
ANWENDUNG

DER THEORIE DER INTEGRALGLEICHUNGEN

AUF DIE FLUTBEWEGUNG DES MEERES

Sechs Vorträge (Université de Göttingue), p. 12-19 (23 avril 1909).

Ich will Ihnen heute über einige Anwendungen der Integralgleichungstheorie auf die Flutbewegung berichten, die ich im letzten Semester gelegentlich einer Vorlesung über diese Erscheinung gemacht habe.

Die Differentialgleichungen des Problems sind die folgenden :

$$(1) \quad \begin{cases} a. & k^2 \sum \frac{d}{dx} \left(h_1 \frac{d\varphi}{dx} \right) + k^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{dh_2}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{dh_2}{dx} \right) = \zeta, \\ b. & g\zeta = -\lambda^2 \varphi + \Pi + W. \end{cases}$$

Wir stellen uns dabei vor, dass die Kugeloberfläche der Erde etwa durch stereographische Projektion konform auf die (x, y) -Ebene bezogen sei; dann bedeute $k(x, y)$ das Ähnlichkeitsverhältnis der Abbildung zwischen Ebene und Kugel. Die Lösung des Flutproblems denken wir uns durch periodische Funktionen der Zeit t gegeben, und wir nehmen speziell an, dass unsere Gleichungen (1) einem einzigen periodischen Summanden von der Form $A \cos(\lambda t + \alpha)$ entsprechen, sodass also λ in unseren Gleichungen die Schwingungsperiode bestimmt; es ist bequem, statt der Kosinus komplexe Exponentialgrößen einzuführen und also etwa anzunehmen, dass alle unsere Funktionen die Form

$$e^{i\lambda t} f(x, y)$$

haben; der reelle und imaginäre Teil dieser komplexen Lösungen stellt uns dann die physikalisch brauchbaren Lösungen dar.

$\varphi(x, y)$ ist definiert durch

$$-\lambda^2 \varphi = V - p,$$

wo V das hydrostatische Potential, p der Druck ist.

Ist h die Tiefe des Meeres, so definieren wir

$$h_1 = -\frac{h\lambda^2}{-\lambda^2 + 4\omega^2 \cos^2 \mathfrak{S}},$$

$$h_2 = -\frac{2\omega i \cos \mathfrak{S}}{\lambda} h_1 \quad (i = \sqrt{-1})$$

wo \mathfrak{S} die Colatitude des zu (x, y) gehörigen Punktes der Erde, ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde bedeutet. $\zeta(x, y)$ ist die Differenz zwischen der Dicke der mittleren und der gestörten Wasserschicht, d. h. $\zeta > 0$ entspricht der Ebbe, $\zeta < 0$ der Flut.

g ist die Beschleunigung der Schwerkraft, W das Potential der Störungskräfte, Π ist das Potential, welches von der Anziehung der Wassermassen von der Dicke ζ herrührt. Ist z. B.

$$\zeta = \sum A_n X_n,$$

so wird

$$\Pi = \sum \frac{4\pi A_n}{2n+1} X_n,$$

wo die X , die Kugelfunktionen sind

Die Einheiten sind so gewählt, dass die Dichte des Wassers gleich 1, der Radius der Erdkugel gleich 1 ist.

Die Grösse Π kann man meistens vernachlässigen; tut man dies, so erhält man sofort für φ eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Um aus derselben φ zu bestimmen, muss man gewisse Grenzbedingungen vorschreiben. Wir unterscheiden da zwei Fälle:

1. Der Rand des Meeres ist eine vertikale Mauer; dann wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{2\omega i}{\lambda} \cos \mathfrak{S} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

wobei $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ die normale bzw. tangentielle Ableitung von φ ist.

2. Der Rand des Meeres ist nicht vertikal; dann ist dort

$$h = 0, \quad \text{also} \quad h_1 = h_2 = 0.$$

Die Grenzbedingung lautet hier, dass φ am Rande regulär und endlich bleiben soll.

