SULLE ALGEBRE PSEUDONULLE DI ORDINE MASSIMO(*)

In una Nota recentemente presentata alla « R. Accademia dei Lincei » ho stabilito che, se un'algebra pseudonulla è di ordine n ed indice r, detto δ il suo *scarto*, cioè la differenza fra il suo ordine e quello del suo quadrato, si ha

$$n \leq \delta + \delta^2 + \dots + \delta^{r-1} = \frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1 ;$$

che se poi si suppone che l'algebra sia commutativa si ha, più precisamente,

$$n \leq \binom{\delta}{1} + \binom{\delta + 1}{2} + \dots + \binom{\delta + r - 2}{r - 1} = \binom{\delta + r - 1}{\delta} - 1.$$

Ho stabilito inoltre che esistono — in qualsivoglia corpo numerico — algebre pseudonulle (non commutative) di scarto δ, indice r ed ordine

$$\frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1,$$

ed algebre pseudonulle commutative di scarto δ, indice r ed ordine

$$\binom{\delta + r - 1}{\delta} - 1;$$

(*) *Ann. di Mat.*, (4) 14 (1936) pp. 1-14.

sì le une, che le altre, riuscendo equivalenti fra di loro, quando sia fissato il corpo nel quale si intendono definite [1].

Sono queste le algebre pseudonulle che, per semplicità di discorso, diremo di *ordine massimo*, e che formano l'oggetto delle seguenti considerazioni.

§ 1. Quali sono le algebre pseudonulle d'ordine massimo irriducibili

1. Le zero-algebre sono evidentemente delle algebre pseudonulle di ordine massimo; per esse l'indice vale 2 e l'ordine non differisce dallo scarto. Ora una zero-algebra è irriducibile o riducibile secondo che il suo ordine è 1 o >1; invece:

Le algebre pseudonulle d'ordine massimo e indice $r>2$ sono tutte irriducibili.

Sia infatti P una tale algebra con lo scarto δ; di guisa che il suo ordine sarà dato da

$$n=\delta+\delta^2+\dots+\delta^{r-1}, \tag{1}$$

oppure da

$$n=\binom{\delta}{1}+\binom{\delta+1}{2}+\dots+\binom{\delta+r-2}{r-1}, \tag{2}$$

secondo che essa non è od è commutativa; e supponiamo, se è possibile, che P si spezzi nella somma diretta di due algebre P_1 e P_2 con gli ordini n_1, n_2 e gli scarti δ_1 e δ_2.

Insieme con

$$P=P_1\dotplus P_2,$$

sarà pure

$$P^2=P_1^2\dotplus P_2^2;$$

quindi sarà

$$n=n_1+n_2, \tag{3}$$

ed

$$(n-\delta)=(n_1-\delta_1)+(n_2-\delta_2);$$

[1] G. Scorza, *Sulla struttura delle algebre pseudonulle* [« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », serie VI, vol. XX (1934), pp. 143-149].

da cui si trae

$$\delta = \delta_1 + \delta_2. \tag{4}$$

Se gli indici di P_1 e P_2 si indicano con r_1 ed r_2 si ha

$$r \geq r_1 \,, \quad r \geq r_2$$

— in una almeno di queste relazioni valendo il segno inferiore —; quindi sarà

$$\begin{cases} n_1 \leq \delta_1 + \delta_1^2 + \dots + \delta_1^{r_1-1} \leq \delta_1 + \delta_1^2 + \dots + \delta_1^{r-1} \,, \\ n_2 \leq \delta_2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_2^{r_2-1} \leq \delta_2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_2^{r-1} \,; \end{cases} \tag{5}$$

che se poi P è commutativa, indi sono tali anche P_1 e P_2, sarà

$$\begin{cases} n_1 \leq \binom{\delta_1}{1} + \binom{\delta_1+1}{2} + \dots + \binom{\delta_1+r_1-2}{r_1-1} \leq \binom{\delta_1}{1} + \binom{\delta_1+1}{2} + \dots + \binom{\delta_1+r-2}{r-1} \,, \\ n_2 \leq \binom{\delta_2}{1} + \binom{\delta_2+1}{2} + \dots + \binom{\delta_2+r_2-2}{r_2-1} \leq \binom{\delta_2}{1} + \binom{\delta_2+1}{2} + \dots + \binom{\delta_2+r-2}{r-1} . \end{cases} \tag{6}$$

Ora, se $r > 2$, le (5) sono incompatibili con le (1), (3) e (4), perchè, per $s = 2 \,, 3 \,, 4 \,, \dots$, è

$$(\delta_1 + \delta_2)^s > \delta_1^s + \delta_2^s \,,$$

e le (6) sono incompatibili con le (2), (3) e (4), perchè, per $s = 1 \,, 2 \,, \dots$, è [2]

$$\binom{\delta_1 + \delta_2 + s}{s+1} > \binom{\delta_1 + s}{s+1} + \binom{\delta_2 + s}{s+1} \,;$$

dunque è assurdo supporre che l'algebra P sia riducibile.

