SULLE VARIETÀ DI VERONESE (*)

In più modi si può avviare mediante rappresentazioni geometriche lo studio delle proprietà di un'algebra regolare (reale o complessa) d'ordine n^2; giacchè si può riferirne gli elementi ai punti di un S_{n^2} euclideo o alle affinità di un S_n sì fatto, che ne tengono fermo un punto; oppure si può riferirne i sistemi d'ordine 1 ai punti di un S_{n^2-1} proiettivo o alle omografie di un tale S_{n-1} — tutti questi spazi essendo definiti naturalmente nel corpo (reale o complesso) nel quale si suppone data l'algebra presa in considerazione ([1]) — .

Avendo fatto ricorso alla prima delle rappresentazioni ora indicate per caratterizzare gli insiemi degli automoduli di un'algebra

(*) *Rend. Reale Accad. dei Lincei*, (6) 22 (1935), pp. 181-186.

([1]) Così, ad es., si ricorre alla rappresentazione dei sistemi d'ordine 1 sui punti di un S_{n^2-1} proiettivo nella Nota di N. SPAMPINATO: *Sulle sottoalgebre di un'algebra regolare* («Note e Memorie di Matematica». Catania, vol. I, 1921) e invece a quella sulle omografie di un S_{n-1} proiettivo nelle Note, comparse in quello stesso volume: N. SPAMPINATO, *Il massimo della dimensione di un sistema lineare di omografie di un S_{n-1} che sia un gruppo abeliano*, e G. SCORZA, *Alcune proprietà delle algebre regolari.*

A rappresentazioni sui punti di uno spazio euclideo, e non per le sole algebre regolari, fa ricorso invece lo SPAMPINATO nelle sue ricerche sistematiche sulle funzioni analitiche in un'algebra complessa con modulo.

Della rappresentazione dell'algebra regolare d'ordine n^2, cioè della totalità delle matrici d'ordine n, sull'insieme dei punti di un S_{n^2} euclideo, Ω, si avvale pure G. ANDREOLI in una sua recente pubblicazione [*Sulla funzione di composizione di matrici*, «Atti della R. Acc. delle Sc. fis. e mat. di Napoli», vol. XX, ser. 2ª, n. 10] alla quale sono da muovere appunti numerosi e non lievi.

Essa è tutta imperniata sopra una nozione della quale il sig. ANDREOLI si vale da tempo — quella cioè di «varietà di VOLTERRA»; — ma è un poco difficile concedere che vadano d'accordo le varie affermazioni che su di essa vengono enunciate.

Così (per brevità di discorso suppongo di rivolgermi ad un lettore che abbia sott'occhio la Memoria ora citata) a p. 3 si dice: «chiamando $V(X)$ la varietà di VOLTERRA relativa ad $X, \ldots$, se X_1 è contenuto in $V(X)$ ed X_2 è contenuto a sua volta in $V(X_1)$, esso X_2 sarà contenuto anche in $V(X)$»; di guisa che se X_1 appartiene a $V(X)$, tutta la $V(X_1)$ sta in $V(X)$. Già, ma cinque righe più regolare mi sono imbattuto per le varietà di SEGRE, rappresentanti le coppie di punti estratte da due S_r, in un teorema del tutto analogo a quello che per la superficie di STEINER fu enunciato dal LIE e per la superficie di VERONESE fu riconosciuto valido dal BERZOLARI (2).

sotto si trova scritto: « Se X_1 è contenuto in $V(X)$, allora $V(X_1)$ avrà certamente una parte comune con $V(X)$ ».

Definito (p. 3) come spazio fondamentale di Ω uno spazio « composto esclusivamente di elementi due a due permutabili », si afferma che « dato un elemento X, ovviamente resta da esso definito uno spazio fondamentale $\Phi(X)$ »; e ciò ben lungi dall'esser ovvio, è falso, come vede subito chi ricordi dagli elementi di geometria proiettiva che data un'omologia piana di centro S e asse s (non passante per S) le omografie permutabili con essa si distribuiscono in ∞^2 reti, quelle di una stessa rete essendo permutabili fra loro a due a due ed avendo per punti uniti comuni S e due punti di s.