Um auf diese Probleme die Methoden der Integralgleichungen anwenden zu können, erinnern wir uns zunächst der allgemeinen Überlegungen, wie sie Hilbert und Picard für Differentialgleichungen anstellen. Sei

$$D(u) = f(x, y)$$

eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für u , die elliptischen Typus hat, so ist eine, gewisse Grenzbedingungen erfüllende, Lösung u darstellbar in der Form

$$u = \int f' G d\sigma,$$

wobei $G(x, y; x', y')$ die zu diesen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion des Differentialausdruckes $D(u)$ ist; f' ist $f(x', y')$, $d\sigma' = dx' dy'$, und das Integral ist über dasjenige Gebiet der (x', y') -Ebene zu erstrecken, für welches die Randwertaufgabe gestellt ist. Um die Greensche Funktion zu berechnen und so die Randwertaufgabe zu lösen, setze man

$$D(u) = D_0(u) + D_1(u),$$

wo

$$D_1(u) = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

ein linearer Differentialausdruck ist. Nehmen wir nun an, wir kennen die Greensche Funktion G_0 von $D_0(u)$, so haben wir die Lösung von

$$D(\varphi) = f$$

in der Form

$$\varphi = \int G_0 \left(f' - a' \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} - b' \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} - c' \varphi' \right) d\sigma'.$$

Schaffen wir hieraus durch partielle Integrationen die Ableitungen $\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$, $\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}$ heraus, so werden wir direkt auf eine Integralgleichung zweiter Art für φ geführt, die wir nach der Fredholmschen Methode behandeln können, wenn ihr Kern nicht zu stark singular wird.

Bei unserem Probleme der Flutbewegung tritt nun gerade dieser Fall ein; der Kern wird so hoch unendlich, dass die Fredholmschen Methoden versagen; ich will Ihnen jedoch zeigen, in welcher Weise man diese Schwierigkeiten überwinden kann.

Betrachten wir erst den Fall der ersten Grenzbedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + C \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

wo C eine gegebene Funktion von x, y ist. Die Differentialgleichung, die sich bei Vernachlässigung von Π ergibt, hat die Form

$$A \Delta \varphi + D_1 = f,$$

und wir stehen daher vor der Aufgabe, die Gleichung

$$\Delta \varphi = F$$

mit unserer Randbedingung zu integrieren.

Diese Aufgabe ist äquivalent mit der, eine im Innern der Randkurve réguläre Potentialfunktion V , die am Rande die Bedingung $\frac{\partial V}{\partial n} + C \frac{\partial V}{\partial s} = 0$ erfüllt, als Potential einer einfachen Randbelegung zu finden. Bezeichnet s die Bogenlänge auf der Randkurve von einem festen Anfangspunkte bis zu einem Punkte P , s' die bis zum Punkte P' , so erhält man für V eine Integralgleichung; jedoch wird der Kern $K(s, s')$ derselben für $s = s'$ von der ersten Ordnung unendlich, und es ist daher in dem Integrale

$$\int_A^B K(x, y) f(y) dy$$

der sogenannte Cauchysche Hauptwert zu nehmen, der definiert ist als das arithmetische Mittel aus den beiden Werten, die das Integral erhält, wenn ich es in der komplexen y -Ebene unter Umgehung des Punktes $y = x$ das eine mal auf einem Wege AMB oberhalb, das andere mal auf einem Wege $AM'B$ unterhalb der reellen Achse führe.

Anstatt die Methoden zu benutzen, die Kellogg zur Behandlung solcher un stetiger Kerne angibt, will ich einen andern Weg einschlagen. Wir betrachten neben der Operation

$$S[f(x)] = \int K(x, y) f(y) dy$$

die iterierte

$$S^2[f(x)] = \iint K(x, z) K(z, y) f(y) dz dy,$$

bei der ebenfalls das Doppelintegral als Cauchyscher Hauptwert zu nehmen ist; dies soll folgendermassen verstanden werden : wir betrachten für die

Variable z die Wege AMB , $AM'B$, für y die Wege APB , $AP'B$, die zueinander liegen mögen, wie in der Figur angedeutet ist. Dann bilden wir die 4 Integrale, die sich ergeben, wenn ich einen Weg für z mit einem für y kombiniere,

z : AMB , $AM'B$, AMB , $AM'B$;

y : APB , APB , $AP'B$, $AP'B$,

und nehmen aus diesen 4 Integralen das arithmetische Mittel. Ziehen wir noch 2 Wege AQB , $AQ'B$ wie in der Figur, so sehen wir, dass sich in der ersten Wegkombination der Weg AMB für z ersetzen lässt durch $AQB + AMBQA$, in der zweiten $AM'B$ durch $AQ'B$, in der dritten AMB durch AQB und in der

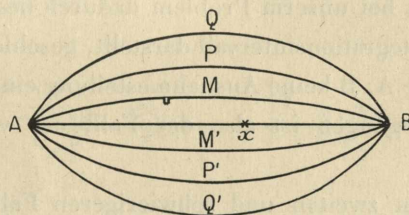


Fig. 1.

vierten $AM'B$ durch $AQ'B + AM'BQ'A$, sodass wir jetzt die folgenden Wegkombinationen haben :

z .	y .
$AQB + AMBQA$	APB
$AQ'B$	APB
AQB	$AP'B$
$AQ'B + AM'BQ'A$	$AP'B$.

