GENERALIZZAZIONE DELLE VARIETÀ DI SEGRE (*)

Siano dati p spazi lineari $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_p}$ delle dimensioni $r_1, r_2, \dots, r_p$, e siano

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{r_i+1}^{(i)}$$

le coordinate correnti di punto in S_{r_i}.

Allora, se Σ è uno spazio lineare della dimensione

$$(r_1 + 1)(r_2 + 1) \dots (r_p + 1) - 1$$

e in esso le coordinate correnti di punto sono le

$$X_{j_1, j_2, \dots, j_p} \qquad \begin{pmatrix} j_1 = 1, \dots, r_1 + 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ j_p = 1, \dots, r_p + 1 \end{pmatrix},$$

una varietà sulla quale si possa rappresentare biunivocamente, e senza eccezioni, l'insieme delle p-ple di punti *estratte* da S_{r_1}, $S_{r_2}, \dots, S_{r_p}$, cioè delle p-ple del tipo $(A_1, \dots, A_p)$, con A_i punto di S_{r_i}, si ottiene, come notoriamente fu indicato da C. SEGRE [1],

(*) *Boll. Un. Mat. Ital.*, 14 (1935), pp. 273-276.

[1] C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* («Rend. del Circ. mat. di Palermo», t. V, 1891): veggasi pure la mia Nota: *Sulle varietà di* SEGRE («Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino», vol. XLV, 1909).

considerando in Σ la varietà rappresentata dalle equazioni parametriche

$$X_{j_1, j_2, \dots, j_p} = x^{(1)}_{j_1} x^{(2)}_{j_2} \dots x^{(p)}_{j_p} ;$$

varietà che riesce della dimensione

$$r_1 + r_2 + \dots + r_p$$

e dell'ordine

$$\frac{(r_1 + r_2 + \dots + r_p)!}{r_1 ! \; r_2 ! \dots r_p !} .$$

Ebbene, con procedimento perfettamente simile può ottenersi una varietà atta a rappresentare biunivocamente, senza eccezioni, l'insieme delle p-ple di S_k *estratte* da $S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_p}$, cioè delle p-ple del tipo $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$, α_i essendo un S_k di S_{r_i}, o, più generalmente delle p-ple del tipo $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, con λ_i spazio di S_{r_i} della dimensione k_i, gli interi $k_1, k_2, \dots, k_p$ essendo p interi fissi assegnati.

Oggetto di questa breve Nota è appunto la determinazione degli ordini delle varietà, cui per tal modo si perviene.

1. Per chiarezza di discorso e comodità di notazioni trattiamo il caso $p = 2$; dopo di che, come il lettore potrà riconoscere, sarà lecito scriver senz'altro la formula che risolve il caso generale.

Abbiansi pertanto due spazi S_{r_1} ed S_{r_2} delle dimensioni r_1, r_2 e, detti k_1 e k_2 due interi fissi assegnati, con $0 \leq k_i < r_i$ $(i = 1,2)$, consideriamo le coppie di spazi del tipo (λ_1, λ_2), λ_1 essendo un S_{k_1} di S_{r_1} e λ_2 un S_{k_2} di S_{r_2}.

Posto

$$\binom{r_1 + 1}{k_1 + 1} = t_1 \quad \text{ed} \quad \binom{r_2 + 1}{k_2 + 1} = t_2 ,$$

indichiamo con

$$x^{(1)}_1, x^{(1)}_2, \dots, x^{(1)}_{t_1} \quad \text{ed} \quad x^{(2)}_1, x^{(2)}_2, \dots, x^{(2)}_{t_2}$$

le coordinate grassmanniane di λ_1 e λ_2, rispettivamente; e, detto Σ uno spazio della dimensione

$$t_1 \, t_2 - 1 ,$$

con le coordinate correnti

$$X_{j_1, j_2} \qquad \begin{pmatrix} j_1 = 1, \dots, t_1 \\ j_2 = 1, \dots, t_2 \end{pmatrix},$$

diciamo V la varietà di Σ rappresentata parametricamente dalle equazioni

$$X_{j_1, j_2} = x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(2)} \tag{1}$$

al variare di λ_1 e λ_2.

Notisi subito che (se $k_1 > 0$) nella (1) i parametri $x^{(1)}$ — e lo stesso dicasi per i parametri $x^{(2)}$ — non sono indipendenti, bensì legati, com'è ben noto, da un certo numero di equazioni quadratiche; e che, mediante la (1) l'insieme delle coppie (λ_1, λ_2) estratte da S_{r_1} ed S_{r_2} si riflette biunivocamente e senza eccezioni sull'insieme dei punti di V.

La dimensione della totalità degli S_{k_i} di S_{r_i} è

$$h_i = (k_i + 1)(r_i - k_i),$$

quindi la dimensione di V è data da

$$h = h_1 + h_2; \tag{2}$$

e per determinarne l'ordine bisognerà trovare quanti sono i punti comuni a V e ad h iperpiani di Σ.

