

Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych.

Posiedzenie

z dnia 10 Kwietnia 1913 r.

Rok VI. № 4.

Obecni:

Przewodniczący Wydziału p. J. Lewiński.
Sekretarz p. J. Tur.

Członkowie Towarzystwa pp.: E. Bogusławski, W. Kamocki, L. Kryński, W. Mayzel, Sł. Miklaszewski, W. Sierpiński, J. Sosnowski, K. Stołyhwo.

Komunikaty.

1. Sławomir Miklaszewski:

**Materyały do znajomości gleb Stacyj i Pól
doświadczalnych w Królestwie Polskim.**

Komunikat zgłoszony dn. 2 Marca 1913 r.

(Z Pracowni Gleboznawczej C. T. R. w Warszawie).

Pole doświadczalne wtedy tylko spełnia swoje zadanie t. j. rzeczywiście służy praktyce rolniczej, jeśli leży na typie gleby i przedstawia teren możliwie jednolity.

Sprawozdania Tow. Nauk. Warsz. Rok VI, 1913 Zeszyt 3-4.

5**

Temu ostatniemu wymaganiu starano się zadość czynić od dawna — pierwsze przeoczano dość długo i dopiero od r. 1910 zaczęto się zwracać do autora notatki niniejszej z żądaniem wyboru miejsca na pole doświadczalne dla danej okolicy.

Przeoczano zarazem i niemożność stosowania wyników—doświadczeń otrzymanych z pól doświadczalnych—na glebach o typie odmiennym od typu gleby pola doświadczalnego¹⁾, a także niewłaściwość porównywania tych danych i zestawiania, jako wartości równorzędnych. Równowartościowe mogą być one jedynie w tym razie, jeśli leżą na jednakowym typie gleby.

Królestwo Polskie posiada obecnie dwadzieścia pięć pól doświadczalnych (z tych trzy stacyjne), leżących na różnych typach gleby.

W sprawozdaniach z wyników prac doświadczalnych rzadko można się było zorientować (i dziś często widzimy to samo), na jakim typie gleby leży pole doświadczalne. Najczęściej podają określenia w rodzaju: gleba piaszczysto-gliniasta lub gliniasto-piaszczysta a, że co najmniej trzy czwarte gleb naszych jest mieszaniną piasku i gliny, przeto takie podanie typu gleby nie mówi i raczej służy do uspokojenia sumienia podającego wyniki doświadczzeń aniżeli do rozpoznania przez czytającego rodzaju gleby, na której czyniono doświadczenia.

Zanim zbadam i zestawię wszystkie gleby z pól doświadczalnych, podaję w notatce niniejszej, jako materiały, analizy (poczynione przez pracownię Gleboznawczą) próbek gleb (nadesłanych przez kierowników pól doświadczalnych) wraz z określeniami ich przynależności do tego lub innego typu gleboznawczego.

Pozwoli to jednocześnie zdać sobie sprawę, na jakich typach gleb brak nam pól doświadczalnych.

Oto spis stacji i pól doświadczalnych w Królestwie Polskiem.

- 1) Brzóstowa pod Ćmielowem w gub. Radomskiej.
- 2) Chruszczewo*) pod Ciechanowem w gub. Płockiej.

¹⁾ Ob. Sławomir Miklaszewski: *Gleby Ziemi Polskiej* i t. p. Wydanie drugie. Warszawa. Rok 1912 na str. 24 oraz 210 a także 211 i dalej.

*) Gwiazdka oznacza stację rolniczą.

- 3) Czernsk pod Grójcem w gub. Warszawskiej.
- 4) Dąbek pod Mławą w gub. Płockiej.
- 5) Głodowo pod Lipnem w gub. Płockiej.
- 6) Kazimierza Wielka w gub. Kieleckiej.
- 7) Kalisz w gub. Kaliskiej.
- 8) Kisielnica pod Łomżą w gub. Łomżyńskiej.
- 9) Kutno*) w gub. Warszawskiej.
- 10) Łęczycza w gub. Kaliskiej.
- 11) Łowicz (Mysłaków) w gub. Warszawskiej.
- 12) Michałów pod Sochaczewem w gub. Warszawskiej.
- 13) Ogrodzona pod Kłomnicami w gub. Piotrkowskiej.
- 14) Osiecinia pod Włocławkiem w gub. Warszawskiej.
- 15) Piastów pod Radomiem w gub. Radomskiej.
- 16) Poturzyn (Witków) pod Dołhobyczowem w gub. Lubelskiej.
- 17) Pódziszki pod Władysławowem w gub. Suwalskiej.
- 18) Sobieszyn*) pod Iwangrodem w gub. Siedleckiej.
- 19) Starościce pod Jaszczowem w gub. Lubelskiej.
- 20) Szkarada pod Sannikami w gub. Warszawskiej.
- 21) Szymanów pod Sochaczewem w gub. Warszawskiej.
- 22) Świerczynek pod Drobinem w gub. Płockiej.
- 23) Węgrzynów pod Makowem w gub. Płockiej.
- 24) Wieluń w gub. Kaliskiej.
- 25) Żóraw pod Częstochową w gub. Piotrkowskiej.

Opisy niektórych z nich znaleźć można w Sprawozdaniach z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, a więc: Kutno¹⁾; Żóraw²⁾; Piastów³⁾; Poturzyn (Witków)⁴⁾; Sta-

1) Ob. Sławomir Mikłaszewski: Materyały do gleboznawstwa Ziemi Polskich. Spraw. T. N. W. Rok I—1908, zes. 7, №№ 74 i 75.

2) Tenże: Gleby typowe w gub. Piotrkowskiej. Spraw. T. T. W. Rok II—1909, zes. 8. №№ 660, 661, 662.

3) Kazimierz Stecki: Bielice w okolicach Radomia, Jastrzębia i Piły w gub. Radomskiej. Spraw. T. N. W. Rok III — 1910, zes. 9. №№ 801, 802 i 803.

4) Sławomir Mikłaszewski: Czarnoziemy Hrubieszowsko-Tomaszowskie w okolicach Dołhobyczowa w gub. Lubelskiej. Spraw. T. N. W. Rok III—1910, zes. 8. №№ 762, 763, 764, 789 i 790.

rościce¹⁾; Łowicz (Mysłaków)²⁾; Kisielnica³⁾; Osięciny⁴⁾; Pódziszki⁵⁾ i Głodowo⁶⁾.

Prócz powyższych gleb pól doświadczalnych w Królestwie Polskiem autor badał glebę pola doświadczalnego w Biniakoniach⁷⁾ w gub. Wileńskiej; w Bejsagole⁸⁾ w gub. Kowieńskiej i Rakiszkach oraz w Tuhanowiczach⁹⁾ w pow. Nowogródzkim gub. Mińskiej.

Gleby objęte notatką niniejszą, których analizy załączam w sześciu tablicach, były pobrane i przysłane przez kierowników pól i stacyj doświadczalnych. Pochodzą one z Brzóstowej (ob. w Tabl. I—№№ 1344, 1345, 1346), Kutna (ob. w Tabl. I—№№ 1347, 1348, 1349), Dąbka (ob. w Tabl. II—№№ 1350, 1351, 1352) Szymanowa (ob. w Tabl. II—№№ 1353, 1354, 1355), Wielunia (ob. w Tabl. III—№№ 1356, 1357, 1358), Michałowa (ob. w Tabl. III—№№ 1359, 1360, 1361), Łęczycy (ob. w Tabl. IV—№№ 1362, 1363, 1364), Szkarady (ob.

¹⁾ Sławomir Miklaszewski: Typ gleby pola doświadczalnego w Starościcach pod Jaszczowem w pow. i gub. Lubelskiej. Spraw. T. N. W. Rok III—1910, zes. 8. №№ 806, 807, 808, 809.

²⁾ Tenże: Typ gleby pola doświadczalnego w Mysłakowie pod Łowiczem w gub. Warszawskiej. Spraw. T. N. W. Rok IV—1911, zes. 5. №№ 910, 911, 912.

³⁾ Tenże: Gleba pola doświadczalnego w Kisielnicy w powiecie Kolneńskim gubernii Łomżyńskiej. Spraw. T. N. W. Rok V—1912, zes. 6. №№ 1104, 1105, 1106.

⁴⁾ Tenże: Gleba pola doświadczalnego w Osięcinach w pow. Włocławskim gub. Warszawskiej. Spraw. T. N. W. Rok V—1912, zes. 7. №№ 1144, 1145, 1146 i 1147, 1148, 1149.

⁵⁾ Tenże: Gleba pola doświadczalnego w Pódziszkach w pow. Wylkowyskim gub. Suwalskiej. Spraw. T. N. W. Rok V—1912, zes. 7. №№ 1301, 1302, 1303 i 1304, 1305, 1306.

⁶⁾ Tenże: Gleba pola doświadczalnego w lipnowskim w gub. Płockiej. Spraw. T. N. W. Rok V—1912, 5. №№ 1055, 1056, 1057.

⁷⁾ Tenże: Typ pola doświadczalnego w Biniakoniach w gub. Wileńskiej. Spraw. T. N. W. Rok V—1912, zes. 6. №№ 916, 917, 918 i 913, 914, 915.

⁸⁾ Tenże: Gleby w gub. Kowieńskiej (Część I). Spraw. T. N. W. Rok IV—1911, zes. 9. №№ 974, 975, 976.

⁹⁾ Tenże: Bielice nadrzeczne (lössy rzekome) w pow. Nowogródzkim gub. Mińskiej. Spraw. T. N. W. Rok V—1912, zes. 9. №№ 1322, 1323, 1324 i 1325, 1326, 1327.

w Tabl. IV — №№ 1365, 1366, 1367) Sobieszyna¹⁾ (ob. w Tabl. V-iej — №№ 1368, 1369, 1370), Węgrzynowa (ob. w Tabl. V-iej — №№ 1371, 1372, 1373) oraz z Kazimierzy Wielkiej (ob. w Tabl. VI-iej №№ 1332, 1333, 1334).

Wszystkie gleby wspomniane należą do typów następujących:

Piasek: Michałów.

Szczerk lekki: Dąbek, Mysłaków, Szkarada.

Bielica pojezierska: Kutno (stare pole), Kutno (nowe pole), Piastów²⁾, Kisielnica; Głodowo; Biniakonie²⁾; Szymanów.

Bielica nadrzeczna:

gruba spiaszczona naglinowa czerwona: Rakiszki; gruba naglinowa czerwona: Bejsagoła; napiaskowa: Wieluń.

normalna naglinowa czerwona: Sobieszyn.

nałowa mocna: Pódziszki.

Löss: Brzóstowa, Starościce.

Czarnoziem zdegradowany: Kazimierza Wielka, Poturzyn (Witków).

Czarna ziemia kujawska: Osięciny.

Gлина mocna: Węgrzynów.

Rędzina jurska: Żóraw.

Z powyższego zestawienia widać jasno brak bardzo ważnych pól doświadczalnych na *Rędzinach* kredowych: *czarnej* i *białej*, (żółtą można łatwiej pominąć wobec małego jej występowania), na *glinach tryjasowych pstopiaskowcowych* oraz z mniej ważnych (bo ich jest mniej w Królestwie Polskim), na *madach*, oraz *rędzinach*: dolomitowych, marmurowych, gipsowych i t. p.

Pola doświadczalne na *rędzinach czarnej* i *białej* oraz na *glinie tryjasowej* powinny powstać jaknajrychlej. Gleb tych posia-

¹⁾ Gleba Sobieszynska była badana przez autora w r. 1904 a anali-
zy ogłoszono w r. 1905 w Sprawozdaniu: „Wyniki prac i doświadczeń wy-
konanych od 1 lipca r. 1903 do 1 lipca r. 1904 na Stacji Doświadczalnej
w Sobieszynie przez prof. dr. Antoniego Sempołowskiego, podał
Stanisław Leśniowski, kierownik Stacji r. 1905. Rozdział VII,
str. 101 do 117. Niewłaściwie nazywano ją nieraz *bielicą podlaską*, jestto
bowiem bardzo typowa *bielica nadrzeczna naglinowa czerwona*.

²⁾ W Biniakoniach i w Piastowie znacznie gorsza jako warsztat
rolniczy od pozostałych.

damy dużo, a rędziny kredowe należą do gleb, z którymi rolnictwo nasze poważnie liczyć się musi.

Na razie poprzestaję na podaniu materyałów powyższych, obiecując sobie powrócić do sprawy naszych gleb zajętych pod pola doświadczalne, z chwilą, gdy wszystkie materyały będą pobrane przezemnie osobiście. Wtedy pozwolę sobie zestawić gleby pól doświadczalnych podług ich cech gleboznawczych i rolniczych. Tymczasem ciekawych charakterystyki każdego typu zosobna odsyłam do wydania drugiego (r. 1912) mojej książki: *Gleby Ziemi Polskich ze szczególnem uwzględnieniem Królestwa Polskiego oraz Mapy Gleboznawczej Królestwa Polskiego.*

Liczby załączone w tablicach oznaczają według skali barw fabryki farb „Arcus“, jak niżej:

- N^o 3 — (3) — Ocre jaune pale.
- N^o 4 — (3) — Ocre jaune 1.
- N^o 5 — (2) — Ocre jaune 2.
- N^o 8 — (4) — Ocre de rue.
- N^o 34 — (1) — Laque jaune foncée.
- N^o 89 — (2) — Brun van Dyck.
- N^o 91 — (1) — Brun de Bruxelles.
- N^o 92 — (1) — Brun de Prusse.
- N^o 93 — (3) — Brun de Caledonie.
- N^o 94 — (4) — Brun de bitume Syr.
- N^o 100 — (3) — Terre de Cologne.
- N^o 101 — (1) — Terre de Cassel.
- N^o 104 — (1) — Stil de grain brun.
- N^o 162 — (2) — Noir d'ivoire.
- N^o 165 — (2) — Noir d'os.

Publikacya niniejsza ma na celu zapobieżenie podawaniu w sprawozdaniach z doświadczeń na polach doświadczalnych Królestwa Polskiego określeń gleby, jako gliniasto-piaszczystej, piaszczysto-gliniastej, glinkowatej i t. p., co właściwie nic nie znaczy, i dopomożenie do racjonalnego ich nazywania a tem samem wskazanie rolnikom praktykom, z wyników których pól doświadczalnych mają oni korzystać.

Skład mechaniczny gleb pól doświadczalnych w Brzostowej i Kutnie.

Tabl. I.

Metoda Schönergo średnica cząsteczek w mm	Brzostowa. Pole doświadczalne. Gub. Radomska, Löss.				Kutno. Stacya doświadczalna. Gub. Warszawska, Bielica pojazińska						
	№ 1344		№ 1345		№ 1347		№ 1348		№ 1349		
	Gleba 25 cm	%	Podglebie od 25 cm	% Podłoże od 100 cm	Gleba 25 cm	%	Podglebie od 25 cm	%	Gleba 25 cm	%	Podłoże od 100 cm
Części żwirowe	Kamienie — > 3 mm	śląd	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Kamyki — > 2 mm	śląd	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Żwir gruby — > 1 mm	śląd	0,1	—	—	—	—	—	—	—	—
Części piaskowe	Żwir drobny — { 1 — 0,5	śląd	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Piasek gruby — 1 — 0,1	śląd	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	Piasek drobny — { 0,25 — 0,1	śląd	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Części pylowe	Miał piaskowy — 0,1 — 0,05	—	15,5	12,8	17,1	17,1	11,5	12,4	14,6	15,4	13,8
	Pył piaskowy — 0,05 — 0,01	—	60,2	65,2	64,1	64,1	10,5	11,3	14,0	14,7	11,9
	Pył piaskowy z gliną — < 0,01	—	22,2	20,5	17,8	17,8	11,1	12,0	23,1	24,3	28,6
Ogółem	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Węglanu wapnia (CaCO₂ met. Scheiblera) 0,0% 28,9% 0,0% 0,0% 4,8%

Barwa № 93 № 93 № 8 № 89 № 104 № 4

Uwagi: ¹⁾ 8 kawalków lalczek lössowych. ²⁾ Trafiają się orthsteiny. ³⁾ Ładny materiał lodowcowy, trafiają się i wapnienie. ⁴⁾ W tem spo- ro próchnicy i dużo ciał obcych. ⁵⁾ 8 kawalków „lalczek“ lössowych. ⁶⁾ Większość „lalczek“ lössowe.

Skład mechaniczny gleb pól doświadczalnych w Dąbku i Szymanowie. Tabl. II.

Metoda Schönego średnica cząsteczek w mm	Dąbek. Pole doświadczalne. Pow. Mławski. Szczerk lekki				Szymanów. Pole doświadczalne. P. Sochaczewski. Bielica pojezierska					
	№ 1350	№ 1351	№ 1352	№ 1353	№ 1354	№ 1355	№ 1356	№ 1357		
	Gleba	Podglebie	Podłoże	Gleba	Podglebie	Podłoże	Gleba	Podglebie	Podłoże	
Części żwirowe	Kamienie — > 3 mm		Kamienie — > 3 mm		Kamienie — > 3 mm		Kamienie — > 3 mm		Kamienie — > 3 mm	
	Kamyki — > 2 mm		Kamyki — > 2 mm		Kamyki — > 2 mm		Kamyki — > 2 mm		Kamyki — > 2 mm	
	Żwir gruby — > 1 mm		Żwir gruby — > 1 mm		Żwir gruby — > 1 mm		Żwir gruby — > 1 mm		Żwir gruby — > 1 mm	
	< 1 mm		< 1 mm		< 1 mm		< 1 mm		< 1 mm	
Części piaskowe	Żwir drobny —		Żwir drobny —		Żwir drobny —		Żwir drobny —		Żwir drobny —	
	Pasek grubzy — 1-0,1		Pasek grubzy — 1-0,1		Pasek grubzy — 1-0,1		Pasek grubzy — 1-0,1		Pasek grubzy — 1-0,1	
	Pasek drobny		Pasek drobny		Pasek drobny		Pasek drobny		Pasek drobny	
Części pyłowe	Miał piaskowy — 0,1-0,05		Miał piaskowy — 0,1-0,05		Miał piaskowy — 0,1-0,05		Miał piaskowy — 0,1-0,05		Miał piaskowy — 0,1-0,05	
	Pył piaskowy — 0,05-0,01		Pył piaskowy — 0,05-0,01		Pył piaskowy — 0,05-0,01		Pył piaskowy — 0,05-0,01		Pył piaskowy — 0,05-0,01	
	Pył piaskowy z gliną — < 0,01		Pył piaskowy z gliną — < 0,01		Pył piaskowy z gliną — < 0,01		Pył piaskowy z gliną — < 0,01		Pył piaskowy z gliną — < 0,01	
Ogółem	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Węglann wapnia (CaCO₂—met. Scheiblera)

Barwa

U w a g i : 1) Są ortosteinowy. 2) Dużo ortosteinów i niewielka ilość wapna defekacyjnego. 3) Bez 2 większych 1,2^o/_o.

Skład mechaniczny gleb pól doświadczalnych w Łęczycy i Szkaradzie. Tabl. IV.

	Łęczycza. Pole doświadczalne.						Szkarada. Pole doświadczalne.					
	Bielica pojezierska						Szczerk lekki					
	№ 1362	№ 1363	№ 1364	№ 1365	№ 1366	№ 1367	№ 1362	№ 1363	№ 1364	№ 1365	№ 1366	№ 1367
średnica cząsteczek w mm	Gleba 25 cm						Gleba					
Części żwirowe	% Podglebie od 25 cm						% Podglebie					
Kamienie — > 3 mm	0,8						1,3					
Kamyki — > 2 mm	4,4						0,3					
Żwir gruby — > 1 mm	3,0						1,5					
< 1 mm	95,6						96,9					
Części piaskowe	100,0						100,0					
Żwir drobny — 1 — 0,5	2,0						1,5					
Piasek grubo- — 1 — 0,1	87,1						33,6					
Piasek drobny — 0,25 — 0,1	23,0						21,7					
Części pyłowe	100,0						100,0					
Miał piaskowy — 0,1 — 0,05	12,5						14,8					
Pył piaskowy — 0,05 — 0,01	9,9						14,6					
Pył piaskowy z gliną — < 0,01	11,1						10,7					
Ogółem	100,0						100,0					

Węglanu wapnia (CaCO₃—met. Scheiblera) 0,00% 0,00% 12,38% 0,00% 0,00% 0,00%

Barwa № 98 № 5 № 3 № 100 № 100 № 3

Uwagi: 1) Są orthsteiny. 2) Wielka ilość twardej wapni.

Skład mechaniczny gleb pól doświadczalnych w Sobieszynie i Węgrzynowie. Tabl. V.

	Sobieszyn. Pole doświadczalne.			Węgrzynów pow. Ciechanowski		
	Bielica nadrzeczna naglinowa—czerwona			Głina mocna		
	№ 1369	№ 1369	№ 1370	№ 1371	№ 1372	№ 1373
	%	%	%	%	%	%
	Gleba	Podglebie	Podłoże	Gleba	Podglebie	Podłoże
Kamienie — > 3 mm	0,6	1,0	0,7	0,7	0,4	—
	0,2	0,4	0,3	0,2	0,3	0,1
	0,4	1,1	1,4	0,7	0,9	0,6
średnica cząsteczek w mm	98,8	97,5	97,6	98,4	98,4	99,1
Kamienie — > 3 mm	0,4	0,3	1,3	0,8	1,0	1,1
	32,4	23,0	27,0	23,9	23,6	17,6
	11,6	8,8	14,2	9,3	8,4	6,9
średnica cząsteczek w mm	44,4	32,8	32,7	32,3	32,3	32,3
Kamienie — > 3 mm	0,4	0,3	1,3	0,8	1,0	1,1
	32,4	23,0	27,0	23,9	23,6	17,6
	11,6	8,8	14,2	9,3	8,4	6,9
średnica cząsteczek w mm	44,4	32,8	32,7	32,3	32,3	32,3
Kamienie — > 3 mm	11,9	14,2	11,6	9,6	9,3	5,1
	29,5	36,3	37,2	25,8	21,4	12,9
	13,0	14,9	32,3	29,0	34,7	55,5
średnica cząsteczek w mm	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
Ogółem	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Węglanu wapnia (CaCO₂—met. Scheiblera) 0,0% 0,0% 0,0% 0,0% 0,2%
 Barwa № 89 № 4 № 4 № 94 № 94 № 8

Uwagi: 1) Są orthsteiny. 2) Dużo orthsteinów. 3) Dużo części koloidalnych.