Führen wir jetzt die Integrale aus und wenden den Residuenkalkül auf die geschlossenen Wege an, so zeigt sich, dass unsere Operation $S^2[f(x)]$, die einer Integralgleichung 1. Art zugehört, übergeht in eine Operation, welche durch die linke Seite einer Integralgleichung 2. Art gegeben ist, deren Kern überall endlich bleibt; wenn wir zuerst die vier Kombinationen von den Wegen AQB und $AQ'B$ mit den Wegen APB und $AP'B$ nehmen, so bekommen wir ein doppeltes Integral welches nicht unendlich werden kann, da auf diesen Wegen $x \neq y$ und $y \neq z$. Betrachten wir jetzt die beiden Wegkombinationen $AMBQA$, APB und $AM'BQ'A$, $AP'B$, oder $AMBQA$, APB und $AQ'BM'A$, $BP'A$, so ist leicht zu sehen, dass z eine geschlossene Kurve $AMBQA$ oder $AQ'BM'A$ um x beschreibt, und dass gleichzeitig y eine geschlossene Kurve $APBP'A$

um y beschreibt. Wir dürfen also die Residuenmethode anwenden, und wir bekommen ein Glied, wo die unbekannte Funktion ohne Integralzeichen auftritt, wie in der linken Seite einer Integralgleichung zweiter Art. Indem wir so auf eine durchaus reguläre Integralgleichung 2. Art geführt werden, die der Fredholmschen Methode zugänglich ist, haben wir die Schwierigkeit bei unserem Problem überwunden.

Nur ein Punkt bedarf noch der Erläuterung: wenn x und y gleichzeitig in einen der Endpunkte A, B des Intervalles hineinfallen, so versagen zunächst die obigen Betrachtungen, und es scheint, als wären wir für diese Stellen der Endlichkeit unseres durch Iteration gewonnenen Kernes nicht sicher. Dieses Bedenken wird jedoch bei unserm Problem dadurch beseitigt, dass der Rand des Meeres, der das Integrationsintervall darstellt, geschlossen ist, woraus sich ergibt, dass die Punkte A, B keine Ausnahmestellung einnehmen können.

Durch diese Überlegungen ist also der Fall, der vertikalen Meeresufer erledigt.

Wir betrachten den zweiten und schwierigeren Fall, dass das Ufer des Meeres keine vertikale Mauer ist. Dann ist am Rande

$$h = h_1 = h_2 = 0,$$

Da die Glieder 2. Ordnung unserer Differentialgleichung für φ durch den Ausdruck $h_1 \Delta\varphi$ gegeben sind, so ist die Randkurve jetzt eine singuläre Linie für die Differentialgleichung. Ausserdem werden h_1 , h_2 gemäss ihrer Definition für die durch die Gleichung

$$4\omega^2 \cos^2 \mathfrak{S} = \lambda^2$$

gegebene *kritische geographische Breite* \mathfrak{S} unendlich. Um trotz dieser Singularitäten, welche das Unendlichwerden des Kernes K zur Folge haben, das Problem durchzuführen, bin ich gezwungen gewesen, das reelle Integrationsgebiet durch ein komplexes zu ersetzen, indem ich y in eine komplexe Veränderliche $y + iz$ verwandle; x hingegen bleibt reell.

