SUR

LA FIGURE DE LA TERRE

Bulletin astronomique, t. 6, p. 5-11 (janvier 1889).

1. Les récents travaux de MM. Stieltjes, Tisserand, Radau et Callandreau ont appelé de nouveau l'attention sur la question de la figure de la Terre, que l'on croyait épuisée. Ces travaux semblent montrer qu'il est difficile de trouver une loi des densités qui satisfasse à la fois à la valeur observée de l'aplatissement et à la valeur observée de la précession. J'ai pensé qu'il ne serait pas inutile de reprendre le problème en me plaçant à un point de vue nouveau.

J'adopterai les notations de M. Radau; j'appellerai donc :

a, le rapport du rayon du sphéroïde considéré au rayon du globe entier;
ε, l'aplatissement de ce sphéroïde;
ρ, la densité de la couche sphéroïdale envisagée;
D, la densité moyenne du sphéroïde entier.

Je désignerai par les indices o et 1 les valeurs de ces diverses quantités au centre et à la surface, et les dérivées par rapport à a par des accents.

Je poserai, comme M. Radau,

$$\frac{a\varepsilon'}{\varepsilon} = \eta,$$

et je poserai de plus

$$a\eta' = \zeta.$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle de Clairaut peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$\left(\frac{1}{6}a^2\varepsilon' - \varepsilon\right)D + (a\varepsilon' + \varepsilon)\rho = 0,$$

$$(a\eta' + 5\eta + \eta^2)D + 2a(1+\eta)D' = 0,$$

$$\text{dérivée logarithmique de } D\sqrt{1+\eta} = -\frac{5\eta + \eta^2}{2a(1+\eta)}.$$

D'autre part, la condition qui détermine l'aplatissement à la surface peut s'écrire

$$\eta_1 = 0{,}543.$$

Le problème est ainsi entièrement déterminé.

Après avoir établi ces formules, M. Radau montre que, si η va constamment en croissant du centre à la surface, il est impossible de satisfaire à la fois aux observations de précession et aux observations géodésiques.

J'ai été ainsi conduit à me poser les deux questions suivantes :

1° Serait-il possible de satisfaire aux observations en renonçant à l'hypothèse que η doit être constamment croissant?

2° Si cela est impossible, quelle sera la distribution des densités qui, pour une valeur donnée de la constante de précession, conduira à une valeur maximum de l'aplatissement, c'est-à-dire à une valeur aussi rapprochée que possible de la valeur observée.

2. Voici le système de représentation dont je ferai usage. Je représenterai un mode quelconque de distribution des densités par une courbe C dont les différents points auront pour coordonnées les valeurs de η et de ζ dans les différentes couches qui composent le sphéroïde terrestre.

Dès que cette courbe C sera connue, on possédera toutes les données du problème. On a, en effet,

$$\frac{da}{a} = \frac{d\eta}{\zeta};$$

comme nous connaissons ζ en fonction de η, nous pouvons écrire

$$\log a = \int_{0{,}543}^{\eta} \frac{d\eta}{\zeta},$$

ce qui nous donne a en fonction de η.

L'équation de Clairaut donne ensuite

$$\log(D\sqrt{1+\eta}) = \text{const.} - \int \frac{5\eta + \eta^2}{2a(1+\eta)} \frac{da}{d\eta} d\eta,$$

ce qui nous donne D en fonction de η (et par conséquent de a) à un facteur constant près; ce facteur constant se détermine d'ailleurs sans peine, puisque D_1 est une donnée de la question.

Connaissant D en fonction de a, on en déduira ρ en fonction de a. La courbe C définit donc la loi des densités. Voyons maintenant à quelles conditions doit satisfaire cette courbe pour être acceptable.

Supposons qu'on parcoure cette courbe C depuis le point A, qui correspond au centre de la Terre, c'est-à-dire à $a = 0$, jusqu'au point B, qui correspond à la surface du globe, c'est-à-dire à $a = 1$.

Alors a devra aller constamment en croissant, et par conséquent $d\eta$ devra être constamment de même signe que ζ.

