SUR LE DÉTERMINANT DE HILL

Bulletin astronomique, t. 17, p. 134-143 (avril 1900).

On sait que M. Hill a ramené le calcul du mouvement du périgée de la Lune à l'intégration de l'équation suivante :

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + \Theta w = 0, \tag{1}$$

où

$$\Theta = \Theta_0 + 2\Theta_1 \cos 2\tau + 2\Theta_2 \cos 4\tau + \ldots,$$

les Θ_i étant des coefficients constants. D'une équation de la même forme dépend le mouvement du nœud.

On cherche à satisfaire à cette équation en posant

$$w = \Sigma b_n e^{i\tau(2n+c)},$$

n étant un entier positif ou négatif et c un nombre qu'il s'agit de déterminer et dont dépend le mouvement du périgée.

Cela nous donne les équations linéaires en nombre infini :

$$b_n[\Theta_0 - (2n+c)^2] + \Sigma_p \Theta_{n-p} b_{+p} = 0. \tag{2}$$

Sous le signe Σ, p doit prendre les valeurs

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \ldots, \quad ad\, inf.$$

et l'on suppose

$$\Theta_{-p} = \Theta_p.$$

On sait que M. Hill, pour déterminer c, envisage le déterminant d'ordre infini déduit des équations (2). Numérotons les lignes et les colonnes de ce déterminant, qui s'étend à l'infini dans les deux sens de façon que la ligne (ou la colonne) centrale soit numérotée zéro, et qu'à partir de là les autres lignes (ou colonnes) soient numérotées successivement ± 1, ± 2, etc.

L'élément du déterminant qui fera partie de la $n^{\text{ième}}$ ligne et de la $p^{\text{ième}}$ colonne sera :

1° Si $n = p$, c'est-à-dire sur la diagonale principale, $\Theta_0 - (2n + c)^2$;

2° Si $n \gtrless p$, c'est-à-dire en dehors de la diagonale principale, Θ_{n-p}.

Outre ce déterminant, on aura à en envisager deux autres anologues.

Le premier, que M. Hill appelle $\nabla(\xi)$, est celui des équations

$$(2\,bis) \qquad b_n \frac{[(2n+\xi)^2 - \Theta_0]}{4n^2 - 1} - \Sigma_p b_p \frac{\Theta_{n-p}}{4n^2 - 1} = 0.$$

Je désigne par ξ une indéterminée quelconque; on voit que pour $\xi = c$ les équations (2 *bis*) se réduisent aux équations (2) multipliées par un facteur constant.

Les éléments du déterminant $\nabla(\xi)$ sont donc :

pour $n = p$,

$$\frac{[(2n+\xi)^2 - \Theta_0]}{4n^2 - 1};$$

pour $n \lessgtr p$,

$$\frac{-\Theta_{n-p}}{4n^2 - 1}.$$

Je considérerai ensuite le déterminant que j'appellerai $\square(\xi)$ et qui est celui des équations

$$(2\,ter) \qquad b_n + \Sigma_p b_p \frac{\Theta_{n-p}}{(2n+\xi)^2 - \Theta_0} = 0.$$

Ces équations (2 *ter*) ne diffèrent des équations (2 *bis*) que par un facteur constant.

Les éléments du déterminant $\square(\xi)$ sont donc : pour $n = p$, 1 ; pour $n \gtrless p$,

$$\frac{\Theta_{n-p}}{(2n+\xi)^2 - \Theta_0}.$$

On remarquera que, pour $\xi = 0$, ce déterminant se réduit à ce que M. Hill appelle $\square(0)$; en revanche, pour $\xi = \sqrt{\Theta_0}$, il ne se réduit pas à ce que M. Hill appelle $\square\left(\sqrt{\Theta_0}\right)$.

M. Hill admet sans démonstration que ces déterminants d'ordre infini convergent et, en se contentant d'un simple aperçu, que

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}c\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\Theta_0}\right)} = \square(0).$$

Dans le tome II des *Méthodes de la Mécanique céleste*, j'ai donné de ces deux propositions une démonstration rigoureuse, mais cette démonstration est assez compliquée et fait appel à un théorème de M. Hadamard qui appartient à la partie la plus délicate de la théorie des fonctions. Il y a moyen de simplifier cette démonstration.

Je commence par en rappeler rapidement la première partie, sans y rien changer d'essentiel.

Le développement d'un déterminant d'ordre infini où tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{-1} & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & b_{-2} & b_{-1} & 1 & b_1 & b_2 & \cdots \\ \cdots & c_{-3} & c_{-2} & c_{-1} & 1 & c_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

conduit à une série infinie dont les termes peuvent s'obtenir de la façon suivante : on considère le produit infini

$$\begin{aligned}\ldots(1+a_1+a_2+\ldots+a_{-1}+\ldots)(1+b_1+b_2+\ldots+\ldots+\ldots+b_{-1}+\ldots)\\ \times(1+c_1+c_2+\ldots+c_{-1}+\ldots)\ldots,\end{aligned}$$

on développe ce produit et l'on affecte chaque terme de l'un des coefficients 0, $+1$ ou -1.

