SUR

LE DÉVELOPPEMENT

DE LA

FONCTION PERTURBATRICE

Bulletin astronomique, t. 14, p. 449-466 (décembre 1897).

Je me propose d'étudier les propriétés du développement de la partie principale de la fonction perturbatrice dans le cas où les excentricités sont nulles et les inclinaisons notables.

Soient a et a' les rayons des deux orbites, qui d'après notre hypothèse sont toutes deux circulaires; soient l et l' les longitudes des deux astres; soit enfin J l'inclinaison mutuelle des plans des deux orbites.

Nous compterons les longitudes l et l' à partir de la ligne des nœuds. Dans ces conditions, le carré de la distance des deux astres a pour expression

$$a^2 + a'^2 - 2aa'(\cos l \cos l' + \sin l \sin l' \cos J).$$

Si nous posons

$$x = e^{l\sqrt{-1}}, \qquad y = e^{l'\sqrt{-1}},$$

d'où

$$\cos l = \frac{x + x^{-1}}{2}, \qquad \cos l' = \frac{y + y^{-1}}{2};$$

$$\sin l = \frac{x - x^{-1}}{2\sqrt{-1}}, \qquad \sin l' = \frac{y - y^{-1}}{2\sqrt{-1}}.$$

Cette expression deviendra

$$a^2 + a'^2 - \frac{aa'}{2}[(x + x^{-1})(y + y^{-1}) - \cos J(x - x^{-1})(y - y^{-1})],$$

cette expression que j'appellerai désormais $F(x, y)$ est un polynome entier en $x, \frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}$.

Considérons un polynome entier en $x, \frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}$ dont tous les termes sont évidemment de la forme

$$x^a y^b,$$

où a et b sont des entiers positifs ou négatifs.

Je conviendrai de dire que ce polynome est de degré m si, dans tous ses termes, chacun des exposants a et b est au plus égal à m en valeur absolue.

C'est dans ce sens qu'il faudra entendre désormais, sauf avis contraire, le mot *polynome de degré m*.

A ce compte, $F(x, y)$ est un polynome de degré 1.

Il est clair d'abord que si P est un polynome de degré m, il en sera de même de

$$x\frac{dP}{dx}, \quad y\frac{dP}{dy}.$$

On voit aisément ensuite qu'un polynome de degré m contient $(2m+1)^2$ coefficients arbitraires; donc tous les polynomes de degré m peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $(2m+1)^2$ d'entre eux.

Mais on doit remarquer que $F(x, y)$ présente une double symétrie :

1° Il ne change pas quand on permute x et y;

2° Il ne change pas quand on change x en $\frac{1}{x}$ et y en $\frac{1}{y}$.

Un polynome de degré m qui présente cette double symétrie ne contient plus que $(m+1)^2$ coefficients arbitraires.

En effet, $4m^2$ de ses coefficients sont égaux 4 à 4; $4m$ sont égaux 2 à 2; le terme tout connu seul ne doit être égal à aucun autre coefficient.

Il y a donc

$$\frac{4m^2}{4} + \frac{4m}{2} + 1 = (m+1)^2$$

coefficients distincts.

Un polynome de degré 1 contient donc 9 coefficients arbitraires; et 4 seulement d'entre eux sont distincts si le polynome présente la double symétrie de F.

Mais F ne dépend que de trois éléments a, a' et J ; il y a donc entre les 4 coefficients de F une relation qui ne jouera d'ailleurs aucun rôle dans l'analyse qui va suivre.

Il s'agit de développer la partie principale de la fonction perturbatrice qui est égale à $\frac{1}{\sqrt{F}}$ suivant les cosinus et les sinus des multiples des deux longitudes l et l' ou, ce qui revient au même, suivant les puissances de

$$e^{l\sqrt{-1}}, \quad e^{l'\sqrt{-1}}.$$

D'après la formule de Fourier, le coefficient de

$$e^{\sqrt{-1}(\alpha l - \beta l')},$$

où α et β sont des entiers positifs ou négatifs, sera représenté par l'intégrale double

$$\frac{1}{4\pi^2}\iint e^{-\sqrt{-1}(\alpha l + \beta l')}\frac{dl\,dl'}{\sqrt{F}}.$$

L'intégration, tant par rapport à l que par rapport à l', doit s'effectuer entre les limites 0 et 2π.