Indichiamo con H_i (se v'è luogo a parlarne) il sistema di equazioni quadratiche intercedenti fra le coordinate $x^{(i)}$ di λ_i e siano

$$\sum_{j_1}^{1\dots t_1} \sum_{j_2}^{1\dots t_2} A_{j_1 j_2}^{(l)} X_{j_1, j_2} = 0 \qquad (l = 1, \dots, h)$$

le equazioni di h iperpiani di Σ; allora l'ordine richiesto sarà il numero delle soluzioni, con le $x^{(1)}$ — al pari delle $x^{(2)}$ — non tutte nulle, del sistema costituito dalle equazioni

$$\sum_{j_1}^{1\dots t_1} \sum_{j_2}^{1\dots t_2} A_{j_1 j_2}^{(l)} x_{j_1}^{(1)} x_{j_2}^{(2)} = 0 \qquad (l = 1, \dots, h) \tag{3}$$

insieme con i sistemi H_1 ed H_2.

Per calcolare codesto numero ricorriamo ad una ben nota applicazione del principio della conservazione del numero, cioè sostituiamo alle equazioni bilineari (3) altre h equazioni del tipo

$$\varphi_l^{(1)}\,\varphi_l^{(2)} = 0 \qquad (l = 1, \dots, h), \tag{4}$$

con le $\varphi_l^{(i)}$ forme lineari nelle $x^{(i)}$.

Perchè una qualsiasi delle equazioni (4) sia soddisfatta, bisogna che o le $x^{(1)}$ annullino il fattore $\varphi^{(1)}$ che vi comparisce, o le $x^{(2)}$ annullino il relativo fattore $\varphi^{(2)}$; d'altronde alle $x^{(i)}$, legate già dalle equazioni H_i non possono imporsi al più che $(k_i + 1)(r_i - k_i) = h_i$ condizioni semplici ulteriori, dunque, attesa la (2), per trovare il numero delle soluzioni richieste del sistema formato dalle (4) con le H_1 ed H_2 bisognerà trovare quanti sono i gruppi di valori (non tutti nulli) delle $x^{(1)}$, legati dalle H_1, e delle $x^{(2)}$, legati dalle H_2, tali che quelli annullino h_1 fattori $\varphi^{(1)}$ e questi annullino gli h_2 fattori $\varphi^{(2)}$ con gl'indici tutti diversi dagl'indici dei detti fattori $\varphi^{(1)}$.

Il numero dei gruppi di valori (non tutti nulli) delle $x^{(i)}$, legati dalle H_i, che annullano h_i fattori $\varphi^{(i)}$, non essendo altra cosa che l'ordine della *grassmanniana* rappresentante la totalità degli S_{k_i} di S_{r_i}, è dato da [2]

$$\frac{1\,!\,2\,!\dots k_i\,!\,h_i\,!}{(r_i - k_i)\,!\,(r_i - k_i + 1)\,!\dots r_i\,!}$$

la scelta di h_1 fattori $\varphi^{(1)}$ nell'insieme delle h $\varphi^{(1)}$ può farsi in

$$\binom{h}{h_1} = \frac{(h_1 + h_2)\,!}{h_1\,!\,h_2\,!}$$

modi diversi, dunque:

L'ordine di V è dato da

$$\frac{1\,!\,2\,!\dots k_1\,!\,1\,!\,2\,!\dots k_2\,!\,(h_1 + h_2)\,!}{(r_1 - k_1)\,!\,(r_1 - k_1 + 1)\,!\dots r_1\,!\,(r_2 - k_2)\,!\,(r_2 - k_2 + 1)\dots r_2\,!}\,. \tag{5}$$

[2] Cfr. F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare*, (« Ann. di Matem. pura ed applicata », 3a serie, t. XXIV).

Di qua si ricava, ad es., che:

Dati un S_1 *ed un* S_3, *la totalità delle coppie che si ottengono associando ciascun punto dell'*S_1 *con ciascuna retta dell'*S_3 *può esser rappresentata biunivocamente sopra una* V_5^{10} *di un* S_{11};

e che:

Dati due S_3, *la totalità delle coppie che si ottengono associando ciascuna retta dell'uno con ciascuna retta dell'altro può esser rappresentata biunivocamente sopra una* V_8^{280} *di un* S_{35}.

Notisi — e l'osservazione è senz'altro generalizzabile — che quella V_5^{10} contiene una schiera ∞^4 di S_1 e una schiera ∞^1 di V_4^2, mentre questa V_8^{280} contiene due schiere ∞^4 di V_4^2 e che, in entrambi i casi, due enti hanno nessun punto, o un sol punto, comune, secondo che sono elementi di una medesima schiera o di schiere diverse.

2. Quanto è stato detto fin qua mostra come possa definirsi col procedimento di Segre una varietà atta a rappresentare biunivocamente, e senza eccezioni, la totalità delle p-ple del tipo $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ con λ_i spazio di S_{r_i} della dimensione k_i; e che tale varietà, posto

$$h_i = (k_i + 1)\,(r_i - k_i) \qquad (i = 1, \dots, p),$$

risulta della dimensione

$$h = h_1 + \dots + h_p,$$

dell'ordine

$$\frac{h\,!\,\prod_i^{1\dots p}(1\,!\,2\,!\dots k_i\,!)}{\prod_i^{1\dots p}(r_i - k_i)\,!\,(r_i - k_i + 1)\,!\dots r_i\,!},$$

e immersa in uno spazio della dimensione

$$\prod_i^{1\dots p}\binom{r_i + 1}{k_i + 1} - 1.$$