Si donc nous imaginons que les axes des η et des ζ soient placés comme le sont d'ordinaire les axes des x et des y dans le plan, la courbe devra être parcourue de gauche à droite si l'on est au-dessus de l'axe des η, et de droite à gauche dans le cas contraire.

En dehors de l'axe des η, la courbe C ne pourra pas avoir de tangente verticale (c'est-à-dire parallèle à l'axe des ζ); on pourrait cependant admettre exceptionnellement une tangente verticale d'inflexion.

Sur l'axe des η, la tangente à la courbe C est, au contraire, toujours verticale (à moins qu'on n'admette que cette courbe a un point anguleux ou un point de rebroussement), excepté toutefois au point A.

Au point A on doit avoir $a = 0$; le point B est défini par la condition

$$\eta = 0{,}543.$$

de sorte qu'on doit avoir

$$\int_B^A \frac{d\eta}{\zeta} = -\infty.$$

Cela montre d'abord qu'au point A, ζ doit s'annuler, sans quoi l'intégrale serait finie. Supposons qu'au point A nous ayons $\eta = \eta_0$ et

$$\lim \frac{\zeta}{\eta - \eta_0} = h.$$

Il vient alors

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{h}{\eta - \eta_0} + \varphi(\eta),$$

$\varphi(\eta)$ restant finie pour $\eta = \eta_0$; d'où

$$a = (\eta - \eta_0)^h \psi(\eta),$$

$\psi(\eta)$ restant finie pour $\eta = \eta_0$. Pour que a s'annule pour $\eta = \eta_0$, il faut et il suffit que h soit positif.

Cela veut dire que la tangente au point A à la courbe C doit être comprise dans l'angle formé par l'axe des η positifs et par une parallèle à l'axe des ζ positifs, c'est-à-dire dans le premier quadrant.

Nous devons maintenant nous poser la question suivante : Quelles sont les discontinuités que peut présenter la courbe C? Observons que la densité ρ peut être discontinue, mais doit être toujours finie, et par conséquent que D est toujours continue. De même, ζ peut être discontinue, mais doit rester finie, de sorte que η doit être continue.

Si donc la courbe C présente une discontinuité, c'est-à-dire si elle se décompose en deux arcs de courbe AD et EB ne se raccordant pas, les deux points extrêmes D et E seront sur une même verticale; on pourra supposer les deux arcs de courbe raccordés par un segment de verticale DE.

3. Jusqu'ici nous ne nous sommes pas préoccupés de la condition

$$\frac{d\rho}{da} < 0;$$

nous allons maintenant en tenir compte. Posons

$$D = \frac{\lambda}{a^3} + \rho, \qquad \rho = \lambda\mu;$$

d'où

$$\frac{1}{\mu} = \frac{a^3 D}{\rho} - a^3$$

et, en tenant compte de la relation $d(a^3 D) = \rho\, da^3$,

$$d\left(\frac{1}{\mu}\right) = + a^3 D\, d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

On doit donc avoir

$$\frac{d\mu}{da} < 0,$$

c'est-à-dire que μ doit croître de la surface au centre.

Nous sommes donc conduits à construire les courbes $\mu = \text{const.}$, que j'appellerai *courbes de densité*.

L'équation de Clairaut nous donne

$$(\zeta+\eta^2-\eta-6)\frac{1}{a^3}+\mu(\zeta+\eta^2+5\eta)=0,$$

$$\frac{\zeta+\eta^2-\eta-6}{(\zeta+\eta^2+5\eta)a^3}=-\mu.$$

Si nous regardons μ comme une constante et que nous prenions la dérivée logarithmique en observant que $\frac{da}{a}=\frac{d\eta}{\zeta}$, nous trouverons

$$\frac{d\zeta+(2\eta-1)\,d\eta}{\zeta+\eta^2-\eta-6}-\frac{d\zeta+(2\eta+5)\,d\eta}{\zeta+\eta^2+5\eta}-\frac{3\,d\eta}{\zeta}=0,$$

ou, en développant,

$$2\zeta(\eta+1)\,d\zeta=d\eta(3\zeta^2-16\zeta+\eta^4+4\eta^3-11\eta^2-30\eta).$$

Telle est l'équation différentielle des courbes de densité.