[2] Per convincersene basta osservare che fra le combinazioni ad $s+1$ ad $s+1$ dei $\delta_1 + \delta_2 + s$ oggetti

$$a_1 \,, a_2 \,, \dots \,, a_{\delta_1} \,, b_1 \,, b_2 \,, \dots \,, b_{\delta_2} \,, c_1 \,, c_2 \,, \dots \,, c_s$$

quelle formate con gli oggetti a e c sono tutte diverse da quelle formate con gli oggetti b e c — in quanto ciascuna delle prime contiene almeno un oggetto a e ciascuna delle seconde almeno un oggetto b —, e che le combinazioni di queste due specie sono poi tutte diverse da quelle che contengono almeno un oggetto a e almeno un oggetto b.

Quando lo scarto di un'algebra pseudonulla è l'unità, l'algebra è potenziale (3), dunque, come già è stato dedotto a titolo di corollario da un criterio di riducibilità per le algebre potenziali stabilito altrove (4):

Le algebre pseudonulle potenziali sono irriducibili.

Occorre appena avvertire che qui non è il caso di porre nell'enunciato la limitazione $r > 2$, perchè una zero-algebra potenziale è del 1^0 ordine e quindi necessariamente irriducibile.

§ 2. Comportamento delle algebre pseudonulle d'ordine massimo rispetto agli automoduli di algebre che le contengano come sotto-algebre invarianti

2. Il comportamento cui allude il titolo di questo paragrafo è singolarmente semplice, quando si intendano escluse le zero-algebre: giacchè, come ora passiamo a dimostrare:

Se u è un automodulo di un'algebra A contenente come sotto-algebra invariante un'algebra pseudonulla P d'ordine massimo, con lo scarto δ e l'indice $r > 2$, gli elementi di P in u o hanno tutti un nullifico o hanno tutti un modulo (5).

Se P è commutativa, l'asserzione qui fatta rientra in un teorema che ho già precedentemente stabilito (6); giova dunque supporre che P non sia commutativa, indi di ordine

$$\frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1.$$

Se S_1 è un sistema complementare di P^2 in P si ha

$$P = S_1 + S_1^2 + \dots + S_1^{r-1}$$

e i sistemi $S_1, S_1^2, \dots, S_1^{r-1}$ — degli ordini rispettivi $\delta, \delta^2, \dots, \delta^{r-1}$ — sono complementari in P.

(3) Loc. cit. (1), pag. 146.

(4) G. Scorza, *Le algebre per ciascuna delle quali la sotto-algebra eccezionale è potenziale* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. 70 (1934-35-XIII).

(5) Per $\delta = 1$ il teorema del testo si riduce a quello per le algebre pseudonulle potenziali dimostrato al luogo citato in (4).

(6) Loc. cit. (4), ultima annotazione a piè di pagina.

Siano $v_1, v_2, \ldots, v_\delta$, δ elementi indipendenti di S_1; allora i prodotti del tipo

$$v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_h} \qquad (h = 2, 3, \ldots, r-1; \; i_1, i_2, \ldots, i_h = 1, 2, \ldots, \delta)$$

saranno δ^h elementi indipendenti di S_1^h e quindi gli elementi v insieme con tutti questi prodotti costituiranno un aggregato di unità di P.

Attesa l'invarianza di P in A, i prodotti uv_{i_1} $(i_1 = 1, \ldots, \delta)$ appartengono a P al pari degli elementi v_{i_1}; sussisteranno dunque delle eguaglianze del tipo

$$(7) \qquad uv_{i_1} = \sum_{i_2}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_1 i_2} v_{i_2} + \sum_{i_2 i_3}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_1 i_2 i_3} v_{i_2} v_{i_3} + \ldots + \sum_{i_2,\ldots,i_r}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_r} v_{i_2} \ldots v_{i_r} \qquad (i_1 = 1 \ldots \delta),$$

dove le α saranno numeri opportuni del corpo in cui A è definita e che diremo Γ.