Ancora a p. 3 si definisce come « varietà di VOLTERRA associata ad una matrice X la varietà costituita da tutti i punti rappresentativi di matrici commutabili con X e fra loro »; e poco più sotto si soggiunge che: « una varietà di VOLTERRA risulta costituita dall'insieme (*sic*) di spazi fondamentali ». Ma matrici rispondenti a punti di spazi fondamentali diversi non è detto che debbano essere permutabili fra loro.

Nè miglior luce su queste così dette varietà di VOLTERRA si può dedurre dall'esempio « più perspicuo » che si indica a p. 14. Ivi si considera l'insieme delle matrici di ordine n per ognuna delle quali sono nulli gli elementi al disopra della diagonale principale e si asserisce che esso è « una varietà di VOLTERRA, in quanto due di esse permutabili ad una terza, sono permutabili fra loro: *purchè gli elementi diagonali non siano nulli* » (dove il corsivo non è mio).

Poichè fra quelle matrici vi è la matrice identica, se fosse esatta l'affermazione dell'autore bisognerebbe che nel detto insieme le matrici — sia pure con gli elementi diagonali tutti diversi da zero — fossero permutabili a due a due. E ciò è falso: il lettore rifletta che, se, per es., $n = 3$, l'insieme delle matrici considerate dall'ANDREOLI può riguardarsi come l'insieme delle matrici rispondenti alle omografie di un piano che ne tengono fermi un punto e una retta assegnati, appartenentisi; dopo di che egli vedrà subito qual conto sia da fare della sua affermazione. Essa è quasi esatta per $n = 2$, e la ragione è, geometricamente, evidente; ma anche in tal caso perchè possa essere accettata senza obbiezioni va enunciata come segue:

Nella totalità delle matrici del 2⁰ ordine del tipo $\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{Vmatrix}$ *due matrici permutabili con una terza — per la quale non sia* $\beta = 0$ *e* $\alpha = \gamma$ *— sono permutabili fra loro;* e non come vorrebbe il corsivo di cui sopra.

(2) Cfr. A. BRAMBILLA, *Estensione di una proprietà della superficie di Steiner*. (« Rendic. della R. Acc. delle Sc. fis. e mat. di Napoli » 1898). Per una estensione in altro senso del teorema in discorso veggasi N. SPAMPINATO, *A proposito di un teorema del Lie*. (Questi « Rendiconti », ser. 5ª, vol. XXVIII, 1919, pp. 380-384, 405-407).

Ciò mi ha indotto a presumere che codesto teorema del Lie fosse addirittura estendibile a tutte le varietà di Veronese; e qui — rimandando ad altra Nota l'esposizione del teorema riguardante le varietà di Segre — mostro appunto che tale estensione è possibile con un ragionamento del tutto simile a quello di cui si valse il Rosati per dimostrare il teorema del Berzolari [3].

1. Consideriamo le $\infty^{\frac{r(r+3)}{2}}$ quadriche-inviluppo di un S_r, che diremo Σ, e riferiamole biunivocamente, mediante un'omografia Φ, ai punti di uno spazio Σ', ad $r\frac{(r+3)}{2}$ dimensioni: alle totalità delle quadriche-inviluppo di Σ specializzate almeno $1, 2, \ldots, $ o r volte risponderanno in Σ' delle varietà $F^{(1)}, \ldots, F^{(r)}$ delle quali qui non interessa considerare che la prima e l'ultima.

Quella è un'ipersuperficie dell'ordine $r+1$, questa è una varietà di dimensione r e ordine 2^r, che per $r=2$ coincide con la ben nota superficie di Veronese e che, appunto perciò, tempo fa proposi di chiamar *varietà di* Veronese *di indice* r [4].

