u_3 + \mu u_1u_4 = \alpha\beta' u_3 + \gamma\mu u_4\,, \\ u_1u_3 \cdot u_2 = \alpha u_3u_2 = \alpha\beta' u_3 \quad + \alpha\mu u_4\,, \end{cases}$$

$$u_1u_4u_2 = \begin{cases} u_1 \cdot u_4u_2 = \sigma u_1u_3 + \delta' u_1u_4 = \alpha\sigma u_3 + \gamma\delta' u_4\,, \\ u_1u_4 \cdot u_2 = \gamma u_4u_2 = \gamma\sigma u_3 \quad + \gamma\delta' u_4\,, \end{cases}$$

si ottengono per i coefficienti α', β', γ', δ', λ, μ, ϱ, σ le equazioni

$$\begin{gathered} \alpha' = \alpha'^2 + \lambda\varrho, \quad \lambda = \lambda(\alpha' + \gamma'), \quad \varrho = \varrho(\alpha' + \gamma'), \quad \gamma' = \gamma'^2 + \lambda\varrho, \\ \beta' = \beta'^2 + \mu\sigma, \quad \mu = \mu(\beta' + \delta'), \quad \sigma = \sigma(\beta' + \delta'), \quad \delta' = \delta'^2 + \mu\sigma, \\ \alpha\alpha' = 0, \quad \gamma\lambda = 0, \quad \beta\beta' = 0, \quad \delta\mu = 0, \quad \alpha\varrho = 0, \quad \gamma\gamma' = 0 \quad \beta\sigma = 0, \\ \delta\delta' = 0, \quad \beta\lambda = \delta\lambda, \quad \beta\varrho = \delta\varrho, \quad \alpha\mu = \gamma\mu, \quad \alpha\sigma = \gamma\sigma, \end{gathered} \tag{124}$$

dalle quali nei casi che ci restano da considerare sarà facile ricavare i loro valori quando siano noti quelli di α, β, γ, δ.

I casi in discorso sono quelli nei quali riescono di 1⁰ ordine

E_1 ed E_2, o

E_1 ed E_3, o

E_1 ed E_4, o

E_2 ed E_3, o

E_2 ed E_4, o, infine,

E_3 ed E_4;

cioè quelli nei quali si ha

1) $\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 0,$ oppure

2) $\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1,$ oppure

3) $\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$ oppure

4) $\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1,$ oppure

5) $\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$ o infine,

6) $\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0.$

Badando alle (124) si vede che, quando per α, β, γ, δ vale una qualsiasi delle alternative ora enumerate, λ, μ, ϱ, σ risultano tutti nulli e che quando

per α, β, γ, δ valgono le 1) si ha $\alpha'=0,\ \beta'=0,\ \gamma'=0,\ \delta'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$;

» » 2) » $\alpha'=0,\ \beta'=0,\ \gamma'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.,\ \delta'=0$;

» » 3) » $\alpha'=0,\ \beta'=0,\ \gamma'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.,\ \delta'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$;

» » 4) » $\alpha'=0,\ \beta'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.,\ \gamma'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.,\ \delta'=0$;

» » 5) » $\alpha'=0,\ \beta'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.,\ \gamma'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.,\ \delta'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$;

» » 6) » $\alpha'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.,\ \beta'=0,\ \gamma'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.,\ \delta'=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$.

Poichè il supporre $\alpha'=\beta'=\gamma'=\delta'=0$ significherebbe supporre E_4' del 2^0 ordine, cioè ricadere in uno dei casi ormai esclusi, si ottengono per l'ottupla dei numeri α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' le 22 ottuple di valori qui sotto registrate:

(1)	1,	1,	1,	0	0,	0,	0,	1;
(2)	1,	1,	0,	1	0,	0,	1,	0;
(3)	1,	1,	0,	0	0,	0,	1,	1;
(4)	1,	1,	0,	0	0,	0,	1,	0;
(5)	1,	1,	0,	0	0,	0,	0,	1;
(6)	1,	0,	0,	1	0,	1,	1,	0;
(7)	1,	0,	0,	1	0,	1,	0,	0;
(8)	1,	0,	0,	1	0,	0,	1,	0;
(9)	1,	0,	0,	0	0,	1,	1,	1;
(10)	1,	0,	0,	0	0,	1,	1,	0;
(11)	1,	0,	0,	0	0,	1,	0,	1;
(12)	1,	0,	0,	0	0,	1,	0,	0;
(13)	1,	0,	0,	0	0,	0,	1,	1;
(14)	1,	0,	0,	0	0,	0,	1,	0;
(15)	1,	0,	0,	0	0,	0,	0,	1;
(16)	0,	1,	0,	0	1,	0,	1,	1;
(17)	0,	1,	0,	0	1,	0,	1,	0;
(18)	0,	1,	0,	0	1,	0,	0,	1;
(19)	0,	1,	0,	0	1,	0,	0,	0;
(20)	0,	1,	0,	0	0,	0,	1,	1;
(21)	0,	1,	0,	0	0,	0,	1,	0;
(22)	0,	1,	0,	0	0,	0,	0,	1.

Ora si osservi che di queste 22 alternative :

la (9) si riconduce alla (2) scambiando u_1 con u_2 e u_3 con u_4;
» (10) » » (8) » » » ;
» (13) » » (4) » » » ;
» (16) » » (1) » » » ;
» (18) » » (7) » » » ;
» (19) » » (12) » » » ;
» (20) » » (5) » » » ;
» (21) » » (15) » » » ;

e infine che la (17) e la (11), scambiando u_1 con u_2 e u_3 con u_4, sono da scartare perchè ricondurrebbero a casi già contemplati, cioè alle tabelle (CI) e (CII).

Si conclude che casi nuovi non si ottengono se non considerando le alternative (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (12), (14), (15), (22), cui corrispondono le 12 tavole di moltiplicazione

$$\text{(CIII)}\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & u_4 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \end{matrix}\;, \qquad \text{(CIV)}\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & u_4 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\;,$$

$$\text{(CV)}\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & u_4 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \end{matrix}\;, \qquad \text{(CVI)}\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & u_4 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\;,$$

$$\text{(CVII)}\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \end{matrix}\;, \qquad \text{(CVIII)}\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & u_4 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\;,$$

$$\text{(CIX)}\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\;, \qquad \text{(CX)}\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\;,$$

$$(\mathrm{CXI})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad (\mathrm{CXII})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix},$$

$$(\mathrm{CXIII})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad (\mathrm{CXIV})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_4 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

59. È facile persuadersi che:

I 25 tipi di algebre presentanti il caso b) ed indicati dal n⁰ 56 in poi sono tutti veramente distinti rispetto alla relazione di equivalenza.

Si osservi infatti che la determinazione dei 25 tipi in discorso è stata compiuta guardando al modo di comportarsi di E rispetto ai due automoduli primitivi mutuamente nullifici u_1 e u_2, e considerando come diversi tipi corrispondenti a comportamenti diversi di E. Ora si badi che le classi mod E individuate da u_1 e u_2 sono i soli automoduli primitivi di $A - E$; quindi se v_1 e v_2 sono due qualsiasi automoduli primitivi mutuamente nullifici di A essi non possono differire da u_1 e u_2 che per elementi eccezionali. Ma allora le due decomposizioni di E nelle due somme di sistemi complementari ΣE_i e $\Sigma E'_i$, sebbene ottenute a partire dagli automoduli u_1 e u_2, in realtà non ne dipendono, perchè restano inalterate, se alla considerazione di u_1 e u_2 si sostituisce quella di v_1 e v_2. E dunque per assicurarsi, che i 25 tipi, di cui nell'enunciato, sono veramente distinti nel senso voluto, basta osservare che mai in due di essi che siano diversi le due decomposizioni di E nei sistemi E_i ed E'_i presentano le medesime relazioni reciproche.

60. Dimostriamo infine che:

Dei 25 tipi presentanti il caso b), sedici sono di algebre riducibili e nove di algebre irriducibili, questi ultimi essendo i tre del n⁰ 57 e inoltre quelli corrispondenti alle tabelle (CIII), (CIV), (CVIII), (CIX), (CX) *e* (CXI).