Skład mechaniczny gleby pola doświadczalnego Tabl. VI. w Kazimierzy Wielkiej.

Metoda Schöne'go średnica ziarn w <i>m/m</i>	Kazimierza Wielka. Pole doświadczalne ¹⁾ . Czarnoziem zdegradowany						
	№ 1332		№ 1333		№ 1334		
	Gleba 20 <i>cm</i>	%	Podłoże I od 80 <i>cm</i>	%	Podłoże II od 140 <i>cm</i>	%	
Części ży- rowe {	Kamienie — > 3 <i>mm</i>	0,2 ²⁾ } ślad 0,1 99,8	—	0,0 0,0 0,0	1,0 ³⁾ 0,0 0,0	—	
	Kamyki — > 2 <i>mm</i>		—			—	
	Żwir gruby — > 1 <i>mm</i>		—			—	
	< 1 <i>mm</i>		100,0			100,0	100,0
Części piaskowe {	Żwir drobny — { 1 — 0,5	3,6 ²⁾ } — —	—	2,0 ³⁾ } — —	—	—	
	Piasek gruby — 1 — 0,1 { 0,5 — 0,25		—		—	—	—
	Piasek drobny — { 0,25 — 0,1		—		—	—	—
Części pyłowe {	Miał piaskowy — 0,1 — 0,05	9,6	9,6	8,9	8,9	6,1	6,2
	Pył piaskowy — 0,05 — 0,01	62,6	62,8	70,6	70,6	69,3	70,0
	Pył piaskowy z gliną — < 0,01	24,0	24,0	19,8	19,8	22,9	23,1
Ogółem	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	

Węglanu wapnia (CaCO₃—met. Scheibler'a) 4,4⁴⁾% 0,0% 11,4%
 Barwa (Couleur) № 101 № 5 № 8

Uwagi: ¹⁾ Pole nawiezione szlamem defekacyjnym z cukrowni. ²⁾ Prawie same domieszki obce (skorupki naczyń, cegła i t. p.). ³⁾ Konkrecye wapienne (laleczki lössowe).
⁴⁾ Pole wapnowane.

Sławomir Miklaszewski:

Matériaux à la connaissance des sols des Stations et des Champs d'expériences du Royaume de Pologne.

Communication annoncée le 2. III. 1913.

(Du Laboratoire Pédologique de la Société Agricole Centrale du Royaume de Pologne à Varsovie).

Les types des sols des Stations et Champs d'expériences du Royaume de Pologne sont les suivants:

Sable: le champ d'expériences Michałów gouv. Varsovie.

Sable contenant assez d'**humus** dit „szczerk lekki“: Dąbek gouv. Płock; Mysłaków gouv. Varsovie; Szkarada gouv. Varsovie.

Bielica (lire bielitz) **des pentes:** Kutno gouv. Varsovie; Piastów gouv. Radom; Kisielnica gouv. Łomża; Głodowo gouv. Płock; Szymanów gouv. Varsovie et Biniakonie gouv. Vilno.

Bielica (lire bielitz) **des plateaux:** Rakiszki et Bejsagoła gouv. Kowno; Wieluń gouv. Kalisz; Sobieszyn gouv. Siedlce et Pódziszki gouv. Suwałki.

Löss (limon): Brzóstowa gouv. Radom et Starościce gouv. Lublin.

Tschernoziom dégradé: Kazimierza Wielka gouv. Kielce et Poturzyn (Witków) gouv. Lublin.

Terre noire: Osięciny gouv. Varsovie.

Argile forte: Węgrzynów gouv. Płock.

Rędzina (lire Rhindzina) **jurassique:** Żóraw gouv. Piotrków.

Il manque encore les champs d'expériences sur les types des sols très répandus comme la *Rędzina noire* et *blanche* (crétacé) et l'*argile triassique* provenant de la décomposition des grès bigarrés.

Après avoir étudié tous les sols des nos champs d'expériences j'en publierai une parallèle.

2. St. Ruziewicz:

O funkcyi ciągłej, monotonicznej, nie posiadającej pochodnej w nieprzeliczalnej mnogości punktów.

Komunikat zgłoszony dn. 22 Marca 1913 r.

Przedstawił W. Sierpiński.

Lebesgue udowodnił pewne twierdzenie, z którego wypływa wniosek, że każda funkcyja ciągła, monotoniczna posiada pantachicznie pochodną¹⁾.

Z drugiej strony dowiedziono na przykładach, że istnieją funkcyje ciągłe, monotoniczne, nie posiadające pochodnej we wszędzie gęstej, przeliczalnej mnogości punktów. Przykłady takie podali Weierstrass²⁾, Schwarz³⁾, Dini⁴⁾, Lüröth⁵⁾, najprostsze wreszcie podał p. Sierpiński⁶⁾.

W pracy niniejszej dowodzę na przykładach, że istnieją funkcyje ciągłe, monotoniczne, nie posiadające pochodnej w nieprzeliczalnej mnogości punktów.

Zauważmy układ równań funkcyjnych:

$$1) \quad \varphi\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3} - \varphi(x)$$

$$2) \quad \varphi\left(\frac{x+1}{3}\right) = \frac{1}{5}$$

$$3) \quad \varphi\left(\frac{x+2}{3}\right) = \frac{1}{5} + \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\varphi(x)$$

określonych dla $0 \leq x \leq 1$.

1) H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration. Paris 1904, p. 128.

2) Mathematische Annalen, 19, p. 591.

3) „Beispiel einer stetigen, nicht differentirbaren Funktion“. Gesammelte math. Abh., Berlin 1890, p. 269—274.

4) „Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali“, Piza, 1878, p. 168.

5) Dini-Lüröth-Schapp: „Grundlagen f. eine Theorie d. Funktionen“, Lipsk, 1892, p. 200.

6) W. Sierpiński: „Przyczynek do różniczkowalności funkcyj“. Prace mat. fiz. T. XXIII. Warszawa, 1912.

W. Sierpiński: „Sur l'ensemble des points angulaires d'une courbe $y = f(x)$ “. Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Octobre 1912, p. 854.

Powiadam, że istnieje jedna i jedna tylko funkcja, określona w przedziale (0,1), ograniczona, spełniająca powyższe trzy równania funkcyjne. Funkcja ta jest ciągła, stale nie malejąca i nie posiada pochodnej w pewnej nieprzeliczalnej mnogości punktów.

Dowód. Równania 1), 2), 3) możemy ująć w jedno równanie:

$$\varphi\left(\frac{x+l}{3}\right) = \frac{1}{5} E \frac{l+1}{2} + \frac{1+(-1)^l}{2 \cdot 3} x - \frac{1+(-1)^l}{2 \cdot 3} \varphi(x) \quad (I)$$

$$l = 0, 1, 2.$$

Dla $l = 0$ mamy równanie 1), dla $l = 1$ równanie 2), dla $l = 2$ równanie 3).

Niech x oznacza dowolną liczbę przedziału (0,1). Rozwińmy x na ułamek trójkowy:

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \frac{\alpha_3}{3^3} + \dots$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia;

$$\frac{1}{5} E \frac{\alpha_k + 1}{2} = a_k,$$

$$\frac{1 + (-1)^{\alpha_k}}{2 \cdot 3} = b_k,$$

$$\prod_{k=1}^n b_k = B_n,$$

$$B_0 = 1,$$

$$x_k = \frac{\alpha_{k+1}}{3} + \frac{\alpha_{k+2}}{3^2} + \frac{\alpha_{k+3}}{3^3} + \dots \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_0 = x.$$

Wobec naszego znakowania mamy oczywiście

$$x_k = \frac{x_{k+1} + \alpha_{k+1}}{3}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (II).$$

Założmy, że istnieje funkcja ograniczona, spełniająca równania 1), 2), 3), a więc i równanie (I); udowodnimy, że może istnieć tylko jedna i wyprowadzimy formalnie jej postać. Następnie udowodnimy, że spełnia ona nasze równania funkcyjne.

Opierając się na równaniu (I) i równości (II), mamy:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) = \varphi\left(\frac{x_1 + \alpha_1}{3}\right) = a_1 + b_1 x_1 - b_1 \varphi(x_1)$$

$$\varphi(x_1) = \varphi\left(\frac{x_2 + \alpha_2}{3}\right) = a_2 + b_2 x_2 - b_2 \varphi(x_2)$$

$$\dots$$

$$\varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\frac{x_n + \alpha_n}{3}\right) = a_n + b_n x_n - b_n \varphi(x_n)$$

Wstawiając do $\varphi(x)$ kolejno wartości $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_{n-1})$, otrzymujemy wzór

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (B_k a_{k+1} + B_{k+1} x_{k+1}) \cdot (-1)^k + (-1)^n B_n \varphi(x_n)$$

Lecz funkcja φ jest, jak zakładamy, w przedziale (0,1) ograniczona; istnieje więc taka liczba A , że

$$|\varphi(x)| \leq A;$$

z drugiej strony, jak łatwo widzieć, B_n jest albo $=0$, albo też $=\frac{1}{3^n}$.

W każdym więc razie jest

$$|(-1)^n B_n \varphi(x_n)| \leq \frac{A}{3^n},$$

skąd w jednej chwili otrzymujemy rozwinięcie:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (B_k a_{k+1} + B_{k+1} x_{k+1}) \quad (\text{III}).$$

Dowiedliśmy więc, że jeżeli istnieje funkcja ograniczona $\varphi(x)$, spełniająca równania 1), 2), 3), to taka funkcja jest tylko jedna.

Niech teraz

$$\frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \frac{\alpha_3}{3^3} + \dots$$

oznacza dany (określony nie tylko co do wartości, ale i co do formy) ułamek trójkowy, x — jego wartość. Utwórzmy dla danego ułamka, jak wyżej, szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (B_k a_{k+1} + B_{k+1} x_{k+1});$$

wobec nierówności;

$$|B_n| \leq \frac{1}{3^n}, \quad |a_n| \leq \frac{1}{5} < \frac{1}{3}, \quad |x_n| \leq 1,$$

wnosimy natychmiast, że wartość bezwzględna składników naszego szeregu nie przenosi odpowiednio wartości składników szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3^{k+1}} = 1;$$

szereg nasz jest więc zbieżny i to bezwzględnie. Wartość sumy naszego szeregu podporządkujemy danemu ułamkowi trójkowemu i oznaczmy ją przez $\varphi(x)$ albo przez $\bar{\varphi}(x)$, zależnie od tego czy uważane rozwinięcie trójkowe jest normalne czy też nie¹⁾. (Funkcja $\varphi(x)$ jest więc określoną dla wszystkich liczb przedziału $(0,1)$, zaś funkcja $\bar{\varphi}(x)$ tylko dla liczb formy $\frac{l}{3^m}$, gdzie l i m są liczby naturalne).

Udowodnimy obecnie, że jeżeli dla danej wartości x są określone obie funkcje: $\varphi(x)$ i $\bar{\varphi}(x)$, to wartości ich są równe.

Niech więc x rozwija się na ułamek skończony:

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{3^n}$$

i ułamek istotnie nieskończony

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{\alpha_n - 1}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \dots$$

Rozpatrzmy tu dwa przypadki:

- 1) Któreś z α_k , $k = 1, 2, \dots, n - 1$ jest jednością
- i 2) żadne α_k , $k = 1, 2, \dots, n - 1$ nie jest jednością.

W przypadku pierwszym mamy dla rozwinięcia skończonego:

$$\varphi(x) = a_1 + B_1 x_1 - B_1 a_2 - B_2 x_2 + \dots + (-1)^{k-1} B_{k-1} a_k;$$

¹⁾ Rozwinięcie trójkowe nazywamy *normalnem*, jeżeli w niem mamy nieskończenie wiele cyfr różnych od cyfry 2.

reszta szeregu odpada, ponieważ $b_k = \frac{1 + (-1)^{2k}}{2 \cdot 3} = \frac{1 - 1}{2 \cdot 3} = 0$.

W przypadku zaś, kiedy rozwinięcie jest nieskończone, mamy:

$$\bar{\varphi}(x) = a_1 + B_1 \bar{x}_1 - \dots + (-1)^{k-1} B_{k-1} a_k.$$

Lecz dla $k \leq n - 1$ jest oczywiście $x_k = \bar{x}_k$, więc w tym przypadku wartości funkcji przy obu rozwinięciach są równe.

Przejdźmy teraz do przypadku 2-go. Ponieważ wszystkie a_k , $k = 1, 2, \dots, n - 1$, są zerami lub dwójkami, przeto wszystkie B_k są równe $\frac{1}{3^k}$ ($k = 1, 2, \dots, n - 1$).

Mamy więc w przypadku rozwinięcia skończonego

$$\varphi(x) = a_1 + \frac{1}{3} x_1 - \frac{1}{3} a_2 - \frac{1}{3^2} x_2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} a_n;$$

reszta szeregu urywa się, gdyż $x_n = x_{n+1} = \dots = 0$, $a_{n+1} = \dots = a_{n+2} = \dots = 0$.

W przypadku zaś rozwinięcia nieskończonego

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x) = & a_1 + \frac{1}{3} x_1 - \frac{1}{3} a_2 - \frac{1}{3^2} x_2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} \bar{a}_n + \\ & + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} b_n x_n - (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} b_n \cdot \frac{1}{5} - \\ & - (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n} b_n x_{n+1} + \dots \end{aligned}$$

Stąd:

$$\varphi(x) - \bar{\varphi}(x) = (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{n-1}} \left\{ a_n - \bar{a}_n - b_n x_n + b_n \frac{1}{5} + \frac{1}{3} b_n x_{n+1} - \dots \right\}$$

Jeśli $a_n = 2$, natenczas $a_n - 1 = 1$, $b_n = 0$, $a_n = \frac{1}{5}$, $\bar{a}_n = \frac{1}{5}$

i mamy

$$\varphi(x) - \bar{\varphi}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \right\} = 0.$$

Jeżeli natomiast

$$a_n = 1, \text{ to } a_n - 1 = 0$$

i wtedy

$$\varphi(x) - \bar{\varphi}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \left\{ \frac{1}{5} - \frac{x_n}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{x_{n+1}}{3^2} - \dots \right\}$$

Uwzględniając równości

$$x_n = x_{n+1} = \dots = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots = 1,$$

otrzymujemy i wtedy $\varphi(x) - \bar{\varphi}(x) = 0$.

Zawsze jest więc $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x)$.

Udowodnimy obecnie, że funkcya $\varphi(x)$ spełnia równania funkcyjne 1), 2), 3).

$$\text{Gdy } x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots,$$

to mamy dla 1-go równania

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x}{3}\right) &= \varphi\left(\frac{0}{3} + \frac{\alpha_1}{3^2} + \frac{\alpha_2}{3^3} + \dots\right) = \frac{1}{5} E \frac{0+1}{2} + \\ &+ \frac{1+(-1)^0}{2 \cdot 3} x - \frac{1+(-1)^0}{2 \cdot 3} a_1 - \frac{1+(-1)^0}{2 \cdot 3} B_1 x_1 + \dots \\ &\dots + (-1)^n \frac{1+(-1)^0}{2 \cdot 3} B_{n-1} a_n + (-1)^n \frac{1+(-1)^0}{2 \cdot 3} B_n x_n + \dots = \\ &= \frac{x}{3} - \frac{1}{3} (a_1 + B_1 x_1 - B_1 a_2 - B_2 x_2 + \dots + (-1)^{n-1} B_{n-1} a_n + \dots) = \\ &= \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \varphi(x). \end{aligned}$$

Równanie 1-sze zostało więc sprawdzone. Przejdźmy teraz do równania 2).

Jest

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x+1}{3}\right) &= \varphi\left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha_1}{3^2} + \frac{\alpha_2}{3^3} + \dots\right) = \frac{1}{5} E \frac{1+1}{2} + \\ &+ \frac{1+(-1)^1}{2 \cdot 3} x - \dots = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Równanie 3) sprawdzimy zupełnie tak samo, jak równanie 1):

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x+2}{3}\right) &= \varphi\left(\frac{2}{3} + \frac{\alpha_1}{3^2} + \dots\right) = \frac{1}{5} E \frac{2+1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \varphi(x) = \\ &= \frac{1}{5} + \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \varphi(x), \text{ zgodnie z równaniem 3).} \end{aligned}$$

Dowiedliśmy więc, że istnieje jedna i jedna tylko funkcya ograniczona, spełniająca układ równań funkcyjnych 1 — 3.

Zbadamy obecnie własności tej funkcyi. Udowodnimy, że jest ona w całym przedziale (0,1) nieujemną. Ponieważ szereg (III) jest zbieżny, możemy dowolnie grupować jego składniki. Połóżmy

$$(-1)^{n-1} B_{n-1} a_n + (-1)^{n-1} B_n x_n = u_n.$$

Powiadam, że stale

$$u_{2k-1} + u_{2k} \geq 0.$$

Jest bowiem

$$u_{2k-1} + u_{2k} = B_{2k-2} (a_{2k-1} + b_{2k-1} [x_{2k-1} - a_{2k} - b_{2k} x_{2k}]).$$

Zważywszy, że

$$b_{2k} \leq \frac{1}{3}$$

i uwzględniając równość II), otrzymujemy:

$$x_{2k-1} - a_{2k} - b_{2k} x_{2k} \geq \frac{a_{2k}}{3} - a_{2k}.$$

Jeżeli $a_{2k} = 0$, to $a_{2k} = 0$

i wtedy

$$x_{2k-1} - a_{2k} - b_{2k} x_{2k} \geq 0.$$

Jeżeli zaś

$$a_{2k} = 1 \text{ lub } 2, \text{ to } a_{2k} = \frac{1}{5}$$

i wówczas

$$x_{2k-1} - a_{2k} - b_{2k} x_{2k} \geq \frac{1}{3} - \frac{1}{5} > 0;$$

uwzględniając, że

$$B_{2k-2} \geq 0,$$

$$a_{2k-1} \geq 0,$$

$$b_{2k-1} \geq 0$$

wnosimy, że

$$u_{2k-1} + u_{2k} \geq 0, \text{ c. b. d. o.}$$

Jest więc

$$\varphi(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \dots \geq 0.$$

Mamy

$$\varphi\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3} - \frac{\varphi(x)}{3},$$

skąd

$$\varphi(0) = 0.$$

Jest też

$$0 \leq \varphi\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \varphi(x) \text{ dla } 0 \leq x \leq 1,$$

skąd

$$0 \leq \varphi(x) \leq x.$$

Przy badaniu zbieżności szeregu (III) znaleźliśmy nierówność

$$|\varphi(x)| < 1;$$

podamy obecnie jeszcze ciaśniejsze granice na $\varphi(x)$. Dolną granicą jest tu oczywiście 0, jak to z poprzednich wywodów wynika; chodzi tylko o granicę górną.

Niech x oznacza liczbę przedziału $\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Załóżmy na razie, że żadne α nie jest jednością, żadne więc B nie jest zerem.

Mamy więc

$$\varphi(x) = \frac{x_1}{3} - \frac{a_2}{3} - \frac{x_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} - \frac{x_4}{3^3} - \dots$$

a stosując równość

$$x_k = \frac{x_{k+1} + \alpha_{k+1}}{3}$$

do x_n o n nieparzystych, otrzymamy:

$$\varphi(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_2}{3} - a_2 \right) + \frac{a_3}{3^2} + \frac{1}{3^3} \left(\frac{\alpha_4}{3} - a_4 \right) + \frac{a_5}{3^4} + \dots \text{(IV)}$$

Gdy

$$\alpha_{2k} = 0, \text{ to } a_{2k} = 0$$

i

$$\frac{\alpha_{2k}}{3} - a_{2k} = 0 < \frac{7}{15}$$

Gdy

$$\alpha_{2k} = 1, \text{ to } a_{2k} = \frac{1}{5}$$

i

$$\frac{\alpha_{2k}}{3} - a_{2k} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} < \frac{7}{15}.$$

Gdy wreszcie

$$\alpha_{2k} = 2, \text{ to } a_{2k} = \frac{1}{5}$$

i wtedy

$$\frac{\alpha_{2k}}{3} - a_{2k} = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}.$$

Zważywszy, że

$$a_k \leq \frac{1}{5},$$

dochodzimy do nierówności

$$\varphi(x) \leq \frac{7}{15} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}},$$

czyli

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{5} \text{ dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

i takich, gdzie żadna z cyfr rozwinięcia na ułamek trójkowy nie jest jednością.

Jeżeli natomiast k —ta cyfra jest pierwszą napotkaną, równą 1, to rozwinięcie będzie skończone, formy

$$\varphi(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_2}{3} - a_2 \right) + \frac{a_3}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{k-2}} \left(\frac{\alpha_{k-1}}{3} - a_{k-1} \right) + \frac{1}{5 \cdot 3^{k-1}}$$

gdy k jest nieparzyste
i formy

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_2}{3} - a_2 \right) + \frac{a_3}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{k-3}} \left(\frac{\alpha_{k-2}}{3} - a_{k-2} \right) + \frac{a_{k-1}}{3^{k-2}} + \\ + \frac{1}{3^{k-1}} \left(x_{k-1} - \frac{1}{5} \right), \end{aligned}$$

gdy k jest parzyste.

Ponieważ

$$x_{k-1} = \frac{1 + x_k}{3} = \frac{1}{3} + \frac{\alpha_{k+1}}{3^2} + \frac{\alpha_{k+2}}{3^3} + \dots \leq \frac{2}{3},$$

skąd

$$x_{k-1} - \frac{1}{5} \leq \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15},$$

więc w jednym i w drugim przypadku mamy, przez porównanie z szeregiem (IV)

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{5} \text{ dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}.$$

Uwzględniając równania funkcyjne 2) i 3) wnosimy, że

$$0 \leq \varphi(x) \leq \frac{2}{5} \text{ dla } 0 \leq x \leq 1.$$

Udowodnimy obecnie, że funkcja φ jest stale niemalejąca.

Niech x i ξ będą dwie liczby rzeczywiste przedziału $(0,1)$, przy czym $\xi > x$. Wypiszmy rozwinięcia trójkowe istotnie nieskończone dla obu liczb. Jeżeli $\xi > x$, to wszystkie cyfry w obu rozwinięciach nie są sobie równe i pierwsza cyfra rozwinięcia ξ , różna od odpowiedniej cyfry rozwinięcia x , jest od niej większą. Niech to będzie cyfra n -ta.

Może się zdarzyć, że któreś z α_k , $k = 1, 2, \dots, n-1$, jest $= 1$, albo też mogą być wszystkie różne od 1.