Exprimée à l'aide des variables

$$x = e^{l\sqrt{-1}}, \qquad y = e^{l'\sqrt{-1}},$$

cette égalité devient

$$-\frac{1}{4\pi^2}\iint x^{-\alpha}y^{-\beta}\frac{dx\,dy}{xy\sqrt{F}}, \tag{1}$$

et elle doit être prise le long d'un chemin imaginaire, les variables x et y décrivant chacune dans leur plan le cercle de rayon 1, de façon que

$$|x| = 1, \qquad |y| = 1.$$

Nous sommes ainsi conduits à étudier l'intégrale double (1) ou, plus généralement, l'intégrale double

$$A(\alpha, \beta, s) = \iint \frac{dx\,dy\,F^s}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}}$$

prise le long des deux cercles $|x| = 1$, $|y| = 1$.

Les nombres α et β sont des entiers positifs ou négatifs et s est la moitié d'un entier impair négatif.

Les intégrales $A(\alpha, \beta, s)$ sont des fonctions transcendantes des coefficients du polynome F et, par conséquent, des deux grands axes a et a' et de l'inclinaison J.

Mais, comme nous allons le voir, toutes ces transcendantes ne sont pas distinctes et il y a entre elles des relations de récurrence que nous allons étudier.

Je commence par observer qu'à cause de la symétrie du polynome F, on a

$$A(\alpha, \beta, s) = A(\beta, \alpha, s) = A(-\alpha, -\beta, s) = A(-\beta, -\alpha, s). \tag{2}$$

Considérons maintenant une intégrale de la forme

$$\iint \mathrm{HF}^s \frac{dx\,dy}{xy},$$

où H est un polynome de degré m, au sens donné plus haut à ce mot.

Les divers termes de H sont de la forme

$$\mathrm{C}x^\alpha y^\beta,$$

où les exposants α et β sont au plus égaux à m en valeur absolue.

L'intégrale elle-même est donc une combinaison linéaire des transcendantes $A(\alpha, \beta, s)$, où

$$|\alpha| \leqq m, \qquad |\beta| \leqq m.$$

Si l'on démontre qu'une pareille intégrale est nulle, on aura une relation linéaire entre ces transcendantes.

Voici comment on peut obtenir de semblables relations.

Soit P un polynome quelconque en x, y, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$; envisageons l'intégrale

$$\iint \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{PF}^{s+1}}{y}\right) dx\,dy;$$

je dis que cette intégrale est nulle. Si, en effet, nous intégrons d'abord par rapport à x, l'intégrale indéfinie est

$$\frac{\mathrm{PF}^{s+1}}{y},$$

et comme cette expression reprend la même valeur quand la variable x a décrit le cercle $|x| = 1$ tout entier, l'intégrale définie est nulle.

Pour la même raison, l'intégrale

$$\iint \frac{d}{dy}\left(\frac{\mathrm{QF}^{s+1}}{x}\right) dx\,dy,$$

où Q est un polynome quelconque, est nulle également. Si donc on a

$$\frac{H}{xy}F^s = \frac{d}{dx}\left(\frac{PF^{s+1}}{y}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{QF^{s+1}}{x}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3) \qquad H = x\left[F\frac{dP}{dx} + (s+1)P\frac{dF}{dx}\right] + y\left[F\frac{dQ}{dy} + (s+1)Q\frac{dF}{dy}\right];$$

on aura

$$(4) \qquad \iint \frac{H}{xy}F^s\,dx\,dy = 0.$$

Parmi les relations de la forme (4), nous distinguerons celles qui sont *symétriques;* nous appellerons ainsi celles où le polynome H présentera la même double symétrie que le polynome F.

Les relations non symétriques ne nous apprendront rien de plus que les relations symétriques. De toute relation non symétrique, il est en effet aisé de déduire une relation symétrique.

La relation

$$\iint \frac{H(x, y)}{xy}F^s\,dx\,dy = 0$$

entraîne en effet la suivante :

$$\iint \frac{dx\,dy}{xy}F^s\left[H(x, y) + H(y, x) + H\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) + H\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

qui est symétrique.