Dalle (7) si trae

$$u^2 v_{i_1} = \sum_{i_2}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_1 i_2} uv_{i_2} + \sum_{i_2 i_3}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_1 i_2 i_3} uv_{i_2} v_{i_3} + \ldots$$

$$(8) \qquad = \sum_{i_2}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_1 i_2} \left[\sum_{j_2}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_2 j_2} v_{j_2} + \sum_{j_2 j_3}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_2 j_2 j_3} v_{j_2} v_{j_3} + \ldots \right]$$

$$+ \sum_{i_2 i_3}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_1 i_2 i_3} \left[\sum_{j_2}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_2 j_2} v_{j_2} + \sum_{j_2 j_3}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_2 j_2 j_3} v_{j_2} v_{j_3} + \ldots \right] v_{i_3}$$

$$+ \ldots\ldots;$$

ma è

$$u^2 v_{i_1} = uv_{i_1},$$

dunque dal paragone delle (7) e (8) si deduce intanto che deve essere

$$\sum_{i_2}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_1 i_2} v_{i_2} = \sum_{i_2 j_2}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_1 i_2} \alpha_{i_2 j_2} v_{j_2},$$

ossia

$$(9) \qquad \alpha_{i_1 j_2} = \sum_{i_2}^{1\ldots\delta} \alpha_{i_1 i_2} \alpha_{i_2 j_2} \qquad (i_1, j_2 = 1, \ldots, \delta).$$

Le (9) esprimono che la matrice d'ordine δ

$$\| \alpha_{ij} \| \qquad (i, j = 1, \ldots, \delta)$$

coincide col proprio quadrato; e dunque codesta matrice o è nulla, o è un automodulo.

3. Se $w_1, w_2, \ldots, w_\delta$ sono altri δ elementi indipendenti di S_1 e si suppone che le v_i si esprimano in funzione delle w_i mediante le formule

$$v_i = \sum_j^{1\ldots\delta} \gamma_{i,j} w_j, \tag{10}$$

con le $\gamma_{i,j}$ numeri di Γ, il determinante $|\gamma_{i,j}|$ sarà diverso da zero, e detto $\gamma'_{i,j}$ il reciproco di $\gamma_{j,i}$ nella matrice $\|\gamma_{i,j}\|$, si avrà

$$w_i = \sum_j^{1\ldots\delta} \gamma'_{i,j} v_j. \tag{11}$$

Ciò posto, in virtù delle (11) e (7) sarà

$$\begin{aligned} uw_{i_1} &= \sum_{j_1}^{1\ldots\delta} \gamma'_{i_1 j_1} uv_{j_1} = \sum_{j_1}^{1\ldots\delta} \gamma'_{i_1 j_1} \left[\sum_{j_2}^{1\ldots\delta} \alpha_{j_1 j_2} v_{j_2} + \sum_{j_2 j_3}^{1\ldots\delta} \alpha_{j_1 j_2 j_3} v_{j_2} v_{j_3} + \ldots \right] \\ &= \sum_{j_1 j_2}^{1\ldots\delta} \gamma'_{i_1 j_1} \alpha_{j_1 j_2} v_{j_2} + \sum_{j_1 j_2 j_3}^{1\ldots\delta} \gamma'_{i_1 j_1} \alpha_{j_1 j_2 j_3} v_{j_2} v_{j_3} + \ldots \\ &= \sum_{j_1 j_2 j_3}^{1\ldots\delta} \gamma'_{i_1 j_1} \alpha_{j_1 j_2} \gamma_{j_2 j_3} w_{j_3} + \sum_{j_1 \ldots j_5}^{1\ldots\delta} \gamma'_{i_1 j_1} \alpha_{j_1 j_2 j_3} \gamma_{j_2 j_4} \gamma_{j_3 j_5} w_{j_4} w_{j_5} + \ldots; \end{aligned}$$

di guisa che, se si pone

$$uw_{i_1} = \sum_{j_2}^{1\ldots\delta} \beta_{i_1 i_2} w_{i_2} + \sum_{i_2 i_3}^{1\ldots\delta} \beta_{i_1 i_2 i_3} w_{i_2} w_{i_3} + \ldots, \tag{12}$$

sarà

$$\beta_{i_1 i_2} = \sum_{j_1 j_2}^{1\ldots\delta} \gamma'_{i_1 j_1} \alpha_{j_1 j_2} \gamma_{j_2 i_2}. \tag{13}$$

Le (13) esprimono che la matrice $\|\beta_{ij}\|$ è la trasformata di $\|\alpha_{ij}\|$ mediante $\|\gamma_{ij}\|$; per conseguenza il passare in S_1 dagli elementi v_i agli elementi w_i ha per effetto di far passare dalle (7) alle formule (12), nelle quali al posto della matrice $\|\alpha_{ij}\|$ si presenta la sua trasformata $\|\beta_{ij}\|$.