Rozpatrzmy najpierw pierwszy przypadek.

Jeżeli pierwszą napotkaną cyfrą $= 1$ jest k -ta ($k < n$), wówczas mamy:

$$\varphi(x) = a_1 + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3^2}x_2 + \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{3^{k-1}} \cdot \frac{1}{5},$$

$$\varphi(\xi) = a_1 + \frac{1}{3}\xi_1 - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{3^2}\xi_2 + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{3^{k-1}} \cdot \frac{1}{5},$$

skąd

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) - \varphi(x) &= \frac{1}{3}(\xi_1 - x_1) - \frac{1}{3^2}(\xi_2 - x_2) + \dots + \\ &+ (-1)^{k-2} \frac{1}{3^{k-2}}(\xi_{k-1} - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Lecz dla $m \leq n - 2$ mamy

$$\xi_m = \frac{\xi_{m+1} + \alpha_{m+1}}{3},$$

$$x_m = \frac{x_{m+1} + \alpha_{m+1}}{3},$$

skąd

$$\xi_m - x_m = \frac{\xi_{m+1} - x_{m+1}}{3}.$$

Wstawiając to do różnicy $\varphi(\xi) - \varphi(x)$ dla m nieparzystych, otrzymujemy po redukcji:

$$\varphi(\xi) - \varphi(x) = 0 \text{ w razie } k \text{ nieparzystego}$$

$$\varphi(\xi) - \varphi(x) = \frac{\xi_{k-1} - x_{k-1}}{3^{k-2}} > 0 \text{ dla } k \text{ parzystego, } < n.$$

W każdym więc z tych dwóch przypadków jest

$$\varphi(\xi) \geq \varphi(x).$$

Załóżmy teraz, że żadne α_k , $k = 1, 2, \dots, n-1$ nie jest $= 1$.

Wypiszmy rozwinięcie na $\varphi(x)$ w formie skończonej:

$$\varphi(x) = a_1 + \frac{x_1}{3} - \frac{a_2}{3} - \frac{x_2}{3^2} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{a_{n-1}}{3^{n-2}} +$$

$$+ (-1)^{n-2} \frac{x_{n-1}}{3^{n-1}} - (-1)^{n-2} \frac{\varphi(x_{n-1})}{3^{n-1}}$$

i analogiczne rozwinięcie na $\varphi(\xi)$.

Stosując podstawienie $x_k = \frac{x_{k+1} + \alpha_{k+1}}{3}$ dla k nieparzystych, otrzymujemy dla nieparzystego n :

$$\varphi(\xi) - \varphi(x) = \frac{1}{3^{n-1}} [\varphi(\xi_{n-1}) - \varphi(x_{n-1})].$$

Lecz

$$x_{n-1} = \frac{\alpha_n}{3} + \frac{\alpha_{n+1}}{3^2} + \dots$$

$$\xi_{n-1} = \frac{\alpha_n + l}{3} + \frac{\beta_{n+1}}{3^2} + \dots,$$

gdzie $l = 1$ lub 2 .

Jeżeli $\alpha_n = 0$, to $0 \leq x_{n-1} \leq \frac{1}{3}$;

przy $l = 1$ jest $\frac{1}{3} \leq \xi_{n-1} \leq \frac{2}{3}$

zaś przy $l = 2$ $\frac{2}{3} \leq \xi_{n-1} \leq 1$.

Jest więc na podstawie poprzednich wywodów

$$\varphi(x_{n-1}) \leq \frac{1}{5},$$

zaś na podstawie równania funkcyjnego 2)

$$\varphi(\xi_{n-1}) = \frac{1}{5} \text{ dla } l = 1,$$

a na podstawie równania funkcyjnego 3) i uwagi, że funkcja φ jest w całym przedziale $(0,1)$ nieujemną, mamy nierówność dla $l=2$:

$$\varphi(\xi_{n-1}) = \varphi\left(\frac{\alpha_n}{3} + \frac{\beta_{n+1}}{3^2} + \dots + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{5} + \varphi\left(\frac{\alpha_n}{3} + \frac{\beta_{n+1}}{3^2} + \dots\right) \geq \frac{1}{5}$$

Jest więc wtedy $\varphi(\xi_{n-1}) - \varphi(x_{n-1}) \geq 0$,

skąd $\varphi(\xi) - \varphi(x) \geq 0$.

Gdy natomiast

$$a_n = 1, \text{ to } \frac{1}{3} \leq x_{n-1} \leq \frac{2}{3}$$

i wtedy jest $l = 1$, zatem $\frac{2}{3} \leq \xi_{n-1} \leq 1$

więc jest

$$\varphi(x_{n-1}) = \frac{1}{5}, \quad \varphi(\xi_{n-1}) \geq \frac{1}{5},$$

skąd

$\varphi(\xi) - \varphi(x) \geq 0$ i w tym przypadku.

Załóżmy teraz, że n jest liczbą parzystą.

Postępując, jak poprzednio, znajdujemy:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) - \varphi(x) &= \frac{1}{3^{n-1}} [\xi_{n-1} - \varphi(\xi_{n-1}) - x_{n-1} + \varphi(x_{n-1})] \\ &= \frac{1}{3^{n-1}} [\xi_{n-1} - \bar{a} - \bar{b}_n \xi_n + \bar{b}_n \varphi(\xi_n) - x_{n-1} + a_n + \\ &\quad + b_n x_n - b_n \varphi(x_n)] \dots \dots \dots (V). \end{aligned}$$

Rozważmy teraz osobno przypadki, kiedy

- 1) n -ta cyfra w rozwinięciu liczby ξ jest 1, w rozwinięciu liczby x jest 0;
- 2) " " " " " 2, " " " 1;
- 3) " " " " " 2, " " " 0.

W 1-szym przypadku mamy z wzoru (V):

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) - \varphi(x) &= \frac{1}{3^{n-1}} \left[\xi_{n-1} - \frac{1}{5} - x_{n-1} + \frac{1}{3} x_n - \frac{1}{3} \varphi(x_n) \right] \\ &= \frac{1}{3^{n-1}} \left[\xi_{n-1} - \frac{1}{5} - \frac{x_n + 0}{3} + \frac{1}{3} x_n - \frac{1}{3} \varphi(x_n) \right] \\ &= \frac{1}{3^{n-1}} \left[\xi_{n-1} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \varphi(x_n) \right]. \end{aligned}$$

Lecz

$$\xi_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{a_{n+1}}{3^2} + \dots \geq \frac{1}{3},$$

$$\varphi(x_n) \leq \frac{2}{5}$$

skąd

$$\xi_{n-1} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \varphi(x_n) \geq \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = 0$$

więc w przypadku 1-ym

$$\varphi(\xi) - \varphi(x) \geq 0.$$

W 2-gim przypadku obliczymy z wzoru (V):

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) - \varphi(x) &= \frac{1}{3^{n-1}} \left(\xi_{n-1} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \xi_n + \frac{1}{3} \varphi(\xi_n) - x_{n-1} + \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{3^{n-1}} \left(\xi_{n-1} - \frac{1}{3} \xi_n + \frac{1}{3} \varphi(\xi_n) - x_{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{3^{n-1}} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \varphi(\xi_n) - x_{n-1} \right). \end{aligned}$$

Lecz

$$x_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{\alpha_{n+1}}{3^2} + \dots \leq \frac{2}{3},$$

skąd

$$\varphi(\xi) - \varphi(x) \geq \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} \varphi(\xi_n) \geq 0.$$

W przypadku 3-cim obierzmy liczbę z , mającą pierwszych $n-1$ cyfr rozwinięcia, jak liczby x i ξ , n -tą zaś cyfrę równą 1; pozostałe cyfry mogą być dowolne.

Mamy na mocy poprzednio dowiedzionych nierówności:

$$\varphi(\xi) \geq \varphi(z)$$

$$\varphi(z) \geq \varphi(x),$$

skąd

$$\varphi(\xi) \geq \varphi(x).$$

Dowiedliśmy zatem, że zawsze dla $\xi > x$ zachodzi nierówność

$$\varphi(\xi) \geq \varphi(x).$$

Funkcja φ jest więc niemalejąca.

Powiadam dalej, że funkcja φ jest ciągłą w przedziale $(0,1)$, a nawet więcej: spełnia ona w tym przedziale warunek Lipschitza.

Mamy bowiem dla $0 \leq x < 1$, $0 \leq x + h \leq 1$:

$$\varphi\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3} - \frac{\varphi(x)}{3}$$

$$\varphi\left(\frac{x+h}{3}\right) = \frac{x+h}{3} - \frac{\varphi(x+h)}{3},$$

skąd, uwzględniając, że dla $h \geq 0$ zachodzi

$$\varphi\left(\frac{x+h}{3}\right) \geq \varphi\left(\frac{x}{3}\right):$$

$$\frac{\varphi(x+h)}{3} - \frac{\varphi(x)}{3} \leq \frac{h}{3},$$

czyli

$$0 \leq \varphi(x+h) - \varphi(x) \leq h \text{ dla } 0 \leq x < 1, 0 \leq x+h \leq 1.$$

Podobnie dowiedlibyśmy nierówności

$$0 \leq \varphi(x) - \varphi(x-h) \leq h$$

$$\text{dla } 0 < x \leq 1, 0 \leq x-h \leq 1.$$

Funkcja φ spełnia więc warunek Lipschitza dla każdej wartości x przedziału $(0,1)$, przyczem dla wartości 0 spełnia go z prawej strony, zaś dla wartości 1 ze strony lewej.

Dla lepszego poznania biegu funkcji φ udowodnimy jeszcze jedną jej własność.

Niech x rozwija się na ułamek trójkowy skończony:

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-2}}{3^{2n-2}} + \frac{1}{3^{2n-1}},$$

gdzie żadne α nie jest = 1.

Powiadam, że w takim razie przedział $\left(x, x + \frac{1}{3^{2n-1}}\right)$ jest przedziałem stałości dla funkcji φ . Dla dowodu obliczymy $\varphi(x)$ i $\varphi\left(x + \frac{1}{3^{2n-1}}\right)$. Jeśli wartości te okażą się równe, to ponieważ jak dowiedliśmy, funkcja jest monotoniczną, wywnioskujemy stąd, że w całym przedziale jest stałą $= \varphi(x)$.

Obliczmy więc $\varphi(x)$ i $\varphi\left(x + \frac{1}{3^{2n-1}}\right)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a_1 + \frac{1}{3} x_1 - \frac{1}{3} a_2 - \frac{1}{3^2} x_2 + \dots - \frac{1}{3^{2n-3}} a_{2n-2} - \\ &\quad - \frac{1}{3^{2n-2}} x_{2n-2} + \frac{1}{3^{2n-2}} \cdot \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

$$\varphi\left(x + \frac{1}{3^{2n-1}}\right) = a_1 + \frac{1}{3}\left(x_1 + \frac{1}{3^{2n-2}}\right) - \dots -$$

$$- \frac{1}{3^{2n-2}}\left(x_{2n-2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3^{2n-2}} \cdot \frac{1}{5},$$

skąd

$$\varphi\left(x + \frac{1}{3^{2n-1}}\right) - \varphi(x) = \frac{1}{3^{2n-1}} - \frac{1}{3^{2n-1}} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{3^{2n-1}} - \frac{1}{3^{2n-2}} = 0,$$

czyli

$$\varphi\left(x + \frac{1}{3^{2n-1}}\right) = \varphi(x), \text{ c. b. d. o.}$$

Niech teraz x będzie liczbą przedziału $(0,1)$, rozwijającą się na ułamek skończony:

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{\alpha_{2n-1}}{3^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}},$$

gdzie $\alpha_k \neq 1, k = 1, 2, \dots, 2n - 1$.

Udowodnimy, że wówczas $\varphi(x)$ zmienia się w przedziale $\left(x, x + \frac{1}{3^{2n}}\right)$ liniowo, wzrastając o przyrost zmiennej.

Dla dowodu obierzmy jakąś liczbę przedziału $\left(x, x + \frac{1}{3^{2n}}\right)$ — nazwijmy ją ξ — i rozwińmy ją na ułamek trójkowy istotnie nieskończony; cyfrą stojącą na $2n$ -tem miejscu w rozwinięciu liczby ξ będzie oczywiście 1.

Obliczmy teraz $\varphi(x)$ i $\varphi(\xi)$. Pierwsze $2n$ cyfry są w obu rozwinięciach identyczne. Mamy więc:

$$\varphi(x) = a_1 + \frac{1}{3} x_1 - \frac{1}{3} a_2 - \dots + \frac{1}{3^{2n-2}} a_{2n-1} +$$

$$+ \frac{1}{3^{2n-1}} x_{2n-1} - \frac{1}{3^{2n-1}} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\varphi(\xi) = a_1 + \frac{1}{3} \xi_1 - \frac{1}{3} a_2 - \dots + \frac{1}{3^{2n-2}} a_{2n-1} +$$

$$+ \frac{1}{3^{2n-1}} \xi_{2n-1} - \frac{1}{3^{2n-1}} \cdot \frac{1}{5}.$$

(Oba rozwinięcia są oczywiście skończone: pierwsze, ponieważ $x_{2^n} = x_{2^{n-1}} = \dots = 0$, drugie, ponieważ $b_n = 0$).

Przez odjęcie obu równań dostajemy:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) - (x) &= \frac{1}{3}(\xi_1 - x_1) - \frac{1}{3^2}(\xi_2 - x_2) + \dots + \frac{1}{3^{2^n-1}}(\xi_{2^{n-1}} - x_{2^{n-1}}) \\ &= \frac{1}{3^2}(\xi_2 - x_2) - \frac{1}{3^2}(\xi_2 - x_2) + \dots + \frac{1}{3^{2^n}}(\xi_{2^n} - x_{2^n}) \\ &= \frac{1}{3^{2^n}} \xi_{2^n} \\ &= \frac{\alpha_{2^n+1}}{3^{2^n+1}} + \frac{\alpha_{2^n+2}}{3^{2^n+2}} + \dots \\ &= \xi - x, \text{ c. b. d. o.} \end{aligned}$$

Weźmy teraz pod uwagę wszystkie punkty x , które dają rozwinięcie trójkowe, gdzie żadna cyfra rozwinięcia nie jest jednością ¹⁾.

Powiadam, że funkcya φ nie posiada w tych punktach pochodnej.

Niech bowiem x będzie liczbą, dającą rozwinięcie:

$$x = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{3^n} + \dots,$$

gdzie każde α_k jest 0 lub 2.

Oberzmy ciąg $x^{(n)}$ taki, że liczba $x^{(k)}$ różni się od liczby x jedynie na k -tem miejscu w ten sposób: Jeżeli $\alpha_k = 2$, to w rozwinięciu $x^{(k)}$ położymy na k -tem miejscu cyfrę 0, jeśli zaś $\alpha_k = 0$, to położymy k -tą cyfrę rozwinięcia $x^{(k)}$ równą 2.

Jest więc

$$x^{(k)} = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{\alpha_k \mp 2}{3^k} + \frac{\alpha_{k+1}}{3^{k+1}} + \dots,$$

gdzie znak bierzemy $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy $\alpha_k = 0$, czy 2.

Widocznem jest, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x.$$

¹⁾ Jeżeli istnieją dwa rozwinięcia na tę samą liczbę, to wystarczy ażeby jedno przynajmniej było tego typu.

Zbadajmy teraz wyrażenia

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x^{(2^n)})}{x - x^{(2^n)}} \text{ oraz } \frac{\varphi(x) - \varphi(x^{(2^{n+1})})}{x - x^{(2^{n+1})}}.$$

Udowodnimy, że zbiegają one do różnych granic, że więc funkcja pochodnej w punkcie x nie posiada.

Obliczmy w tym celu

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x^{(2^n)})}{x - x^{(2^n)}}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & a_1 + \frac{1}{3} x_1 - \frac{1}{3} a_2 - \frac{1}{3^2} x_2 + \dots + \frac{1}{3^{2n-2}} a_{2n-1} + \\ & + \frac{1}{3^{2n-1}} x_{2n-1} - \frac{1}{3^{2n-1}} a_{2n} - \frac{1}{3^{2n}} x_{2n} + R_{2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x^{(2^n)}) = & a_1 + \frac{1}{3} x_1^{(2^n)} - \frac{1}{3} a_2 - \frac{1}{3^2} x_2^{(2^n)} + \dots + \frac{1}{3^{2n-2}} a_{2n-1} + \\ & + \frac{1}{3^{2n-1}} x_{2n-1}^{(2^n)} - \frac{1}{3^{2n-1}} \bar{a}_{2n} - \frac{1}{3^{2n}} x_{2n} + R_{2n+1} \end{aligned}$$

(oczywiście, wobec definicji liczby $x^{(2^n)}$ jest $x_{2n} = x_{2n}^{(2^n)}$, $x_{2n+1} = x_{2n+1}^{(2^n)}$, ..., wskutek czego R_{2n+1} w obu rozwinięciach jest to samo).

Przez odjęcie dostajemy

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(x^{(2^n)}) = & \frac{1}{3} (x_1 - x_1^{(2^n)}) - \frac{1}{3^2} (x_2 - x_2^{(2^n)}) + \dots + \\ & + \frac{1}{3^{2n-1}} (x_{2n-1} - x_{2n-1}^{(2^n)}) - \frac{1}{3^{2n-1}} (a_{2n} - \bar{a}_{2n}) = \\ = & \pm 2 \left(\frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{3^{2n}} + \dots + \frac{1}{3^{2n}} \right) - \frac{1}{3^{2n-1}} \cdot \\ \cdot & \left(\pm \frac{1}{5} \right) = \pm \frac{2}{3^{2n}} \mp \frac{1}{5 \cdot 3^{2n-1}} = \pm \frac{7}{5 \cdot 3^{2n}}. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x^{(2^n)})}{x - x^{(2^n)}} = \frac{\pm \frac{7}{5 \cdot 3^{2n}}}{\pm \frac{2}{3^{2n}}} = \frac{7}{10},$$

skąd i

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(x^{(2^n)})}{x - x^{(2^n)}} = \frac{7}{10}.$$

Obliczmy teraz

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x^{(2^{n+1})})}{x - x^{(2^{n+1})}}.$$

Postępując analogicznie, jak poprzednio, obliczmy

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(x^{(2^{n+1})}) &= \pm 2 \left(\frac{1}{3^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \dots - \frac{1}{3^{2n+1}} \right) \pm \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \pm \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

skąd mamy przy wszelkiem naturalnem n równość:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x^{(2^{n+1})})}{x - x^{(2^{n+1})}} = \frac{\pm \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{5}}{\pm \frac{2}{3^{2n+1}}} = \frac{3}{10},$$

więc i

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(x^{(2^{n+1})})}{x - x^{(2^{n+1})}} = \frac{3}{10}.$$

Funkcyja φ nie posiada zatem pochodnej w żadnym punkcie x , dającym rozwinięcie na ułamek trójkowy, którego wszystkie cyfry są zerami i dwójkami.

Punkty, w których pochodna nie istnieje, są bądź to końcami przedziałów (a_n, b_n) , gdzie

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{0}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} + \\ &\quad + \frac{2}{3^{n+2}} + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} = \frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \frac{0}{3^{n+1}} + \\ &\quad + \frac{0}{3^{n+2}} + \dots; \end{aligned}$$

albo też punktami skupienia tych krańców. W punktach leżących wewnątrz przedziałów (a_n, b_n) pochodna oczywiście istnieje, gdyż tam funkcyja jest stała, lub też wzrasta liniowo.

Zbiór punktów, w których pochodna nie istnieje, jest zbiorem doskonałym, nigdziegęstym¹⁾. Jako zbiór doskonały jest mocy continuum²⁾.

Co do natury krzywej w punktach, w których pochodna nie istnieje, to możemy z góry powiedzieć, że wszystkie nie mogą być punktami kątowymi, t. j. takimi, w których istnieje pochodna prawostronna i pochodna lewostronna, ale są różne. Wynika to z twierdzenia p. Sierpińskiego, że krzywa może posiadać najwyżej przeliczalną mnogość punktów kątowych³⁾.

Zbiór punktów, w których pochodna nie istnieje, możemy zagęścić na odcinku (0,1). Rozszerzymy definicyę funkcyi φ na wszystkie liczby rzeczywiste w sposób następujący:

$$\varphi(x) = 0 \text{ dla } x < 0,$$

$$\varphi(x) \text{ spełnia równania funkcyjne 1), 2), 3) dla } 0 \leq x \leq 1,$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{5} \text{ dla } x > 1.$$

Widocznem jest, że tak określona funkcyja jest ciągłą dla wszystkich liczb rzeczywistych i że dla liczb przedziału (0,1) posiada wszystkie własności powyżej dowiedzione.

Ustawmy wszystkie liczby wymierne w ciąg nieskończony

$$w_1, w_2, w_3, \dots \quad (W)$$

Określmy funkcyę $\Phi(x)$ w sposób następujący:

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x-w_n)}{10^n}$$

$\Phi(x)$ jest funkcyą określoną w zupełności dla każdej liczby rzeczywistej, jest funkcyą ciągłą, gdyż szereg po stronie prawej jest zbieżny jednostajnie w $(-\infty, +\infty)$ i jest funkcyą stale nie malejącą, gdyż jest sumą szeregu funkcyj stale nie malejących.

Powiadam, że dla $0 \leq x \leq 1$ funkcyja Φ nie posiada po-

1) Porówn. W. Sierpiński: „Teorya mnogości“, Bibl. mat.-fiz. Serya III, T. IX, Warszawa, 1912, str. 123 i nast.

2) Tamże, str. 118.

3) W. Sierpiński: „Sur l'ensemble des points angulaires d'une courbe $y=f(x)$ “. Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Octobre 1912.

chodnej we wszędziegęstej, wszędzie nieprzeliczalnej mnogości punktów.

Niech w oznacza dowolną liczbę wymierną przedziału $(0,1)$, ξ liczbę rzeczywistą, rozwijającą się na ułamek trójkowy, w którym wszystkie cyfry rozwinięcia są zerami lub dwójkami (jeżeli istnieją dwa rozwinięcia liczby ξ , to jedno przynajmniej ma posiadać tę własność).

