O RÓWNANIACH

RÓŻNICZKOWYCH CZĘŚCIOWYCH

JEDNOCZESNYCH

PRZEZ

WŁ. FOLKIERSKIEGO

(Przedstawione na posiedzeniu Towarzystwa dnia 7 Marca 1872 r.)

Równania o różniczkach częściowych pozostają do téj pory najważniejszém a dziś jeszcze w zupełności nierozwiązanem zadaniem Analizy. Wszelki postęp jaki nauka na téj drodze uczynić może pominiętym być nie powinien : każde nieledwie nowe równanie zcałkowane pociąga za sobą rozwiązanie całego szeregu zadań Mechaniki, Fizyki, Geometryi, wstrzymane niedostatkiem ogólnych metod całkowania tego rodzaju równań.

Zadania Mechaniki i będącéj dalszém jéj zastosowaniem Fizyki Matematycznéj sprowadzają się zwykle do układu równań zwanych *jednoczesnemi* (simultanées); jeżeli liczba zmiennych wchodzących w te równania jest o jedność większą niż liczba równań, w takim razie jedna z tych zmiennych może być wziętą za zmienną niezależną, inne będą jéj funkcyami, a zadanie zostanie sprowadzoném do zcałkowania równania o jednéj zmiennéj niezależnéj takiego rzędu jaka jest liczba równań, za pomocą znanych sposobów Rachunku całkowego.

Jeżeli liczba zmiennych wchodzących w układ równań jednoczesnych przewyższa liczbę równań o więcéj niż o jedność, zadanie zostaje więcéj złożoném : zadanie to jest przedmiotem pierwszéj części niniéjszego artykułu. Było już ono traktowaném przez wielu pierwszorzędnych uczonych: Jacobi podał w nieśmiertelnéj swéj pracy o równaniach różniczkowych twierdzenie [1] którego wnioskiem jest sposób całkowania powyższego rodzaju równań w pewnych przypadkach. P. Clebsch także.

[1] *Metoda novus aequationum differentialium partialium inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi.* W Dzienniku Crelle'go (wydawanym w dalszym ciągu przez p. Borchardta w Berlinie, p. t. *Journal für die reine und angevandte Mathematik*) tom 60ty.

dotknął pierwszéj części tego zadania ([1]) przy okoliczności innego zadania, zwanego zadaniem Pfaffa. Równocześnie Boole, znakomity matematyk angielski, podał te same prawie wypadki odmiennym nieco sposobem ([2]).

Stosując metodę Jakobiego do ogólnie postawionego zadania, otrzymałem kilka twierdzeń, które w bardzo prosty, odrazu zastosować się dający sposób, rozwiązują je we wszystkich przypadkach w których rozwiązanie to można sprowadzić do równań różniczkowych zwyczajnych. Gdy już praca ta ukończoną i kilku uczonym francuzkim komunikowaną była, w rok później P. Clebsch ogłosił zastosowanie téjże metody Jakobiego, do tegoż samego zadania ([3]). Odmienną nieco drogą dochodzi on do tych samych prawie wypadków: podaję jednak swoje w pierwotnéj całości, bo droga jakiéj użyłem zdaje mi się naturalniéjszą i przystępniéjszą; pozostaje przytem parę nowych twierdzeń, a wszystko służyć może jako wstęp do drugiéj części tego artykułu.

W téj drugiéj części, stosuję otrzymane wypadki do równań różniczkowych częściowych wyższych rzędów od pierwszego; zastostosowania tego nie znalazłem w powyżéj wymienionych pracach: podaję je więc jako zupełnie nowe.

I

Równania różniczkowe jednoczesne o jakiéjkolwiek liczbie zmiennych. Własności tych równań. Równania linijne równoczesne o pochodnych częściowych. Twierdzenia ogólne.

W zasadach rachunku całkowego, nazywają zwykle «całką» układu równań jednoczesnych, wszelką funkcję zmiennych w nie wchodzących, która zrównana stałéj dowolnéj czyni zadosyć układowi danemu. Jeżeli układ dany składa się z m równań różniczkowych o $m+1$ zmiennych, wiemy, że można zawsze znaleść m funkcyj niezależnych jedna od drugiéj, z których każdą zrównawszy stałéj dowolnéj, utworzymy układ równań zwany «układem całkowym» układu różniczkowego danego. Układ ten jest *jedynym* w tém znaczeniu że *wszelka całka układu różniczkowego danego, jeżeli nie wchodzi wprost w układ całkowy, jest przynajmniéj funkcya* m *funkcyj niezależnych składających ten ostatni układ.* W układzie całkowym znajduje się więc zawsze tyle funkcyj niezależnych ile jest równań w układzie różniczkowym danym, i nie może ich być więcéj.

Wiemy nadto, że każda z funkcyj składających układ całkowy czyni zadosyć równaniu linijnemu o różniczkach częściowych, w którém każda z $m+1$ zmiennych wchodzących w układ dany jest uważaną za zmienną niezależną; i odwrotnie, każda funkcya tych $m+1$ zmiennych która czyni zadosyć równaniu różniczkowemu częściowemu powyższemu, stanowi koniecznie, zrównana stałéj, jedno z równań układu całkowego. Można więc powiedzić, że *układ jednoczesny dany jest równoważnym równaniu o różniczkach częściowych linijnemu i pierwszego rzędu*, ponieważ obadwa mają za rozwiązania też same funkcje stanowiące układ całkowy i nie mają innych rozwiązań. We wszystkiem co poprzedza przypuszczamy że liczba zmiennych przewyższa o jedność liczbę równań układu różniczkowego danego.

([1]) *Ueber das Pfaffsche Problem.* Dziennik Crelle'go, tom 61.

([2]) *On the Differential Equations.* Philosophical Transactions na rok 1862; jako też w dziele: *Treatise on Differential equations by* G. Boole. Supplementary volume, p. 74.

([3]) *Ueber die simultane Integration linearer part. Differentialgleichungen* w Dzienniku Crelle'go tom 65.

Weźmy teraz pod uwagę układ m równań jednoczesnych o $m+n$ zmiennych. Nie można wnieść w ogólność że uważając n z tych zmiennych za zmienne niezależne, układ ten pociągnie za sobą układ m równań całkowych którenby pozwolił wyznaczyć m z tych zmiennych w funkcyi n pozostałych i m stałych dowolnych. Istnienie m równań całkowych układu m równań różniczkowych o $m+n$ zmiennych wymaga pewnych warunków, podobnych do tych, jakie zachodzić muszą pomiędzy spółczynnikami wyrażenia różniczkowego o wielu zmiennych ażeby wyrażenie to było różniczką zupełną pewnéj funkcyi. Zobaczymy poniżéj że może wypaść liczba równań całkowych mniejsza od m, lub nawet że układ dany nie przypuszcza żadnego układu całkowego.