Ora se $\|\alpha_{ij}\|$ è una matrice automodulo di caratteristica δ_1 $(0 < \delta_1 \leq \delta)$, fra le sue trasformate ve n'è necessariamente una per la quale all'infuori dei primi δ_1 elementi principali che sono eguali ad 1 tutti gli altri sono nulli [7], dunque, premettendo, ove occorra, un opportuno cambiamento di elementi indipendenti in S_1, si può supporre che nelle (7) per la matrice $\|\alpha_{ij}\|$ o si abbia

$$\alpha_{ij} = 0 \qquad \text{per } i, j = 1, \ldots, \delta,$$

o si abbia

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{\delta_1\delta_1} = 1,$$

e le rimanenti α_{ij} nulle.

Indicando, a volta a volta, con le $x_i^{(2)}$ degli opportuni elementi di P^2, nel primo caso si avrà

$$uv_i = x_i^{(2)} \qquad (i = 1, \ldots, \delta);$$

nel secondo

$$uv_i = v_i + x_i^{(2)}, \qquad \text{per } i = 1, \ldots, \delta_1,$$

e

$$uv_i = x_i^{(2)}, \qquad \text{per } i = \delta_1 + 1, \ldots, \delta.$$

4. Poniamoci nel primo caso e consideriamo i δ elementi di P:

$$v_1 - x_1^{(2)}, \ldots, v_\delta - x_\delta^{(2)}. \tag{14}$$

Per ognuno di essi u è un nullifico sinistro, giacchè

$$u\,(v_i - x_i^{(2)}) = uv_i - ux_i^{(2)} = uv_i - u\,.\,uv_i = uv_i - uv_i = 0\,;$$

inoltre nessuna loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli appartiene a P^2, perchè se fosse

$$\lambda_1\,(v_1 - x_1^{(2)}) + \ldots + \lambda_\delta\,(v_\delta - x_\delta^{(2)}) = x^{(2)}\,,$$

con le λ numeri non tutti nulli di Γ e $x^{(2)}$ in P^2, l'espressione

$$\lambda_1\, v_1 + \ldots + \lambda_\delta\, v_\delta$$

[7] Vedi, per es., G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), pag. 419.

riescirebbe eguale all'altra

$$\lambda_1 x_1^{(2)} + \dots + \lambda_\delta x_\delta^{(2)} + x^{(2)}$$

e sarebbe un elemento di P^2, che, attesa l'indipendenza di $v_1,\dots,v_\delta$, sarebbe diverso da zero; mentre, per ipotesi, S_1 è complementare a P^2 in P.

Segue, in particolare, che gli elementi (14) sono indipendenti e che, posto

$$v'_i = v_i - x_i^{(2)} \qquad (i = 1, \dots, \delta),$$

il sistema S'_1, d'ordine δ, generato da $v'_1, \dots, v'_\delta$ riesce complementare a P^2 in P; di guisa che sarà

$$P = S'_1 + S'^2_1 + \dots + S'^{r-1}_1 .$$

Ma u, essendo un nullifico per tutti gli elementi (14), riesce tale per ogni elemento di S'_1, indi di $S'^2_1, \dots, S'^{r-1}_1$, cioè di P, dunque è dimostrato, intanto, che nel caso attuale u è un nullifico sinistro per ogni elemento di P.

5. Poniamoci ora nel secondo caso e consideriamo gli elementi

$$(15) \qquad v_1 + x_1^{(2)}, \dots, v_{\delta_1} + x_{\delta_1}^{(2)}, v_{\delta_1+1} - x_{\delta_1+1}^{(2)}, \dots, v_\delta - x_\delta^{(2)} .$$

Di essi i primi δ_1 hanno in u un modulo sinistro, giacchè per $i = 1, \dots, \delta_1$

$$u\,(v_i + x_i^{(2)}) = u.uv_i = u^2 v_i = uv_i + x_i^{(2)},$$

e gli ultimi $\delta - \delta_1$ hanno in u, per quanto già è stato visto, un nullifico sinistro. Inoltre è chiaro, per ragioni già addotte, che nessuna loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli appartiene a P^2, quindi essi sono indipendenti, e, se si pone

$$v''_i = \begin{cases} v_i + x_i^{(2)}, & \text{per} \quad i = 1, \dots, \delta_1, \\ v_i - x_i^{(2)}, & \text{per} \quad i = \delta_1 + 1, \dots, \delta, \end{cases}$$

il sistema S''_1 generato dagli elementi v''_i riesce d'ordine δ e complementare a P^2 in P.