Come è ben noto, $F^{(r)}$ è il luogo dei punti r-pli di $F^{(1)}$ ed $F^{(1)}$ a sua volta è il luogo degli S_{r-1} r-secanti di $F^{(r)}$.

2. Ciò posto dimostriamo che:

In Σ' la corrispondenza fra un punto e il relativo iperpiano polare rispetto ad $F^{(r)}$ è generalmente biunivoca.

Supponiamo, com'è lecito, che alla quadrica-inviluppo rappresentata in Σ dall'equazione

$$\sum_{i,j}^{1\ldots r+1} \alpha_{i,j}\, \xi_i\, \xi_j = 0 \qquad (\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}) \tag{1}$$

corrisponda in Σ' il punto con le coordinate $\alpha_{i,j}\,(i \leq j)$, queste essendo disposte in un ordine fissato una volta per tutte.

Allora in Σ' la $F^{(1)}$ sarà rappresentata dall'equazione

$$f = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}, & \alpha_{1,2}, & \cdots, & \alpha_{1,r+1} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ \alpha_{r+1,1}, & \alpha_{r+1,2}, & \cdots, & \alpha_{r+1,r+1} \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

[3] C. Rosati, *Sulle superficie di Veronese e di Steiner.* (« Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino », vol. 35, 1899), p. 12 e sgg.

[4] G. Scorza, *Le varietà di Veronese e le forme quadratiche definite.* (« Rend. della R. Accad. delle Sc. fis. e mat. di Napoli », 1915).

Se $A_{i,j}$ è l'aggiunto di $\alpha_{i,j}$ nella matrice $\| \alpha_{i,j} \|$, si ha

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_{i,j}} = \begin{cases} A_{i,j}, & \text{se } i = j \\ 2\, A_{i,j}, & \text{se } i \neq j; \end{cases}$$

e quindi l'equazione dell'iperpiano polare, rispetto ad $F^{(1)}$, del punto $(\alpha_{i,j})$ è, nelle coordinate correnti $x_{i,j}$,

$$(4) \qquad \sum_{i,j}^{1\dots r+1} A_{i,j}\, x_{i,j} = 0 \qquad (x_{j,i} = x_{i,j}).$$

Se l'aggiunto di $A_{i,j}$ nella matrice $\| A_{i,j} \|$ si indica con $\alpha'_{i,j}$, si ha per un ben noto teorema

$$(5) \qquad \alpha'_{i,j} = \delta^{r-1}\, \alpha_{i,j},$$

dove δ è il determinante $| \alpha_{i,j} |$; dunque, se le $A_{i,j}$ sono date, i mutui rapporti delle $\alpha_{i,j}$ sono in generale individuati. Il che significa precisamente che la corrispondenza fra un punto e il relativo iperpiano polare rispetto ad $F^{(1)}$ è generalmente biunivoca.

3. Si osservi che la quadrica-inviluppo (1) è r volte specializzata, cioè si riduce a un punto doppio con le coordinate $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}$, se è $\alpha_{i,j} = \alpha_i \alpha_j$; e dunque se si pone

$$(6) \qquad x_{i,j} = x_i x_j \qquad (i, j = 1, \dots, r+1),$$

queste saranno in Σ', con i parametri $x_1, \dots, x_{r+1}$, le equazioni parametriche di $F^{(r)}$.

Mediante le (6) la $F^{(r)}$ si trova rappresentata su Σ, punto per punto, senza eccezioni; e, in codesta rappresentazione, la sezione di $F^{(r)}$ con l'iperpiano

$$(7) \qquad \sum_{i,j}^{1\dots r+1} \lambda_{i,j}\, x_{i,j} = 0 \qquad (\lambda_{j,i} = \lambda_{i,j})$$

ha per immagine in Σ la quadrica-luogo rappresentata dall'equazione

$$(8) \qquad \sum_{i,j}^{1\dots r+1} \lambda_{i,j}\, x_i x_j = 0.$$

Come è ben noto, e come, del resto, si vede subito, la corrispondenza (omografica) Ψ che così viene a stabilirsi fra gli iperpiani di Σ' e le quadriche-luogo di Σ è legata a quella, Φ, fra i punti di Σ' e le quadriche-inviluppo di Σ così che un punto e un iperpiano di Σ' si appartengono quando le quadriche, inviluppo e luogo, ad essi corrispondenti sono *coniugate* od *armoniche*.