Aby wyznaczyć warunki tych rozmaitych przypadków, jako też dla wyprowadzenia z tych warunków wniosków tyczących się ostatecznego zcałkowania układu, przekształcimy układ jednoczesny dany na układ jednoczesny o różniczkach częściowych, linijny i pierwszego stopnia, następnie zastosujemy do tego ostatniego układu piękną metodę Jakobiego, którą znakomity ten matematyk stworzył dla szczególnego przypadku w jakim układ ten, sam wyraża warunki całkowalności, lecz którą z łatwością rozciągnąć można do wszelkiego przypadku układu linijnego względem pochodnych jednéj i téj saméj funkcyi, jak to widać z łatwością z ogólności twierdzenia zasadniczego na którem Jacobi gruntuje swą metodę.

Będziemy tu tylko brali pod uwagę układy, w których różniczki wchodzą w pierwszym stopniu: zastrzeżenie to byłoby zbyteczném w przypadku równań jednoczesnych, w których liczba zmiennych przewyższałaby o jedność liczbę równań, wiemy bowiem że taki układ może być zawsze sprowadzonym do układu linijnego pierwszego rzędu względem różniczek. Lecz w przypadku, którém się zajmujemy nie zawsze to może mieć miejsce.

Niech będzie więc układ m równań o $m+n$ zmiennych; stosownie do uczynionego dopiero co zastrzeżenia, możemy go rozwiązać co do m różniczek i przedstawić pod następującym kształtem

$$(1)\qquad \begin{cases} dx_1 = a_1 dx_{m+1} + b_1 dx_{m+2} + \ldots + r_1 dx_{m+n} \\ dx_2 = a_2 dx_{m+1} + b_2 dx_{m+2} + \ldots + r_2 dx_{m+n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_m = a_m dx_{m+1} + b_m dx_{m+2} + \ldots + r_m dx_{m+n} \end{cases}$$

Spółczynniki $a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_m, r_1, \ldots r_m$ mogą być funkcyami jakiemikolwiek wszystkich zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_{m+n}$. Przypuśćmy że układ ten ma pewną całkę, i oznaczmy ją przez

$$V(x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_{m+n}) = C$$

gdzie C oznacza stałą dowolną. Różniczkując otrzymamy

$$(2)\qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_{m+n}} dx_{m+n} = 0$$

a podstawiając wyrażenia różniczek $dx_1\, dx_2 \ldots dx_m$ z (1), wypadnie równanie:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+n}} + a_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + a_m \frac{\partial V}{\partial x_m}\right) dx_{m+1} \\ + &\left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+2}} + b_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + b_m \frac{\partial V}{\partial x_m}\right) dx_{m+2} \\ + &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + &\left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+n}} + r_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + r_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + r_m \frac{\partial V}{\partial x_m}\right) \partial x_{m+n} = 0. \end{aligned}$$

Lecz zmienne x_{m+1} x_{m+n} są tu uważane jako zmienne niezależne: tożsamość więc powyższa wymaga równości zeru spółczynników różniczek tych zmiennych i pociąga za sobą układ

$$
(3) \quad \begin{cases}
\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}} + a_1 \dfrac{\partial V}{\partial x_1} + a_2 \dfrac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + a_m \dfrac{\partial V}{\partial x_m} = 0 \\
\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}} + b_1 \dfrac{\partial V}{\partial x_1} + b_2 \dfrac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + b_m \dfrac{\partial V}{\partial x_m} = 0 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+n}} + r_1 \dfrac{\partial V}{\partial x_1} + r_2 \dfrac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + b_m \dfrac{\partial V}{\partial x_m} = 0
\end{cases}
$$

n równań linijnych o pochodnych częściowych jednéj i tej saméj funkcyi V względem wszystkich zmiennych $x_1, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_{m+n}$.

Jednakże pochodne wziętę względem n ostatnich zmiennych $x_{m+1}, \ldots x_{m+n}$ wchodzą tylko raz każda w inne równanie tego układu i ze spółczynnikiem równym jedności. Mamy więc następujące

Twierdzenie. *Niech będzie układ* m *równań jednoczesnych o różniczkach zwyczajnych w* 1ym *stopniu* m + n *zmiennych, sprowadzony do kształtu* (1) *przez rozwiązanie względem* m *którychkolwiek różniczek: wszelkie równanie całkowe* V = C *tego układu jest rozwiązaniem jednoczesném równań układu* (3), *linijnych o pochodnych częściowych wszystkich zmiennych, mających też same spółczynniki co układ dany, lecz inaczéj rozłożone.*

Prawo spółczynników jest widoczne, porównywając układ (1) i (3) widzimy, że mając jeden z nich, możemy bezpośrednio ułożyć drugi.

Twierdzenie odwrotne ma miéjsce jak zobaczemy z łatwością. W saméj rzeczy, dodajmy do siebie pierwsze strony równań (3) pomnożywszy je poprzednio przez spółczynniki nieoznaczone $\lambda, \mu, \ldots \rho$: otrzymamy

$$
\begin{aligned}
\lambda \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}} + \mu \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}} + \ldots + \rho \frac{\partial V}{\partial x_{m+n}} & \\
+ (\lambda a_1 + \mu b_1 + \ldots + \rho r_1) \frac{\partial V}{\partial x_1} & \\
+ (\lambda a_2 + \mu b_2 + \ldots + \rho r_2) \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots & \\
+ (\lambda a_m + \mu b_m + \ldots + \rho r_m) \frac{\partial V}{\partial x_m} & = 0
\end{aligned}
$$

równanie o pochodnych częściowych linijne i pierwszego rzędu, które, jak wiadomo, jest równoważném z układem jednoczesnym

$$
\frac{dx_{m+1}}{\lambda} = \frac{dx_{m+2}}{\mu} = \ldots = \frac{dx_{m+n}}{\rho}
$$

$$
= \frac{dx_1}{\lambda a_1 + \mu b_1 + \ldots + \rho r_1} = \frac{dx_2}{dx_2 + \mu b_2 + \ldots + \rho r_2} = \ldots = \frac{dx_m}{\lambda a_m + \mu b_m + \ldots + \rho r_m}
$$

Rugując z tego równania spółczynniki nieoznaczone $\lambda, \mu \ldots \rho$ otrzymujemy napowrót układ (1). Możemy więc wysłowić:

TWIERDZENIE ODWROTNE. *Niech będzie układ* n *równań linijnych i pierwszego rzędu o pochodnych jednéj i téj saméj funkcyi względem* m + n *zmiennych, sprowadzony do kształtu* (3) *przez rozwiązanie tych równań względem* n *pochodnych : wszelka funkcya będąca rozwiązaniem jednoczesném tego układu, zrównana stałéj, stanowi jedno z równań całkowych układu* m *równań jednoczesnych o różniczkach zwyczajnych tychże zmiennych, mających te same spółczynniki co układ dany, lecz inaczéj rozłożone.*

Układy (1) i (3) mogą więc być uważane jako równoważne, gdyż każde równanie całkowe jednego z nich jest zarazem rozwiązaniem drugiego, a nie istnieje rozwiązań inych.