Si supponga infatti che A sia una delle algebre cui si riferisce il teorema e che A sia riducibile.

Posto

$$A = A_1 + A_2\,,$$

sarà, col significato dei simboli chiarito nel n° 55,

$$E = E_1 \dotplus E_2\,,$$

ed $A - E$ sarà equivalente ad un'algebra che sia somma diretta di due algebre equivalenti ad $A_1 - E_1$ ed $A_2 - E_2$. Poichè l'algebra A presenta il caso *b*), l'algebra $A - E$ è riducibile ed è somma diretta di due algebre del 1° ordine dotate di modulo, quindi o delle due E_1 ed E_2 una è nulla e l'altra coincide con E — e allora delle due algebre A_1 ed A_2 una è del 3° ordine e contiene E, l'altra è del 1° ordine con modulo —, o E_1 ed E_2 sono entrambe diverse da zero — ed allora A_1 e A_2 sono algebre del 2° ordine ciascuna non pseudonulla e non semi-semplice.

Si riconosce così che dei nostri 25 tipi quelli formati di algebre riducibili sono i dieci del n° 56 e quelli rispondenti alle tabelle (CV), (CVI), (CVII), (CXII), (CXIII) e (CXIV).

§ 3. Le algebre con sotto-algebra eccezionale del 1° ordine.

61. Sia infine A un'algebra del 4° ordine in Γ con la sotto-algebra eccezionale E del 1° ordine.

Allora basta tener presenti i risultati di una mia Nota già citata [30] per riconoscere che l'algebra A

a) o è somma diretta di E e di un'algebra semi-semplice del 3° ordine;

b) o è somma diretta di un'algebra semi-semplice del 2° ordine e di un'algebra del 2° ordine, contenente E, e dotata di modulo, o soltanto di moduli sinistri, o soltanto di moduli destri;

c) o è somma diretta di un'algebra del 1° ordine con modulo e di un'algebra del 3° ordine che secondo la classificazione esposta nella Memoria citata in [1] *b*) è da dire del tipo (XXVII).

[30] Loc. cit. [17].

Si trovano così altri 14 tipi di algebre del 4^0 ordine, dei quali uno è generato da quattro unità u_1, u_2, u_3, u_4 per le quali è

$$
\text{(CXV)} \qquad
\begin{aligned}
&u_1^2 = u_1\,, \quad u_1 u_2 = u_2 u_1 = u_2\,, \quad u_3 = u_2^2\,,\\
&u_2^3 + \alpha u_2^2 + \beta u_2 + \gamma u_1 = 0,\\
&u_i u_4 = u_4 u_i = 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, 3, 4),
\end{aligned}
$$

dove i numeri α, β, γ sono tali che il polinomio

$$\xi^3 + \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma$$

riesce irriducibile in Γ; e i rimanenti sono definiti dalle tavole di moltiplicazione

$$
\text{(CXVI)} \quad
\begin{matrix}
u_1 & u_2 & 0 & 0\\
u_2 & \alpha u_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & u_3 & 0\\
0 & 0 & 0_3 & 0
\end{matrix}\,, \qquad
\text{(CXVII)} \quad
\begin{matrix}
u_1 & u_2 & 0 & 0\\
u_2 & \alpha u_1 + u_2 & 0 & 0\\
0 & 0 & u_3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\,,
$$

(α non quadrato) (α non del tipo $\lambda + \lambda^2$)

$$
\text{(CXVIII)} \quad
\begin{matrix}
u_1 & 0 & 0 & 0\\
0 & u_2 & 0 & 0\\
0 & 0 & u_3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\,, \qquad
\text{(CXIX)} \quad
\begin{matrix}
u_1 & u_2 & 0 & 0\\
u_2 & \alpha u_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & u_3 & u_4\\
0 & 0 & u_4 & 0
\end{matrix}\,,
$$