Segue che, senza venir meno alla generalità si può supporre nel caso in esame che già le v_i siano state scelte in modo che u riesca un modulo sinistro per $v_1, \dots, v_{\delta_1}$ ed un nullifico sinistro per $v_{\delta_1+1}, \dots, v_\delta$.

Dico ora che non può essere $\delta_1 < \delta$; ossia che *u è modulo sinistro per tutte le $v_1, \dots, v_\delta$.*

Supponiamo, se è possibile, che ciò non sia, di guisa che u sarà certo per v_δ un nullifico sinistro.

Sarà

$$v_1 u \,.\, v_\delta = v_1 \,.\, uv_\delta = 0\,,$$

e quindi, se si pone

$$(16)\qquad v_1 u = \sum_{j_1}^{1\dots\delta} \varrho_{j_1} v_{j_1} + \sum_{j_1 j_2}^{1\dots\delta} \varrho_{j_1 j_2} v_{j_1} v_{j_2} + \dots + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{r-1}}^{1\dots\delta} \varrho_{j_1 j_2 \cdots j_{r-1}} v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_{r-1}}\,,$$

badando che $P^r = 0$, risulterà

$$(17)\qquad \sum_{j_1}^{1\dots\delta} \varrho_{j_1} v_{j_1} v_\delta + \sum_{j_1 j_2}^{1\dots\delta} \varrho_{j_1 j_2} v_{j_1} v_{j_2} v_\delta + \dots + \sum_{j_1 \cdots j_{r-2}}^{1\dots\delta} \varrho_{j_1 \cdots j_{r-2}} v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_{r-2}} v_\delta = 0.$$

Attesa l'indipendenza dei prodotti delle v_i a due a due, a tre a tre, ..., ad $r-1$ ad $r-1$, dalla (17) si trae che sono nulle tutte le ϱ con $1, 2, \dots, r-2$ indici; per conseguenza la (16) si riduce a

$$v_1 u = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{r-1}}^{1\dots\delta} \varrho_{j_1 j_2 \cdots j_{r-1}} v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_{r-1}}\,.$$

Ma allora, essendo

$$uv_1 = v_1$$

e $P^r = 0$, sarà

$$v_1^2 = v_1 \cdot uv_1 = v_1 u \cdot v_1 = \sum_{j_1 \cdots j_{r-1}}^{1\dots\delta} \varrho_{j_1 \cdots j_{r-1}} v_{j_1} \dots v_{j_{r-1}} v_1 = 0.$$

Questa conseguenza contrasta con l'ipotesi che sia $r > 2$; dunque u è, come volevasi, un modulo sinistro per tutte le v_i, indi per ogni elemento di P.

6. Giunti a questo punto è dimostrato che in u gli elementi di P hanno tutti o un nullifico sinistro o un modulo sinistro.

In maniera simile si dimostrerebbe che in u gli elementi di P hanno tutti o un nullifico destro o un modulo destro; e quindi perchè il teorema enunciato a principio del n^0 2 sia del tutto stabilito basterà far vedere che, per es., u non può essere per gli elementi di P un modulo sinistro e un nullifico destro.

Ora ciò è immediato: e, infatti, se fosse

$$uv_i = v_i \quad \text{e} \quad v_i u = 0\,,$$

sarebbe

$$v_i^2 = v_i \cdot uv_i = v_i u \cdot v_i = 0.$$

§ 3. Le algebre che hanno come sotto-algebre eccezionali algebre pseudonulle d'ordine massimo e indice > 2.

7. Per procedere alla determinazione delle algebre, di cui nel titolo di questo paragrafo, indichiamo con A un'algebra la cui sotto-algebra eccezionale E sia un'algebra pseudonulla d'ordine massimo con l'indice $r > 2$ [8].

Se A è pseudonulla, essa coincide addirittura con E; in caso contrario essa è certo dotata di automoduli.

Poniamoci in questa ipotesi e sia u un automodulo principale di A; allora potrà scriversi [9]

$$A = u\,A\,u + S, \tag{18}$$

con $u\,A\,u$ ed S complementari in A e con $S \leq E$.

Per quanto precede, in u, gli elementi di E hanno tutti o un nullifico o un modulo: intanto $u\,A\,u$ è l'insieme degli elementi di A che hanno un modulo in u, dunque $u\,A\,u$ o non contiene alcun elemento non nullo di E o li contiene tutti. Segue che è $S = E$, oppure $S = 0$.

Se $S = E$, ossia se u è un nullifico per ogni elemento di E, accanto all'eguaglianza, in cui si converte la (18),

$$A = u\,A\,u + E,$$

(8) Per alcuni dei ragionamenti che seguono potrei rimandare alla nota citata in (4): ho creduto più comodo per il lettore riprodurli rapidamente.