Zakładając $n = 1$ otrzymujemy znane twierdzenia tyczące się równania linijnego o pochodnych częściowych i równoważnego z nim układu równań jednoczesnych o pochodnych zwyczajnych.

II

Twierdzenie zasadnicze Jakobiego tyczące się odwracania działań różniczkowych.

« Niech będzie funkcya f zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$ w liczbie n; załóżmy dla skrócenia

$$\mathrm{A}[f] = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_m \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

$$\mathrm{B}[f] = b_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + b_m \frac{\partial f}{\partial x_m}$$

gdzie $a_1, a_2 \ldots a_m$, $b_1, b_2 \ldots b_m$ mogą być jakiemikolwiek funkcyami danemi zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_n$, zaś $\mathrm{A}[f]$, $\mathrm{B}[f]$ oznaczają znakowania symboliczne wyrażeń otrzymanych z powyższych działań dokonanych na funkcyi f, działań które będziemy nazywali *pierwszém i drugiém*. Poddajmy wyrażenie $\mathrm{B}[f]$ działaniu pierwszemu, wyrażenie $\mathrm{A}[f]$ działaniu drugiemu, i weźmy różnicę dwóch tak otrzymanych wyrażeń; *powiadam że różnica ta*

$$\mathrm{A}\big[\mathrm{B}[f]\big] - \mathrm{B}\big[\mathrm{A}[f]\big]$$

nie będzie zawierać pochodnych drugiego rzędu, lecz będzie miała kształt podobny do poprzedzających a mianowicie

$$\mathrm{C}[f] = c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + c_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\,.$$

W saméj rzeczy, w rozwinięciu wyrażenia

$$\mathrm{A}\big[\mathrm{B}[f]\big]$$

$\dfrac{d^2 f}{dx_i^2}$ będzie pomnożoném przez $a_i - b_i$ zaś $\dfrac{d^2 f}{dx_i\, dx_k}$ (gdzie i i k są wskaźniki różne) przez $a_i b_k - a_k b_i$; a że drugie wyrażenie otrzymuje się z pierwszego przemieniając A i B (odpowiednio a i b) pomiędzy sobą; że przez tę przemianę spółczynniki powyższe się nie zmieniają; w różnicy, wyrazy o których mowa znoszą się nawzajem. Mamy więc wyrażenie wypadkowe

$$\mathrm{A}\big[\mathrm{B}[f]\big] - \mathrm{B}\big[\mathrm{A}[f]\big] = \mathrm{C}[f],$$

w którém wyrazem ogólnym drugiej strony jest

$$c_i = a_1 \frac{\partial b_i}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial b_i}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial b_i}{\partial x_n}$$

$$- b_1 \frac{\partial a_i}{\partial x_1} - a_2 \frac{\partial a_i}{\partial x_2} - \ldots - a_n \frac{\partial a_i}{\partial x_n}$$

Zakładając daléj dla skrócenia

$$\mathrm{A}^i[f] = \mathrm{A}\left[\mathrm{A}^{i-1}[f]\right], \quad \text{tak że} \quad \mathrm{A}^2[f] = \mathrm{A}\left[\mathrm{A}[f]\right],$$

i w podobny sposób

$$\mathrm{B}^i[f] = \mathrm{B}\left[\mathrm{B}^{i-1}[f]\right], \qquad \mathrm{B}^k\mathrm{A}^i[f] = \mathrm{B}^k\left[\mathrm{A}^i[f]\right],$$

tak że naprzykład wyrażenie

$$\mathrm{B}^m\mathrm{B}^l\mathrm{B}^k\mathrm{A}^i[f]$$

otrzymaném będzie poddając funkcyę f działaniu pierwszemu i razy z kolei, tak otrzymany wypadek działania drugiemu k razy, potém znów wypadek działaniu pierwszemu l razy, a wszystko jeszcze działaniu drugiemu m razy. To założywszy, przypuśćmy że wyrażenie

$$c_i = a_1 \frac{\partial b_i}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial b_i}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial b_i}{\partial x_n}$$

$$- b_1 \frac{\partial a_i}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial a_i}{\partial x_2} + \ldots + b_n \frac{\partial a_i}{\partial x_n} = 0$$

staje się zerem dla wszelkich wartości i od 1 aż do n, będziemy mieli dla jakiejkolwiek funkcyi danéj tożsamość następującą

$$\mathrm{AB}[f] = \mathrm{BA}[f]$$

to jest że w takim razie będziemy mogli odwracać pomiędzy sobą dwa powyższe wskazane działania. W ogólności jeżeli

$$\mathrm{C}[f] = 0,$$

wyrażenie

$$\mathrm{B}^m\mathrm{A}^l\mathrm{B}^k\mathrm{A}^i[f]$$

pozostanie tém samém, w jakiemkolwiek porządku dokonywać będziemy wskazane działania. Aby tego dowieść z całą ścisłością, zauważmy że