Je désignerai pour abréger ce produit par

$$\Pi' = \ldots(1+\Sigma a)(1+\Sigma b)(1+\Sigma c)\ldots.$$

Au lieu du produit Π, je puis considérer le produit

$$\Pi' = \ldots(1+\Sigma|a|)(1+\Sigma|b|)(1+\Sigma|c|)\ldots,$$

en remplaçant chacun des a, b, c, ..., par sa valeur absolue.

Il est clair :

1° Que tous les termes du produit Π' sont réels et positifs;

2° Que chaque terme de Π' est égal à la valeur absolue du terme correspondant de Π, de sorte que pour obtenir le déterminant il suffit encore :

Si les a, b, c, ..., sont réels, d'affecter chaque terme de Π' de l'un des coefficient o, $+1$ ou -1;

Ou, si les a, b, c, ..., sont imaginaires, d'affecter chaque terme de Π' d'un coefficient dont le module est o ou 1.

Ainsi la convergence du produit Π' entraîne celle du déterminant.

D'autre part, si l'on développe l'exponentielle $e^{\Sigma|a|}$, suivant les puissances croissantes des $|a|$, on obtiendra tous les termes du polynome $1+\Sigma|a|$ et d'autres termes encore qui seront réels et positifs.

Si nous développons l'exponentielle

$$E = e^{\ldots\Sigma|a|+\Sigma|b|+\Sigma|c|+\ldots},$$

nous obtiendrons tous les termes de Π' et d'autres encore qui seront réels et positifs.

Pour obtenir le déterminant, il suffit donc de développer E et d'affecter chaque terme d'un coefficient ayant pour module o ou 1.

Si la série

$$S = \ldots \Sigma|a| + \Sigma|b| + \Sigma|c| + \ldots$$

converge, il en sera de même de la série obtenue par développement de E et, par conséquent, du déterminant.

Si les a, les b, ... dépendent d'une variable quelconque et si la convergence de la série S est uniforme, la convergence de la série E et du déterminant sera également uniforme.

Appliquons ces principes au déterminant $\square(\xi)$; la série S peut alors s'écrire

$$S = (2\Sigma|\Theta_j|)\sum\left|\frac{1}{(2n+\xi)^2-\Theta_0}\right|.$$

Le premier facteur $2\Sigma|\Theta_j|$ est évidemment convergent. Le second facteur converge également, à moins que l'on ait

$$\xi = -2n \pm \sqrt{\Theta_0}.$$

Si dans le plan des ξ on entoure chacun de ces points singuliers $\xi = -2n \pm \sqrt{\Theta_0}$ par une petite courbe fermée et que l'on considère le domaine situé en dehors de ces petites courbes fermées, ce second facteur convergera uniformément dans ce domaine. Donc, dans ce domaine, $\square(\xi)$ convergera absolument et uniformément.

Comme chacun des termes du développement de $\square(\xi)$ est une fonction analytique de ξ, $\square(\xi)$ sera dans ce même domaine une fonction analytique.

Cette fonction sera uniforme, puisqu'elle est entièrement déterminée quand on se donne ξ, elle ne peut avoir d'autres points singuliers que les points

$$\xi = -2n \pm \sqrt{\Theta_0}.$$

Je dis que ces points singuliers sont des pôles simples.

En effet, supposons que ξ tende vers $-2j+\sqrt{\Theta_0}$, $-j$ étant entier.

Envisageons le produit Π' dont les divers facteurs sont ici tous de la forme

$$1 + \frac{2\Sigma|\Theta_k|}{|(2n+\xi)^2 - \Theta_0|}.$$

Quand ξ tendra vers sa limite, tous ces facteurs resteront finis, excepté le facteur

$$1 + \frac{2\Sigma|\Theta_k|}{|(2j+\xi)^2 - \Theta_0|}.$$

Soit Π'_1 le produit obtenu en supprimant dans Π' ce facteur et S_1 la série obtenue en supprimant dans S les terme correspondants, c'est-à-dire ceux qui contiennent ce dénominateur $(2j+\xi)^2 - \Theta_0$. La série S_1 convergera même quand ξ atteindra sa limite; et, comme on a

$$\Pi_1 < e^{S_1},$$

on voit que

$$\Pi'_1 = \Pi \left| \frac{(2j+\xi)^2 - \Theta_0}{|(2j+\xi)^2 - \Theta_0| + 2\Sigma|\Theta_k|} \right|$$

reste fini quand ξ atteint sa limite. Donc

$$\Pi\left(2j+\xi-\sqrt{\Theta_0}\right)$$

reste fini et, comme $\square(\xi)$ est toujours plus petit que Π en valeur absolue, le produit

$$\square(\xi)\left(2j+\xi-\sqrt{\Theta_0}\right)$$

restera fini, ce qui montre que le point singulier est un pôle simple. La fonction $\square(\xi)$ est donc méromorphe.