(9) Loc. cit. (7), pag. 277.

si hanno le altre

$$u\,A\,u \cdot E = uA \cdot uE = 0, \quad E \cdot u\,A\,u = Eu \cdot Au = 0\,;$$

e dunque A è la somma diretta di $u\,A\,u$ ed E. Intanto $u\,A\,u$ è priva di elementi eccezionali, perchè se ne avesse essi sarebbero eccezionali anche per A, pur non appartenendo ad E, dunque:

Nell'ipotesi attuale A è la somma diretta di un'algebra semisemplice e di E.

8. Supponiamo in secondo luogo che sia $S = 0$, cioè

$$A = u\,A\,u,$$

di guisa che A sarà dotata di modulo e questo sarà u.

Indichiamo con $(p_1, p_2, \dots, p_t)$ la segnatura di A ([10]) e cominciamo dall'esaminare il caso in cui è $t = 1$.

9. Allora la segnatura di A è (p_1), e dunque A può considerarsi ([11]) come il prodotto diretto di due sue sotto-algebre B e C, aventi lo stesso suo modulo, delle quali una, poniamo B, è a modulo primitivo e l'altra, C, è regolare e dell'ordine p_1^2. Inoltre se E_1 è la sotto-algebra eccezionale di B, si ha

$$E = E_1 \times C,$$

indi, qualsiasi l'intero positivo s,

$$E^s = E_1^s \times C^s = E_1^s \times C\,;$$

per conseguenza l'indice di E_1 eguaglia quello, r, di E, e, se gli scarti di E ed E_1 si indicano con δ e δ_1, essendo

$$E = E_1 \times C \text{ ed } E^2 = E_1^2 \times C,$$

sarà

(19) $$\delta = \delta_1\, p_1^2,$$

Ciò posto, dico che *è necessariamente* $p_1 = 1$.

([10]) Loc. cit. ([7]), pag. 355.
([11]) Loc. cit. ([7]), pag. 370.

Infatti si indichino con n ed n_1 gli ordini di E ed E_1, per modo che sarà

(20) $$n = n_1 p_1^2 .$$

Se E non è commutativa, si ha

(21) $$n = \delta + \delta^2 + \dots + \delta^{r-1}$$

ed

(22) $$n_1 \leq \delta_1 + \delta_1^2 + \dots + \delta_1^{r-1} ;$$

se invece E, indi anche E_1 è commutativa, si ha

(23) $$n = \binom{\delta}{1} + \binom{\delta+1}{2} + \dots + \binom{\delta+r-2}{r-1}$$

ed

(24) $$n_1 \leq \binom{\delta_1}{1} + \binom{\delta_1+1}{2} + \dots + \binom{\delta_1+r-2}{r-1} ;$$

ora le (21) e (22), e così le (22) e (23), essendo $r > 2$, non potrebbero coesistere con le (19) e (20), se fosse $p_1 > 1$, dunque si ha, come volevasi $p_1 = 1$.

Si conclude intanto che:

Nel caso in esame A è a modulo primitivo, cioè l'algebra $A - E$ è primitiva.

10. La proposizione, cui ora siamo pervenuti, può essere ulteriormente precisata, se si suppone che il corpo numerico — diciamo Γ — entro il quale è data, sia infinito o finito, secondo che tale è il suo sottocorpo fondamentale.

Dico infatti che:

Sotto quest'ipotesi l'algebra primitiva $A - E$ è del 1° ordine.

Sia $[x]$ la classe mod E individuata dall'elemento x di A e sia

$$\varphi(\xi) = \xi^\nu + \alpha_1 \xi^{\nu-1} + \dots + \alpha_{\nu-1} \xi + \alpha_\nu = 0$$

l'equazione minima dell'elemento $[x]$ di $A - E$. Sarà $\varphi(\xi)$ irriducibile in Γ; di più, per un ragionamento che ho esposto altrove ([12]), è lecito supporre che $\varphi(\xi) = 0$ sia anche l'equazione minima di x in

([12]) G. SCORZA, *Sopra un teorema fondamentale della teoria delle algebre* [« Rendiconti R. Accademia dei Lincei », serie VI, vol. XX, pp. 65-72].

A, per modo che sarà

(25) $$x^2 + \alpha_1 x^{\nu-1} + \dots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_\nu u = 0.$$

Indichiamo con $v_1, \dots v_\delta$, δ elementi di E, tali che, insieme con i loro prodotti a due a due, a tre a tre, ..., ad $r-1$ ad $r-1$, costituiscano un aggregato di unità di E: naturalmente di codesti prodotti quelli distinti saranno

$$\delta^2 + \dots + \delta^{r-1},$$

o, soltanto,

$$\binom{\delta+1}{2} + \dots + \binom{\delta+r-2}{r-1},$$

secondo che E si suppone non commutativa o commutativa.