4. Badando a ciò che or ora è stato detto e osservando che in Σ l'equazione della quadrica-luogo *aderente* alla quadrica-inviluppo (1) — supposta non degenere o semplicemente degenere — è

$$\sum_{i,j}^{1\dots r+1} A_{i,j}\, x_i\, x_j = 0,$$

si ha che:

Un punto di Σ' che non sia multiplo per $F^{(1)}$ e il relativo iperpiano polare rispetto ad $F^{(1)}$ hanno per corrispondenti in Σ una quadrica-inviluppo e la quadrica-luogo ad essa aderente.

Nel seguito, per comodità di discorso, un punto e un iperpiano si diranno *polo* e *polare rispetto ad $F^{(r)}$*, se sono tali rispetto ad $F^{(1)}$.

5. In Σ consideriamo un iperpiano π.

Ai punti di π risponderanno su $F_{(r)}$ quelli di una varietà di dimensione $r-1$ che indicheremo con $G_\pi^{(r-1)}$; dico che:

Essa è una varietà di VERONESE *di indice $r-1$.*

E infatti un iperpiano di Σ' contiene $G_\pi^{(r-1)}$, se, e soltanto se, la quadrica-luogo ad esso omologa in Ψ è coniugata a tutte le quadriche-inviluppo costituite dai punti di π contati ciascuno due volte, cioè si spezza in π e in un iperpiano residuo; dunque per $G_\pi^{(r-1)}$ passano $r+1$ — e non più — iperpiani indipendenti di Σ', ossia $G_\pi^{(r-1)}$ appartiene intanto a uno spazio π' della dimensione

$$\frac{r(r+3)}{2} - (r+1) = \frac{(r-1)(r+2)}{2}.$$

Un punto di Σ' sta in π' se la quadrica-inviluppo di Σ che ad esso corrisponde mediante Φ è coniugata a tutte le quadriche-luogo spezzate in π e in un iperpiano residuo, ossia ha in π un iperpiano doppio; dunque nell'omografia Φ ai punti di π' rispondono le quadriche-inviluppo di Σ con un iperpiano doppio in π — cioè le quadriche-inviluppo di Σ specializzate almeno una volta che hanno per *nuclei* le quadriche-inviluppo (non degeneri o degeneri) di π —; e l'omografia Φ induce fra i punti di π' e le quadriche-inviluppo di π una corrispondenza φ che, al pari di Φ, è un'omografia.

Ora in Φ ai punti di $G_\pi^{(r-1)}$ corrispondono le quadriche-inviluppo di Σ costituite dai punti di π contati ciascuno due volte, dunque in φ ai punti di $G_\pi^{(r-1)}$ corrispondono le quadriche-inviluppo di π costituite ciascuno da un punto contato due volte; e per conseguenza $G_\pi^{(r-1)}$ è, come volevasi, una varietà di VERONESE d'indice $r-1$, la quale si trova con π e φ nelle stesse relazioni in cui $F^{(r)}$ trovasi con Σ e Φ.

Notisi che ai punti della sezione di $G_\pi^{(r-1)}$ con un iperpiano di Σ', che non la contenga, cioè con un iperpiano di π', rispondono, mediante φ i punti di una quadrica-luogo di π, sezione di π con la quadrica-luogo di Σ rispondente in Ψ al considerato iperpiano di Σ'; quindi sorge fra gli iperpiani di π' e le quadriche-luogo di π una corrispondenza omografica ψ avente per $G_\pi^{(r-1)}$ il significato che Ψ ha per $F_{(r)}$. In particolare:

Un punto e un iperpiano di π' sono polo e polare rispetto a $G_\pi^{(r-1)}$, se ad essi rispondono in φ e ψ, rispettivamente, una quadrica-inviluppo di π e la quadrica-luogo ad essa aderente.