Comme la convergence est absolue, on peut intervertir l'ordre des lignes et des colonnes du déterminant. Or, changer ξ en $\xi+2$, ou ξ en $-\xi$, cela revient à une semblable interversion.

Donc $\square(\xi)$ ne change pas, soit quand on change ξ en $\xi+2$, soit quand on change ξ en $-\xi$.

La fonction $\square(\xi)$ s'annule pour $\xi = c$, puisque pour $\xi = c$, les équations

(2 *ter*) ne diffèrent pas des équations (2), qui doivent être satisfaites à la fois.

A cause de la périodicité de la fonction, elle s'annule également pour

$$\xi = 2n + c$$

et, comme la fonction est paire, pour

$$\xi = 2n - c.$$

En résumé, $\square(\xi)$ est une fonction méromorphe de ξ; de plus, elle est périodique avec la période 2 et ne change pas quand on change ξ en $-\xi$.

Envisageons maintenant l'expression

$$F(\xi) = \square(\xi)\frac{\cos\pi\xi - \cos\pi\sqrt{\Theta_0}}{\cos\pi\xi - \cos\pi c}.$$

C'est encore une fonction méromorphe de ξ. Le premier facteur devient infini pour $\xi = 2n \pm \sqrt{\Theta_0}$, mais alors $\cos\pi\xi - \cos\pi\sqrt{\Theta_0}$ s'annule et, comme l'inégalité (3) montre que tous nos pôles sont des pôles simples, la fonction $F(\xi)$ reste finie. Pour $\xi = 2n \pm c$, le dénominateur $\cos\pi\xi - \cos\pi c$ s'annule; mais $\square(\xi)$ s'annule également et la fonction $F(\xi)$ reste encore finie.

Donc $F(\xi)$ est une fonction entière.

Comment se comporte-t-elle quand $|\xi|$ augmente indéfiniment? Comme la fonction est périodique, il suffira de donner à ξ des valeurs dont la partie réelle restera comprise entre 0 et 2; si l'on partage le plan des ξ en bandes par des droites parallèles équidistantes, perpendiculaires à l'axe des quantités réelles, et que l'équidistance soit égale à 2, les valeurs dont il vient d'être question seront comprises dans l'une de ces bandes. Et il est clair que dans les autre bandes la fonction périodique $F(\xi)$ reprendra les mêmes valeurs.

Si la variable ξ reste dans cette bande, elle ne pourra croître indéfiniment sans que sa partie imaginaire croisse indéfiniment. Or il est clair que, quand la partie imaginaire de ξ croît indéfiniment, l'expression

$$\frac{1}{|(2n+\xi)^2 - \Theta_0|}$$

tend vers zéro. Chacun des éléments du déterminant $\square(\xi)$ tend donc vers zéro, sauf les éléments de la diagonale principale. Chacun des termes du développement de ce déterminant tend donc vers zéro, sauf un seul terme qui reste égal à 1. Comme la convergence du déterminant est uniforme, cela veut dire que le déterminant tend vers 1.

D'autre part, $\cos \pi \xi$ tend vers l'infini, de sorte que le rapport

$$\frac{\cos \pi \xi - \cos \pi \sqrt{\Theta_0}}{\cos \pi \xi - \cos \pi c}$$

tend aussi vers 1. Donc $F(\xi)$ tend vers 1. Ainsi $F(\xi)$ est une fonction entière qui tend vers 1 quand ξ croît indéfiniment. Elle est donc finie dans tout le plan. C'est donc une constante, et comme

$$\lim F(\xi) = 1 \qquad (\text{pour } \xi = \infty),$$

cette constante ne peut être que 1.

On a donc

$$F(\xi) = 1,$$

c'est-à-dire

$$\square(\xi) = \frac{\cos \pi \xi - \cos \pi c}{\cos \pi \xi - \cos \pi \sqrt{\Theta_0}}.$$

C. Q. F. D.

Nous savons que le déterminant $\nabla(\xi)$ est une fonction entière de Θ_0, Θ_1, ..., il est aisé de se faire une idée de la rapidité avec laquelle converge le développement de $\nabla(\xi)$ suivant les puissances de ces différentes variables. Les principes précédents permettent en effet de reconnaître que chacun des termes de ce développement est plus petit en valeur absolue que le terme correspondant du produit infini

$$\Pi \frac{\Sigma |\Theta_k| + (2n + \xi)^2}{4n^2 - 1}.$$

Sous le signe Σ, l'indice k de Θ_k doit prendre toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles.