Les deux équations, si l'on tient compte des égalités (2), conduisent d'ailleurs aux mêmes relations linéaires entre les transcendantes $A(\alpha, \beta, s)$.

Il suffira donc d'étudier les relations symétriques.

Nous devons donc rechercher quels sont les polynomes H qui peuvent se mettre sous la forme (3).

Parmi les expressions de la forme (3), nous distinguerons encore celles que nous appellerons *symétriques*.

Nous dirons qu'une expression (3) est symétrique si l'on a

$$(5) \qquad P(x, y) = -P\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$$

et

$$(6) \qquad Q(x, y) = P(y, x).$$

De cette définition il résulte que, si un polynome H est égal à une expression (3) symétrique, ce polynome sera lui-même symétrique.

Si les polynomes P et Q sont de degré p, il en sera de même de

$$x\frac{dP}{dx}, \quad x\frac{dQ}{dx}, \quad \ldots$$

et l'expression (3) sera au plus de degré $p+1$; je dis au plus parce qu'il pourrait y avoir des réductions.

Cela posé, nous avons vu qu'il y a $(m+1)^2$ polynomes H symétriques de degré m, linéairement indépendants.

D'autre part, nous devons nous demander combien il y a d'expressions (3) symétriques et linéairement indépendantes qui sont égales à un polynome de degré m au plus.

Pour que l'expression (3) soit égale à un polynome d'ordre m au plus, il suffit que P et Q soient d'ordre $m-1$ au plus.

D'autres expressions (3) où les polynomes P et Q seraient de degré supérieur à $m-1$, pourraient par suite de réduction, être égales à un polynome d'ordre m ou d'ordre inférieur. Mais nous les laisserons de côté; on peut d'ailleurs démontrer que ces expressions ne nous conduiraient à aucune relation nouvelle.

Nous devons donc nous demander combien il y a d'expressions (3) symétriques et linéairement indépendantes où les degrés de P et Q ne dépassent pas $m-1$.

Combien y a-t-il de polynomes P d'ordre $m-1$ satisfaisant à la condition (5) et linéairement indépendants?

Un polynome de degré $m-1$ contient

$$(2m-1)^2$$

coefficients; mais en vertu de la relation (5) un de ces coefficients est nul, celui du terme tout connu et les autres sont égaux deux à deux; le polynome contient donc

$$\frac{(2m-1)^2-1}{2} = 2m(m-1)$$

coefficients arbitraires.

Il y a donc $2m(m-1)$ polynomes P indépendants de degré $(m-1)$ satisfaisant à la relation (5).

A chacun de ces polynomes, correspondra un polynome Q défini par l'équation (6) et, par conséquent, une expression (3).

Il y a donc $2m(m-1)$ expressions (3) symétriques et où les polynomes P et Q sont de degré $m-1$ et linéairement indépendants.

Si toutes ces expressions étaient distinctes, il y aurait seulement

$$(m+1)^2 - 2m(m-1)$$

polynomes H linéairement indépendants et non susceptibles d'être mis sous la forme (3).

Nous sommes donc conduits à nous poser la question suivante : ces $2m(m-1)$ expressions sont-elles distinctes ? Pour qu'elles le soient, il faudrait qu'on ne pût trouver aucune identité de la forme

$$x\left[F\frac{dP}{dx} + (s+1)P\frac{dF}{dx}\right] + y\left[F\frac{dQ}{dy} + (s+1)Q\frac{dF}{dy}\right] = 0,$$

ou, ce qui revient au même, aucune identité de la forme

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{PF^{s+1}}{y}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{QF^{s+1}}{x}\right) = 0. \tag{7}$$

S'il y a p identités de cette forme linéairement indépendantes, il y aura au plus

$$(m+1)^2 - 2m(m-1) + p$$

polynomes H *linéairement indépendants et non susceptibles d'être mis sous la forme* (3)

Cherchons donc les relations de la forme (7).

Cette relation signifie que

$$QF^{s+1}\frac{dx}{x} - PF^{s+1}\frac{dy}{y}$$

est une différentielle exacte; je l'appellerai

$$d(SF^{s+2})$$

et, *je me propose de démontrer que* S *est un polynome d'ordre* $m-2$.