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}^k\mathrm{A}[f] &= \mathrm{B}^{k-1}\mathrm{BA}[f] = \mathrm{B}^{k-1}\mathrm{AB}[f] \\
&= \mathrm{B}^{k-2}\mathrm{BAB}[f] = \mathrm{B}^{k-2}\mathrm{AB}^2[f] \\
&= \mathrm{B}^{k-3}\mathrm{BAB}^2[f] = \mathrm{B}^{k-3}\mathrm{AB}^3[f] \\
&= \mathrm{B}^{k-4}\mathrm{BAB}^3[f] = \ldots = \mathrm{BAB}^{k-1}[f] \\
&= \mathrm{AB}^k[f], \\
\mathrm{B}^k\mathrm{A}^i[f] &= \mathrm{B}^k\mathrm{AA}^{i-1}[f] = \mathrm{AB}^k\mathrm{A}^{i-1}[f] \\
&= \mathrm{AB}^k\mathrm{AA}^{i-2}[f] = \mathrm{AAB}^k\mathrm{A}^{i-2}[f] \\
&= \mathrm{A}^2\mathrm{B}^k\mathrm{AA}^{i-3}[f] = \mathrm{A}^2\mathrm{AB}^k\mathrm{A}^{i-3}[f] \\
&= \mathrm{A}^3\mathrm{B}^k\mathrm{AA}^{i-4}[f] = \ldots = \mathrm{A}^{i-1}\mathrm{AB}^k[f] \\
&= \mathrm{A}^i\mathrm{B}^k[f],
\end{aligned}$$

tak że mamy ostatecznie

$$A^l B^k A^i [f] = A^l A^i B^k [f] = A^{i+l} B^k [f] = B^k A^{i+l} [f],$$

$$B^m A^l B^k A^i [f] = B^m B^k A^{i+l} [f] = B^{m+k} A^{i+l} [f] = A^{i+l} B^{m+k} [f]$$

co było do dowiedzenia.

Dotychczas przypuszczaliśmy funkcyę f funkcyą jakąkolwiek. Przypuśćmy teraz że funkcya ta jest całką równania

$$0 = a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \tag{1}$$

to jest że funkcya f sprawdza tożsamość

$$A[f] = 0.$$

Jeżeli $b_1, b_2 \ldots b_n$ *są funkcyami* $x_1, x_2 \ldots x_n$ *takiemi, że dla każdego wskaźnika* i *od* 1 *do* n, *mamy tożsamość*

$$0 = c_i = a_1 \frac{\partial b_i}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial b_i}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial b_i}{\partial x_n}$$
$$- b_1 \frac{\partial a_i}{\partial x_1} - b_2 \frac{\partial a_i}{\partial x_2} - \ldots - b_n \frac{\partial a_i}{\partial x_n}$$

z dowiedzionego twierdzenia wynika, że funkcya

$$B[f] = b_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + b_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

jest całką równania (1), *i w ogólności funkcya*

$$B^m [f]$$

będzie także całką tegoż równania.

W saméj rzeczy, aby tak było, dostatecznie jest iżby zachodziła tożsamość

$$AB^m [f] = 0$$

lecz że $c_i = 0$, więc

$$AB^m [f] = B^m A [f]$$

staje się tożsamościowo zerem wraz $A[f]$.

Może się zdarzyć że wyrażenie $B[f]$ staje się samo przez się zerem, lub jest równém stałéj. Jeżeli to nie ma miejsca, z jakiéjkolwiek całki $\varphi = f$ równania (1) można wyprowadzić inną całkę $\varphi = B[f]$, z téj ostatniéj trzecią $\varphi = B^2 [f]$ i t. d., $m^{tą}$ całkę $\varphi = B^{m-1} [f]$.

Lecz wiemy że równanie (1) może mieć tylko $n - 1$ całek niezależnych od siebie, mamy więc twierdzenie następujące:

Jeżeli mamy

$$0 = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

nadto dla jakiegokolwiek i

$$0 = a_1 \frac{\partial b_i}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial b_i}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial b_i}{\partial x_n}$$
$$b_1 \frac{\partial a_i}{\partial x_1} - b_2 \frac{\partial a_i}{\partial x_2} - \ldots - b_n \frac{\partial a_i}{\partial x_n};$$

to pomiędzy ilościami wyrażonemi przez

$$f,\ \mathrm{B}[f],\ \mathrm{B}^2[f], \dots \mathrm{B}^{n-1}[f]$$

zachodzić będą związki algebraiczne jeden lub więcéj, w które $x_1, x_2 \dots x_n$ *nie będą wchodziły wyraźnie.*

III

Równania jednoczesne o różniczkach zwyczajnych lub częściowych.

Warunki całkowalności; liczba równań całkowych.

Zastosujmy teraz te uwagi do układu (3) (pierwszego ustępu) który przedstawimy według Jakobiego za pomocą nawiasów symbolicznych, jak następuje :

$$(1)\quad \begin{cases} \mathrm{A}[\mathrm{V}] = \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_{m+1}} + a_1 \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} + a_2 \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2} + \dots + a_m \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_m} = 0 \\ \mathrm{B}[\mathrm{V}] = \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_{m+2}} + b_1 \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} + b_2 \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2} + \dots + b_m \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_m} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{R}[\mathrm{V}] = \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_{m+n}} + r_1 \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} + r_2 \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2} + \dots + r_m \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_m} = 0 \end{cases}$$

Układ ten jest równoważnym, jakeśmy tego dowiedli w pierwszym ustępie, z układem o różniczkach zwyczajnych,

$$(1\ \text{bis})\quad \begin{cases} dx_1 = a_1 dx_{m+1} + b_1 dx_{m+2} + \dots + r_1 dx_{m+n} \\ dx_2 = a_2 dx_{m+1} + b_2 dx_{m+2} + \dots + r_2 dx_{m+n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ dx_m = a_m dx_{m+1} + b_m dx_{m+2} + \dots + r_m dx_{m+n} \end{cases}$$

Liczba równań pierwszego układu jest n, drugiego m; liczby te dodane dają summę równą liczbie wszystkich zmiennych. Równania (1) różnią się od równań twierdzenia Jakobiego, podanych w poprzedzającym ustępie tém, że każde z tych równań zawiera nadto wyraz szczególnego rodzaju, który się nie powtarza w innych równaniach układu, i ma za spółczynnik jedność. Aby można było rozciągnąć do tego układu twierdzenie Jakobiego, trzeba dowieść przedewszystkiém że wyraz ten nie wpływa na wypadki; to jest, że oznaczając przez

$$\mathrm{J}[\mathrm{V}] = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_{m+1}} + i_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2} + \dots + i_m \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_m} = 0$$

$$\mathrm{K}[\mathrm{V}] = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_{m+k}} + k_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2} + \dots + k_m \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_m} = 0$$

dwa jakiekolwiek równania układu (1), różnica

$$\mathrm{JK}[\mathrm{V}] - \mathrm{KJ}[\mathrm{V}]$$

może być zawsze wyrażoną linijnie względem pochodnych V i że się staje zerem na mocy dwóch powyżéj uważanych równań.