(α non quadrato)

$$
\text{(CXX)} \quad
\begin{matrix}
u_1 & u_2 & 0 & 0\\
u_2 & \alpha u_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & u_3 & u_4\\
0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\,, \qquad
\text{(CXXI)} \quad
\begin{matrix}
u_1 & u_2 & 0 & 0\\
u_2 & \alpha u_1 & 0 & 0\\
0 & 0 & u_3 & 0\\
0 & 0 & u_4 & 0
\end{matrix}\,,
$$

(α non quadrato) (α non quadrato)

$$
\text{(CXXII)} \quad
\begin{matrix}
u_1 & u_2 & 0 & 0\\
u_1 & \alpha u_1 + u_2 & 0 & 0\\
0 & 0 & u_3 & u_4\\
0 & 0 & u_4 & 0
\end{matrix}\,, \qquad
\text{(CXXIII)} \quad
\begin{matrix}
u_1 & u_2 & 0 & 0\\
u_2 & \alpha u_1 + u_2 & 0 & 0\\
0 & 0 & u_3 & u_4\\
0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\,,
$$

(α non del tipo $\lambda + \lambda^2$) (α non del tipo $\lambda + \lambda^2$)

$$
(\mathrm{CXXIV})\quad \begin{matrix} u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ u_2 & \alpha u_1 + u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \end{matrix} \qquad (\mathrm{CXXV})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \end{matrix},
$$

(α non del tipo $\lambda + \lambda^2$)

$$
(\mathrm{CXXVI})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad (\mathrm{CXXVII})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \end{matrix},
$$

$$
(\mathrm{CXXVIII})\quad \begin{matrix} u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & u_4 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & u_4 & 0 \end{matrix}.
$$

Evidentemente essi sono distinti di fronte alla relazione di equivalenza e rispondono tutti ad algebre riducibili.

§ 4. Ricapitolazione

62. È utile riassumere in un enunciato complessivo i risultati via via raggiunti.

I tipi di algebre del 4° *ordine, distinti di fronte alla relazione di equivalenza e che non si riducano a corpi algebrici dedotti dal corpo, nel quale sono definite, mediante polinomi ivi irriducibili di* 4° *grado, sono* 128.

Di essi 10 *sono tipi di algebre semi-semplici,* 24 *di algebre pseudonulle,* 94 *di algebre con sotto-algebra eccezionale propria.*

I tipi costituiti di algebre irriducibili, fra i primi 10, *sono* 3; *fra i successivi* 24 — *escluso il tipo* XXVIII *che dà luogo ad algebre irriducibili o riducibili, secondo che il parametro β che in esso comparisce non è, od è nullo* — *sono* 17; *tra gli ultimi* 94 *sono* 40. *Quindi, in totale, escluso per la ragione detta il tipo* XXVIII, *dei rimanenti* 127, 60 *constano di algebre irriducibili,* 67 *di algebre riducibili.*

Definiscono poi algebre con modulo soltanto 31 *delle* 128 *tabelle enumerate ; esse sono le tabelle*

(I) — (X); (XXXVI); (XXXVII); (XXXIX); (XLI); (LV);
(LXXVIII) — (LXXXIII); (XC); (C); (CIII); (CIV); (CV);
(CVIII); (CXIX); (CXXII); (CXXV); (CXXVIII).

63. Giova infine osservare, per il raffronto con la classificazione dello Study, che questo Autore ha considerato soltanto algebre con modulo e complesse, e che ha posto in una medesima classe algebre equivalenti o reciproche. A questo modo egli enumerò 16 tipi; ma avendo pure osservato che, dei suoi 16 tipi, 15 — e cioè tutti all'infuori di quello da lui denotato con VII — erano equivalenti ai rispettivi tipi reciproci, in conclusione, dal punto di vista della relazione di equivalenza, egli classificò le algebre complesse dotate di modulo in 17 tipi differenti, e cioè nei 16 da lui indicati e inoltre nel reciproco del detto tipo VII, che qui denoteremo con VII′ [31].

Ebbene fra i suoi risultati e quelli di questa Memoria vi è perfetto riscontro.