Udowodnimy, że $\Phi(x)$ nie posiada pochodnej dla $x = w + \xi$. Wyszukajmy liczbę w w ciągu (W) ; znajduje się ona tam na miejscu k -tem — oznaczmy ją w_k . W skończonym ciągu liczb

$$w_k - w_1 + \xi, w_k - w_2 + \xi, \dots, w_k - w_k + \xi$$

istnieje conajmniej jedna liczba: $w_k - w_k + \xi = \xi$, dla której funkcja φ nie posiada pochodnej; istnieje też pierwsza liczba tego ciągu: $w_k - w_l + \xi$, dla której to zachodzi.

Jeżeli, jak zakładamy, w punktach

$$w_k - w_1 + \xi, w_k - w_2 + \xi, \dots, w_k - w_{l-1} + \xi$$

istnieje pochodna funkcji φ , to punkty te muszą leżeć, jak to wynika z rozważań poprzednich, w przedziałach stałości, lub liniowego wzrostu funkcji. Oznaczmy przez δ_i nie większą z odległości punktu $w_k - w_i + \xi$ od krańców przedziału stałości lub liniowego wzrostu funkcji, w którym $w_k - w_i + \xi$ leży i obierzmy liczbę μ tak wielką, by było

$$\frac{2}{3^{2\mu}} < \delta_i \text{ dla } i = 1, 2, \dots, l-1 \quad (\text{VI}).$$

Zależnie od tego, czy $w_k + \xi - w_i$ leży w przedziale stałości, czy też wzrostu liniowego funkcji, są dla $i \leq l-1$ i $m \geq \mu$, wskutek (VI), różnice

$$\varphi\left(w_k + \xi - w_i \pm \frac{2}{3^{2m}}\right) - \varphi(w_k + \xi - w_i)^1$$

oraz

$$\varphi\left(w_k + \xi - w_i \pm \frac{2}{3^{2m+1}}\right) - \varphi(w_k + \xi - w_i)$$

¹⁾ Znak $+$ lub $-$ dajemy podług tego, czy 2 m -ta cyfra w rozwinięciu ξ jest 0, czy też 2.

równocześnie albo obie równe zeru, albo obie równe przyrostowi zmiennej. Z tego powodu zachodzi dla $m \geq \mu$ równość:

$$\sum_{n=1}^{l-1} \frac{\varphi\left(w_k + \xi - w_n \pm \frac{2}{3^{2m}}\right) - \varphi(w_k + \xi - w_n)}{\pm \frac{2}{3^{2m}} \cdot 10^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{l-1} \frac{\varphi\left(w_k + \xi - w_n \pm \frac{2}{3^{2m+1}}\right) - \varphi(w_k + \xi - w_n)}{\pm \frac{2}{3^{2m}} \cdot 10^n};$$

oznaczmy wspólną wartość tych wyrażeń przez A .

Utwórzmy wyrażenie:

$$\frac{\Phi(w_k + \xi + h) - \Phi(w_k + \xi)}{h} = \sum_{n=1}^{l-1} \frac{\varphi(w_k - w_n + \xi + h) - \varphi(w_k + \xi - w_n)}{10^n \cdot h} +$$

$$+ \frac{\varphi(w_k - w_l + \xi + h) - \varphi(w_k - w_l + \xi)}{10^l \cdot h} +$$

$$+ \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{\varphi(w_k - w_n + \xi + h) - \varphi(w_k + \xi - w_n)}{10^n \cdot h}.$$

Dla $h = \pm \frac{2}{3^{2m}}$ wyrażenie to przybiera, jak to wynika z poprzednich rozważań, następującą postać:

$$\frac{\Phi\left(w_k + \xi \pm \frac{2}{3^{2m}}\right) - \Phi(w_k + \xi)}{\pm \frac{2}{3^{2m}}} = A + \frac{7}{10^{l+1}} +$$

$$+ \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{\varphi\left(w_k - w_n + \xi \pm \frac{2}{3^{2m}}\right) - \varphi(w_k + \xi - w_n)}{\pm 10^n \cdot \frac{2}{3^{2m}}},$$

zaś dla $h = \pm \frac{2}{3^{2m+1}}$

$$\frac{\Phi\left(w_k + \xi \pm \frac{2}{3^{2m+1}}\right) - \Phi(w_k + \xi)}{\pm \frac{1}{3^{2m+1}}} = A + \frac{3}{10^{l+1}} +$$

$$+ \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{\varphi\left(w_k - w_n + \xi \pm \frac{2}{3^{2m+1}}\right) - \varphi(w_k + \xi - w_n)}{\pm 10^n \cdot \frac{2}{3^{2m+1}}}.$$

Ponieważ

$$0 \leq \frac{\varphi(w_k - w_n + \xi + h) - \varphi(w_k + \xi - w_n)}{h} \leq 1$$

więc

$$0 \leq \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{\varphi(w_k - w_n + \xi + h) - \varphi(w_k - w_n + \xi)}{10^n h} \leq \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9 \cdot 10^l}.$$

Stąd otrzymujemy nierówności, słuszne dla wszelkich naturalnych $m \geq \mu$:

$$\frac{\Phi\left(w_k + \xi \pm \frac{2}{3^{2m}}\right) - \Phi(w_k + \xi)}{\pm \frac{2}{3^{2m}}} \geq A + \frac{7}{10^{l+1}}$$

i

$$\frac{\Phi\left(w_k + \xi \pm \frac{2}{3^{2m+1}}\right) - \Phi(w_k + \xi)}{\pm \frac{2}{3^{2m+1}}} \leq A + \frac{3}{10^{l+1}} + \frac{1}{9 \cdot 10^l} =$$

$$= A + \frac{37}{9 \cdot 10^{l+1}} < A + \frac{5}{10^{l+1}}.$$

Stąd wnioskujemy, że funkcja Φ nie posiada pochodnej dla wartości $x = w + \xi$.

Liczby $w + \xi$ tworzą zbiór wszędziegęsty, gdyż liczby wymierne tworzą zbiór wszędziegęsty. Jest ich też w każdym przedziale (a, b) leżącym w przedziale $(0, 1)$ mnogość nieprzeliczalna, bo wyznaczając w i ϵ takie, by

$$a \leq w < w + \epsilon \leq b,$$

i takie s , by

$$\frac{2}{3^s} < \varepsilon,$$

mamy zawartą każdą liczbę $w + \xi = w + \frac{\alpha_1}{3^{s+1}} + \frac{\alpha_2}{3^{s+2}} + \dots$

gdzie $\alpha_k \neq 1$ w przedziale (a, b) . Mnogość zaś wszystkich liczb typu $\frac{\alpha_1}{3^{s+1}} + \frac{\alpha_2}{3^{s+2}} + \dots$, gdzie α mogą przyjmować dwie wartości, 0 i 2, jest mocy continuum.

O funkcjach $\varphi(x)$ i $\Phi(x)$ wiemy, że są monotoniczne, ale z największą łatwością moglibyśmy zbudować funkcje stale rosnące o własnościach funkcji φ i Φ . Wystarczy tylko położyć

$$\psi(x) = x + \varphi(x),$$

$$\Psi(x) = x + \Phi(x),$$

a chwilka zastanowienia doprowadza nas do wniosku, że są to funkcje stale rosnące, nie posiadające pochodnych w tych i w tych tylko punktach, gdzie φ , względnie Φ ich nie posiadają.

Dowiedliśmy zatem, że istnieją funkcje ciągłe, stale rosnące, nie posiadające pochodnej we wszędziegęstej i wszędzie nieprzeliczalnej mnogości punktów.

RÉSUMÉ.

St. Ruziewicz:

Sur une fonction continue, monotone, sans dérivée dans un ensemble non dénombrable des points.

Communication annoncée le 22. III. 1913.

Présentée par W. Sierpiński

M. H. Lebesgue a démontré que toute fonction monotone possède partout la dérivée.

Les exemples de Weierstrass, Schwarz, Dini, Lüroth, Sierpiński ont montré qu'il existe des fonctions monotones, non dérivables dans chaque intervalle, tout petit qu'il soit; l'ensemble des points, dans lesquels ces fonctions ne possèdent pas la dérivée est dénombrable.

Je donne un exemple d'une fonction continue, monotone, qui ne possède pas la dérivée dans un ensemble non dénombrable des points. Je démontre qu'il existe une et une seule fonction bor-

née, définie dans l'intervalle (0,1) et satisfaisant aux trois équations fonctionnelles:

$$\left. \begin{aligned} \varphi\left(\frac{x}{3}\right) &= \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \varphi(x), \\ \varphi\left(\frac{x+1}{3}\right) &= \frac{1}{5}, \\ \varphi\left(\frac{x+2}{3}\right) &= \frac{1}{5} + \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \varphi(x) \end{aligned} \right\} \text{ pour } 0 \leq x \leq 1.$$

Cette fonction est continue, non décroissante et ne possède pas la dérivée dans un ensemble parfait, non dense des points.

En posant

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x - w_n)}{10^n},$$

où w_n désigne une suite, formée de tous les nombres rationnels, nous obtenons une fonction continue monotone, pour laquelle la dérivée n'existe pas dans ensemble des points qui n'est pas dénombrable dans tout intervalle, si petit qu'il soit.

3. Stefan Mazurkiewicz:

O arytmetyzacji continuów.

Komunikat zgłoszony dn. 2 marca 1913 r.

Przedstawił W Sierpiński.

Twierdzenie.

Ażeby dowolne continuum Γ , położone w n -wymiarowej przestrzeni liczbowej było krzywą Jordan'a, to znaczy ażeby spółrzedne jego punktów były funkcjami parametru t , ciągłymi i jednoznacznie w pewnym przedziale zamkniętym,—potrzeba i wystarcza aby zachodziły warunki następujące:

I. Γ położone jest w skończoności;

II. każde dwa punkty A, B , leżące na Γ połączyć można łukiem prostym¹⁾ (AB) , zawartym w Γ i takim, że:

¹⁾ T. zn. krzywą Jordan'a, której końcami są odpowiednio punkty A i B , i która nie posiada punktów wielokrotnych. p. Zoratti: Encycl. math. (ed. franç.) II, 2; 12.

III. Średnica (AB) zmierza do zera jeżeli punkt B dąży do A ¹⁾.

A) Warunki I–III są konieczne.

Niechaj będzie Γ dowolną krzywą Jordana, zaś:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_i &= f_i(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ i &= 1, 2 \dots n \end{aligned}$$

niech będą jej równaniami. Warunek I, będzie oczywiście zawsze spełniony.

Uważajmy teraz dwa dowolne punkty A i B na Γ ; przypuśćmy, że krzywa (1) przechodzi przez te punkty odpowiednio dla wartości t_0 i t_1 parametru t . Możemy założyć, że jest:

$$t_0 < t_1$$

i że wewnątrz przedziału $(t_0 t_1)$ krzywa przez punkty A i B nie przechodzi.

Powiadam, że na łuku krzywej (1):

$$(2) \quad \begin{aligned} x_i &= f_i(t) & t_0 \leq t \leq t_1 \\ i &= 1, 2 \dots n \end{aligned}$$

istnieje łuk prosty (AB) .

Niech będzie A dowolna mnogość zamknięta zawarta w przedziale $(t_0 t_1)$ — r —jakakolwiek liczba należąca do A .—Założmy, że istnieje jeden przynajmniej przedział o własnościach następujących:

(α) r leży wewnątrz uważanego przedziału;

(β) końce przedziału zawarte są w A ;

(γ) końcom tym odpowiada jeden i ten sam punkt krzywej (2).

Przedział taki nazwiemy przedziałem typu D dołączonym do r i A .

Powiadam, że istnieje również jeden przynajmniej przedział, względem własności (α), (β), (γ) nasycony²⁾.

Uważajmy dowolny przedział (ab) typu D . Niech będzie a_0 dolna granica tych liczb przedziału $(t_0 a)$, które są lewymi końcami

¹⁾ Średnicą mnogości nazywam górną granicę odległości między jej punktami (definicja p. S. Straszewicza).

²⁾ t. zn.—przedział, który własności (α), (β), (γ) posiada i który nie jest zawarty wewnątrz żadnego innego przedziału, własności te posiadającego.

przedziałów typu D zawierających (ab) . Uwzględniając ciągłość krzywej (2) łatwo udowodnić, że a_0 będzie lewym końcem pewnych przedziałów typu D , że między temi przedziałami będzie jeden największy: $(a_0 b_0)$ — wreszcie, że $(a^0 b^0)$ będzie przedziałem względem własności (α_0) , (α) , (β) (γ) nasyconym. Ustawmy teraz wszystkie liczby wymierne przedziału $(t_0 t_1)$ w ciąg nieskończony

$$(3) \quad r_1, r_2, \dots$$

i utworzmy ciąg przedziałów:

$$(4) \quad (a_1 b_1), (a_2 b_2)$$

w następujący sposób:

$(a_1 b_1)$ — jest dowolnym przedziałem nasyconym typu D , dołączanym do r_1 i $(t_0 t_1)$. — ;

$(a_n b_n)$ — jest dowolnym przedziałem nasyconym typu D , dołączonym do r_{k_n} i mnogości: $(t_0 t_1) - \sum_1^{n-1} Y(a_v b_v)$, gdzie $Y(a_v b_v)$ — oznacza zbiór punktów wewnętrznych przedziału, a r_{k_n} jest pierwszą liczbą ciągu (3) zawartą w mnogości $(t_0 t_1) - \sum_1^{n-1} Y(a_v b_v)$ i taką, że istnieją przedziały typu D dołączone do niej i do $(t_0 t_1) - \sum_1^{n-1} Y(a_v b_v)$. (ta ostatnia mnogość jest zamknięta).

Ciąg (4) może być skończonym; ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, jeżeli dla pewnego n , — liczby r_{k_n} o wskazanych własnościach niema.

Z założeń naszych i metody konstrukcyjnej wynika z łatwością że:

1) przedziały ciągu (4) — leżą całkowicie nazewnątrz siebie, mnogość więc:

$$B \equiv (t_0 t_1) - \sum Y(a_n b_n)$$

jest doskonałą;

2) mnogość ta zawiera punkty t_0 i t_1 , i punkty te są różne od punktów a_n i b_n ;

3) dwom różnym punktom mnogości B , z których jeden przynajmniej nie należy do ciągu:

$$(5) \quad a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$$

odpowiadają różne punkty krzywej (2) — taksamo dwóm różnym

parom: a_n, b_n i a_m, b_m — Natomiast punktom a_n, b_n odpowiada jeden i tensam punkt krzywej.

Możemy teraz odwzorować mnogość doskonałą B na odcinku (01) w następujący sposób:

Każdemu punktowi wspomnianego odcinka, nie należącemu do pewnego ciągu:

$$(6) \quad u_1, u_2 \dots u_n \dots$$

odpowiada *jeden* punkt mnogości B . — Każdemu punktowi ciągu (6) — odpowiadają *dwa* punkty mnogości B , mianowicie punkty u_n — punkty a_n i b_n . Odwzorowanie jest ciągłe.

Punktom 0 i 1 odpowiadać będą w tym przypadku punkty t_0 i t_1

Położmy:

dla punktów (6):

$$(7) \quad S_i(u_n) = f_i(a_n) = f_i(b_n) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

dla pozostałych punktów u odcinka (01) :

$$(8) \quad S_i(u) = f_i(t) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

gdzie t jest przyporządkowaniem w naszym odwzorowaniu do u punktem mnogości B .

Krzywa:

$$(9) \quad x_i = S_i(u) \quad 0 \leq u \leq 1 \\ i = 1, 2 \dots n$$

jest krzywą ciągłą, bez punktów wielokrotnych, zawartą w krzywej (3) i zawierającą punkty A i B jako końce, — jest więc łukiem prostym (AB) . Udowodniliśmy tym sposobem, że dla krzywych Jordan'a warunek II jest zachowany.

Przechodzimy teraz do warunku III. Oznaczmy przez A mnogość wartości t dla których krzywa (1) przechodzi przez punkt A ; przez A_ϵ — mnogość punktów, których odległość od mnogości A nie przewyższa ϵ . Dla każdego ϵ — składa się A_ϵ ze skończonej liczby przedziałów:

$$(10) \quad (\gamma_1 \delta_1), (\gamma_2 \delta_2) \dots (\gamma_m \delta_m)^1$$

¹⁾ m może oczywiście zależeć od ϵ .

Mamy tym sposobem m krzywych Jordan'a.

$$(11) \quad \begin{aligned} x_i &= f_i(t) & \tau_j &\leq t \leq \delta_j \\ i &= 1, 2, \dots, n & j &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Niech teraz ζ będzie jakąkolwiek liczbą dodatnią. — Możemy dobrać ε tak małe, aby średnica każdej z krzywych (11) nie przekraczała ζ . Z drugiej strony można znaleźć takie σ , aby każdy punkt B dla którego:

$$\rho(AB) \leq \sigma^1)$$

leżał na jednej z krzywych (11). — Skonstruujmy na tej właśnie krzywej, metodą wyżej podaną łuk prosty (AB) . — Średnica tego łuku będzie mniejsza od ζ . A więc spełniony będzie i warunek III.

B) Warunki I—III są wystarczające. Warunkowi III można nadać taką formę: III^a *średnica (AB) jednostajnie zmierza do zera wraz z odległością punktów A i B* ²⁾

Załóżmy teraz, że dla danego continuum Γ warunki I, II, III^a są spełnione. Możemy przedewszystkiem zamknąć Γ w pewnej kostce n -wymiarowej.

Niech będą:

$$(12) \quad \begin{aligned} x_i &= F_i(t) & 0 &\leq t \leq 1 \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

równania krzywej ciągłej, wypełniającej tę kostkę, — zresztą dowolnej. Oznaczmy przez E mnogość tych wartości t dla których krzywa (12) przechodzi przez punkty mnogości Γ . — E jest mnogością zamkniętą. Jeżeli $(\alpha\beta)$ jest najmniejszym przedziałem zawierającym E , wówczas mieć będziemy:

$$(13) \quad E = (\alpha\beta) - \Sigma Y(\alpha_v\beta_v)$$

Odpowiedniki punktów $\alpha_v\beta_v$: A_v i B_v leżą na Γ , jeżeli więc:

$$(14) \quad A_v \neq B_v$$

wówczas możemy znaleźć łuk prosty: $(A_v B_v)$ zawarty w Γ . Wybierzmy teraz dla każdego v , dla którego nierówność (14) zachodzi łuk taki $(A_v B_v)$ i przytem tak aby warunek III^a był spełniony.

¹⁾ $\varphi(AB)$ — oznacza odległość punktów A i B .

²⁾ Dowód równoważności warunków III i III^a jest analogiczny do klasycznego dowodu twierdzenia o ciągłości jednostajnej.

Możemy równania tych łuków napisać tak:

$$(15) \quad x_i = \varphi_i^{(v)}(t) \quad \alpha_v \leq \beta_v \leq \beta_v \\ i = 1, 2, \dots, n$$

Określamy teraz funkcje $f_i(t)$ w następujący sposób:
Dla punktów zbioru E :

$$f_i(t) = F_i(t);$$

dla punktów wewnętrznych przedziału $(\alpha_v \beta_v)$:

a) jeżeli $A_v \equiv B_v$:

$$f_i(t) = F_i(\alpha_v) = F_i(\beta_v);$$

β) jeżeli $A_v \neq B_v$.

$$f_i(t) = \varphi_i^{(v)}(t). —$$

Równania:

$$(16) \quad x_i = f_i(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta \\ i = 1, 2, \dots, n$$

przedstawiają krzywą Γ ; funkcje $f_i(t)$ są ciągłe, co wynika natychmiast z ciągłości funkcji $\varphi_i^{(v)}(t)$ i $F_i(t)$; oraz z warunku III^a. Γ jest więc krzywą Jordan'a, co było do okazania.

RÉSUMÉ

E. Mazurkiewicz:

Sur l'arithmétisation du continu.

Communication annoncée le 2. IV. 1912.

Présentée par W. Sierpiński.

Je demontre le théorème suivant:

Pour qu'un continu Γ , situé dans un espace Euclidien a n dimensions soit une ligne de Jordan (c. a. d. pour que les coordonnées des points de Γ soient des fonctions continues d'un paramètre t , prenant toutes les valeurs d'un intervalle ferme),—il faut et il suffit:

I. que Γ soit borné;

II. qu'on puisse trouver pour tout couple de points A, B de

Γ un arc simple ayant A, B resp. pour extrémités contenu dans Γ et tel.;

III. que son diamètre¹⁾ tend vers zero lorsque le point B tend vers A .

4. Aleksander Matuszewski:

Przyczynek do flory roślin skrytokwiatowych lasów Szepietowieckich.

Komunikat zgłoszony dn. 17 Marca 1913 r.

Przedstawił Z. Wóycicki

Lasy Szepietowieckie na Wołyniu (własność hr. Józefa Potockiego) w których zajmowałem się zbieraniem mchów, porostów, a po części i roślin wyższych obejmują obszar 8413 dziesięcin. Ich drzewostan grupuje się w sposób następujący: z zachodniej strony od granicy lasów Sławuckich przeważa sosna z małą domieszką dębu; taki sam drzewostan od strony północnej. W stronie południowej i wschodniej przeważają lasy liściaste głównie dąb, jesion, brzoza, grab i lipa; dąb zajmuje dominujące miejsce, w miejscach niższych brzoza, olcha i osina. W powyżej wymienionym kierunku, a także na południu wschód, ciągną się lasy wilgotne i w tychże częściach rozpościerają się torfowiska i moczary mianowicie: w rewirze Łukawieckim i Klimontowieckim. Wilgotne części lasów posiadają bardzo bujne podszycie.

Archaiczna płyta granitowa, na której spoczywają inne formacje wielkiej wżynnej płyty czarnomorskiej pod postacią różnej wielkości oddzielnych głazów lub niewielkich obnażeń, wylania się w Sudyłkowie, i w odległości około 8 wiorst od miasteczka Szepietówki we wsi Klimontowice, gdzie miejscowy szary szepietowiecki granit obrabiają na miejscu do filarów i przyczółku 3-go mostu pod Warszawą. Granitową płytę w okolicach Szepietówki i Sławuty pokrywa formacja kredowa, której ogniwo piaskowcowe, wylania się prawie przy samym dworcu kolejowym Szepietowiec-

¹⁾ J'appelle diamètre d'un continu quelconque la borne supérieure de distances entre ses points (définition de M. S. Straszewicz).

kim z kamieniołomami piaskowcowemi z których wylamują tę skałę przez odkrywkę. Wierzchnie jej warstwy są miękkie, głębsze stanowią twarde zbity materiał, mający wartość techniczną. Miejscami piaskowiec przechodzi w luźne zlepierce gruboziarniste, z bardzo licznymi skamieniałościami, i w warstwy piasków gruboziarnistych z mnóstwem odłamków krzemienych, które szczególnie na drodze do Sławuty i w samej Sławucie bardzo utrudniają komunikację.

