SUR

LE DÉVELOPPEMENT APPROCHÉ

DE LA

FONCTION PERTURBATRICE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 112, p. 269-273 (2 février 1891).

Il arrive souvent que, les moyens mouvements étant presque commensurables, certains termes de la fonction perturbatrice acquièrent, malgré leur rang élevé, une importance considérable par suite de la présence de petits diviseurs. Il peut être nécessaire de les calculer sans connaître les termes qui précèdent ; mais le plus souvent on n'a besoin que d'une valeur approchée, parce qu'il ne s'agit que de reconnaître si ces termes sont négligeables.

Le calcul de ces valeurs approchées a déjà, à plusieurs reprises, occupé les géomètres ; le meilleur et le plus complet des travaux publiés dans cet ordre d'idées est une Thèse de M. Flamme, où cet astronome prend pour point de départ la méthode de M. Darboux sur les fonctions de très grands nombres.

J'ai cru devoir revenir sur cette question pour la raison suivante : M. Flamme commence par développer, par les procédés ordinaires, la fonction perturbatrice en une somme de termes dont chacun est le produit de deux facteurs, le premier dépendant seulement de la longitude de la première planète, et le second de la longitude de la seconde planète. C'est à ces deux facteurs qu'il applique la méthode de M. Darboux. J'ai pensé qu'il pouvait y avoir intérêt à éviter ce développement préliminaire et à appliquer directement cette méthode à la fonction perturbatrice elle-même.

Mais pour cela il faut rendre la méthode de M. Darboux applicable aux fonctions de deux variables, ce qui peut se faire sans rien changer aux principes sur lesquels elle est fondée.

Voici comment j'ai opéré. Soient l et l' les deux anomalies moyennes, u et u' les deux anomalies excentriques, R la fonction perturbatrice à développer. Soit

$$R = \sum A_{m_1 m_2} e^{(m_1 l + m_2 l')\sqrt{-1}}.$$

Je me propose de calculer la valeur approchée de $A_{m_1 m_2}$ en supposant

$$m_1 = an + b, \qquad m_2 = cn + d,$$

où n est un entier très grand, a, b, c, d des entiers finis, a et c premiers entre eux.

Par exemple, pour la grande inégalité de Pallas, on prendra

$$a = 2, \qquad b = 1, \qquad c = -1, \qquad d = 0, \qquad n = 8,$$

d'où

$$m_1 = 17, \qquad m_2 = 8.$$

Posons maintenant

$$x = e^{u\sqrt{-1}}, \qquad y = e^{u'\sqrt{-1}},$$

$$e^{l\sqrt{-1}} = t^c, \qquad e^{l'\sqrt{-1}} = t^{-a} z^{\frac{1}{c}},$$

$$F(z, t) = R\, t^{ad-bc-1} z^{-\frac{d}{c}}.$$

Soit de plus

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int F(z, t)\, dt,$$

l'intégrale étant prise, en regardant z comme une constante, le long du cercle $|t| = 1$, il viendra

$$\Phi(z) = \sum A_{m_1 m_2} z^n \qquad (m_1 = an + b,\ m_2 = cn + d).$$

Nous n'avons donc plus à étudier qu'une fonction d'une seule variable à laquelle la méthode de M. Darboux est directement applicable. On sait que tout dépend de la valeur et de la nature des points singuliers de $\Phi(z)$.

Or, pour trouver les points singuliers de $\Phi(z)$, il suffit d'exprimer que z a une valeur telle que deux des points singuliers de $F(z, t)$ considérée comme fonction de t viennent à se confondre. Toutes les valeurs de z ainsi obtenues ne conviennent pas à la question et une discussion est nécessaire.

On trouve ainsi que les points singuliers de $\Phi(z)$ sont de deux sortes.

Nous avons d'abord les quatre points

$$x = \tau \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\tau}, \qquad y = \tau' \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\tau'},$$

en appelant $\sin\varphi$ et $\sin\varphi'$ les excentricités, et posant

$$\tau = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \qquad \tau' = \operatorname{tg}\frac{\varphi'}{2};$$

z étant, d'autre part, défini en fonction de x et de y par la relation

$$z = x^a e^{\frac{a \sin\varphi}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)} y^c e^{\frac{c \sin\varphi'}{2}\left(\frac{1}{y} - y\right)}. \tag{1}$$

Nous avons en second lieu les points définis de la manière suivante : Soit Δ le carré de la distance des deux planètes ; nous aurons les valeurs de z tirées des équations

$$\Delta = \frac{d\Delta}{dt} = 0; \tag{2}$$

or ces équations peuvent être remplacées par les suivantes :

$$P = 0, \qquad Q = 0, \tag{3}$$

P et Q étant deux polynomes entiers en x et y, le premier du 6e ordre, le second du 7e ; quant à z, il est toujours défini en fonction de x et y par la relation (1).

Si l'on élimine y entre les deux équations (3), on est amené à une équation algébrique en x du 24e degré.