Regardons, en effet, un instant y comme une constante; nous aurons alors

$$SF^{s+2} = \int QF^{s+1}\frac{dx}{x}.$$

L'intégrale du second membre est une intégrale elliptique.

Pour introduire les fonctions elliptiques, posons

$$\Phi = \frac{4x^2F}{\frac{aa'}{2}[\cos J(y-y^{-1}) - (y+y^{-1})]},$$

Alors Φ est un polynome du troisième degré en x et le coefficient de x^3 est égal à 4.

Adoptant les notations de Weierstrass (qu'Halphen a aussi employées dans son Ouvrage), je poserai

$$\Phi = 4x(x - e_2 - e_1)(x - e_3 + e_1),$$
$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad p(\omega_i) = e_i,$$
$$x = p(u) - e_1, \qquad \sqrt{\Phi} = p'(u).$$

Il est clair que e_1, e_2, e_3 sont fonctions de y; il vient alors

$$SF^{s+2} = \int \frac{QF^{s+1}}{x} \sqrt{\Phi}\, du.$$

La fonction sous le signe $\int$

$$\frac{QF^{s+1}\sqrt{\Phi}}{x}$$

est une fonction doublement périodique de u. Cette fonction est paire, elle admet quatre pôles, à savoir

o comme	infini d'ordre	$2m + 2s + 1$,
ω_1	»	$2m + 2s + 1$,
ω_2	»	$-3 - 2s$,
ω_3	»	$-3 - 2s$.

Observons que, $2s$ étant impair, tous ces nombres sont pairs.

D'ailleurs, si s est plus grand que $-\frac{3}{2}$, les deux derniers nombres sont négatifs, de sorte que ω_2 et ω_3, au lieu d'être des infinis, sont des zéros.

Décomposons cette fonction doublement périodique en éléments simples; la décomposition sera de la forme

$$A + B_0\zeta'(u) + \Sigma B_i \zeta'(u - \omega_i) + \Sigma CH.$$

Les coefficients A, B et C sont des constantes par rapport à x et ne dépendent que de y; je désigne par H une dérivée d'ordre quelconque de l'une des fonctions

$$\zeta(u), \quad \zeta(u - \omega_1), \quad \zeta(u - \omega_2), \quad \zeta(u - \omega_3).$$

Remarquons que, la fonction étant paire, H ne pourra être qu'une dérivée d'ordre impair; c'est pour la même raison que le développement ne contient pas de terme dépendant des fonctions ζ elles-mêmes, mais seulement des termes provenant de leurs dérivées.

En intégrant nous trouverons

$$SF^{s+2} = Au + B_0\zeta(u) + \Sigma B_i\zeta(u-\omega_i) + \Sigma CH' + D,$$

où H' est une dérivée d'ordre pair des fonctions ζ et où D est une fonction de y seulement.

Quand u augmente de $2\omega_1$, cette expression augmente de

$$\psi_1 = 2A\omega_1 + 2\eta_1\Sigma B,$$

où

$$\Sigma B = B_0 + B_1 + B_2 + B_3.$$

De même, quand u augmente de $2\omega_2$, cette expression augmente de

$$\psi_2 = 2A\omega_2 + 2\eta_2\Sigma B.$$

Il est clair que A, ΣB, ω_1, η_1, ω_2, η_2 sont des fonctions de y, mais je dis que ψ_1 et ψ_2 ne peuvent dépendre de y.

En effet, quand u augmente de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$, SF^{s+2} augmente de ψ_1 ou de ψ_2 et

$$\frac{dSF^{s+2}}{dy}$$

augmente de $\frac{d\psi_1}{dy}$ ou de $\frac{d\psi_2}{dy}$. Mais

$$\frac{dSF^{s+2}}{dy} = -\frac{PF^{s+1}}{y_1}$$

et est, par conséquent, une fonction périodique de u ; on a donc

$$\frac{d\psi_1}{dy} = \frac{d\psi_2}{dy} = 0,$$

ce qui montre que ψ_1 et ψ_2 sont des constantes.