Gleba od strony zachodniej i północnej piaszczysta, od strony południowej szary piasek, dużo próchnicy, podglebie glinkowate, miejscami biała glina kaolinowa, lub glina plastyczna.

Moje oznaczenia pewnej liczby gatunków mchów poniżej wymienionych, raczył łaskawie sprawdzić i porównać z zielnikami Jagiellońskiego Uniwersytetu p. Antoni Żmuda asystent przy katedrze botaniki Jagiellońskiego Uniwersytetu, on również załączył mi opis nowego gatunku *Hygroamblystegium*. Uważam przeto za miłą obowiązek wyrazić Mu na tem miejscu serdeczne podziękowanie.

Wykaz systematyczny.

Bryales.

Cleistocarpi.

Phascaceae.

Phascum cuspidatum Schr., Dosyć pospolity na polu pod lasem we wsi Łozowo pod Szepietówką. Owocuje.

Stegocarpi.

A) Acrocarpi.

Weissiaceae.

Dicranoweisia crispula. (Hedw) (*Weissia crispula* Hedw.) Dosyć rzadko trafia się na kamieniach granitowych w lesie w Klimontowicach pod Szepietówką.

Dicraniaceae.

Dicranella varia Schim. W lasach Szepietowieckich na brzegach rowów, na gruncie gliniasto-piaszczystym.

Dicranella heteromala Schim. Dosyć często w powyższej miejscowości na temże podłożu.

Dicranum undulatum Ehr. W lasach Szepietowieckich na ziemi i na kamieniach pokrytych ziemią.

Dicranum scoparium (L.) Hedw. W okazałych egzemplarzach na kamieniach granitowych w Klimontowicach i również w rozmaitych częściach lasów Szepietowieckich.

Dicranum montanum (Hedw.) Bardzo obficie na pniach drzewnych szczególnie na dębach, jesionach i innych drzewach liściastych. Owocuje.

Leucobryaceae.

Leucobryum glaucum (L.) Schim. W wilgotnych częściach lasów Szepietowieckich lubo nie obficie. Forma typowa.

Fissidentaceae.

Fissidens bryoides (Hedw.) W mokrej części lasu w Szepietówce w północnej części blisko jego początku.

Fissidens adiantoides (Hedw.) Pod Klimontowicami w lasach wilgotnych.

Ditrichaceae.

Ceratodon purpureus. L. (Brid.) W Szepietówce na murach, na ziemi i pniach w lesie i pod Klimontowicami.

Ceratodon purpureus var *flavisetus* Limpr. w lasach Szepietowieckich po brzegach rowów.

Pottiaceae.

Didymodon rubellus. (Hoff.) *Trichostomum rubellum*. (Rabenbr.) Bardzo pospolity na ziemi gliniastej w lasach, a także na murach.

Tortula muralis. (L.) Hedw. Na strzechach słomianych, kamieniach, pospolicie z owocami.

Tortula ruralis. (L.) W pięknych egzemplarzach na kamieniach w Klimontowicach, a także na dachach w Szepietówce. Zazwyczaj z owocami.

Barbula unguiculata. Huds. (Hedw.) Na kamieniach w lesie

w Klimontowicach, po brzegach dróg w różnych częściach lasu w Szepietówce.

Pottia truncata. (L.) Na polach w bliskości fabryki cukru w Szepietówce dosyć pospolita.

Grimmiaceae.

Grimmia pulvinata. (Smith.) Na kamieniach granitowych w lesie w Klimontowicach; dosyć rzadko owocuje.

Hedwigia ciliata (Web.) Ehr. Bardzo obficie na kamieniach i skale granitowej w Klimontowicach pod Szepietówką.

Schistidium apocarpum. W tychże samych miejscowościach towarzyszy poprzedniemu gatunkowi.

Racomitrium canescens. (Weiss.) Brid. W bliskości lasu Szepietowieckiego i piaskowcowych kopalni przy plancie drogi żelaznej na gruncie piaszczystym. Forma typowa i var. *ericoides* (Web).

Orthotrichaceae.

Orthotrichum affine. (Schrad.) Stanowi najpospolitszy gatunek z rodzaju *Orthotrichum* na korze rozmaitych drzew w lasach i przy drogach.

Orthotrichum anomalum. (Hedw.) Na kamieniach granitowych w lesie pod Klimontowicami dosyć pospolite.

Orthotrichum pumillum. (Sw.) Na wierzbach, topolach, osinach niezbyt często.

Orthotrichum speciosum. (N. ab. Es.) Miejscami na drzewach liściastych, na leszczynach.

Orthotrichum crispum. (Hedw.) Hoff. (*Ulota crispula*). Na sosnach w lasach Szepietowieckich.

Eucalyptaceae.

Eucalypta vulgaris. (Hed.) Hoff. Na wzgórkach pokrytych trawą w okolicach Szepietówki.

Georgiaceae.

Georgia pellucida. (L.) Rabh. (*Tetraxis pellucida* Hedw.) W Klimontowicach w miejscach wilgotnych.

Funariaceae.

Funaria hygrometrica. (L.) Bardzo pospolita w mokrych miejscach, w lasach, w rowach w Szepietówce i Klimontowicach na murach.

Physcomitrium pyriformae. (L.) Brid. Zwykle owocuje, znajduje się dosyć obficie w rowach w Szepietówce blisko szpitala ziemskiego.

Bryaceae.

Bryum argenteum. (L.) Na ścieżkach, w ogrodach na płotach, murach b. pospolity. Zwykle z owocami.

Bryum caespiticium. (L.) W lesie u pni spróchniałych, na łąkach pod Łozowem dosyć pospolity.

Bryum pseudotriquetrum. Schw. na torfowiskach pod Klimontowicami.

Bryum capillare. (Hedw.) Dosyć rzadko w lasach pod Klimontowicami, lasach Szepietowieckich, po rowach, w parowach, między krzakami.

Bryum nutans. (Schreb). W lasach Szepietowieckich bardziej suchych, w tej części, w której przeważają sosny.

Bryum Duvalii. Pod Klimontowicami w bagnistych miejscach. Bez owoców.

Rhodobryum roseum. (Weiss.) Limp. W lasach pod Klimontowicami bez owoców dosyć pospolity.

Mniaceae,

Mnium undulatum. (Hedw.) Bardzo pospolity w wilgotnych częściach lasów Szepietowieckich niekiedy z owocami.

Mnium punctatum. (Schr.) Hedw. W wilgotnych lasach pod Klimontowicami.

Mnium cuspidatum. (Hedw.) Jestto jeden z najpospolitszych gatunków *Mnium* spotykanych w bardziej cienistych częściach lasów Szepietowieckich.

Mnium hornum. L. Miejscami w dołach w lasach około Klimontowa.

Aulacomniaceae.

Aulacomnium palustre. (L.) Schw, W lasach mokrych pod Klimontowicami dosyć pospolity.

Bartramiaceae.

Philonotis fontana (Brid.) Na moczarach i około źródełk pospolity.

Polytrichaceae.

Polytrichum commune. (L.) W gęstych wysokich darniach wysokości do 20 cm jako forma typowa w lasach na ziemi, pospolicie z owocami. Miejscami znalazłem var. *uliginosum* (Hüb.)

P. juniperinum. (Wild.) mniej pospolity niż poprzedzający gatunek w lasach przeważnie liściastych.

P. formosum. (Hedw.) w lesie pod Klimontowicami.

P. piliferum. (Wild.) pod lasem na gruncie piaszczystym w bliskości piaskowcowych kamieniołomów niedaleko plantu kolei Szepietowieckiej.

Catharinea undulata. (L.) Bardzo pospolity w gęstych lasach zwłaszcza w bliskości krzaków.

C. tenella. (Roth.) Po brzegach rowów w lesie pod Klimontowicami, dosyć rzadko.

Polytrichum gracile. (Meuzis.) Dosyć rzadko pod Klimontowicami.

Pogonatum nanum. (Hedw.) Dosyć rzadko w rowach suchych w bliskości lasu sosnowego.

B) Pleurocarpi.

Fontinalaceae.

Fontinalis antipyretica. (L.) W sadzawkach przy głazach granitowych i strumykach w Klimontowicach, a także w bliskości piaskowcowych kamieniołomów w Szepietówce.

Cryphaeaceae.

Leucodon sciuroides. (L.) Schwg. W postaci ogromnych darń obrasta graby, dęby, rzadziej wierzby.

Leskeaceae.

Leskea polycarpa. (Ehr.) Pospolita na olchach, dębach, wierzbach i innych drzewach.

Anomodon attenuatus. (Schreb.) Na dębach, dosyć pospolity.

Anomodon longifolius. Z kwiatami ♀ trafia się rzadziej od poprzedzającego na grabach w Klimontowicach.

Pterigynandrum filiforme. (Hedw.) Na kamieniach w lesie w Klimontowicach i na pniach dębów i grabów.

Thuidium tomariscinum. Br. i Sch. W postaci okazałych wielkich zielonych darnin na wilgotnych kamieniach granitowych w lesie pod Klimontowicami, często także spotyka się na ziemi w tychże lasach.

T. abietinum. (Br. i Sch.) Na polach pod Szepietówką, na piaszczystych urwiskach bardzo pospolity.

T. delicatulum. (Br. i Sch.) Rzadko trafia się na łąkach pod lasem w Szepietówce.

Neckeraceae.

Neckera pennata. (L.) Hedw. Niezbyt często na grabach i dębach.

Homalia.

Homalia trichomanoides. (Schreb.) Br. i Sch. Dostyć pospolita u pni dębów.

Hynaceae.

Pylaisia.

Pylaisia polyantha. (Sch.) Pospolita w ogrodach i lasach szczególnie na korzeniach drzew.

Platygium.

Platygium repens. (Br. i Sch.) Z owocami bardzo często spotyka się na brzożach i miejscami na dębach.

Climacium.

Climacium dendroides. (Dill.) Web. i Mohr. Na wilgotnych łąkach b. pospolity.

Camptothecium.

Camptothecium nitens. (Schmpr.) W okolicach Klimontowic na mokrych łąkach.

Brachythecium.

Gatunki tego rodzaju dosyć licznie występują w lasach Szepietowieckich, a mianowicie:

Brachythecium plumosum. (Sw.) Br. Sch. G. Dosyć często w postaci okazałych darń z owocami obrasta podstawy wilgotnych głazów granitowych po brzegach niewielkich sadzawek w Klimontowicach niedaleko granitowych kamieniołomów. Barwa tego gatunku ciemno brązowa, *seta* w górze tylko *b. niskiemi* brodawkami tu i owdzie pokryta. Jestto typowy gatunek rosnący stale na głazach granitowych; jego forma jest identyczna z okazami pochodzącymi z Wogezów.

Brachythecium populeum forma *major* (Schm.) Na głazach granitowych w Klimontowicach a miejscami w lasach i na łąkach. Owocuje.

Brachythecium salebrosum. (Hoff.) Br. Eur. Obficie na ziemi w lasach i zaroślach, zwykle z owocami. Var. *cylindricum* na pniach drzewnych w Klimontowie.

Brachythecium velutinum. (L.) (Br. Eur.) forma *typowa*. U pni drzewnych z owocami.

Brachythecium albicans. (Neck.) Na piaszczystym gruncie w bliskości piaskowcowych kamieniołomów, a także na polach pod lasem bardzo obficie.

Brachythecium rutabulum. Br. i Sch. W postaci tęgich darń zwykle z owocami u pni drzew; w lasach i ogrodach *b. pospolity*.

Brachythecium rivulare. Br. i Sch. W Klimontowicach na pniach olchowych u źródlisk dosyć rzadko.

Scleropodium.

Scleropodium purum. (K.) Limpr. (Hypnum purum L.) Pospolity na ziemi w lasach sosnowych.

Eurhynchium.

Eurhynchium striatum. (Schreb.) (Rhynchostegium striatum.) Schmpr. W znacznych ilościach, często z owocami, po większej części na ziemi w wilgotnej części lasów Szepietowieckich.

Eurhynchium praelongum. (L.) (Rhynchostegium praelongum Br. i Sch.) Miejscami w tychże lasach.

Oxyrrhynchium rusciforme. (Neck.) Warnstr. W sadzawkach przy głazach granitowych w Klimontowicach, w strumykach, w okolicach kamieniołomów piaskowcowych.

Amblystegium.

Amblystegium serpens. (L.) Pospolity z owocami na drzewach var *tenue* (Schrad.) Trafia się także na kamieniach w Klimontowicach.

Hygroamblystegium irriguum. (Wils.) Loesk. (*Amblystegium irriguum* Wils Br. Eur.) W sadzawkach przy głazach granitowych w Klimontowicach dosyć obficie, często z owocami. Var *falcatum* (Warnst.)

Amblystegium riparium. (L.) Br. i Sch. Na palach wodnych, na stawidłach w Szepietówce i na Łozowie pod Szepietówką. Tamże *A. riparium* var. *longifolium* (Schultz.) (*Leptodictyum riparium* L. (Warnst var *longifolium*) obrasta koła młynów wodnych, var *subsecundum* (Br. Europ.) (*Leptodictyum riparium* (L.) Warnst, v. *subsecundum*) w tejsze samej miejscowości i na temże podłożu. Na Łozowie na młynie wodnym var *elongatum*. *Leptodictyum riparium* (L.) Warnst var. *elongatum* (Br. Eur.) i var. *fallax*. (*Leptodictyum riparium* (L.) Warnst var. *fallax* Warnst.)

Hygroamblystegium nova. spec. Na palach i drewnianych częściach młynu wodnego na Łozowie pod Szepietówką. Jestto gatunek najbliższy *A. irriguum*) różni się liśćmi niesztynnymi lecz wiotkimi, żeberkiem cienkim, wiotkiem u nasady zaledwie do 0,032 mm szerokiem, w górnej części stale falisto przebiegającym i dochodzącem do wierzchołka. Komórki parenchymatyczne podobnie jak i u *A. irriguum*, tak samo komórki nasadowe liścia, seta u *A. irriguum* 2—3 cm, tutaj 1,5—2 cm długa, prosta. Liście łodygowe do 1 mm długie w długi koniec często zagięty przechodzące. Chwytniki na pędach bardzo liczne. Zęby peristomu nie brodawkowate, peristom wewnętrzny (endostom) blado żółty, zewnętrzny (exostom) ciemno żółty, błona podstawowa endostomn prawie gładka. Zarodniki 0,014—0,0024 mm słabo brodawkowate¹⁾

¹⁾ Opis tego nowego gatunku listownie zakomunikował mi p. Antoni Żmuda.

Amblystegium radicale. Br. i Sch. Miejscami w lasach wilgotnych na pniach szczególniejsz olszowych, a także na wilgotnych głazach granitowych.

Amblystegium filicinum. (L.) De Not. (Cratoneuron filicinum (L.) Roth.) występuje w formie var. *trichodes* (Brid.) Stend w Łozowie także również var *gracilescens* Schmpr., którą także dostrzegłem na pniach olszowych i mokrych kamieniach w Klimontowicach.

Plagiothecium.

Plagiothecium denticulatum. (L.) Br. Dostyć pospolity na korzeniach drzew w lesie pod Klimontowicami.

Plagiothecium silesiacum. Schmpr. Na pniach spróchniałych.

Plagiothecium silvaticum. Br. i Schmp. rzadziej od poprzedzających.

Homalothecium.

Homalothecium sericum. Br. i Sch. Na kamieniach i murach w Szepietówce i okolicach pospolity.

Hypnum.

Acrocladium.

Acrocladium cuspidatum. L.) Lindb. (Hypnum cuspidatum). Oprócz bardzo rozpowszechnionej formy typowej w różnych miejscach Szepietówki, we wsi Łozowie tak często wspomianej, na drewnianych częściach młyna wodnego znajduje się obficie bardzo ciekawa i gdzie indziej rzadka odmiana *A. cuspidatum* var. *molle* (Klinggr.) Ta odmiana występuje w postaci dużych płaskich miękkich darni pięknej jasno zielonej barwy, cechuje się liśćmi dość płasko rozłożonymi, węższymi niż w formie typowej, nie zwiniętymi na końcach gałązek, wskutek czego te ostatnie nie są spiczaste i kołące jak w formie typowej, po której to cesze na pierwszy rzut oka poznaje się *Acrocladium cuspidatum* typowe. Wyżej wymieniona odmiana na pierwszy rzut oka robi wrażenie *Eurhynchium speciosum*.

Stereodon.

Stereodon Haldanianum. Grev. (Hypnum Haldanianum). Bardzo pospolity (zazwyczaj z owocami) w lasach szepietowieckich

nie tylko na pniach spróchniałych, ale także na korze dębów, sosen i innych drzew.

Stereodon cupressiforme. (L.) Brid. (*Hypnum cupressiforme* L.) Bardzo pospolity jak i w innych miejscowościach tak i tutaj, w postaci dużych darń na ziemi, w lasach, na kamieniach, na dachach. Oprócz formy typowej występuje jako *var. filiforme* Brid. na korze drzew liściastych na lipach, dębach; zwykle bez owoców—jestto odmiana bardzo pospolita w lasach Szepietowieckich; *var longirostris* (Br. Eur.) Warnst rzadziej niż poprzedzająca u stóp dębów, lip, brzoź; *var. tectorum* na dachach słomianych; *var. lacens* (Mol.) Warnst. forma bażkowata na wzniesieniach piaszczystych, właściwa górskim okolicom.

Stereodon reptile. (*Hypnum reptile* Rich.) Na korzeniach lip, sosen, dosyć pospolity w południowej części lasów.

Stereodon imponens. (L.) *Hypnum imponens* Hedw. Brid.) W południowo wschodniej części lasów Szepietowieckich, w Klimontowicach na ziemi lub korzeniach drzew.

Ptilium.

Ptilium crista-castrensis. (L.) (*Hypnum crista castrensis*.) Na ziemi w lasach sosnowych w wilgotnej ich części dosyć pospolity.

Drepanocladus.

Drepanocladus Kneiffii Schim. (*Hypnum aduncum* var. *Kneiffii*.) Pospolity w Klimontowicach na moczarach.

Drepanocladus Sendtneri. (*Hypnum* Sendtner. Schim.) Tworzy gęste darnie na moczarach pod Klimontowicami var. *trivialis* (Sanio) (Warnstr.) Żebra nasadowe 90—120 μ . szerokie.

Hypnum uncinatum. Hedw. Dosyć pospolity na drzewach, mianowicie na dębach i na ziemi.

Hypnum aduncum. Hedw. Na łąkach mokrych i torfowych w okolicach Klimontowic.

Cratoneuron.

Cratoneuron filicinum. (L.) Roth. var. *densum* (Warnst.) przy młynie wodnym w Szepietówce.

Hylocomium.

Hylocomium Schreiberi. (Hypnum Schreiberi Wlld.) Bardzo pospolity na ziemi szczególnie w lasach sosnowych tworzy obfite darnie.

Hylocomium squarrosum. Schimpr. na łąkach pod lasem obficie.

Hylocomium triquetrum. (L.) Br. Eur. (Rhyti diadelphus triquetrus L. Warnst.) Forma typowa zazwyczaj dosyć pospolita.

Hylocomium splendens. B. S. Na podłożu piaszczysto gliniastem w lasach bardzo pospolity. Niekiedy owocuje.

*

*

*

Rozpatrując wykaz powyżej wymienionych gatunków mchów zebranych w lasach Szepietowieckich, zaznaczyć należy zupełnie nowy gatunek rodzaju *Hygroamblystegium*, występowanie dosyć licznych odmian z gatunku *Amblystegium riparium* (*Leptodyctium riparium*) dosyć rzadkich w innych miejscowościach, i na koniec odmianę *Acrocladium cuspidatum* var *molle* (Klinggr.), która dotąd w Królestwie Polskiem nie była znaleziona.

*

*

*

Bei dem näheren Beobachten der oben genannten Gattungen der Moose welche in Schepietover Wäldern Wolhyniens gesammelt werden, lässt sich eine ganz neue Gattung als eine Art. von *Hygroamblystegium* bemerken, weiter kommen vielzählige Varietäten der Gattung *Amblystegium riparium* (*Leptodyctium riparium*) hervor, welche in anderen Gegenden selten zu beobachten sind, und schliesslich eine Varietät von *Acrocladium cuspidatum*, namentlich var. *molle* (Klingr.) welche bis jetzt in Königreich Polen sich nicht bemerkbar machte.

2. Flora Porostów.

I. *Discolichenes*.

A. *Cyclocarpeae*.

Rodzina Parmeliaceae.

Rodzaj *Parmelia*.

Parmelia cylisphora (Ach.) Wain. (*Parmelia caperata* Nyl., *Imbricaria caperata* Koerb.) Bardzo pospolita w lasach Szepieto-

wieckich, tworzy często ogromne plechy na sosnach, dębach i innych drzewach liściastych. Owoców nie znalazłem.

Parmelia tiliacea. (Hoffm.) Wain. Na brzozach, jeziorach, lipach, dosyć często, ale bez owoców. Plecha zwykle niewielkich rozmiarów.

Parmelia sulcata. Tayl. (*Parmelia saxatilis* var. *sulcata* Nyl.) Stanowi na rozmaitych drzewach w lasach Szepietowieckich najpospolitszy gatunek, pokrywając ich korę nieraz prawie całkowicie swemi szaremi plechami. Tylko na jednym egzemplarzu znalazłem owoce, które bardzo rzadko w tym gatunku występują.

Parmelia olivacea. (L.) Ach. Na brzozach, olchach, osinach z wykształconemi dużemi apotecjami bardzo pospolita.

Parmelia aspidota. (Ach.) Wain. Miejscami na drzewach towarzyszy poprzedzającemu gatunkowi lubo nie tak częsta, jak *P. olivacea*.

Parmelia physodes. (L.) Ach. Prawie najpospolitszy gatunek parmelii obrastający pnie drzewne drzew liściastych i iglastych, a także ich gałęzie. Owoców, które zresztą są bardzo rzadkie, nie znalazłem.

Parmelia acetabulum. (Nech.) Dub. Bardzo rzadko; raz znalazłem ten gatunek na grabie w lasach Szepietowieckich.

Rodzaj *Usnea*.

Usnea barbata. (L.) Hoff. (*Usnea barbata* β *pendula*) Koerb. Wspaniale okazy tego porostu znajdujemy dosyć często na drzewach liściastych w lasach Szepietowieckich, a także na sosnach. Główne osie tego porostu dosięgają długości 20 centymetrów i więcej.