Cette équation admet trois solutions particulières remarquables :

1° La droite $\eta=-1$;

2° La parabole $\zeta+\eta^2-\eta-6=0$, qui correspond à $\mu=0$ et que j'appellerai la parabole P;

3° La parabole $\zeta+\eta^2+5\eta=0$, qui correspond à $\mu=\infty$ et que j'appellerai la parabole P'.

Cette équation différentielle admet les points singuliers suivants :

1° Le point $\eta=-1$, $\zeta=4$, que j'appellerai N et qui appartient à la fois aux paraboles P et P' et à la droite $\eta=-1$;

2° Le point $\eta=-1$, $\zeta=\frac{4}{3}$, que j'appellerai S et qui appartient seulement à la droite $\eta=-1$;

3° Les points $\eta=0$, $\zeta=0$; $\eta=-5$, $\zeta=0$, que j'appellerai O et R et qui appartiennent à la parabole P';

4° Les points $\eta=3$, $\zeta=0$; $\eta=-2$, $\zeta=0$, que j'appellerai Q et Q' et qui appartiennent à la parabole P.

Une discussion facile montre que par les points N, O et Q' passent une infinité de courbes de densité, tandis que par les points S, R et Q passent deux de ces courbes seulement. En d'autres termes, pour employer les dénominations que j'ai introduites dans mes Mémoires sur les courbes définies par des équations différentielles, les points singuliers N, O et Q′ sont des nœuds, tandis que S, R et Q sont des cols (*voir fig.* 1).

Comme η reste toujours positif et que, d'autre part, μ est essentiellement positif, on n'aura jamais à sortir de la région du plan que je couvre de hachures sur la figure 1 et qui est limitée par l'axe des ζ et par les paraboles P et P′.

Nous devons donc tout d'abord nous proposer de construire les courbes de densité qui sont contenues dans cette région.

Il existe d'abord une courbe de densité exceptionnelle OMQ qui va du

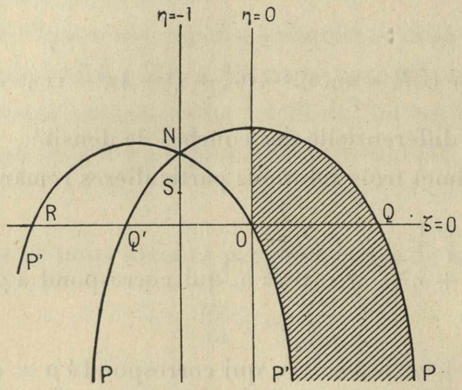

Fig. 1.

point O au point Q et qui, par conséquent, partage la région hachurée en deux régions partielles. Il importe de remarquer que cette courbe OMQ ne va pas couper l'axe des η entre le point O et le point Q; en effet, il est aisé de démontrer que sa tangente au point Q a pour coefficient angulaire

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = 3,$$

ce qui montre que cette tangente est parallèle à une droite du premier quadrant. Si la courbe OMQ allait couper la droite OQ en un point M situé entre O et Q, il y aurait (d'après un théorème que j'ai démontré dans mon Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles) entre Q et M un point où l'axe des η serait tangent à une courbe de densité, ce qui est impossible; car, en tous les points de cet axe, la tangente à la courbe de densité est verticale.

On démontrerait de même que, si l'on excepte le point O, aucune courbe de densité ne peut couper la droite OQ en plus d'un point.

Les courbes de densité présentent donc l'aspect que leur donne la figure 2, où elles sont représentées en trait plein, pendant que les axes sont en pointillé.

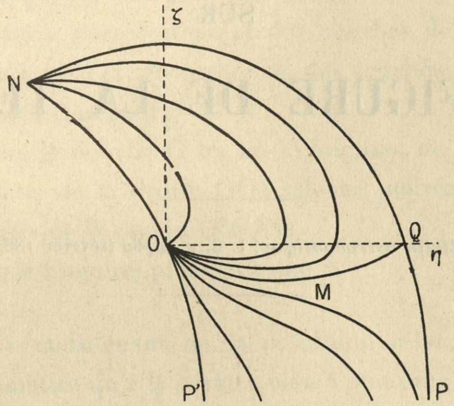

Fig. 2.