Or il y a deux valeurs remarquables de y, à savoir

$$y = \pm\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\frac{J}{2}$$

pour lesquelles le polynome Φ est divisible par x^2, pour lesquelles, par conséquent, on a

$$e_1 = e_2.$$

Si nous faisons décrire à la variable y un contour fermé autour de cette valeur remarquable, e_2 décrit un contour fermé autour de e_1.

Donc ω_1, ω_2, η_1, η_2 se changent en

$$3\omega_1 + 2\omega_2, \quad -2\omega_1 - \omega_2, \quad 3\eta_1 + 2\eta_2, \quad -2\eta_1 - \eta_2;$$

A et ΣB ne changent pas.

Donc ψ_1 et ψ_2 se changent en

$$3\psi_1 + 2\psi_2, \quad -2\psi_1 - \psi_2.$$

Mais ψ_1 et ψ_2 qui sont des constantes ne doivent pas changer, on a donc

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 3\psi_1 + 2\psi_2, \\ \psi_2 &= -2\psi_1 - \psi_2 \end{aligned}$$

d'où

$$\psi_1 + \psi_2 = 0.$$

D'autre part, il y a deux valeurs remarquables de y pour lesquelles l'équation $\Phi = 0$ a une racine double, pour lesquelles, par conséquent, $e_2 = e_3$. Quand y tournera autour de l'une de ces deux valeurs remarquables, les deux racines e_2 et e_3 s'échangeront; ω_1, ω_2, η_1 et η_2 se changeront en

$$\omega_1, \quad \omega_2 - \omega_1, \quad \eta_1, \quad \eta_2 - \eta_1;$$

par conséquent, ψ_1 et ψ_2 se changeront en

$$\psi_1, \quad \psi_2 - \psi_1;$$

on a donc

$$\psi_2 = \psi_2 - \psi_1,$$

d'où

$$\psi_1 = 0$$

et, par conséquent,

$$\psi_2 = 0.$$

Ces deux équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} A\omega_1 + \eta_1 \Sigma B &= 0, \\ A\omega_2 + \eta_2 \Sigma B &= 0 \end{aligned}$$

et l'on en tire

$$A = \Sigma B = 0.$$

Ces deux équations nous apprennent que SF^{s+2} est une fonction doublement périodique de u.

Cette fonction est impaire et admet au plus quatre pôles, à savoir:

0	d'ordre	$2m + 2s$,
ω_1	»	$2m + 2s$,
ω_2	»	$-4 - 2s$,
ω_3	»	$-4 - 2s$.

D'autre part, F^{s+2} est une fonction doublement périodique impaire qui admet 0 et ω_1 comme pôles d'ordre $2s + 4$, ω_2 et ω_3 comme zéros d'ordre $2s + 4$.

Donc S sera une fonction doublement périodique paire pour laquelle

$$
\begin{array}{lll}
\text{o sera un pôle d'ordre} & (2m+2s)-(2s+4) & = 2(m-2), \\
\omega_1 \quad » & (2m+2s)-(2s+4) & = 2(m-2), \\
\omega_2 \quad » & -4-2s+(2s+4) & = 0, \\
\omega_3 \quad » & -4-2s+(2s+4) & = 0.
\end{array}
$$

Alors S étant une fonction périodique *paire* de u est une fonction rationnelle de x; comme elle ne devient infinie que pour $u=0$ et pour $u=\omega_1$, c'est-à-dire pour $x=\infty$ et pour $x=0$, ce sera un polynome entier en x et $\frac{1}{x}$; et enfin, comme ses deux infinis sont d'ordre $2(m-2)$ par rapport à u, ce polynome sera d'ordre $m-2$.

Ainsi S, considérée comme fonction de x, est un polynome d'ordre $m-2$ en x et $\frac{1}{x}$; pour la même raison, considérée comme fonction de y, ce sera un polynome d'ordre $m-2$ en y et $\frac{1}{y}$.