Usnea florida. (L.) Hoff. (*Usnea barbata* α *florida* (Fr.) Bardzo pospolity gatunek rozwija się na drzewach liściastych, a także na sosnach, niekiedy na drzewie obrobionem; owocuje rzadko, przynajmniej nie udało mi się zebrać okazów z apotecjami. W lasach Szepietowieckich występuje w dwu odmianach jako var. *hirta* szczególnie na deskach płotach i var. *sorediella* na korze drzew.

Rodzaj *Bryopogon* (Link.) Koerb.

Bryopogon chalybeiforme. (L.) Elenk. (*Bryopogon jubatum*, Koerb.) Bez owoców dosyć obficie znajduje się w lasach Szepietowieckich i Sławuckich dosięga czasem $\frac{1}{2}$ metrowej długości.

Rozwija się na sosnach i na drzewach liściastych. Forma *lanestris* (Ach.) Forma *stricta* Ach. w lasach w Adamowie pod Zamościem.

Bryopogon implexum. (Hoff.) Elenk. Częstszy od poprzedzającego gatunku, obficie rozrasta się w lasach mieszanych. Owocuje bardzo rzadko.

Rodzaj *Ramalina*.

Ramalina fraxinea. (L.) Ach. Ten porost bardzo zwyczajny w wielu miejscowościach na drzewach w lasach i parkach, stosunkowo rzadko występuje w lasach Szepietowieckich i Sławuckich. Najczęściej spotkałem go na dębach.

Ramalina populina. (Ehr.) Wasin. Na korze brzoź w bardziej oświetlonych częściach lasów. Znalazłem bez owoców.

Rodzaj *Evernia* (Ach.)

Evernia prunastri. L. (Ach.) Na sosnach, brzozach, lipach i innych drzewach liściastych bardzo pospolicie. Z owocami nie znalazłem.

Evernia furfuracea. (L.) Mann. Bardzo częsty na sosnach w okazałych okazach gęsto pokrytych izidiami var. *scobicina* (Ach.) Bardzo rzadko owocuje.

Rodzaj *Cetraria*.

Cetraria islandica. (L.) Ach. Miejscami posyć rzadko w suchych częściach lasów Szepietowieckich, var. *crispa* (Ach.) var. *subtubulosa* (Fr.)

Cetraria aculeata. (Schreb.) Fr. (*Cornicularia aculeata*.) Ach. towarzyszy zwykle poprzedniemu gatunkowi. Na piaskach w lesie sosnowym.

Cetraria glauca. (L.) Ach. = *Imbricaria perlata* (Koerb.) Dosyć obficie obrasta jesiony, olchy, brzozy, dęby, a miejscami i sosny w lasach Szepietowieckich. Owoców nie znalazłem.

Cetraria caperata. (L.) Wain. *Cetraria juniperina*. var. *pinastri* (Ach.) Prawie na każdym drzewie, tak na sosnach jak i na drzewach liściastych, owocuje nadzwyczaj rzadko.

Rodzina *Lecanoraceae*.

Lecanora.

Lecanora allophana. (Ach.) Nyl. (*Lecanora sub fusca* (L.) Ach.) bardzo pospolisty z liczby skorupiastych porostów pokrywa-

jąc niekiedy w znacznej części powierzchnię kory drzew liściastych, a częścią i iglastych. Apotecye zwykle bardzo rozwinięte barwy cynamonowej lub niekiedy prawie czarnej, dochodzą średnicy 3 milimetrów.

Lecanora albella. (Pers.) Ach. *Lecanora pallida* α *albella*) Koerb. Dosyć pospolity porost zwykle z dobrze rozwiniętymi dużymi często wypukłymi apotecyami blado różowemi, dochodzącymi co do średnicy do 2". Obrasta przeważnie olchy, osiny, jesiony i inne drzewa liściaste.

Lecanora augulosa. (Schreb.) Ach. (*Lecanora pallida* β *angulosa*) Koerb.) Często towarzyszy poprzedzającemu gatunkowi na korze drzew liściastych.

Lecanora varia. (Ehrb.) Ach. Na starych drewnianych płotach i drewnianych budynkach, rzadziej na drzewach.

Lecanora piniperda. Koerb. Na korze sosny, a niekiedy na drewnianych płotach. Apotecye barwy jasno cynamonowej.

Lecanora coilocarpa. (Ach.) Nyl. Podobnie jak poprzedzający gatunek na korze sosny. Apotecye barwy niekiedy bardzo ciemnej.

Lecanora atra. (Huds.) Ach. Na olchach lubo dosyć rzadko, a także na kamieniach polnych granitowych.

Squamaria. D. C.

Squamaria muralis. (Schreb.) Elenk. (*Placodium saxicolum* Koerb.) Na starych płotach drewnianych, na ceglach, a zwłaszcza na kamieniach narzutowych dosyć pospolity.

Rodzina Pertusariaceae.

Pertusaria leioplaca. (Ach.) Schaer. (*Porina leioplaca* Ach.) Na korze olchy, osiny i drzew liściastych. Liczba spor w woreczkach zwykle 4 do 6.

Pertusaria communis. D. C. Jeden z najpospolitszych porostów na gładkiej korze drzew liściastych. Spory w woreczkach zazwyczaj tylko 1 a czasem 2 lub 3.

Variolaria.

Variolaria faginea. (L.) Elenk. (*Variolaria amara* Ach.) Na korze dębów i innych drzew liściastych, niekiedy na sosnach, bez

apotecyów bardzo pospolity, do tego stopnia, że kora zwłaszcza w dolnej części pni jest jakby mąką białą pokryta.

Variolaria globulifera. Turn. Trafia się rzadziej niż poprzedzający gatunek, przeważnie na korze dębów.

Rodzina Candelariaceae.

Candelariella. (Wain.)

Candelariella vitellina. (Ehr.) Bardzo pospolity na drewnianych starych płotach i dachach.

Rodzina Theloschistaceae.

Xanthoria (Fr.)

Xanthoria parietina. (L.) Th. Fr. Najpowszechniejszy porost na najrozmaitszych podłożach. Najczęściej trafia się forma *vulgaris* (Schaer.)

Xanthoria polycarpa (Ehrb.) Wain. Na korze rozmaitych drzew.

Placodium.

Placodium cerinum. (Ehr.) Wain. Na płotach drewnianych tworzy skupienia składające się prawie tylko z pomarańczowych apotecyów. Występuje także na korze osiny i innych drzewach z korą gładką.

Placodium gilvum. (Hoff.) Wain. Przeważnie na osinach i jesionach, niekiedy na płotach drewnianych. Średnica apotecyów około 0,8 mm.

Rodzina Lecideaceae.

Bacidia (De Not.) Th. Fr.

Bacidia rubella. (Pers.) Mass. Na korze jesionów, osin, dosyć pospolity. Średnica apotecyów około 0,8 mm.

Bacidia fusciorubella. (Hoff.) Arn. Na korze jesionów. Plecha białawo szara.

Biatora Ft.

Biatora symmicta. (Ach.) Elen. (*Lecanora varia* var. *symmicta* Koerb. *Lecanora symmictera* Nyl.) Na drewnianych płotach, na korze sosny i korze drzew liściastych, szczególnie na brzożach i osinach.

Lecidea (Ach.).

Lecidea glomerulosa. (DC.) Nyl. (*Lecidea enteroleuca* Fr.)
Należy także do bardzo rozpowszechnionych porostów, szczególnie
na korze olszy, osiny i topoli.

Biatorina Mass.

Biatorina globulosa. (Floerk.) Koerb. Dostyć rzadko na dę-
bach w rozpadlinach kory.

Biatorina synothea. (Ach.) Koerb. Na starych płożach i par-
kanach w okolicach Szepietówki.

Rodzina Cladoniaceae.

Cladonia. (Hoff.)

Cladonia rangiferina. (L.) Web. Najpospolitszy z porostów
ścielących się na ziemi w sosnowych borach.

Cladonia sylvatica. (L.) Hoff. Na ziemi i na starych pniach
drzewnych w lasach Szepietowieckich.

Cladonia furcata. (Huds.) Schrad. W bardziej oświetlonych
częściach lasów Szepietowieckich i na płożnej ziemi.

Cladonia fimbriata. (L.) Fr. W częściach lasów, gdzie prze-
ważają sosny; na gruncie piaszczystym. Przeważa forma *var. sim-
plex* (Weis.) Flot.

Cladonia coccifera. (L.) Wild. Dostyć rzadko w lasach sosno-
wych na gruncie piaszczystym.

Cladonia digitata. (Ach. Schaer.) Zazwyczaj u podnóża so-
sen w lasach bardziej zacienionych.

Cladonia cariosa. Bardzo obficie z owocami na piaskach
w bliskości piaskowcowych kamieniołomów pod Szepietówką. Apo-
tece koloru czekoladowego.

Cladonia pyxidata. Na pniach drzewnych, na ziemi leśnej,
między mchami.

Cladonia gracilis. Dostyć pospolity gatunek w lasach igła-
stych szczególnie na gruncie piaszczystym. Zazwyczaj występuje
w formie *dilatata* (Hoff.) Wain. *Cladonia botrytes*. Na gnijących
pniach dębowych dostyć rzadko.

Rodzina *Acarosporaceae*.

Biatorrella.

Biatorrella pinicola. (Mass.) Th. Fr. Na korze sosny dosyć często. Apotecyje bez brzegów, czarne. Bardzo podobna do *B. improvisa* (Nyl).

Rodzina *Buelliaceae*.

Anaptychia.

Anaptychia ciliaris. (L.) Koerb. Występuje bardzo często na korze rozmaitych drzew i krzewów w formach α *vulgaris* (Kbr.) γ *crinalis* (Schleich) i formie typowej.

Physcia Fr.

Physcia caesia. (Hoffm.) Nyl. Na kamieniach pospolita.

P. pulverulenta. (Schreb.) Mniej pospolita niż poprzedzający gatunek. Forma α *allochroa* (Hoff.) Przeważnie na drzewach liściastych.

P. obscura. (Ehr.) Th. Fr. Najpospolitszy z rodzaju *Physcia*, prawie na każdym drzewie. Bardzo częste następujące formy: α) *orbicularis* (Neck.) Th. Fr. β) *saxicola* (Mass.) b) *cycloselis* (Ach.)

P. stellaris. (L.) Nyl. Częsty gatunek na sosnach, wierzbach, topolach; występuje także na drewnianych parkanach. Trafia się zazwyczaj w odmianach: α) *adpressa* Th. Fr. i β) *adscendens* (Fr.) Th. Fr.

Rinodina.

Rinodina exigua. (Ach.) Fr. Szczególniej na brzozech i olchach niekiedy na starych płotach i murach.

Buellia (De Not.)

Buellia punctiformis. (Hoff.) Mass. (*B. parasema* (Ach.) Fr. Na korze rozmaitych drzew szczególnie liściastych. Formy: α) *disciformis* (Fr.); β) *microcarpa* (Sch.) przeważnie na olchach.

Buellia myriocarpa. (De) Mudd. na sosnach.

Rodzina *Peltigeraceae*.

Peltigera (Hoff.)

Peltigera aphosa. (L.) Hoff.) Dosyć rzadko po brzegach lasów Szepietowieckich, w stanie płonnym.

P. canina. (L.) Hoff. Jestto najpospolitszy gatunek z rodzaju *Peltigera*, występuje najczęściej z owocami w formie typowej, a miejscami w formie *crispata* (Rab.)

P. Polydactyla (Hoff.) Rzadziej od poprzedzającego gatunku na kamieniach i mchach w Klimontowicach.

P. rufescens. (Neck.) Hoff. W zaroślach na ziemi piaszczystej.

P. horizontalis. (L.) Hoff. Należy do rzadszych gatunków z rodzaju *Peltigera*. Znalazłem kilka okazów na ziemi i kamieniach w lasach w Klimontowie. Spory długo wrzecionowate 4-komórkowe długości 35 μ , szerokości 6 μ .

Nephroma Nyl.

Nephroma parile. (Ach.) Wain. (*N. solediatum* Sch. W postaci dużych plech szarych, której brzegi często są obficie pokryte szaremi solediami. Rzadko trafia się u stóp drzew liściastych.

Rodzina *Stictaceae*.

Sticta (Ach.)

Sticta pulmonaria. (L.) Schr. Piękny ten porost dosyć rzadko trafia się w postaci zielonych plech na grabach w lasach Szeptowieckich.

B. *Graphideae*.

Rodzina *Xylographaceae*.

Xylographa.

Xylographa parella. (Ach.) Fr. Na zbutwiałych drzewach iglastych dosyć rzadko.

Rodzina *Graphidaceae*.

Graphis.

Graphis scripta. (L.) Ach. Bardzo pospolityna korze rozmaitych drzew szczególnie liściastych. Występuje w rozmaitych formach: $\alphavulgaris Kbr. *hebraica* Ach. *betuligera* Ach. *flexuosa* Ach. *recta* Humb., *macrocarpa* (Ach. β) *serpentina* Ach. *acerina* Ach.$

Opegrapha (Humb.)

Opegrapha varia. Pers. Na korze drzew liściastych dosyć pospolity.

O. atra. (Pers.) Na gładkiej korze starych jesionów.

O. herpetica. Ach. Pospolity na wierzbach i topolach.

Arthoniaceae.

Arthonia Ach.

Arthonia punctiformis. Ach. Na korze drzew liściastych, szczególnie na jesionach i grabach.

C. Coniocarpeae.

Rodzina Caliciaceae.

Coniocybe nivea. Hoff. Na korze starych dębów dosyć częsty var. *pallida* Ters.

II. *Pyrenolichenes*.

Rodzina Pyrenulaceae.

Pyrenula leucophaea. (Wallr.) Koerb. Częsty gatunek na dębach i osinach.

Acrocardia gemmata. (Ach.) Na starych dębach dosyć często.

Pyrenula nitida. (Schrad. (Verrucaria nitida Schw.) Na osinach.

5. R. Tylplówna:

Krzywizna łuku środkowo-strzałowego czaszki jako
cecha rasowa.

Komunikat zgłoszony dn. 17 Lutego 1913 r.

Przedstawił K. Stolyhwo.

(Z Instytutu Antropologicznego w Zurychu i Pracowni
Antropologicznej T. N. W.).

Jednym z najważniejszych zagadnień antropologii jest określenie typów rasowych. Z zagadnieniem tem łączy się ściśle pytanie, o ile jakaś cecha morfologiczna posiada wartość przy okre-

ślaniu różnie rasowych. Dotychczasowe badania wysunęły cały szereg cech, wartość tę posiadających. Badaniom podobnym poddawano wielokrotnie krzywą środkowo-strzałową czaszki. Mierzono więc naprzykład kąty, które ze sobą tworzą trzy składowe kąci sklepienia, próbowano scharakteryzować krzywiznę pojedynczych odcinków przez wskaźnik cięciwo-łukowy; również i wielkość promieni większych odcinków sklepienia czaszki podlegała badaniom.

Ostatnio wymieniona metoda posiada braki, a mianowicie: pochłania zbyt wiele czasu, a co ważniejsze nie daje możności dokładnego scharakteryzowania przebiegu krzywwej. Braki te starali się usunąć Mollison ('08) i Frizzi ('09) w ten sposób, iż mierzyli krzywiznę sklepienia czaszki w kilku z góry określonych punktach. Mollison posługuje się ogólnie stosowanem w matematyce mierzeniem krzywizny odwrotnością promienia krzywizny w danym punkcie. Wyrażając promień krzywizny w metrach, otrzymujemy miarę danej krzywizny (Krümmungswert) w liczbach całkowitych, np. jeżeli promień R krzywizny równa się $3\text{ cm} = 0,03\text{ m}$, to krzywizna w tym punkcie wynosi:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{3\text{ cm}} = \frac{1}{0,03\text{ m}} 30\text{ m}^{-1}.$$

Teraz powstaje pytanie, które stało się punktem wyjścia moich dociekań; o ile wielkości krzywizny różnych punktów łuku środkowo-strzałowego sklepienia czaszki wykazują istotne różnice rasowe.

Zbadany materiał składa się z 80 czaszek następujących grup: 40—birmańskich, 20—czaszek graubindeńskich typu „Disentis“ i 20—czaszek papuańskich ze zbioru Pracowni Antropologicznej Uniwersytetu w Zurychu.

Korzystam tu ze sposobności by wyrazić mą głęboką wdzięczność szanownemu prof. dr. R. Martin'owi jak również asystentowi tejże Pracowni dr. Th. Mollison'owi za Ich chętnie i cenne wskazówki. Wykończyłam tę pracę w Pracowni Antropologicznej T. N. W., za co składam podziękowanie Kierownikowi tejże, p. K. Stołyh wie.

*

*

*

Opierając się na matematycznym określeniu, możemy w praktyce bez popełnienia większego błędu małe przestrzenie pewnej krzywizny uważać niejako za odcinki pewnego okręgu, a więc mierzyć je wielkością odwrotną do promienia tego okręgu, przechodzącego przez dany punkt krzywizny.

Z powyższego założenia wychodząc, dzieliłam, podobnie jak Mollison i Frizzi, krzywą środkowo-strzałową na liczbę części

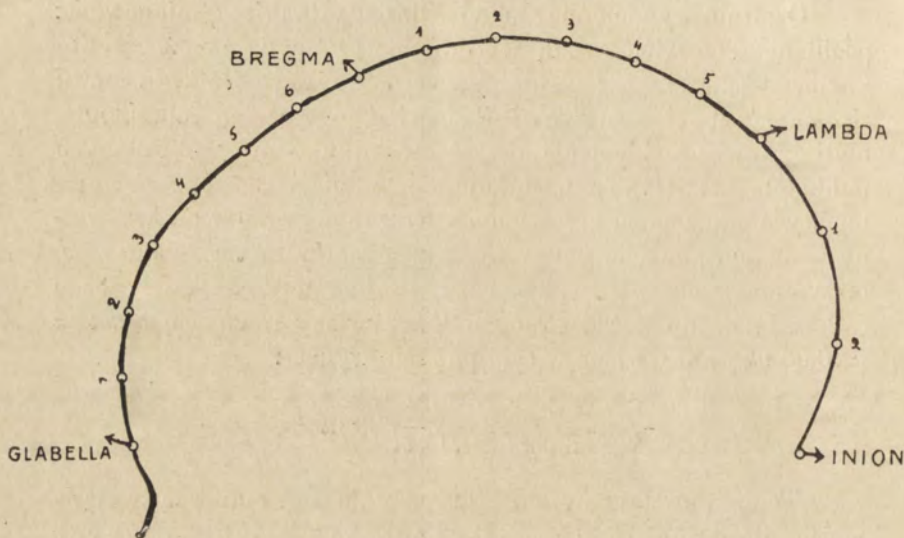


Fig. 1. Krzywizna środkowo-strzałowa z wyszczególnieniem wyżej podanych punktów.

jedną i tę samą dla wszystkich czaszek, przyczem krzywizna każdej części została zmierzona, a mianowicie:

- kość czołowa (*Frontale*) w . . . 6 punktach
- kość ciemieniowa (*Parietale*) w 5 „
- kość potylicowa (*Occipitale*) w 2 „

Krzywizna w punktach ¹⁾ *Bregma* i *Lambda* została również zmierzona.

Z powyższych pomiarów zostały wyłączone: *Glabella*, dla

¹⁾ Mówiąc o krzywiznie w pewnym punkcie, rozumiemy krzywiznę łuku, przechodzącego przez dany punkt i ograniczonego punktami, znajdującymi się w odległości 15 mm od danego punktu.

trudności mierzenia jej krzywizny, jak również dolna część łuski potylicowej (przestrzeń Inion-Opisthion) ze względu na nieregularność jej kształtu.

Dla mierzenia pewnej krzywizny bezpośrednio na czaszce skonstruował Th. Mollison I. ('07) „cyklometr“ oparty na twierdzeniu, że każde trzy punkty obwodu ściśle określają wielkość przechodzącego przez nie okręgu, a zatem i jego krzywiznę.

Instrument o 3 wystających końcach umieszcza się w ten sposób, że środkowy koniec instrumentu opiera się w punkcie, w którego okolicy krzywiznę mierzymy. Dwa zaś pozostałe końce opierają się o czaszkę, każdy w odstępnie 15 mm od środkowego punktu. Wielkość krzywizny odczytujemy na skali. Przy podobnym ujęciu, gdzie poszczególne, podlegające mierzeniu części krzywej środkowo-strzałowej nawzajem się pokrywają, 15 pomiarów są zupełnie wystarczające dla scharakteryzowania krzywej środkowo-strzałowej. Z otrzymanych tą drogą wartości krzywizny możemy od razu poznać właściwości każdej krzywej środkowo-strzałowej. Widzimy to naprzykład z następującego porównania 2 czaszek, należących do grup tak odmiennych, jak Papuasi i Birmanie. Por. Fig. 2 i Fig. 3.

Tabela I.

	Frontale						Bregma	Parietale					Occipitale		
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	Lambda	1	2
Papua . . .	-7	15	15	13	11	7	5	5	13	18	0	13	4	12	25
Birmanin .	13	20	14	14	12	9	9	7	11	16	20	13	15	6	12

W powyższem zestawieniu od razu rzuca się w oczy krzywizna ujemna Papuańczyka poniżej glabelli i przeciwnie równomierna wypukłość kości czołowej u Birmanina. W tylnej części kości ciemieniowej znaczniejsza krzywizna Birmanów przeciwstawiająca się płaskiemu ciemieniowi Papuańczyków. Potylica natomiast wykazuje stosunek całkiem odwrotny.

Nie podałam w tablicy, umieszczonej w końcu tej rozprawy, wszystkich wartości indywidualnych, natomiast wyliczyłam śred-

nie arytmetyczne zarówno dla poszczególnych kości sklepienia
czaszki jak i dla analogicznych odcinków różnych indywiduów.