Wir deuten xyz als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten in einem dreidimensionalen Raum und zeichnen den Durchschnitt AB einer Ebene $x = \text{konst.}$ mit dem in der (x, y) -Ebene gelegenen Meeresbecken. Entspricht C der kritischen geographischen Breite, so ist es nicht schwer, diese Singularität durch Ausweichen in das komplexe Gebiet zu umgehen. Wählen wir ferner irgend zwei Punkte D, E zwischen A und B und umgeben A, von D ausgehend

und dorthin zurückkehrend, mit einer kleinen Kurve und verfahren entsprechend bei B — räumlich gesprochen: umgeben wir die Randkurve mit einem ringförmigen Futteral —, so stellen wir uns jetzt das Problem, unsere Differentialgleichung so zu integrieren, dass φ , wenn wir seine Wertänderung längs der den Punkt A umgebenden Kurve verfolgen, mit demselben Wert nach D zurückkehrt, mit dem es von dort ausging. Diese « veränderte » Grenzbedingung ist mit der ursprünglichen, welche verlangte, dass φ am Rande (im Punkte A endlich bleibt und sich regulär verhält, äquivalent. Zwar sind die zu der neuen und der alten Grenzbedingung gehörigen Greenschen Funktionen G , G_1 nicht identisch, wohl aber die den betreffenden Randbedingungen unterworfenen Lösungen von

$$(1) \quad D(u) = f.$$

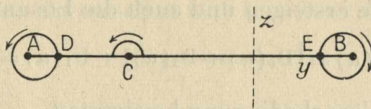


Fig. 2.

Hiervon überzeugen wir uns leichter im Falle nur *einer* Variablen y ; dann ergeben die Gleichungen

$$u = \int G(y, y') f(y') dy', \quad u_1 = \int G_1(y, y') f(y') dy'$$

durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes dass $u - u_1 = 0$ ist.

Um jetzt das Problem (1) zu behandeln, ziehe ich die vorige Methode heran, die hier aber in zwei Stufen zur Anwendung kommt, da unsere veränderte Randbedingung für die Gleichung $\Delta u = f$ unzulässig ist ⁽¹⁾. Wir können setzen

$$D(u) = \Delta(h_1 u) + D_1(u) + D_2(u);$$

dabei soll $D_1(u)$ nur die Glieder 1. Ordnung $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$; $D_2(u)$ aber nur u selbst enthalten. Indem wir

$$\Delta(v) = f$$

unter der Randbedingung $v = 0$ integrieren, erhalten wir für $u = \frac{v}{h_1}$ eine am Rande endliche und reguläre Funktion, für welche

$$\Delta(h_1 u) \equiv D_0(u) = f$$

⁽¹⁾ Diese Randbedingung ist nicht von solcher Art, dass sie eine bestimmte Lösung von $\Delta(u) = f$ auszeichnet.

ist. Darauf integrieren wir

$$D_0(u) + D_2(u) = f$$

unter Zugrundelegung der ursprünglichen Grenzbedingung nach der gewöhnlichen Methode. Der in der hierbei zu benutzenden Integralgleichung auftretende Kern ist zwar unendlich, aber von solcher Ordnung, dass sich die Singularität durch Iteration des Kerns beseitigen lässt: die partielle Integration, welche Glieder von einer zu hohen Ordnung des Unendlichwerdens einführen würde, bleibt uns an dieser Stelle erspart.

Das damit bewältigte Integrationsproblem ist aber der Integration von

$$D_0(u) + D_2(u) = f$$

unter der veränderten Grenzbedingung äquivalent, und infolgedessen können wir jetzt die zweite Stufe ersteigen und auch die Lösung von

$$D(u) \equiv [D_0(u) + D_2(u)] + D_1(u) = f$$

unter der veränderten Grenzbedingung bestimmen.

Wir haben bis jetzt das Glied Π als so klein vorausgesetzt, dass wir es ganz vernachlässigen durften. Heben wir diese Voraussetzung auf, so entstehen keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten. Π ist ein von ζ erzeugtes Anziehungspotential; wir haben also

$$\Pi = \int \frac{\zeta' d\sigma'}{r},$$

wenn $d\sigma'$ ein Flächenelement der Kugel, ζ' den Wert der Funktion ζ im Schwerpunkt (x', y') dieses Flächenelementes, r aber die räumlich gemessene Entfernung der beiden Kugelpunkte (x, y) ; (x', y') bedeutet, und die Integration über die ganze Kugeloberfläche erstreckt wird. Wir können auch schreiben

$$\Pi = \int \frac{\zeta' dx' dy'}{k^2 r}.$$

Setzen wir dies in unsere Ausgangsgleichungen ein, von denen wir noch die erste mittels Aufstellung der zugehörigen Greenschen Funktion und unter Berücksichtigung der Randbedingung aus einer Differential- in eine Integralgleichung verwandeln, so erhalten wir zwei simultane Integralgleichungen für ζ und φ , die mit Hilfe der soeben erörterten Methoden aufgelöst werden können.