Nous conclurons donc que S, *considérée comme fonction de x et de y, est un polynome d'ordre $m-2$, au sens donné plus haut à ce mot.*

C. Q. F. D.

Mais l'expression

$$
F^{s+1}\left(Q\frac{dx}{x}-P\frac{dy}{y}\right)=d(SF^{s+2})
$$

jouit d'une double symétrie :

1° Quand on permute x et y, F ne change pas, Q se change en P et l'expression change de signe;

2° Quand on change x et y en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$, F ne change pas, P et Q changent de signe, $\frac{dx}{x}$ et $\frac{dy}{y}$ changent de signe et l'expression ne change pas.

Le polynome S jouit donc des propriétés suivantes :

$$
(8) \qquad \left\{
\begin{aligned}
S(y,x) &= -S(x,y). \\
S\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right) &= S(x,y).
\end{aligned}
\right.
$$

Il y aura donc autant de relations de la forme (7) qu'il y a de polynomes S d'ordre $m-2$ satisfaisant aux équations (8).

Un polynome d'ordre $m-2$ contient

$$
(2m-3)^2
$$

coefficients; mais, parmi ces coefficients, $(2m-4)^2$ sont égaux quatre à quatre en valeur absolue; ce sont ceux des termes en

$$x^\alpha y^\beta$$

où l'exposant α n'est égal ni à β, ni à $-\beta$.

Il y en a $2m-3$ qui sont nuls : ce sont ceux où α est égal à β; il en est de même des $2m-4$ coefficients où α est égal à $-\beta$.

Il y a donc en tont

$$\frac{(2m-4)^2}{4}=(m-2)^2$$

polynomes S linéairement indépendants; c'est aussi le nombre des relations (7), de sorte que

$$p=(m-2)^2.$$

Il y a donc au plus

$$(m+1)^2-2m(m-1)+(m-2)^2=5$$

polynomes H *linéairement indépendants entre eux et de ceux qui sont susceptibles d'être mis sous la forme* (3); ce nombre 5, et c'est là le point essentiel, est indépendant de m et de s.

Les polynomes P et Q étant arbitraires et assujettis seulement aux conditions (5) et (6), nous pouvons regarder leurs coefficients comme des constantes données.

Les coefficients de l'expression (3) seront donc des fonctions linéaires des coefficients de F et, par conséquent, des polynomes entiers par rapport aux deux grands axes a et a' et à $\cos J$.

Notre expression (3) sera donc de la forme suivante :

$$\Sigma C x^{-\alpha} y^{-\beta},$$

où les C sont des fonctions rationnelles de a, a' et à $\cos J$.

Nous avons vu qu'à chaque expression (3) correspond une relation de la forme (4). Cette relation s'écrira

$$\iint \Sigma C x^{-\alpha} y^{-\beta} \frac{F^s}{xy}\, dx\, dy=0,$$

ce qui donne

$$\Sigma C A(\alpha, \beta, s)=0. \tag{9}$$

Il y a donc entre les A (α, β, s), qui sont des fonctions transcendantes de a,

a' et $\cos J$, une infinité de relations linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ces mêmes éléments.

Nous ne considérerons pas q transcendantes $A(\alpha, \beta, s)$ comme *distinctes*, si ces q transcendantes sont liées par une relation de la forme (9).

Considérons alors les transcendantes

$$A(\alpha, \beta, s),$$

où s a une valeur déterminée et où α et β sont au plus égaux à m en valeur absolue.

Ces transcendantes à cause des relations (2) sont au nombre de $(m+1)^2$ correspondant aux $(m+1)^2$ polynomes H de degré m, symétriques et linéairement indépendants.

Mais parmi ces $(m+1)^2$ transcendantes, combien y en aura-t-il qui soient *distinctes?* D'après ce qui précède, il y en aura précisément autant que de polynomes H linéairement indépendants entre eux et de ceux qu'on peut mettre sous la forme (3), c'est-à-dire cinq.

Parmi nos $(m+1)^2$ *transcendantes, il y en aura au plus cinq qui seront distinctes, et cela quels que soient* m *et* s.