Infatti si escludano dai 31 tipi più sopra enumerati quelli che nel corpo complesso non possono evidentemente esistere, cioè i tipi

(I), (II), (IV) — (IX), (LXXIX) — (LXXXIII), (CXIX), (CXXII),

si osservi in secondo luogo che per quanto è detto alla fine del n° 45, indi al n° 8 della Nota citata in [1] *b*), la tabella (XXXIX) nel corpo complesso non definisce tipi non equivalenti che per $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$, cioè $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$; e così si avranno appunto, anche a norma di questa Memoria

$$31 - 15 + 1 = 17,$$

tipi di algebre complesse con modulo.

[31] A quanto mi comunica il prof. Spampinato, la classificazione delle algebre complesse d'ordine 4 dotate di modulo è stata compiuta, con metodo simile a quello qui seguito, dalla Dott.^{a} Sig.na C. Carbonaro, una cui Nota sull'argomento esce in questi giorni nel Bollettino dell'Accademia Gioenia di Catania (fasc. 68, serie 2^{a}, 1935-XIII).

Credo opportuno infine richiamar l'attenzione del lettore sopra una Nota di A. A. Albert (Bulletin of the American mathematical Society, vol. XXXVI, 1930, pp. 535-540) ove si stabilisce un notevole criterio per decidere dall'equivalenza o meno di due algebre primitive del tipo qui denotato con (I), quando le due algebre siano definite nel corpo razionale.

A compiere, poi, con tutta precisione il raffronto diremo che i tipi

(I), (II), (III), (IV), (V), (VI), (VII), (VII'), (VIII), (IX), (X), (XI)
(XII), (XIII), (XIV), (XV) e (XVI)

dello STUDY equivalgono, ordinatamente, ai nostri tipi

(X), (CXXV), (CV), (LXXVIII), (XXXVI), (CXXVIII), (CIII),
(CIV), (XC), (XXXVII), (XXXIX) con $\alpha=1$,
(XXXIX) con $\alpha=0$, (III), (CVIII), (XLI), (C), (LV);

e che il passaggio dalle tavole di moltiplicazione (I), (II), (III), (IV), (V), (VIII), (IX), (X), (XI), (XIV), (XVI) dello STUDY alle corrispondenti della nostra classificazione si ottiene con puri scambi di denominazioni nelle unità, mentre dalle tabelle (VI), (VII), (VII'), (XII), (XIII) e (XV) dello STUDY si passa a quelle ad esse equivalenti della nostra classificazione mediante i cambiamenti di unità quivi successivamente indicati:

$$u_1=e_3, \quad u_2=\frac{1}{2}(e_0+e_1), \quad u_3=\frac{1}{2}(e_0-e_1), \quad u_4=e_2;$$

$$u_1=\frac{1}{2}(e_0+e_1), \quad u_2=\frac{1}{2}(e_0-e_1), \quad u_3=e_3, \quad u_4=e_2;$$

$$u_1=\frac{1}{2}(e_0+e_1), \quad u_2=\frac{1}{2}(e_0-e_1), \quad u_3=e_3, \quad u_4=e_2;$$

$$c_{11}=\frac{1}{2}(e_0+ie_1), \quad c_{12}=\frac{1}{2}(e_2+ie_3), \quad c_{21}=\frac{1}{2}(-e_2+ie_3),$$
$$c_{22}=\frac{1}{2}(e_0-ie_1), \quad i=\sqrt{-1};$$

$$u_1=\frac{1}{2}(e_0-ie_1), \quad u_2=\frac{1}{2}(e_0+ie_1), \quad u_3=-\frac{1}{2}(e_3+ie_2),$$
$$u_4=\frac{1}{2}(e_3-ie_2), \quad i=\sqrt{-1};$$

$$u_1=\frac{1}{2}(e_0+e_1), \quad u_2=\frac{1}{2}(e_0-e_1), \quad u_2=e_2, \quad u_4=e_3. \ (^*)$$

(*) Sia infine esplicitamente avvertito che sono state eseguite le verifiche atte a garantire che i tipi di Algebre enumerati nel testo sono tutti veramente realizzabili [*Nota aggiunta nella errata-corrige*].