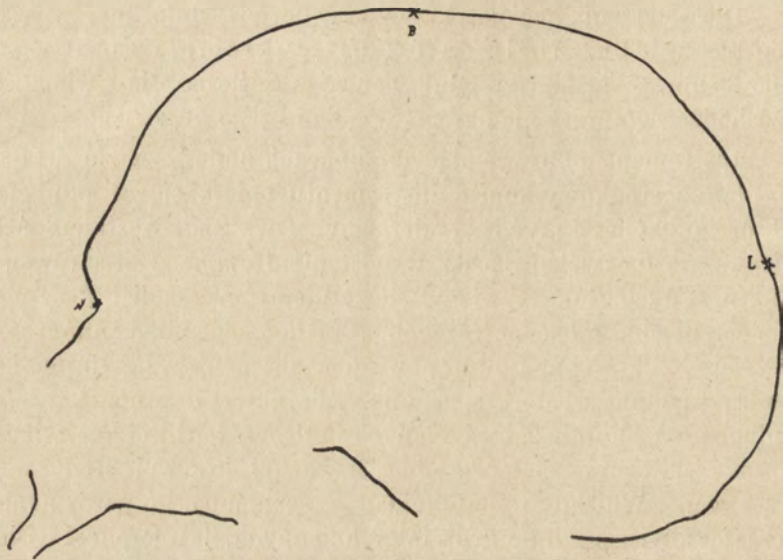


Fig. 2. Krzywa środkowo-strzałowa Papuańczyka.

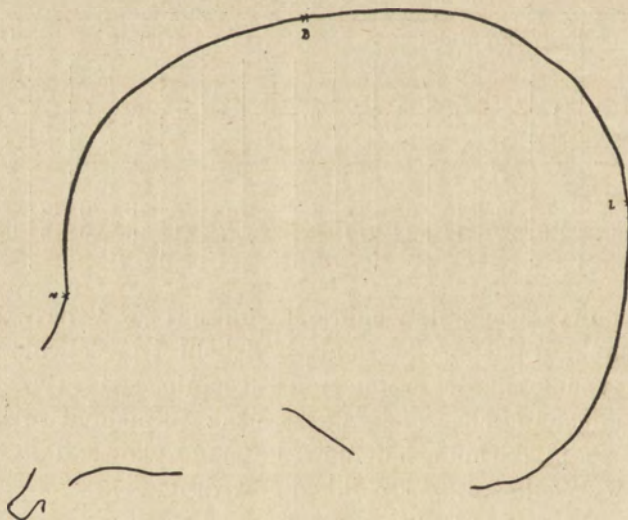


Fig. 3. Krzywa środkowo-strzałowa Birmanina.

Zadaniem naszym będzie właśnie określenie wartości morfologicznej tych średnich arytmetycznych.

Jak wiadomo wartość cechy zależy od jej zmienności w obrębie danej grupy, a mianowicie: cecha jest dla danej grupy tem ważniejsza, im zmienność danej cechy jest mniejsza. Za miarę zmienności cechy przyjmujemy jak wiadomo „odchylenie typowe“ σ (Standard Deviation).

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \sum (M - V)^2}$$

M — średnie arytmetyczne,

$V_1, V_2, V_3 \dots$ — indywidualne wartości;

n — liczba zbadanych indywidualów.

Dla naszych cech są te typowe odchylenia dosyć pokaźne. Ze-stawmy dla przykładu typowe odchylenia (σ) dla czaszek grupy Papua.

Tabela II.

Punkt	Bregma						Lambda								
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	1	2		
σ	7,2	3,4	2,7	1,9	2,5	2,6	3,2	3,7	3,6	3,7	5,1	5,4	6,3	4,1	7

O wielkiej zmienności rozpatrzonych cech świadczą również Maxima i Minima krzywizny w drugim punkcie kości potylicowej wszystkich 3 grup:

Tabela III.

	Minima	Maxima
Birmanie	— 6	31
Disentis	— 3	22
Papua	7	35

O diagnostycznym znaczeniu pewnej cechy wyrokuje nietylko odchylenie typowe, lecz również i wzajemne oddalenie morfologicznie zróżniczkowanych grup. O wielkości ostatniego powiadają nas absolutne różnice ($M_1 - M_2$) średnich arytmetycznych, które podane zostały w tablicy na końcu niniejszej pracy.

Z powyższego dochodzimy do wniosku, iż wartość pewnej cechy dla rozróżnienia 2 ras jest tem większa, im większą jest absolutna różnica średnich i im mniejsze odchylenia typowe (σ) obu grup. Dla scharakteryzowania odchylenia jednostki od grupy posilkujemy się zupełnie skutecznie „stosunkowem odchyleniem“ (różnica indywidualnej wartości a średniej, wyrażona w % typowego odchylenia) według następującego wzoru:

$$\frac{(M - V) \cdot 100}{\sigma}$$

Powyższe odchylenie stosunkowe pozwoliłam sobie, idąc za Mollison'em, użytkować do graficznego zilustrowania za pomocą krzywych stosunku 2 grup. Przy wykreślaniu podobnych krzywych, mających scharakteryzować wzajemny stosunek grup, postępujemy w następujący sposób.

Na linii prostej w równych, acz dowolnych odstępach oznaczamy punkty, odpowiadające średnim poszczególnych cech grupy podstawowej, w naszym przypadku grupy Papuańczyków; całą linię zwiemy linią średnich. Następnie przeprowadzamy w dowolnych, acz również w jednakowych odstępach, u góry i u dołu od linii średnich, dwie równoległe; te nowe linie mają reprezentować typowe odchylenia, które zgodnie z apriori powziętem założeniem równają się 100. Teraz zaś, posilkując się również dowolną, acz zawsze jednakową skalą, musimy dla każdego z 15 pomiarów znaleźć jego stosunkowe odchylenie w dodatnim lub ujemnym kierunku, zależnie od tego, w jakim kierunku dana grupa w wymienionym pomiarze wskazuje odchylenie. Poczem łączymy ze sobą te punkty i otrzymujemy linię łamaną, która ilustruje nam stosunek badanych grup.

Na rysunku 4 wykreśliłam w powyższy sposób krzywe dla grupy Birmanów i Disentis. W rysunku uwzględniłam również szerokość skali wahań ($+V$ i $-V$) grupy Papua, użytej przez nas za podstawę dla tych porównań. Charakterystycznym jest, na co pozwalam sobie zwrócić uwagę, zbieganie się krzywych, wykreślonych dla grupy Birmanów i Disentis, jak również znaczne odchylenie obydwu grup od grupy Papua, wziętej za podstawę; co poniekąd wypływa z okoliczności, iż czaszki Birmanów i Disentis (graubüнденskie) są krótkogłowe, a czaszki papuańskie długogłowe.

Przy podobnem przedstawieniu (za pomocą graficznej metody) uplastyczniają się i bardziej subtelne różnice w przebiegu krzywych środkowo-strzałowych dla obydwu krótkogłowych grup pomiędzy sobą, jak również dla obydwu grup krótkogłowych w stosunku do długogłowych—Papuańczyków. Badając punkt za punktem w przebiegu tych krzywych, reprezentujących każda jedną z trzech badanych grup, możemy z łatwością wyrobić sobie należyte pojęcie o odchyleniach, zachodzących pomiędzy temi trzema grupami. Otóż naprzykład, odchylenie w kierunku — (minus) w F_1 i F_2 obydwu grup od podstawy zostało wywołane bardzo wyraźnem spłaszczeniem przedniej części kości czołowej czaszek grupy B i D , które to spłaszczenie znajduje się w związku z ortometopizmem. Na odchylenie grupy Disentis wywiera również swój wpływ silne zarysowanie się glabelli u tych czaszek. Natomiast w punkcie F_3 (3 punkt kości czołowej) widoczny jest rozbieżny kierunek obydwu krzywych dla grupy Birmanów i Disentis, co się znów tłumaczy jaskrawszem wystąpieniem ortometopizmu u czaszek Birmańskich.

Następnie przebieg krzywych $F_4 — P_2$ (od 4 punktu kości czołowej do drugiego punktu kości ciemieniowej) jest prawie jednakowy. Różnice w F_4 i P_2 — są wywołane bardzo wyraźnem załamaniem krzywej środkowo-strzałowej u czaszek grupy B . W P_3 i P_4 (trzeci i czwarty punkt kości ciemieniowej) występuje silniejsze uwypuklenie części dolnej kości ciemieniowej u czaszek Birmanów i Disentis, w przeciwstawieniu do czaszek Papuańczyków.

Często spotykane wklęsnięcie przed lambda u czaszek Birmanów i grupy Disentis, jak również silne spłaszczenie kości potylicowej (Occipitale), zwłaszcza silnie występujące u czaszek birmańskich, w przeciwstawieniu do czaszek Disentis,—znajduje swój wyraz w niewielkich krzywiznach punktów $P_5 — O_2$ (od 5 punktu kości ciemieniowej do 2 —kości potylicowej).

Z większą jeszcze dokładnością niż stosunkowe odchylenie, charakteryzuje wzajemny stosunek dwu grup wprowadzona przez Mollison'a „różnica typowa“¹⁾.

1) Inne sformułowanie „różnicy typowej“ patrz: Poniatowski St. (12).

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(M_1 - M_2) \cdot 100}{\sigma_1} + \frac{(M_1 - M_2) \cdot 100}{\sigma_2} \right]$$

t. j. połowa sumy stosunkowych odchyłeń pierwszej grupy od drugiej i drugiej grupy od pierwszej.

Wyliczymy teraz typowe różnice dla każdego z 15 punktów badanych przez nas krzywizn każdej z dwu grup (patrz tablicę na końcu niniejszej pracy), a zobaczymy wówczas, że wprawdzie w punktach F_1 , F_3 , P_1 , zachodzą dość znaczne różnice, jednak różnice te zapewne są tylko natury przypadkowej,

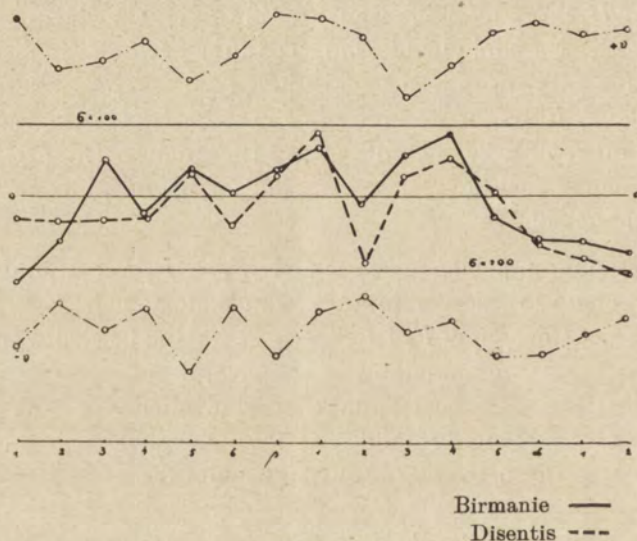


Fig. 4.

ponieważ w większości punktów, a mianowicie F_2 , B , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 i O_1 , są one bardzo nieznaczące.

Dla grupy Disentis i Papua typowe różnice są naogół większe.

Ogólny przebieg krzywych na Fig. 4 (linii reprezentujących grupy czaszek Birmanów i Disentis) wykazuje pewne podobieństwo, mające w znacznej mierze swe źródło w krótkogłowości obydwu wyżej wzmiankowanych grup, w przeciwstawieniu do krótkogłowości czaszek Paupańczyków.

Aby diagnostyczną wartość krzywizny sklepienia czaszek

badanych grup ująć w pewien ścisły stosunek liczbowy, wyliczyłam średnie typowych różnic dla każdej z 2 grup, a mianowicie:

Birmanie i Disentis	Birmanie i Papua	Disentis i Papua
46	46	58

Dla porównania zestawimy powyższe wartości z różnicami typowymi wskaźnika wysokościowo-długościowego często używanego jako cecha rozróżniająca.

T a b e l a IV.

	Birmanie	Disentis	Papua
Średnie dla wskaźnika wysokościowo-długościowego	77	67	72
Typowe odchylenie	3,08	2,51	2,51

Z powyższego wynika następująca

T a b e l a V.

Grupa	Birmanie	Disentis	Papua
Birmanie.	0	355	175
Disentis	355	0	190
Papua	175	190	0

Powyższe zestawienie daje nam o jeden dowód więcej, że krzywizny sklepienia czaszki, wskutek dosyć okazałej skali wahań, dla rozpatrzonych grup nie stanowią cechy, posiadającej wartość rasową, jak to śmiało rzecz można o wskaźniku wysokościowo-długościowym.

Z powyższych danych daje się ubocznie wyciągnąć wniosek, który acz nie znajduje się w bezpośrednim związku z powyższem zagadnieniem nie mniej przeto jest ciekawy.

Mianowicie typowe różnice wskaźnika wysokościowo-długościowego dla czaszek grupy Birmanów i Disentis są dwójnasób większe, niż typowe różnice tej samej cechy dla czaszek Birmanów i Papua, aczkolwiek Birmanie i Disentis zdradzają wyraźną krótkogłowość, a czaszki grupy Papua—długogłowość.

Na zakończenie pragnę się jeszcze zastrzedz, iż dla ostatecznej oceny wartości morfologicznej pomiarów krzywizny środkowostrzałowej metodą Mollison'a mierzonych, pożądane są jeszcze dalsze badania, przedewszystkiem w kierunku określenia różnic

typowych badanej cechy jeszcze i dla innych grup; następnie w kierunku określenia różnic typowych i dla innych cech, mających już znaczne zastosowanie w diagnozie rasowej.

Wydaje mi się wdzięcznym i ciekawym zadaniem również i dla ras kopalnych podobne przedstawienie graficzne zachodzą-

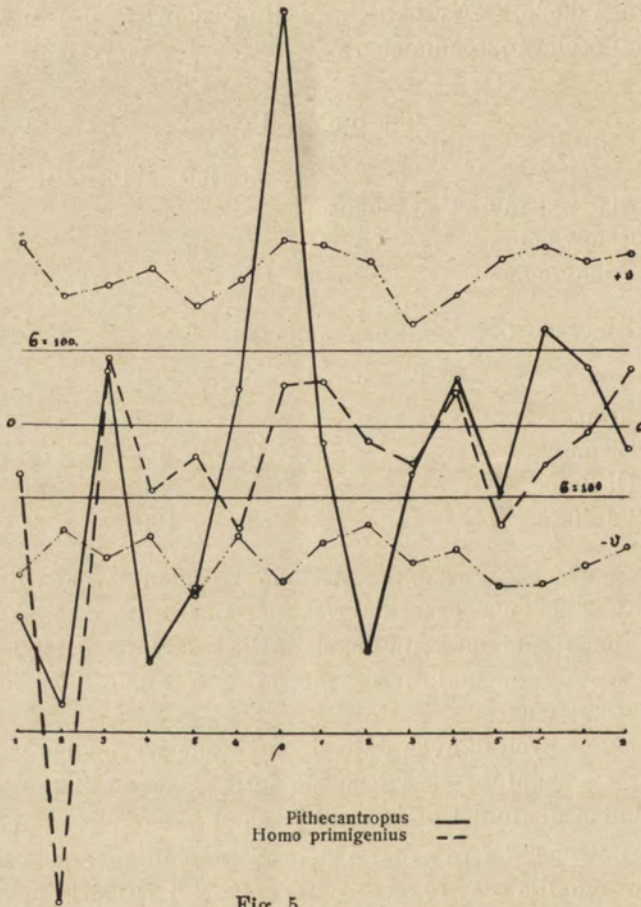


Fig. 5.

cych u nich różnic rasowych. W tym celu zostały wykreślone tą samą metodą, co i dla ras współczesnych, krzywe odchyłeń dla:

Pithecanthropus erectus Podbaba, Cro Magnon.

Homo primigenius (Neandertalczyk, Spy I i Spy II, Le Moustier),

przyczem grupa Papua posłużyła i w tym przypadku za podstawę.

Na Fig. 5 wykreśliłam krzywe odchyłeń dla *Homo pri-*

migenius i *Pithecanthropus erectus*, a na Fig 6 — dla *Homo primigenius* i Podbaba, tylko do bregmy, ponieważ dalsze punkty nie dały się ze ścisłością określić dla Cro Magnon.

Przy bliższem rozpatrzeniu Fig. 6 łatwo da się zauważyć, że krzywa, reprezentująca *Pithecanthropusa* wyraźnie rozbiega się z krzywą dla *Homo primigenius*, jak również oddala się od podstawy Papua. Charakterystycznym jest również odechylenie

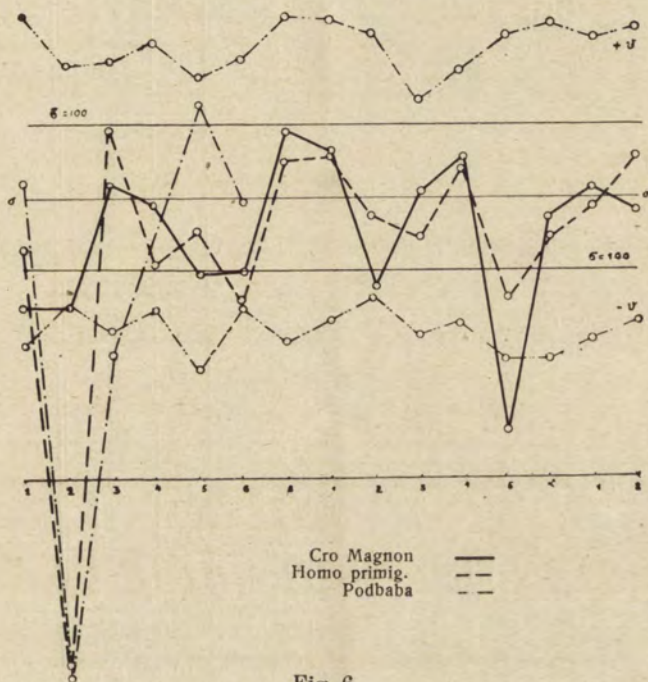


Fig. 6.

w punkcie *bregma*. Również G. Schwalbe ('99) mówi o pewnej wypukłości w tej okolicy, mającej jakoby związek z ciemiączkiem. Jednak mówiąc o tej wypukłości należy zauważyć, że nie jest wykluczona deformacja pośmiertna.

Z Fig. 6 możemy wnioskować o stosunku wzajemnym trzech kopalnych ras: *Homo primigenius*, Podbaba i Cro Magnon. Zasluguje tu na uwagę zbieganie się krzywych dla *Homo primigenius* i Podbaba właśnie w F_2 (w drugim punkcie kości czołowej). Natomiast krzywe dla *Homo primigenius* i Cro Magnon, pomimo

Punkt	Średnia arytm. Mittelwert			Maximum			Minimum			Odczylenie typ. Steigc Abwe- chung			Absolutne różn. Absolute Diffe- renz			Różnice typowe Typendifferenz		
	B.	D.	P.	B.	D.	P.	B.	D.	P.	B.	D.	P.	B-D	B-P	D-P	B-D	B-P	D-P
1	6.1	-0.6	8.2	22	8	26	5	-15	-7	5.6	5.9	7.2	6.7	2.1	8.8	114	34	134
2	19.1	18.1	20.3	29	25	26	7	8	15	4.3	4.4	3.4	1.0	1.2	2.2	23	33	58
3	15.1	17.2	15.9	21	20	21	8	11	11	2.6	2.5	2.7	2.2	0.8	1.3	87	31	52
4	11.8	11.8	12.3	16	16	16	7	7	9	1.8	2.6	1.9	1.9	0.5	0.5	-	28	23
5	10.5	10.6	9.6	16	14	14	7	7	4	2.2	2.1	2.5	0.1	0.9	1.0	42	37	41
6	7.3	8.4	8.3	12	14	13	2	3	4	2.6	2.8	2.6	1.1	1.0	0.1	45	40	50
B	8.5	8.7	7.7	15	16	16	1	5	1	3.1	3.4	3.2	0.8	0.8	1.0	5	24	31
1	7.2	6.4	4.0	18	10	13	1	2	-2	3.8	2.1	3.7	0.2	0.2	0.4	86	84	88
2	11.8	11.0	11.4	18	18	19	6	3	6	3	3.4	3.6	0.8	0.8	0.4	24	24	12
3	15.8	16.9	14.8	25	25	20	10	11	8	3.3	3.4	3.7	1.1	1.0	2.1	86	55	58
4	11.6	13.1	8.9	20	20	18	-1	3	0	5.3	4.3	5.1	1.5	0.4	1.6	32	26	58
5	18.5	11.8	13.4	25	20	25	-1	4	1	5.1	4.0	5.4	1.7	0.1	4.2	3	5	89
P	9.8	6.4	10.2	24	20	25	-2	-6	-4	5.1	5.5	6.3	3.5	0.4	3.8	37	5	35
a	9.5	9.7	13.1	21	14	22	-2	-4	1	6.7	7.2	6.3	1.7	0.4	3.8	66	69	66
1	10.4	13.0	18.6	31	22	35	-6	-3	5	5.6	6.9	7.0	2.6	8.2	5.6	31	75	6
2									7							41	120	8

tendencji ku zbliżaniu się, wykazują w swoim przebiegu zasadnicze różnice. Gwałtowne a tak wyraźne odchylenie w kierunku ujemnym w P_5 (w 5 punkcie kości ciemieniowej) wywołane zostało przez wklęśnięcie przed Λ . Dla ścisłości dodam, że badania ras kopalnych wykonane zostały na odlewach.

L i t e r a t u r a .

- Czekanowski J. ('07) Untersuchungen über das Verhältnis der Kopfmaasse zu den Schädelmaassen. Zürcher Dissertation, albo Arch. f. Anthrpl. Bd. VI.
- Davenport ('04) Statistical methods.
- Frizzi E. ('09) Ein Beitrag zur Anthropologie des „Homo alpinus tirolensis“ Mitteilung. der Anthr. Gesel. Wien. Bd. XXXIX.
- Loth E. ('10). Przyczynek do kranilogii polskiej. Materyaly antropologiczne i etnograficzne. Tom XI. Dz. II.
- Mollison Th. ('07). Einige neue Instrumente zur Messung von Winkeln und Krümmungen. Ztschrft. für Morphologie und Anthropologie Bd. X. Heft 3.
- Mollison Th. ('07). Die Maori in ihren Beziehungen zu verschiedenen benachbarten Gruppen. Korrespondenzblatt d. Deutsch. anthropolog. Gesel. XXXVIII Jahrgang. No. 9/12.
- Mollison Th. ('08). Beitrag zur Kranilogie und Osteologie der Maori. Ztschrft. für Morphol. und Anthr. Bd. XI.
- Poniatowski St. ('12). O wpływie błędów obserwacyjnych na wskaźniki antropologiczne. Warszawa.
- Schwalbe G. ('99). Studien über Pithecanthropus erectus. Ztschrft. für Morph. und Anthrp. Bd. I. Heft I.