Comme le nombre m peut être pris aussi grand que l'on veut, nous pouvons encore énoncer le résultat comme il suit :

Parmi les transcendantes $A(\alpha, \beta, s)$ *en nombre infini qui correspondent à une valeur donnée de* s, *il y en a au plus cinq qui seront distinctes.*

Maintenant, nous avons par définition

$$A(\alpha, \beta, s) = \iint \frac{dx\,dy\,F^s}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}}.$$

Or

$$F = a^2 + a'^2 - \frac{aa'}{2}[(x+x^{-1})(y+y^{-1}) - \cos J(x-x^{-1})(y-y^{-1})],$$

ce que j'écrirai plus simplement

$$F = \Sigma D x^\gamma y^\delta,$$

γ et δ étant des exposants égaux à $+1$, 0, ou -1 ; et les D étant des coefficients de la forme

$$a^2 + a'^2, \quad \pm\frac{aa'}{2}, \quad \pm\frac{aa'}{2}\cos J,$$

et, par conséquent, fonctions rationnelles de a, a' et $\cos J$. Il vient alors

$$A(\alpha, \beta, s) = \Sigma D \iint \frac{dx\, dy\, x^\gamma y^\delta F^{s-1}}{x^{\alpha+1} y^{\beta+1}}$$

ou

$$A(\alpha, \beta, s) = \Sigma D . A(\alpha - \gamma, \beta - \delta, s - 1).$$

Les coefficients D étant rationnels en a, a' et $\cos J$, les transcendantes qui correspondent à la valeur s du troisième exposant se ramènent à celles qui correspondent à la valeur $s - 1$; celles-ci se ramènent de même à celles qui correspondent à la valeur $s - 2$, et ainsi de suite.

Toutes les transcendantes qui correspondent à une valeur du troisième exposant plus grande que $s - n$, se ramènent donc à la valeur $s - n$ et comme, parmi ces dernières, il y en a cinq qui sont distinctes, je puis énoncer le résultat suivant :

Parmi les transcendantes qui correspondent à une valeur du troisième exposant plus grande que $s - n$, il y en a au plus cinq qui sont distinctes.

Mais je puis prendre l'entier n aussi grand que je veux, je puis donc dire :

Parmi *toutes* les transcendantes $A(\alpha, \beta, s)$, *il y en a au plus cinq qui sont distinctes.*

Les coefficients du développement de la fonction perturbatrice sont, à un facteur constant près, égaux à $A\left(\alpha, \beta, -\frac{1}{2}\right)$; donc *les coefficients du développement de la fonction perturbatrice sont des fonctions transcendantes de* a, a' *et* $\cos J$; mais toutes ces fonctions transcendantes sont des combinaisons linéaires de *cinq transcendantes* distinctes, ou de ces transcendantes multipliées par des fonctions rationnelles des mêmes éléments.

Calculons maintenant les dérivées partielles de $A(\alpha, \beta, s)$ par rapport aux éléments a, a' et $\cos J$.

La différentiation sous le signe $\int$ nous donne

$$\frac{dA(\alpha, \beta, s)}{da} = s \iint \frac{dx\, dy\, F^{s-1}}{x^{\alpha+1} y^{\beta+1}} \frac{dF}{da}.$$

Mais $\frac{dF}{da}$ est un polynome en x, y dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de a, a' et $\cos J$.

Je puis donc écrire

$$\frac{dF}{da} = \Sigma E x^\gamma y^\delta,$$

les E étant rationnels en a, a' et $\cos J$: il vient, par conséquent,

$$\frac{dA(\alpha, \beta, s)}{da} = s\Sigma E A(\alpha-\gamma, \beta-\delta, s-1).$$

Ainsi la dérivée $\frac{dA(\alpha, \beta, s)}{da}$ se ramène aux transcendantes

$$A(\alpha, \beta, s-1);$$

il en est de même pour la même raison des deux autres dérivées partielles

$$\frac{dA(\alpha, \beta, s)}{da'}, \quad \frac{dA(\alpha, \beta, s)}{d\cos J}.$$

En différentiant on trouve

$$\frac{d^2 A(\alpha, \beta, s)}{da^2} = s\Sigma E \frac{dA(\alpha-\gamma, \beta-\delta, s-1)}{da} + s\sum \frac{dE}{da} A(\alpha-\gamma, \beta-\delta, s-1).$$

Les coefficients de cette relation, E et $\frac{dE}{da}$, sont encore des fonctions rationnelles de a, a' et $\cos J$; par conséquent, la dérivée seconde $\frac{d^2A}{da^2}$ se ramène aux transcendantes A et à leurs dérivées premières $\frac{dA}{da}$; mais nous venons de voir que ces dérivées premières se ramènent elles-mêmes aux transcendantes A.