Aby tego dowieść, zauważmy, że w różnicy o której mowa, wyrazy utworzone przez wyrazy dopełniające $\frac{dV}{dx_{m+i}}$ i $\frac{dV}{dx_{m+k}}$, są kształtu

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\partial x_{m+k}} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+k}\partial x_{m+i}}$$

lub kształtu

$$\frac{\partial\left(k_j \frac{\partial V}{\partial x_j}\right)}{\partial x_{m+i}} - k_j \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}}}{\partial x_j} + i_j \frac{\partial \frac{\partial V}{\partial x_{m+k}}}{\partial x_j} - \frac{\partial\left(i_j \frac{\partial V}{\partial x_j}\right)}{\partial x_{m+k}}$$

czyli

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial k_j}{\partial x_{m+i}}\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial k_j}{\partial x_{m+i}}\right)$$

wyrazy te znoszą się, tak że możemy napisać

$$JK[V] - KJ[V] = L[V]$$

oznaczając przez

$$L[V] = l_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial V}{x_2} + \ldots + l_m \frac{\partial V}{\partial x_m}$$

gdzie spółczynnikiem wyrazu ogólnego jest

$$l_j = J[k_j] - K[i_j].$$

Przypuśćmy że spółczynnik ten l_j nie staje się tożsamościowo zerem dla wszelkiego j (nie ma przyczyny aby tak było w ogólności) wyrażenie $L[V]$ stanie się zerem na mocy równań danych

$$K[V] = 0 \quad \text{i} \quad J[V] = 0$$

bo $L[V]$ jest tylko kombinacyą *różniczkową* wyrażeń $K[V]$ i $J[V]$. Mamy więc.

$$(\ ) \qquad L[V] = l_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + l_m \frac{\partial V}{\partial x_m} = 0\,.$$

Równanie to nie może być zresztą kombinacyą algebraiczną równań układu (1), bo z tych ostatnich nie moglibyśmy wyrugować nie znajdujących się w (2) wyrazów ze spółczynnikami równemi jedności, sposobami algebraicznemi. Przeciwnie, wszelkie inne równanie takie jak (2) pomiędzy temi samemi pochodnemi $\frac{dV}{dx_1}, \frac{dV}{dx_2} \ldots \frac{dV}{dx_n}$, którebyśmy byli wstanie wyprowadzić z (1), kombinując inne równania tego układu, nie mogłoby być czém inném, jak tylko przekształceniem algebraiczném równania (2) jeżeli nie tożsamością, bo nie można otrzymać dwóch wartości na tęż samę pochodną w funkcyi $m-1$ pozostałych. Ponieważ wszelka wartość V która sprowadza do zera $J[V]$ i $K[V]$, sprowadza także do zera $L[V]$, można powiedzieć że

Wszelka całka wspólna równań układu (1) *jest zarazem całką równania* (2).

Równanie to więc (2) może być dorzuconém do układu (1), a układ ten nie przestanie być równoważnym układowi (1bis); a ponieważ (2) ma tylko $m-1$ całek niezależnych więc i układ (1) lub (1bis) może mieć naj więcéj $m-1$ równań całkowych.

Podzielmy równanie (2) przez spółczynnik jednéj z pochodnych w nie wchodzących, wyrugujmy za pomocą tego równania pochodną o któréj mowa z równań układu (1) w liczbie n; niech tą pochodną będzie naprzykład $\frac{dV}{dx_m}$: otrzymamy w ten sposób układ nowy, który przedstawimy przez

$$
(3)\quad \begin{cases}
A'[V] = \frac{\partial V}{\partial x_{m+1}} + a'_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + a'_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + a'_{m-1} \frac{\partial V}{\partial x_{m-1}} = 0 \\
B'[V] = \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}} + b'_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + b'_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + b'_{m-1} \frac{\partial V}{\partial x_{m-1}} = 0 \\
\cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\
R'[V] = \frac{\partial V}{\partial x_{m+n}} + r'_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + r'_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + r'_{m-1} \frac{\partial V}{\partial x_{m-1}} = 0 \\
L'[V] = \frac{\partial V}{\partial x_m} + l'_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + l'_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + l'_{m-1} \frac{\partial V}{\partial x_{m-1}} = 0 .
\end{cases}
$$

Układ ten zawiera $n+1$ równań to jest jedno równanie więcéj niż układ (1), lecz jednę pochodną o spółczynniku różnym od jedności mniéj, zatém tylko $m-1$ takich pochodnych.

Z układem (3) uczynimy to samo co z (2) : stosując działanie

$$J'K'[V] - K'J'[V]$$

otrzymamy równanie linijne

$$M'[V] = m'_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + m'_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + m'_{m-1} \frac{\partial V}{\partial x_{m-1}} = 0$$

a przypuszczając że $m'_1, m'_2, \ldots m'_{m-1}$ nie stają się *tożsamościowo* zerami będziemy mieli nowe równanie które będzie musiało być sprawdzoném przez wszystkie całki wspólne równaniom układu (3) a zatem (1) i (1bis). Lecz ponieważ to nowe równanie dać może tylko $m-2$ całek niezależnych, układ całkowy układu różniczkowego (1) lub (1bis) może się składać najwięcéj z $m-2$ równań. Używając tego nowego równania, odpowiedniego równaniu (2) do wyrugowania jednéj z pochodnych naprzykład pochodnéj $\frac{dV}{dx_{m-1}}$ z równań (3), otrzymamy nowy układ równoważny z poprzedniemi lecz zawierający $n+2$ równań, w które wchodzić będzie tylko $m-2$ pochodnych o spółczynnikach różnych od jedności, wspólnych tym równaniom.