ZUSAMMENFASSUNG.

R. Tylpel:

Mediansagittalkurve als Merkmal zur Rassen-Diagnose.

Angemeldet 17. II. 1913

Vorgelegt von K. Stolyhwo.

(Aus dem Anthropologischen Institut der Universität Zürich und aus dem Anthropologischen Institut der Warschauer Gesellschaft der Wissenschaften.

Eine der Hauptfrage der Anthropologie ist die Rassen-Diagnose. Zu diesem vielseitigen Problem gehört auch die Frage, ob ein bestimmtes Merkmal zur Rassen-Diagnose verwendet werden kann, d. h. inwiefern es einen diagnostischen Wert besitzt.

Zur Lösung dieser Frage wurden schon verschiedene Merkmale des Schädels zum Gegenstand eingehender Untersuchungen gemacht und manchen von ihnen wurde klassifikatorischer Wert zuerkannt.

Auch die mediane Sagittalkurve des Schädels wurde schon mit mehr oder weniger Erfolg untersucht. So hat man die Winkel, welche die Sehnen der drei Deckknochen miteinander bilden, gemessen; man hat die Krümmung ihrer einzelnen Abschnitte durch Bogen Sehnen-Indices charakterisiert. Auch die Krümmungsradien grösserer Abschnitte der medianen Sagittalkurve sind untersucht worden.

Die beiden letztgenannten Verfahren haben ihre Nachteile: erstens, geben sie keinen genauen Ausdruck der Form der Krümmung; zweitens, ist das viel zu zeitraubend. Dies versuchten Morrison ('08) und Frizzi ('09) in ihren Untersuchungen dadurch zu vermeiden, dass sie die Krümmung der medianen Sagittalkurve in mehreren Punkten maassen, wobei für Krümmung einer Linie oder Fläche bekanntlich den reciproken Wert des Krümmungsradius angenommen wird.

In den genannten Arbeiten wurde der reciproke Wert des in Metern (um Decimalstellen zu vermeiden) ausgedrückten Krümmungsradius als Krümmungswert bezeichnet.

Jetzt erhebt sich die Frage, welche zur Aufgabe der vorliegenden Untersuchung gemacht worden ist, ob die Krümmungswerte der medialen Sagittalkurve als Merkmal für die Rassen-Diagnose verwendet werden können.

Mein Versuchsmaterial bestand aus 80 Schädeln, die drei verschiedenen Gruppen angehören: 40 Birmanenschädel, 20 Schädel von Disentis (Graubünden), und 20 Papua aus der Sammlung des Anthropologischen Institut der Universität Zürich. Es sei mir gestattet auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor Rudolf Martin, auf dessen Veranlassung die Bearbeitung vorliegenden Themas unternommen wurde; wie auch Herrn Privatdozenten Dr. Th. Morrison, für die gflg. Teilnahme und Unterstützung, meinen innigsten Dank auszusprechen.

In der Praxis können wir, ohne einen grossen Fehler zu machen, hinreichend kurze Strecken einer Kurve als Kreisabschnitte betrachten. Von diesem Standpunkte aus wurde in dieser, wie in den erwähnten Arbeiten, die Krümmung der medianen Sagittalkur-

ve in gewissen bei allen Schädeln analog liegen den Stellen und zwar Krümmung des Frontale an sechs Stellen, Krümmung des Parietale an fünf und die des Occipitale an zwei Stellen gemessen. Die Krümmungen in Bregma und Lambda wurden ebenfalls berücksichtigt. Wenn hier kurzweg von Krümmung „in einem Punkte“ gesprochen wird, so ist damit die Krümmung einer Strecke gemeint, die von dem betreffenden Punkte aus durch Sehnen von 15 mm Länge nach beiden Seiten begrenzt wird.

Fig. 1. (S. 332) stellt die Mediansagittalkurve eines Schädels mit den Messpunkten dar.

Die Glabella wurde wegen der Schwierigkeit ihrer Krümmung zu messen, die Hinterschuppe des *Occipitale* (die Strecke *Inion-Opisthion*) wegen ihrer unregelmässigen Gestaltung ausgeschaltet.

Um die Krümmungen am Schädel direct zu messen konstruirte Mollison ('07) ein Cyklometer dessen Anwendung auf der Tatsache beruht, dass drei Punkte der Peripherie die Grösse eines Kreises bestimmen. Das Instrument wird mit seinen drei Spitzen auf die zu messende Strecke so aufgesetzt, dass die mittlere Spitze auf den betreffenden Punkt in dessen Umgebung die Krümmung gemessen werden soll, zu liegen kommt, die zwei anderen Spitzen setzen sich im Abstände von 15 mm von dem zu messenden Punkt nach rechts und links auf. Der Krümmungswert der zwischen diesen Spitzen liegender Strecke ist an der Skala abzulesen. Die Zahl der Messpunkte bei dieser Anordnung, bei welcher sich die einzelnen Teilstrecken gegenseitig überschneiden, scheint gross genug zu sein, um den Verlauf der Kurve genügend genau in Zahlen zu fassen.

Aus den auf dieser Weise gewonnenen Krümmungswerten ist man imstande die Eigentümlichkeiten einer medianen Sagittalkurve herauszulesen. Das sehen wir schon, wenn wir die individuelle Krümmungswerte für zwei Repräsentanten verschiedener Gruppen mit einander vergleichen.

Tab. I.

	Frontale						Bregma	Parietale					Lambda	Occipit.	
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5		1	2
Papua.	-7	15	15	13	11	7	5	5	13	18	0	13	4	12	25
Birmanen	13	20	14	14	12	9	9	7	11	16	20	13	15	6	12

Der Unterschied zwischen diesen beiden Individuen ist an den Fig. 2 und 3 (S 334) deutlich zu sehen.

In der Tabelle am Schlusse dieser Arbeit wurde die Angabe aller individuellen Werte (Krümmungswerte) unterlassen. Aus den gewonnenen Zahlen wurden Mittelwerte berechnet sowohl für die Summe der Teilstrecken eines grösseren Abschnittes (z.B. für jeden Schädelknochen), als auch für die gleiche Teilstrecke bei verschiedenen Individuen (z. B. für den ersten, zweiten, dritten. Punkt des Frontale). Diese Mittelwerte sind eben Merkmale, deren diagnostischen Wert wir prüfen wollen.

Bekanntlich ist der Wert eines Merkmales abhängig von der Variabilität desselben in der betreffenden Gruppe: die Bedeutung eines Merkmales ist um so grösser, je konstanter das betreffende Merkmal, d. h. je geringer die Variabilität innerhalb einer einheitlichen Gruppe. Als Maass der Variabilität verwendet man am besten die stetige Abweichung (Standard Deviation).

Als stetige Abweichung (σ) bezeichnet man die Quadratwurzel aus dem Mittel der Quadrate der Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwerte, d. h. die Quadratwurzel derjenigen Zahl, welche man findet, wenn man die Summe der Quadrate der Abweichungen der einzelnen Individuen durch die Zahl der letzten dividiert =

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \sum (M - V)^2}$$

M — Mittelwert

V_1, V_2, \dots, V_n — Individ. Werte

n — Zahl der Individuen.

Für unsere Krümmungswerte sind die stetigen Abweichungen sehr gross. Greifen wir z. B. aus unserer Tabelle die stetigen Abweichungen (σ) für die Papuagruppe heraus:

Tab. II.

Punkt	1	2	3	4	5	6	Bregma	1	2	3	4	5	Lambda	1	2
	σ	7.2	3.4	2.7	1.9	2.5		2.6	3.2	3.7	3.6	3.7		5.1	5.4

Von der grossen Variabilität unseres Merkmales zeugen auch die Maxima und Minima der Krümmungswerte, z. B. im zweiten Punkt des Occipitale aller 3 Gruppen:

Tab. III.

	Min.	Max.
Birmanen	—6	31
Disentiser	—3	22
Papua	7	35

Für die diagnostische Bedeutung eines Merkmales ist aber nicht nur die stetige Abweichung innerhalb einer einheitlichen Gruppe massgebend, sondern auch der Abstand morphologisch differenzierter Gruppen voneinander. Ueber diesen orientieren uns die absoluten Differenzen beider Mittelwerte in dem betreffenden Merkmal ($M_1 - M_2$), die ich für alle drei Gruppen in der Tabelle (am Schlusse der Arbeit) angegeben habe.

Die unterscheidende Kraft eines Merkmales für 2 Gruppen ist also um so grösser, je grösser die Differenz der beiden Mittelwerte und je geringer die durch σ gekennzeichnete Variabilität. Somit gelangen wir zu einer Formel:

$$\frac{(M_1 - M_2) \cdot 100}{\sigma}$$

Zur Charakterisierung der Abweichung eines Einzelwertes oder Durchschnittswertes von einer Gruppe verwendet man zweckmässig die relative Abweichung, d. h. die in % von σ ausgedrückte Differenz des Mittelwertes und des Einzelwertes:

$$\frac{(M - V) \cdot 100}{\sigma}$$

Diese Relative Abweichung wurde zur graphischen Darstellung vermitteltst der Vergleichskurven benützt. Man verfährt dabei folgendermassen: (07).

Auf eine Gerade legen wir in willkürlichen, aber immer gleichen Abständen, die Mittelwerte der einzelnen Merkmale der Gruppe (Basis), also in diesem Falle die Krümmungswerte in den fünfzehn Punkten, in dessen die Krümmung der medianen Sagittalkurve gemessen wurde. Ferner tragen wir für jeden Punkt auch in will

kürhlichen, aber immer gleichen Masstabe die relativen Abweichungen ein, je nachdem die betreffende Gruppe in diesem Punkte nach oben oder nach unten abweicht. Dann verbinden wir die erhaltenen Punkte und bekommen eine gebrochene Linie, die die Lage des abweichenden Einzelobjektes (oder der Mittelwerte einer zweiten Gruppe) repräsentiert. Selbstverständlich werden dann alle stetige Abweichungen (σ) auf zwei Geraden liegen, die im Abstände 100 von der Mittelwertslinie zu liegen kommen, weil wir sie bei unserer Berechnung immer gleich 100 gesetzt haben. In der Fig. 4 (S. 338) sind solche Kurven für Birmanen und Disentiser auf der Basis Papua eingezeichnet. Hier habe ich auch die Variationsbreite, der als Basis benützten Gruppe (Zickzacklinie $v+$ und $v-$) eingezeichnet, indem ich die relative (in % des σ ausgedrückte) Abweichung des Maximum nach oben, und die des Minimum nach unten abtrug. In dieser Figur ist das deutliche Zusammenlaufen der Kurven für die Birmanen und Disentiser, und die beträchtliche Abweichung beider von der Basis Papua auffallend, was seinen Grund zum Teil darin hat, dass die Birmanen und Disentiser brachykephal, und die Papua dolikephal sind. Bei dieser graphischen Darstellung kommen aber auch feinere Formunterschiede der medianen Sagittalkurve der beiden Gruppen im Vergleich zu Papua, wie auch Formunterschiede der beiden brachykephalen Gruppen unter einander zum Vorschein. Wenn wir dem Verlauf der Kurven Punkt für Punkt folgen, so können wir beurteilen, inwieweit die Gruppen von einander abweichen. Die Abweichung der beiden Gruppen von der Basis nach unten im ersten und zweiten Punkte wird durch die Abplattung des Vorderteiles des Stirnbeines (die mit dem Orthomethopismus zusammenhängt) hervorgerufen. Beim Disentiser kommt noch die starke Entwicklung der Glabella in Betracht. Dagegen verlaufen die Kurven im dritten Punkt in ganz entgegengesetzter Richtung, was seinen Grund in dem stärkeren Orthomethopismus der Birmanen findet. Weiterhin laufen die Kurven der beiden brachykephalen Gruppen in den Punkten $F_4 - P_2$ nahe zusammen. Der Unterschied im F_6 und P_2 wird durch schärfer ausgeprägte Knickungen der medianen Sagittalkurve bei den Birmanen hervorgerufen. In den Punkten P_3 und P_4 kommt die stärkere Wölbung der unteren Partie des Parietale zum Ausdruck. Die so oft vorkommende Vertiefung vor dem Lambda bei Birmanen und Disentiser wie auch die starke Abplattung der Hinterhauptsschuppe (besonders

deutlich bei den Birmanen im Vergleich zu Papua die stark gewölbtes Hinterhaupt haben) finden ihren Ausdruck in den niederen Werten in den Punkten $P_{55} - O_2$.

Einen präziseren Ausdruck für die Stellung zweier Gruppen zu einander, als die relative Abweichung, liefert die von Mollison unter der Bezeichnung „Typendifferenz“ vorgeschlagene Formel:¹⁾

$$\frac{1}{2} \left(\frac{(M_1 - M_2) \cdot 100}{\sigma_1} + \frac{(M_1 - M_2) \cdot 100}{\sigma_2} \right)$$

Also die Halbsumme der relativen Abweichung der ersten Gruppe von der zweiten und der zweiten von der ersten. Berechnen wir diese Typendifferenzen für je 2 Gruppen in den einzelnen Punkten (siehe: Tabelle am Ende dieser Arbeit), so sehen wir dass dieselbe für Birmanen und Disentiser in manchen Punkten recht geringfügig sind. So vor allem in den Punkten: $F_2, B P_2, P_3, P_4, P_5, O_1$. In andren Punkten degegen deuten die Typendifferenzen auf beträchtliche Unterschiede der beiden Gruppen, die wohl nach Mollison nicht zufällig, sondern rassische Gründe haben müssen; namentlich in den Punkten: F_1, F_3, P_1 .

Zwischen Disentiser und Papua sind die Typendifferenzen im allgemeinen grösser.

Im Ganzen zeigt der Verlauf der Kurven für die Birmanen und Disentiser einen gewissen Zusammenschluss, der seine Ursache wohl hauptsächlich in der bei beiden mehr oder weniger zum Ausdruck kommenden Brachykephalie, im Gegensatz zu den dolikephalen Papua finden dürfte.

Um nun einen zahlenmässigen Ausdruck für den diagnostischen Wert der Krümmungsverhältnisse des Schädeldaches bei den untersuchten Gruppen zu erhalten, habe ich die Mittelwerte der Typendifferenzen für je 2 Gruppen berechnet. Diese betragen:

Birmanen und Disentiser.	Birmanen und Papua	Disentiser und Papua.
46	46	58

Als Masstab für die Bedeutung einer solchen Typendifferenz mag diejenige eines häufig verwendeten Merkmales dienen, des Längen—Höhenindex. Ich habe gerade den Längen—Höhenindex gewählt, weil für die mediane Sagittalkurve diese Maass am meisten von Bedeutung sind.

¹⁾ Ueber eine Abänderung dieser Formel, siehe Poniatowski St. '12.

	Birmanen.	Disentis.	Papua.
der Mittelwert des Längen—Hö-			
hen—Index beträgt	77	67	72
die stetige Abweichung folglich .	3,08	2,51	2,51

Tab. IV.

Gruppe	Birmanen	Disentis	Papua
Birmanen	0	355	175
Disentis	355	0	190
Papua	175	190	0

Hieraus ergibt sich, dass die Krümmungsverhältnisse des Schädeldachses namentlich wegen ihrer starken Variabilität, wenigstens für die untersuchten Gruppen bei Weitem nicht ein so klar unterscheidendes Merkmal darstellen wie z. B. der Längen—Höhenindex.

Aus obigen Zahlen ergibt sich nebenbei eine Tatsache, die allerdings mit unserer Frage nicht direct zusammenhängt. Die Typendifferenz zwischen den Birmanen und den Disentiserschädeln ist im Längen—Höhenindex doppelt so gross, als die Typendifferenz zwischen Birmanen und Papua in dem gleichen Merkmal, obgleich Birmanen und Disentiser brachykephal, die Papua degegen dolikephal sind.

Zum Schluss sei bemerkt, dass für eine definitive Schätzung des morphologischen Wertes der Krümmungen der medianen Sagittalkurve noch weitere Untersuchungen notwendig sind, und zwar: einerseits die Feststellung der Typendifferenz für andere Gruppen in diesem Merkmal, und andererseits ihre Typendifferenzen in den gebräuchlichen kranilogischen Merkmalen überhaupt, da eine exakte Wertung der verwendeten Merkmale bis jetzt völlig fehlt.

Es scheint mir von grosser Interesse zu sein gleiche Kurven auch für die ausgestorbenen Formen einzuzichnen. Zu diesem Zwecke habe ich nach der gleichen Methode, wie früher, die Krümmungen von:

Pithecantropus erectus.

Homo primigenius (Neanderthaler, Spy I und Spy II, Le Moustier.)

Podbaba.

Cro Magnon

gemessen und Abweichungskurven in der gleichen Weise ge-

zeichnet, wie für die oben behandelten recenten Gruppen, wobei die Papua-Gruppe als Basis diene.

Fig. 5 stellt die Kurven für *Homo primigenius* und *Pithecanthropus erectus* dar, die Fig. 6—die Kurven für *Homo primigenius*, *Podbaba* (nur bis Bregma; die weiteren Punkte lassen sich nicht mehr mit Sicherheit bestimmen) und *Cro Magnon*.

Wenn wir die Kurven auf Fig. 5 genauer betrachten, so sehen wir deutlich, dass die Kurve für *Pithecanthropus* abweicht sowohl von der Basis Papua (recente Rasse) wie auch von der Kurve des *Homo primigenius*. Auffallend ist die kolossale Abweichung nach oben im Bregma. Auch G. Schwalbe (1889) spricht von einer Protuberanz in dieser Gegend und stellt das in Zusammenhang mit Fontanellknochen. Eine postmortale Deformation dürfte nicht ausgeschlossen sein.

Die Fig. 6 bringt die Verhältnisse bei *Homo primigenius*, *Podbaba* und *Cro Magnon* zum Ausdruck. Hier sehen wir namentlich in dem charakteristischen Punkte Frontale 2 die Kurven von *Homo primigenius* und *Podbaba* zusammenlaufen. Dagegen zeigen die Kurven für *Homo primigenius* und *Cro Magnon*, trotz mancher Annäherung, ausgesprochene Verschiedenheiten indem *Cro Magnon* von der als Basis gewählten recenten Rasse weniger abweicht.

Die Untersuchungen der fossilen Typen sind an Abgüssen gemacht worden.

OD REDAKCYI.

1. „Sprawozdania“ wychodzą w postaci zeszytów miesięcznych i zawierają protokoły posiedzeń naukowych Wydziałów T-wa, drukowane z zachowaniem oddzielnej paginacji dla każdego Wydziału. W miesiącach: lipcu, sierpniu i wrześniu „Sprawozdania“ nie wychodzą.

2. Obok działu naukowego, obejmującego nadewszystko: komunikaty jako też pokazy naukowe oraz dyskusje; w „Sprawozdaniach“ podaje się nadto stałe listę obecności oraz streszczenie protokołu załatwianych na posiedzeniach spraw bieżących.

Obok komunikatów wygłaszanych na posiedzeniach wedle porządku dziennego, mogą być drukowane również i prace nadsyłane, o ile pochodzą one od członków T-wa w odpowiednich Wydziałach i o ile otrzymane rękopisy gotowe są do druku.

3. Poszczególne artykuły nie powinny w „Sprawozdaniach“ przekraczać zakresu 2 arkuszy druku. W przeciwnym razie mogą być drukowane tylko w charakterze rozpraw naukowych w seryi „Prac“ odpowiedniego Wydziału, w „Sprawozdaniach“ zaś podaje się wzmiankę protokółarną.

4. Komplet wydanych w ciągu roku zeszytów „Sprawozdań“ stanowi rocznik, uzupełniony dodaniem zeszytu Sprawozdania rocznego z działalności T-wa oraz karty okładowej i spisu rzeczy.

5. Komunikaty jako też objaśnienia pokazów drukuje się, stosownie do życzenia autorów, wraz ze streszczeniami w jednym z czterech języków obcych: francuskim, angielskim, włoskim lub niemieckim.

6. Na koszt redakcyi mogą być umieszczane w „Sprawozdaniach“ tylko rysunki tekstowe, o ile nadają się do reprodukcji cynkograficznej.

7. Do czasu ustalenia się pisowni polskiej przestrzega się prawideł pisowni Akademii Umiejętności w Krakowie. Wyjątki w tym względzie czyni się jedynie dla autorów prac z zakresu językoznawstwa, o ile nietykalność pisowni została przez nich osobiście zastrzeżona.

8. Przemówienia w dyskusyi składa się sekretarzom Wydziałów, na posiedzeniu. Teksty przemówień w dyskusyi, nadsyłane po posiedzeniu, drukowane nie będą. Rękopisy komunikatów oraz objaśnienia, dotyczące pokazów, należy składać najpóźniej po upływie tygodnia po odbytem posiedze-

niu; w przeciwnym razie w „Sprawozdaniach“ podaje się tylko tytuł. W tym terminie autorzy winni dostarczyć gotowych klisz cynkograficznych.

9. Autorzy drukowanych w „Sprawozdaniach“ prac otrzymują bezpłatnie 50 zwykłych odbitek łącznie z protokółem ewentualnej dyskusji i streszczeniem w języku obcym. Na żądanie większej liczby odbitek, wyrażone na rękopisie oraz na ostatniej korekcie, mogą otrzymać więcej, lecz nie więcej ponad 100.

10. Materiał, przeznaczony do druku, winien być pisany na jednej stronie, z pozostawieniem marginesu i wolnego miejsca przed tytułem do notat redakcyjnych.

11. Podkreślenia: Nazwiska, wyrazy lub zdania, które autor chce mieć wydrukowane czcionkami rozstawionymi, należy podkreślać linią punktową. Nazwy techniczne, gatunkowe i t. d. wyróżnia się w druku kursywą, w rękopisie zaś podkreśla się linią pojedynczą. Wyrazy lub znaki wyjątkowego znaczenia, mające być wydrukowane czcionkami grubymi, należy podkreślać linią podwójną.

Wszelkie tytuły przy nazwiskach będą stałe pomijane.

12. Autorzy winni zwracać drukarni przysyłane im korekty w możliwie krótkim czasie; mają też prawo, w przypadkach wyjątkowych, żądać od drukarni przysłania powtórnej korekty. Autorzy zamiejscowi otrzymują tylko jedną korektę. Na ostatniej korekcie autor winien położyć swój podpis oraz wyrazić życzenie co do oddzielnych odbitek.

Cena rocznika w prenumeracie wynosi **rs. 4**; cena każdego pojedynczego zeszytu **kop. 50**.