Attesa l'invarianza di E in A il prodotto xv_i sarà al pari di v_i un elemento di E e quindi si avrà, indicando con le λ dei numeri convenienti di Γ,

(26) $$xv_i = \sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{ij} v_j + \sum_{j_1 j_2}^{1\dots\delta} \lambda_{i j_1 j_2} v_{j_1} v_{j_2} + \dots + \sum_{j_1 \dots j_{r-1}}^{1\dots\delta} \lambda_{j_1 \dots j_{r-1}} v_{j_1} \dots v_{j_{r-1}} \qquad (i = 1, \dots, \delta).$$

Per s intero positivo qualsiasi poniamo

$$\| \lambda_{ij}^{(s)} \| = \| \lambda_{i,j} \|^s ;$$

sarà, tralasciando di scrivere i termini che stanno certo in E^2:

(27) $$\begin{cases} x^2 v_i = \sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{ij} xv_j + \dots = \sum_{j,k}^{1\dots\delta} \lambda_{ij} \lambda_{jk} v_k + \dots = \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik}^{(2)} v_k + \dots \\ x^3 v_i = \sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{ij}^{(2)} xv_j + \dots = \sum_{j,k}^{1\dots\delta} \lambda_{ij}^{(2)} \lambda_{jk} v_k + \dots = \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik}^{(3)} v_k + \dots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^\nu v_i = \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik}^{(\nu)} v_k \dots ; \end{cases}$$

ma dalla (25) si trae

$$x^\nu v_i + \alpha_1 x^{\nu-1} v_i + \dots + \alpha_{\nu-1} xv_i + \alpha_\nu v_i = 0,$$

dunque, per le (27), sarà

$$(28) \qquad \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik}^{(\nu)} v_k + \alpha_1 \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik}^{(\nu-1)} v_k + \dots + \alpha_{\nu-1} \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik} v_k + \alpha_\nu v_i + \dots = 0.$$

Poichè le v_i sono indipendenti dai termini di E^2, la (28) esige che sia

$$(29) \qquad \lambda_{ik}^{(\nu)} + \alpha_1 \lambda_{ik}^{(\nu-1)} + \dots + \alpha_{\nu-1} \lambda_{ik} = \begin{cases} -\alpha_\nu, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Per procedere innanzi giova ora distinguere il caso in cui E è commutativa da quello in cui non è tale.

Nella prima alternativa è, qualunque siano i e k nella successione $1, 2, \dots, \delta$,

$$xv_i\, v_k = xv_k\, v_i\,;$$

ma, per le (26), tralasciando di scrivere i termini che stanno certo in E^3, è

$$xv_i\, v_k = xv_i \cdot v_k = \sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{ij} v_j v_k + \dots,$$

$$xv_k\, v_i = xv_k \cdot v_i = \sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{kj} v_j v_i + \dots,$$

dunque deve essere

$$(30) \qquad \sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{ij} v_j v_k = \sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{kj} v_j v_i\,.$$

Dalla (30) si deduce, supposto $i \neq k$,

$$\lambda_{ii} = \lambda_{kk}$$

e

$$\lambda_{ij} = 0 \text{ per } j \neq i, \; \lambda_{kj} = 0 \text{ per } j \neq k\,;$$

cosicchè, insomma indicando con λ un numero opportuno, sarà

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Ma allora, per s intero positivo qualsiasi, è

$$\lambda_{ij}^{(s)} = \begin{cases} \lambda^s, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e la (29) dà

$$\lambda^{\nu} + \alpha_1 \lambda^{\nu-1} + \dots + \alpha_{\nu-1} \lambda + \alpha_\nu = 0.$$

Ciò significa che λ è una radice dell'equazione $\varphi(\xi) = 0$, e allora, poichè questa è irriducibile, deve essere necessariamente $\nu = 1$.

Segue che $[x]$ è un multiplo scalare del modulo $[u]$ di $A - E$; ma $[x]$ è un qualsiasi elemento di $A - E$, dunque $A - E$ è, come volevasi, di ordine 1.