Postępując z tym układem jak z (1) i (3), i tak daléj, dojdziemy w końcu do układu zawierającego $n+p$ równań : w każde z nich wchodzić będzie $m-p$ pochodnych o współczynnikach różnych od jedności. Oznaczmy dla skrócenia $n+p=\nu$ i $m-p=\mu$: układ ten możemy przestawić jak następuje :

$$
(4)\quad \begin{cases}
A[V] = \frac{\partial V}{\partial x_{\mu+1}} + \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_\mu \frac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0 \\
B[V] = \frac{\partial V}{\partial x_{\mu+2}} + \beta_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \beta_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + \beta_\mu \frac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0 \\
\cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\
P[V] = \frac{\partial V}{\partial x_{\mu+\nu}} + \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + \rho_\mu \frac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0
\end{cases}
$$

Układowi temu odpowiada układ w różniczkach zwyczajnych.

$$
\text{(4 bis)}\quad \left\{\begin{array}{l}
dx_1 = \alpha_1 dx_{\mu+1} + \beta_1 dx_{\mu+2} + \ldots + \rho_1 dx_{\mu+\nu} \\
dx_2 = \alpha_2 dx_{\mu+1} + \beta_2 dx_{\mu+2} + \ldots + \rho_2 dx_{\mu+\nu} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
dx_\mu = \alpha_\mu dx_{\mu+1} + \beta_\mu dx_{\mu+2} + \ldots + \rho_\mu dx_{\mu+\nu}
\end{array}\right.
$$

Przypuśćmy że układ (4) jest już takim, że tworząc z dwóch jego którychkolwiek równań jak

$$I[V] = \frac{\partial V}{\partial x_{\mu+\iota}} + \iota_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \iota_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + \iota_\mu \frac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0$$

$$K[V] = \frac{\partial V}{\partial x_{\mu+\varkappa}} + \varkappa_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \varkappa_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + \varkappa_\mu \frac{\partial V}{\partial x_\mu} = 0$$

wyrażenie

$$IK[V] - KI[V],$$

wyrażenie to staje się zerem *tożsamościowo*, to jest niezależnie od funkcyi V, na mocy samych spółczynników, jakiemikolwiekby nie były wyrażenia tworzące $K[V]$ i $I[V]$ (a nie jak w poprzednich przypadkach na zasadzie poprzedzających równań). Przedstawiwszy to wyrażenie jak następuje:

$$L[V] = IK[V] - KI[V] = \lambda_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_\mu \frac{\partial V}{\partial x_\mu}$$

warunek wymieniony wymaga żeby tożsamościowo było

$$\lambda_j = I[\varkappa_j] - K[\iota_j] = 0$$

dla wszelkich wartości j pomiędzy 1 a μ. Jeżeli to ma miejsce, na zasadzie wyżéj powiedzianego, wszelkie możliwe równanie utworzone na mocy poprzedzających w wiadomy sposób pomiędzy pochodnemi funkcyi V względem $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, będzie tożsamością. Nie może więc istnieć funkcya zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ (pozostałe z $x^{\text{ów}}$ będąc uważanemi za stałe) któraby zrównana stałéj, dawała związek pomiędzy temi zmiennemi. Każda więc ze zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ zależy od pozostałych $x^{\text{ów}}$ tylko na zasadzie μ funkcyj niezależnych jedne od drugich, t. j. które możemy uważać jako zrównane stałym dowolnym. Te funkcye tworzą więc μ równań całkowych układu (4) a wiadomo że nie ma ich więcéj. Mamy więc następujące:

TWIERDZENIE. *Mając dany układ* (4bis) μ *równań jednoczesnych o różniczkach zwyczajnych, lub też równoważny z poprzedzającym układ* (4) ν *równań równoczesnych linijnych względem pochodnych częściowych pewnéj funkcyi, wziętych względem* $\mu + \nu$ *zmiennych; jeżeli wszelka kombinacya różniczkowa kształtu:*

$$IK[V] - KI[V]$$

staje się zerem tożsamościowo na mocy spółczynników, to jest, jeżeli dla wszelkiéj wartości j *mamy*

$$I[\varkappa_j] - K[\iota_j] = 0,$$

układy różniczkowe dane mają odpowiedni układ całkowy złożony z μ *równań.*

Twierdzenie odwrotne ma miejsce; to jest:

Jeżeli układy różniczkowe dane przedstawiają μ równań całkowych, układ różniczkowy:

$$IK[V]-KI[V]$$

utworzony z dwóch którychkolwiek równań układu, staje się zerem tożsamościowo, t. j. *niezależnie od kształtu funkcyi* V.

Aby dowieść tego odwrotnego twierdzenia, przypuśćmy żeśmy rozwiązali równania całkowe istniejące w liczbie μ co do $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ i podstawmy te wartości w spółczynnikach po drugich stronach równań (4bis). Drugie te strony będąc różniczkami zupełnemi właśnie na mocy równań (4bis) i nie zawierając już zmiennych innych prócz $x_{\mu+1}, \ldots x_{\mu+\nu}$ muszą czynić zadosyć warunkom całkowalności. Przedstawmy jedno ztych równań przed podstawieniem, przez

$$dx_j = \alpha_j dx_{\mu+1} + \beta_j dx_{\mu+2} + \ldots + \iota_j dx_{\mu+\iota} + \ldots + \varkappa_j dx_{\mu+\varkappa} + \ldots + \rho_j dx_{\mu+\nu},$$

a po podstawieniu, przez

$$dx_j = \alpha'_j dx_{\mu+1} + \beta'_j dx_{\mu+2} + \ldots + \iota'_j dx_{\mu+\iota} + \ldots + \varkappa'_j dx_{\mu+\varkappa} + \ldots + \rho' dx_{\mu+\nu}$$

winniśmy mieć:

$$\frac{\partial \iota'_j}{\partial x_{\mu+\varkappa}} = \frac{\partial \varkappa'_j}{\partial x_{\mu+\iota}}.$$

Lecz

$$\begin{aligned}\frac{\partial \iota'_j}{\partial x_{\mu+\varkappa}} &= \frac{\partial \iota_j}{\partial x_{\mu+\varkappa}} + \frac{\partial \iota_j}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{\mu+\varkappa}} + \ldots + \frac{\partial \iota_j}{\partial x_\mu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_{\mu+\varkappa}} \\ &= \frac{\partial \iota_j}{\partial x_{\mu+\varkappa}} + \varkappa_1\frac{\partial \iota_j}{\partial x_1} + \varkappa_2\frac{\partial \iota_j}{\partial x_2} + \ldots + \varkappa_\mu\frac{\partial \iota_j}{\partial x_\mu} \\ &= K[\iota_j]\end{aligned}$$

bo $x_{\mu+1}, \ldots x_{\mu+2}$ mogą być uważane jako zmienne na mocy μ równań całkowych danych: ztąd otrzymujemy

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_{\mu+\varkappa}} = \varkappa_1, \ldots, \frac{\partial x_\mu}{\partial x_{\mu+\varkappa}} = \varkappa_\mu.$$

Mamy w podobny sposób

$$\frac{\partial \varkappa'}{\partial x_{\mu+\iota}} = I[\varkappa_j]$$

a zatém

$$K[\iota_j] = I[\varkappa_j]$$

co było do dowiedzenia.