Donc la dérivée seconde

$$\frac{d^2 A(\alpha, \beta, s)}{da^2}$$

se ramène aux transcendantes A et il en est de même pour la même raison des autres dérivées partielles du second ordre et des dérivées partielles d'ordre supérieur.

En résumé, *les* $A(\alpha, \beta, s)$ *et leurs dérivées partielles des différents ordres par rapport à* a, a' *et* $\cos J$ *sont des fonctions transcendantes de* a, a' *et* $\cos J$; *mais, parmi ces transcendantes en nombre infini, il y en a au plus cinq qui sont distinctes.*

Nous pouvons, en particulier, considérer une des transcendantes $A(\alpha, \beta, s)$ et ses dérivées des divers ordres par rapport à α; six quelconques de ces fonctions sont liées par une relation linéaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de a; donc :

Les coefficients du développement de la fonction perturbatrice, regardés comme fonctions de a, satisfont à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels du cinquième ordre au plus.

Il en sera encore de même si ces coefficients sont regardés comme fonctions de a' ou de $\cos J$.

Considérons maintenant deux transcendantes :

$$A(\alpha, \beta, s), \quad A(\alpha', \beta', s')$$

(que j'appellerai pour abréger A et A') et les quatre premières dérivées de A par rapport à a; il y aura entre ces six fonctions une relation linéaire à coefficients rationnels.

Si dans cette relation le coefficient de A' n'est pas nul, nous conclurons que A' peut être égalée à une combinaison linéaire de A et de ses dérivées multipliées par des fonctions rationnelles de a, a' et $\cos J$.

Si, au contraire, ce coefficient de A' était nul, nous conclurions que A satisfait à une équation linéaire, non plus du cinquième, mais du quatrième ordre.

Donc, ou bien tous les coefficients de la fonction perturbatrice satisferont à une équation linéaire du quatrième ordre ; ou bien tous ces coefficients pourront être égalés à une somme de cinq termes, et chacun de ces termes sera égal au produit d'une fonction rationnelle de a, a' et $\cos J$, par le premier de ces coefficients ou l'une de ses dérivées.

Mais il y a plus; considérons les diverses transcendantes de la forme suivante :

$$\Phi = \Sigma G . A(\alpha, \beta, s),$$

les coefficients G étant rationnels en a, a' et $\cos J$.

Si *toutes* ces transcendantes ne satisfont pas à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre, je choisirai l'une d'elles qui ne satisfera pas à une équation du quatrième ordre et que j'appellerai Φ_0.

Alors toutes les transcendantes $A(\alpha, \beta, s)$ pourront être égalées à une combinaison linéaire de Φ_0 et de ses quatre premières dérivées multipliées par des fonctions rationnelles de a, a' et $\cos J$.

Si, au contraire, toutes les transcendantes Φ satisfont à une équation du quatrième ordre, des considérations empruntées à la théorie des équations différentielles linéaires, mais qu'il est inutile de reproduire ici, permettraient de montrer que quatre de ces transcendantes au plus (et non plus cinq) sont distinctes, et l'on arriverait encore au même résultat que je puis dans tous les cas énoncer ainsi :

Les coefficients du développement de la fonction perturbatrice peuvent se déduire d'une seule transccendante Φ_0 et cela de la manière suivante :

Chacun de ces coefficients sera égal à la somme de cinq termes au plus; chacun de ces termes sera le produit de deux facteurs ; le premier facteur sera la transcendante Φ_0 *ou l'une de ses quatre premières dérivées par rapport à* a*; le second facteur sera une fonction rationnelle de* a, a' *et* $\cos J$.

Ces propriétés des transcendantes $A(\alpha, \beta, s)$ sont tout à fait analogues aux relations de récurrence bien connues entre les coefficients de Laplace.

Il semble qu'elles puissent rendre, dans le cas où les excentricités sont faibles et les inclinaisons fortes, des services analogues à ceux qui rendent ces relations de récurrences bien connues, quand les excentricités et les inclinaisons sont faibles à la fois.