Avvertasi che, per analogie a casi consimili, rispetto a $G_\pi^{(r-1)}$ si dirà *polo* di un *iperpiano di Σ'* il polo dell'intersezione di detto iperpiano con π'.

6. Al variare di π in Σ, $G_\pi^{(r-1)}$ varia su $F^{(r)}$ descrivendo su di essa una schiera ∞^r che diremo Γ.

Ebbene dico che:

Se σ' è un iperpiano di Σ', cui risponda in Σ, mediante Ψ, una quadrica-luogo non degenere, il luogo dei poli di σ' rispetto alle singole varietà della schiera Γ è una varietà di VERONESE *di indice r, trasformata di $F^{(r)}$ nell'omologia che ha per centro il polo di σ' rispetto ad $F^{(r)}$, per asse σ' e per invariante $-r$.*

Si indichi con Q la quadrica-luogo di Σ corrispondente a σ', con π un iperpiano di Σ, con $G_\pi^{(r-1)}$ la corrispondente varietà di Γ, con K la quadrica-inviluppo di Σ aderente a Q, con q l'intersezione di Q e π, con k la quadrica-inviluppo aderente a q (certo non indeterminata, perchè q non può essere più che semplicemente degenere). Infine sia S' il polo di σ' rispetto ad $F^{(r)}$, X' il polo di σ' rispetto a $G_\pi^{(r-1)}$.

Ad S' e X' corrispondono, in Φ e φ, rispettivamente, K e k; quindi se K_1 è la quadrica-inviluppo di Σ avente per nucleo k, ad S' e X' in Φ corrispondono K e K_1. Nella schiera individuata da K e K_1, avente per varietà base l'insieme — contato due volte — degli iperpiani tangenti a Q nei punti di q, cioè degli iperpiani tangenti a Q passanti per il polo P di π, l'unica ulteriore quadrica-inviluppo degenere è quella costituita dal punto doppio P; dunque la retta $S'X'$ taglia ulteriormente $F^{(1)}$ in un punto di $F^{(r)}$.

Segue, evidentemente, che il luogo di X' si ottiene proiettando $F^{(r)}$ da S' su $F^{(1)}$; e allora basta tener presente un'osservazione nota [5] per riconoscere la verità del teorema enunciato [6], il quale costituisce appunto l'estensione che qui si aveva in vista.

[5] Comunicata da C. Segre al Rosati (veggasi la Nota di quest'ultimo dianzi citata).

[6] Occorre appena avvertire che le considerazioni esposte nel testo suggeriscono spontaneamente una serie di problemi che forse non sarebbe inutile risolvere.

Come è noto ad $F^{(r)}$ sono collegate non solo le varietà di punto $F^{(1)}, \dots, F^{(r-1)}$ ma anche delle varietà di iperpiani $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(r)}$, delle quali la prima è l'insieme degli iperpiani tangenti ad $F^{(r)}$, l'ultima l'insieme degli iperniani ognun dei quali tocca $F^{(r)}$ nei punti di una sua $G_{\pi}^{(r-1)}$. Si potrebbero indagare le relazioni reciproche delle varietà di punti o iperpiani collegate ad $F^{(r)}$ con quelle collegate alla varietà riempita dai poli di un iperpiano a norma del teorema del n⁰ 6. Così si troverebbe in particolare che quest'ultima è toccata dagli iperpiani di $\Phi^{(r)}$.

Ancora. Sulla $F^{(r)}$, accanto alla schiera delle varietà di Veronese di indice $r-1$, rispondente alla totalità degli iperpiani di Σ, vi sono altre $r-2$ schiere di varietà di Veronese, degli indici $1, 2, \dots, r-2$, rispondenti agli insiemi di $S_1, S_2, \dots, S_{r-2}$ di Σ. Si potrebbero dunque studiare i luoghi dei poli di un iperpiano di Σ' rispetto alle varietà di queste singole schiere.