Dowiedliśmy poprzednio że układ (4) lub (4bis) przedstawia ten sam układ całkowy co (1) lub (1bis): wynika ztąd prawidło ogólne następujące:

Niech będzie danym układ jednoczesny (1bis) m *równań o różniczkach zwyczajnych, lub układ równoważny* (1) n *równań linijnych o pochodnych częściowych względem* m + n *zmiennych. Aby wyznaczyć liczbę równań układu całkowego, utwórzmy kombinacyę różniczkową* JK[*V*] — KJ[*V*]*: jeżeli ta kombinacya nie jest tożsamością, przedstawia ona nowe równanie linijne o pochodnych częściowych. Wyrugujmy za pomocą tego równania jednę z pochodnych z równań układu* (1), *dorzućmy nadto to równanie do układu:*

otrzymamy nowy układ podobny do (1), *lecz zawierający jedno równanie więcéj. Powtórzmy na tym ostatnim układzie działanie powyższe i tak daléj, aż dojdziemy do układu* (4) *takiego, żewszelka kombinacya*

$$IK[V]-KI[V]$$

staje się tożsamością. Liczba równań układu całkowego równa się liczbie wszystkich zmiennych zmniéjszonéj liczbą równań ostatecznego układu (4).

Zresztą widoczną jest rzeczą, gdyby tożsamość o któréj mowa, miała miéjsce zaraz w układzie danym, liczba równań całkowych byłaby równą liczbie równań układu (1bis) o różniczkach zwyczajnych. Przeciwnie, gdyby liczba równań układu ostatecznego, była równą liczbie zmiennych w jakim razie równania te przedstawiłyby się pod kształtem

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial V}{\partial x_2}=0,\ldots\frac{\partial V}{\partial x_m}=0,\ldots\frac{\partial V}{\partial x_{m+n}}=0$$

nie byłoby innego rozwiązania prócz $V=$stałéj, to jest, układ dany różniczkowy nie pociągałby właściwie za sobą żadnego układu całkowego. Zupełnie podobna téj ostatniéj okoliczność ma miéjsce gdy uważamy różniczkę zupełną funkcyi wielu zmiennych niezależnych : jeżeli wyrażenie téj ostatniéj przez różniczki zmiennych niezależnych nie czyni zadosyć tak zwanym warunkom całkowalności, nie istnieje żadna funkcya któréj różniczka zupełna byłaby równą wyrażeniu danemu. W rzeczy saméj, zakładając w układzie (1bis) $m=1$, tożsamość warunkowa o któréj była mowa, sprowadza się odrazu do znanych z zasad rachunku całkowego warunków całkowalności różniczek wielu zmiennych niezależnych.

IV

Całkowanie układów różniczkowych powyżéj uważanych dla których udowodnionem zostało istnienie układu całkowego i wyznaczona liczba równań w układ ten wchodzących.

Niech będą układy dane (t. j. (1) lub (1bis) poprzedzającego ustępu) sprowadzone powyżéj podanemi sposobami do układu ((4) w pop. ust.) następującego :

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l}
A[V]=\dfrac{\partial V}{\partial x_{\mu+1}}+\alpha_1\dfrac{\partial V}{\partial x_1}+\alpha_2\dfrac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_\mu\dfrac{\partial V}{\partial x_\mu}=0\\
B[V]=\dfrac{\partial V}{\partial x_{\mu+2}}+\beta_1\dfrac{\partial V}{\partial x_1}+\beta_2\dfrac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+\beta_\mu\dfrac{\partial V}{\partial x_\mu}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P[V]=\dfrac{\partial V}{\partial x_{\mu+\nu}}+\rho_1\dfrac{\partial V}{\partial x_1}+\rho_2\dfrac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+\rho_\mu\dfrac{\partial V}{\partial x_\mu}=0
\end{array}\right.$$

złożonego z ν równań takich że pomiędzy dwoma jakiemikolwiek

$$I[V]=\frac{\partial V}{\partial x_{\mu+\iota}}+\iota_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+\iota_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+\iota_\mu\frac{\partial V}{\partial x_\mu}$$

$$K[V]=\frac{\partial V}{\partial x_{\mu+\varkappa}}+\varkappa_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+\varkappa_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\ldots+\varkappa_\mu\frac{\partial V}{\partial x_\mu}$$

zachodzi tożsamość

$$IK[V]-KI[V]=0$$

którekolwiek z równań układu (1) naprzyład $A[V]$ jest samo w sobie równaniem linijném pierwszego rzędu o pochodnych częściowych względem $\mu+1$ zmiennych : ma więc za rozwiązanie μ funkcyj zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_{\mu+1}$, pozostałe z $x^{\acute{o}w}$ będąc uważanemi za stałe.

Weźmy jednę z tych funkcyj φ która czyni zadosyć warunkowi

$$A[\varphi]=0$$

Ponieważ z założenia warunek $AB[V]-BA[V]$ jest tożsamością, mamy również

$$AB[\varphi]=0$$

i w ogólności

$$AB^m[\varphi]=0$$

co znaczy że funkcye

$$\varphi,\ B[\varphi],\ B^2[\varphi], \ldots B^m[\varphi], \ldots$$

są wszystkie funkcyami całkowemi równania

$$A[V]=0$$

Lecz równanie to może mieć najwyżéj μ funkcyj całkowych od siebie niezależnych : zdarzy się więc koniecznie że dla m mniéjszego lub najwyżéj równego μ, funkcya $B^m[\varphi]$ będzie mogła być wyrażoną przez poprzedzające ją funkcye $\varphi, B[\varphi], B^2[\varphi], \ldots B^{m-1}[\varphi]$ i przez ilości $x_{\mu+2}, \ldots x_{\mu+\nu}$ któreśmy w powyższém równaniu uważali jako stałe. Będziemy więc mieli koniecznie

(3) $$\varphi^{(m)}=B^m[\varphi]=\Phi(\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(m-1)}, x_{\mu+2}, \ldots x_{\mu+\nu})$$

oznaczając przez skrócenie

$$\varphi'=B[\varphi], \quad \varphi''=B^2[\varphi], \ldots \varphi^{(m-1)}=B^{m-1}[\varphi], \quad \varphi^{(m)}=B^m[\varphi],$$

gdzie m jest zawsze mniéjszém lub równém μ. Wyrażenie więc (3) będzie całką pierwszego równania układu (1); będzie jego całką również wszelka funkcya ilości $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(m-1)}, \varphi^{(m)}$ w którą nie będzie wchodzić wyraźnie żadna ze zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_\mu, x_{\mu+1}$.