Or ce produit est aisé à calculer. Posons $\Sigma |\Theta_k| = -Q^2$; je vois que les zéros du produit sont

$$\xi = 2n \pm Q;$$

ce sont donc les mêmes que ceux de $\cos \pi - \cos \pi Q$. Le produit est donc égal à

$$A(\cos \pi \xi - \cos \pi Q),$$

A ne dépendant que de Q. Faisons $\xi = 0$; il vient

$$\Pi \frac{4n^2 - Q^2}{4n^2 - 1} = A(1 - \cos \pi Q).$$

Or le premier membre peut s'écrire

$$Q^2 \frac{\Pi^2\left(1-\frac{Q^2}{4n^2}\right)}{\Pi^2\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)} = \left[\frac{\pi \frac{Q}{4} \Pi\left(1-\frac{Q^2}{4n^2}\right)}{\frac{\pi}{2} \Pi\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)}\right]^2 = \frac{\sin^2 \frac{\pi Q}{2}}{\sin^2 \frac{Q}{2}} = \sin^2 \frac{\pi Q}{2}.$$

Dans ces dernières équations, on donne à n, sous le signe Π, les valeurs positives $+1$, $+2$, ..., *ad inf.* On a donc

$$A = \frac{1}{2}.$$

Le terme général du développement de $\nabla(\xi)$ suivant les puissances de Θ_0, Θ_1, ..., est donc plus petit que le terme correspondant du développement de

$$\frac{\cos \pi\xi - \cos \pi Q}{2} = \frac{\cos \pi\xi}{2} - \frac{e^{\pi\sqrt{\Sigma|\Theta_k|}}}{4} - \frac{e^{-\pi\sqrt{\Sigma|\Theta_k|}}}{4}.$$

Cela permet de se rendre compte de la rapidité de la convergence du déterminant de Hill; on l'appréciera mieux encore si l'on se rappelle que de nombreux termes manquent dans le déterminant, tandis que les termes correspondants figurent dans le produit infini auquel nous le comparons.

On remarquera que le déterminant que j'appelle $\nabla(\xi)$ n'est pas tout à fait le même que celui que M. Hill désigne ainsi; pour passer de l'un à l'autre, il faudrait multiplier tous les éléments par 4. Ce facteur 4 n'a été introduit que par inadvertance, puisqu'alors le déterminant deviendrait infini; je crois avoir, en supprimant ce facteur, rétabli la véritable pensée de M. Hill.

Il est aisé de voir que

$$\nabla(\xi) = \square(\xi)\, \Pi \frac{(2n+\xi)^2 - \Theta_0}{4n^2 - 1},$$

ou par un calcul de tout point semblable à celui qui précède

$$\nabla(\xi) = \square(\xi) \frac{\cos \pi\xi - \cos \pi\sqrt{\Theta_0}}{2} = \frac{\cos \pi\xi - \cos \pi c}{2}.$$

Dans le chapitre cité (XVII) des *Nouvelles méthodes de la Mécanique céleste* (t. II), j'ai désigné par $\nabla(\xi)$ un autre déterminant, à savoir celui qu'on déduit de $\square(\xi)$ en multipliant la ligne numérotée zéro par $\xi^2 - \Theta_0$, et la ligne numérotée $n\,(n \gtrless 0)$ par $\frac{(\xi+2n)^2 - \Theta_0}{4n^2}$, d'où

$$\nabla(\xi) = \square(\xi)\,(\xi^2 - \Theta_0)\, \Pi \frac{(\xi+2n)^2 - \Theta_0}{4n^2}.$$

Or

$$(\xi^2 - \Theta_0)\,\Pi\,\frac{(\xi + 2n)^2 - \Theta_0}{4n^2} = A\left(\cos\pi\xi - \cos\pi\sqrt{\Theta_0}\right),$$

A étant indépendant de ξ et de Θ_0; d'où pour ξ et Θ_0 infiniment petits

$$\xi^2 - \Theta_0 = 2A\sin\frac{\pi}{2}(\xi + \sqrt{\Theta_0})\sin\frac{\pi}{2}(\sqrt{\Theta_0} - \xi)$$

ou

$$\xi^2 - \Theta_0 = \frac{\pi^2}{2}A(\Theta_0 - \xi^2),$$

d'où

$$A = \frac{-2}{\pi^2},$$

et enfin

$$\nabla(\xi) = \frac{2}{\pi^2}\left(\cos\pi\sqrt{\Theta_0} - \cos\pi\xi\right).$$