ANALYSE

DE SES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

FAITE PAR HENRI POINCARÉ.

Acta Mathematica, t. 38, p. 110, 114-115 (1921).

XX. — Développement de la Fonction perturbatrice [120, 168, 173, 196, 206, 207, 209, 278].

Je me suis occupé de la fonction perturbatrice à plusieurs points de vue différents.

J'ai d'abord cherché la valeur approchéee des coefficients des termes de rang très élevé. M. Flamme avait déjà employé pour cet objet la méthode de M. Darboux sur les fonctions de très grands nombres. Mais comme cette méthode sous sa forme primitive ne s'appliquait qu'aux fonctions d'une seule variable, M. Flamme devait donc décomposer chaque terme en une somme de produits, où chacun des facteurs ne dépendait que d'une seule anomalie moyenne. J'ai préféré considérer directement la fonction comme dépendant des deux anomalies moyennes. Des procédés analogues sont encore, comme je l'ai montré, applicables dans ce cas. Seulement ils exigent une discussion; j'ai donné les principes qui doivent diriger cette discussion et j'en ai fait l'application dans un cas simple [278].

On peut aussi considérer chaque coefficient comme fonction des excentri-

cités et des inclinaisons, étudier les divers modes de développement de ces fonctions et chercher les conditions de leur convergence. Les conditions auxquelles j'arrive [209] sont relativement simples.

On peut enfin chercher s'il y a des relations entre les divers coefficients. J'en ai trouvé un certain nombre [196, 206, 207].

Dans toutes ces recherches, je me suis servi des relations de ces coefficients avec les périodes de certaines intégrales doubles.

XXII. — Astronomie, Questions diverses [31, 43, 58, 93, 114, 152, 195, 202, 213, 217, 281].

On a vu plus haut quel rôle jouent en Astronomie les séries trigonométriques.

J'ai donc au point de vue de ces applications été amené pour contribuer à la solution de cette question à étudier les conditions de convergence des séries trigonométriques [43, 93]. J'ai reconnu ainsi deux faits principaux :

1° Si une pareille série est absolument convergente pour certaines valeurs du temps, elle l'est éternellement; il n'en est plus de même quand la convergence n'est plus absolue;

2° Une même fonction ne peut pas être représentée par deux séries différentes absolument convergentes.

Je n'ai pu résoudre, de façon à me mettre à l'abri de toute objection, la question de la convergence des séries particulières de M. Lindstedt; cependant, j'ai tout lieu de penser que ces séries ne convergent pas absolument, mais que, en ordonnant convenablement les termes, on peut les rendre semi-convergentes. La convergence pourrait alors ne subsister que pendant un intervalle de temps limité.

On croit d'ordinaire qu'une fonction représentée par une série trigonométriqne absolument convergente ne peut croître au delà de toute limite. C'est même cette croyance qui sert de fondement aux démonstrations anciennes de la stabilité du système solaire et qui, depuis, a conduit les astronomes à faire tant d'efforts pour faire rentrer le temps sous les signes sinus et cosinus. Cette croyance est erronée; j'ai montré [31, 93] qu'une pareille fonction devient aussi grande que l'on veut si la convergence n'est pas uniforme. Mais il y a deux manières de croître au delà de toute limite : une fonction peut « tendre vers

l'infini ». Il arrive alors qu'elle finit par dépasser une quantité quelconque, si grande qu'elle soit, pour rester ensuite constamment supérieure à cette quantité. Une fonction peut encore subir une infinité d'oscillations successives, de façon que l'amplitude des oscillations croisse indéfiniment. J'ai montré [58] que les deux cas peuvent se présenter, en ce qui concerne la somme d'une série purement trigonométrique. En résumé, quand même on arriverait à représenter les coordonnées des astres par des séries trigonométriques convergentes, on n'aurait pas démontré la stabilité du système solaire.

J'ai ensuite [202] étudié des procédés destinés à augmenter la convergence de certaines séries trigonométriques dont divers astronomes, et en particulier M. Gyldén, avaient fait usage dans les quadratures mécaniques.

Je reviendrai plus loin sur le travail que j'ai consacré aux marées [195] et qui intéresse également l'Astronomie.

Le calcul des perturbations des comètes par les quadratures mécaniques devient particulièrement pénible quand la comète passe très près de l'astre troublant parce qu'à ce moment la distance des deux corps varie très rapidement. J'ai indiqué [213] comment un emploi judicieux des intégrales elliptiques pouvait faciliter ce calcul.

J'ai publié aussi un article [217] sur le rôle des observations du pendule en géodésie et j'ai montré comment les *seules* observations pendulaires, si elles étaient parfaites et complètes, pourraient suffire pour déterminer la forme de la Terre.

Enfin dans la Préface que j'ai écrite pour les leçons de Tisserand sur la détermination des Orbites, j'ai comparé les diverses méthodes en usage et j'ai montré qu'une orbite parabolique pourrait se déterminer à l'aide de trois observations *quelconques*, par des formules où n'entrent que des fonctions rationnelles.