Supponiamo ora che E non sia commutativa e poniamo

$$(31) \qquad v_i x = \sum_j^{1\dots\delta} \mu_{ij} v_j + \sum_{j_1 j_2}^{1\dots\delta} \mu_{j_1 j_2} v_{j_1} v_{j_2} + \dots + \sum_{j_1 \dots j_{r-1}}^{1\dots\delta} \mu_{j_1 \dots j_{r-1}} v_{j_1} \dots v_{j_{r-1}} \qquad (i = 1 \dots \delta).$$

Sarà, tralasciando di scrivere i termini che stanno certo in E^3,

$$v_i x v_i = v_i \cdot x v_i = \sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{ij} v_i v_j + \dots,$$

$$v_i x v_i = v_i x \cdot v_i = \sum_j^{1\dots\delta} \mu_{ij} v_j v_i + \dots,$$

indi

$$\sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{ij} v_i v_j = \sum_j^{1\dots\delta} \mu_{ij} v_j v_i.$$

Di qua si trae che le $\lambda_{i,j}$ (e così le $\mu_{i,j}$) con $i \neq j$ sono tutte nulle, quindi è, per s intero positivo qualsiasi,

$$\lambda_{ik}^{(s)} = \begin{cases} \lambda_{ik}^{s}, & \text{per } i = k, \\ 0, & \text{per } i \neq k, \end{cases}$$

e la (29) dà, per $i = 1, \dots, \delta$

$$\lambda_{ii}^{\nu} + \alpha_1 \lambda_{ii}^{\nu-1} + \dots + \alpha_{\nu-1} \lambda_{ii} + \alpha_\nu = 0.$$

Segue, come più sopra che è $\nu = 1$ e che $A - E$ è del 1° ordine.

11. Possiamo riassumere le osservazioni fatte nei n$^{\text{i}}$ 8, 9 e 10 dicendo che:

Se A è dotata di modulo e la sua segnatura è del tipo (p_1), è necessariamente $p_1 = 1$, ossia A è a modulo primitivo; che, se, poi, *il corpo nel quale A è data, è infinito o finito, secondo che tale è il suo sottocorpo fondamentale, A è la somma (non diretta) di E e dell'algebra del 1º ordine generata dal suo modulo.*

12. Supponiamo ora che la segnatura di A sia $(p_1, \dots, p_t)$, con $t > 1$.

Allora sussiste per A un'eguaglianza del tipo ([13])

$$A = H_1 \dotplus H_2 \dotplus \dots \dotplus H_t + N,$$

dove H_i è un'algebra con modulo di segnatura (p_i), $N \leq E$ ed $H_1, \dots, H_t$ sono complementari in A.

Se il modulo di H_i si indica con u_i, si ha

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_t$$

e gli automoduli u_i sono a due a due mutuamente nullifici.

Per quanto precede, in ciascuno degli automoduli u_i, gli elementi di E hanno o tutti un modulo, o tutti un nullifico; d'altronde, se in uno degli automoduli u_i essi hanno un modulo, in tutti gli altri hanno dei nullifici, dunque, giacchè, per l'ipotesi quivi in discussione, in u hanno un modulo, essi avranno un modulo in uno degli u_i, poniamo in u_1 e dei nullifici in $u_2, \dots, u_t$.

Ciò posto, basta ricordare che H_i è l'insieme degli elementi di A aventi per modulo u_i e che un elemento è eccezionale per una qualsiasi delle H_i quando, e solo quando, sia tale per A, per concludere che $E < H_1$, che $N = 0$, che le algebre $H_2, \dots, H_t$ sono semplici e che dunque A è la somma diretta di H_1 e dell'algebra semi-semplice

$$H_2 \dotplus \dots \dotplus H_t.$$

Qui per H_1 può esser ripetuto naturalmente quanto nei nⁱ 9, 10, 11 è stato detto per A; quindi è $p_1 = 1$ ed H_1 è a modulo primitivo. Che se Γ è infinito o finito, secondo che tale è il suo sottocorpo fondamentale, H_1 è semplicemente la somma (non diretta) di E e dell'algebra del 1⁰ ordine costituita dai multipli scalari di u_1.

13. Raccogliendo in un enunciato complessivo tutto quanto siamo venuti dicendo in questo paragrafo, si ha il seguente teorema:

([13]) Loc. cit. ([7]), pp. 374-375.

Se A è un'algebra nel corpo numerico Γ avente per sotto-algebra eccezionale un'algebra pseudonulla E d'ordine massimo e indice > 2:

1) *o A è priva di modulo ed allora o coincide con E o è la somma diretta di E e di un'algebra semi-semplice;*

2) *o A è dotata di modulo ed allora essa o è a modulo primitivo o è somma diretta di una tale algebra e di un'algebra semi-semplice.*

Aggiungasi che, se Γ è infinito o finito, secondo che tale è il suo sottocorpo fondamentale, ed A è a modulo primitivo, essa è addirittura la somma (non diretta) di E e dell'algebra costituita dai multipli scalari del modulo.