Ce degré élevé crée une première difficulté. Heureusement on pourra se contenter dans le calcul des racines de cette équation d'une grossière approximation, et la petitesse des excentricités et des inclinaisons facilitera ce calcul.

Si l'on regarde les excentricités et les inclinaisons comme des infiniment petits, le degré s'abaisse à 12 ; il est donc encore très élevé ; mais il s'abaisse beaucoup si l'inclinaison est nulle, de sorte qu'on peut entrevoir qu'en combinant les résultats obtenus par cette méthode dans le cas d'une inclinaison nulle, avec les considérations développées par M. Tisserand dans le Chapitre XXVIII du Tome I de sa *Mécanique céleste*, on pourra arriver à un procédé réellement pratique.

Supposons donc l'inclinaison nulle; si les excentricités sont finies, l'équation s'abaisse au quatrième degré; si les deux excentricités sont très petites et de même ordre, ou même si l'une d'elles seulement est très petite, elle s'abaisse au troisième degré; si enfin les deux encentricités sont très petites d'une manière absolue et l'une très petite par rapport à l'autre, elle s'abaisse au deuxième degré.

Une seconde difficulté provient de la nécessité d'une discussion pour reconnaître quel est de ces 28 points singuliers celui qui répond à la question. J'ai fait cette discussion dans quelques cas particuliers s'écartant peu de ceux qui peuvent être réalisés en Astronomie et j'ai trouvé que c'était un des 24 points définis par les équations (3) qu'il fallait prendre.

Soit donc z_0 le point singulier qui convient à la question; et soient t_0, x_0, y_0 les valeurs correspondantes de t, de x et de y. Si ce point z_0 est un de ceux qui satisfont aux équations (2) et (3), la valeur approchée de $A_{m_1 m_2}$ sera

$$(4) \qquad -\frac{1}{4 n i \pi z_0^n} t_0^{ad-bc-1} z_0^{-\frac{d}{c}} \frac{d^2 \Delta}{dt^2},$$

à la condition, bien entendu, que dans $\frac{d^2\Delta}{dt^2}$ on remplace z et t par z_0 et t_0; ou bien encore x et y par x_0 et y_0 si l'on préfère exprimer $\frac{d^2\Delta}{dt^2}$ en fonction de ces deux variables $\left(\text{cela est d'ailleurs de beaucoup préférable, car } \frac{d^2\Delta}{dt^2} \text{ est une fonction rationnelle de } x \text{ et de } y\right)$.

On trouverait une expression analogue dans le cas où le point singulier convenable serait un des quatre points de la première sorte.

La même méthode fournirait sans peine des expressions plus approchées que l'expression (4), où l'erreur est de l'ordre de

$$\frac{1}{n^2 z_0^n}.$$

Il y a beaucoup à faire pour faciliter et rendre réellement pratique la résolution de l'équation algébrique à laquelle on est conduit et la discussion qui doit suivre. Je n'ai fait, dans le Mémoire qui sera bientôt publié, que poser les principes sur lesquels cette discussion doit reposer et je ne les ai appliqués que dans quelques cas particuliers; mais il me semble que l'importance du sujet devrait tenter les chercheurs et les engager à compléter les résultats que j'ai obtenus. Et, en effet, je n'ai abordé ce travail que dans un but très spécial et je me suis arrêté dès qu'il a été atteint.

Dans le cours de ces recherches, j'ai été conduit à la remarque suivante :

Soient r et r' les deux rayons vecteurs, H l'angle qu'ils font entre eux; la fonction perturbatrice de la première planète sera

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}+\frac{r\cos H}{r'^2}$$

et celle de la seconde

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}+\frac{r'\cos H}{r^2}.$$

La différence sera

$$D=\frac{r\cos H}{r'^2}-\frac{r'\cos H}{r^2}.$$

On sait que $\frac{r\cos H}{r'^2}$ et $\frac{r'\cos H}{r^2}$ ne contiennent pas de termes séculaires proprement dits et qu'on peut écrire, par exemple.

$$\frac{r\cos H}{r'^2}=\sum A_{m_1 m_2}\,{\cos \atop \sin}(m_1 l+m_2 l').$$

$$\frac{r'\cos H}{r^2}=\sum B_{m_1 m_2}\,{\cos \atop \sin}(m_1 l+m_2 l').$$

$A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ sont nuls pour $m_1=m_2=0$; mais si les moyens mouvements sont commensurables, si par exemple

$$m_1 n+m_2 n'=0, \tag{5}$$

l'expression $m_1 l+m_2 l'$ devient indépendante du temps et le terme correspondant devient *accidentellement séculaire*.

J'ai remarqué que si l'on donne aux grands axes des valeurs telles que la relation (5) ait lieu, $A_{m_1 m_2}$ devient égal à $B_{m_1 m_2}$, de sorte que la différence D, qui ne contient déjà pas de termes séculaires proprement dits, ne peut pas contenir non plus de termes accidentellement séculaires.

La vérification est très facile.