Zobaczmy teraz czy nie możnaby było uczynić zadość podobną funkcyą zarazem drugiemu równaniu układu (1). Funkcya taka, będąca całką wspólną dwóch pierwszych równań tego układu, mieć będzie musiała kształt

$$F(\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(m-1)}, x_{\mu+2}, \ldots x_{\mu+\nu})$$

i czynić zadosyć równaniu

$$B[F]=\frac{\partial F}{\partial x_{\mu+2}}+\beta_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+\beta_2\frac{\partial F}{\partial x_2}+\ldots+\beta_\mu\frac{\partial F}{\partial x_\mu}=0$$

w którém F jest już uważanem jako funkcya wszystkich zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_{\mu+\nu}$. Uważając F jako funkcyę $\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(m-1)}, x_{\mu+2}, \ldots x_{\mu+\nu}$ i odznaczając dla odróżnienia iéj pochodne częściowe w tém ostatniém sposobie uważania przez zawarcie ich w nawiasach ( ), będziemy mieli

$$
\begin{aligned}
B[\mathrm{F}] = & \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{\mu+2}}\right) + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu+2}} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi'}\right)\frac{\partial \varphi'}{\partial x_{\mu+2}} + \ldots + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi^{(m-1)}}\right)\frac{\partial \varphi^{(m-1)}}{\partial x_{\mu+2}} \\
& + \beta_1 \left\{ \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi'}\right)\frac{\partial \varphi'}{\partial x_1} + \ldots + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi^{(m-1)}}\right)\frac{\partial \varphi^{(m-1)}}{\partial x_1} \right\} \\
& + \beta_2 \left\{ \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi'}\right)\frac{\partial \varphi'}{\partial x_2} + \ldots + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi^{(m-1)}}\right)\frac{\partial \varphi^{(m-1)}}{\partial x_2} \right\} \\
& \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
& + \beta_\mu \left\{ \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi'}\right)\frac{\partial \varphi'}{\partial x_\mu} + \ldots + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi^{(m-1)}}\right)\frac{\partial \varphi^{(m-1)}}{\partial x_\mu} \right\} = 0
\end{aligned}
$$

co nam da przez wyrzucenie za nawias pochodnych F:

$$B[\mathrm{F}] = \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{\mu+2}}\right) + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi}\right) B[\varphi] + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi'}\right) B^2[\varphi] + \ldots + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi^{(m-1)}}\right) B^m[\varphi] = 0$$

czyli

(4) $$B[\mathrm{F}] = \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_{\mu+2}}\right) + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi}\right)\varphi' + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi'}\right)\varphi'' + \ldots + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi^{(m-1)}}\right)\Phi = 0$$

Spółczynniki tego równania linijnego i piewszego rzędu o pochodnych częściowych nie zawierają wyraźnie $x_1, x_\mu, \ldots x_{\mu+1}$: wszelkie więc rozwiązanie równania (4) czynić będzie zadosyć żądanym warunkom to jest będzie całką wspólną dwóch pierwszych równań układu (1). Równanie (4) sprowadza się do układu jednoczesnego

$$\frac{d\varphi}{dx_{\mu+2}} = \varphi', \quad \frac{d\varphi'}{dx_{\mu+2}} = \varphi'', \ldots \frac{d\varphi^{(m-1)}}{dx_{\mu+2}} = \Phi$$

który znów może być sprowadzonym do równania m^{go} rzędu

$$\frac{d^m\varphi}{dx^m_{\mu+2}} = \Phi\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dx_{\mu+2}}, \frac{d^2\varphi}{dx^2_{\mu+2}}, \ldots \frac{d^{m-1}\varphi}{dx^{m-1}_{\mu+2}}, x_{\mu+2}, \ldots x_{\mu+\nu}\right)$$

Przedstawiwszy *pierwszą* całkę tego równania (nie będziemy potrzebowali całkować je w zupełności) przez

$$\Pi_1\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dx_{\mu+2}}, \frac{d^2\varphi}{dx^2_{\mu+2}}, \ldots \frac{d^{m-1}\varphi}{dx^{m-1}_{\mu+2}}, x_{\mu+2}, \ldots x_{\mu+\nu}\right) = \textit{stałéj}$$

otrzymamy

(5) $$\psi = \Pi_1(\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(m-1)}, x_{\mu+2}, \ldots x_{\mu+\nu})$$

jako całkę wspólną dwóch pierwszych równań układu (1) szukaną. Tak samo dobrą całką będzie wszelka funkcya fukcyi ψ nie zawierająca wyraźnie zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_\mu, x_{\mu+1}, x_{\mu+2}$.

Weźmy teraz pod uwagę trzecie równanie układu (1)

$$G[\mathrm{V}] = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_{\mu+3}} + \gamma_1\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} + \gamma_2\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2} + \ldots + \gamma_\mu\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_\mu} = 0.$$

Ponieważ z założenia mamy tożsamości

$$AG[V] - GA[V] = 0 \quad \text{i} \quad BG[V] - GB[V] = 0$$

a funkcya ψ jest całką wspólną dwóch pierwszych równań (1) funkcya $G[\psi]$ będzie także całką tych dwóch równań, podobnie jak w ogólności funkcye

$$G^2[\psi], \ldots G^n[\psi].$$

Lecz równania te mają najwyżéj μ rozwiązań niezależnych: zdarzy się więc koniecznie że dla n równego lub mniéjszego od μ, będzie

$$\psi^{(n)} = G^n[\psi] = \Psi[\psi, \psi', \psi'', \ldots \psi^{(n-1)}]$$

jakoto funkcya Ψ nie będzie zawierać wyraźnie $x_1, \ldots, x_\mu, x_{\mu+1}, \ldots x_{\mu+2}$. Funkcya ta jest jeszcze całką wspólną dwóch pierwszych równań (1) jakoteż wszelka funkcya funkcyj $\psi, \psi', \ldots \psi^{(n-1)}, \Psi$, która nie zawiera wyraźnie zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_{\mu+2}$. Szukajmy tego rodzaju funkcyi takiéj w dodatku, żeby czyniła zadosyć trzeciemu z równań (1) to jest $G[V] = 0$. Rozumując jak poprzednio, zobaczymy że funkcya szukana musi być rozwiązaniem równania o pochodnych częściowych następującego

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_{\mu+3}}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi}\right)\psi' + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi'}\right)\psi'' + \ldots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi^{(n-1)}}\right)\Psi = 0 \tag{6}$$

lub też całkę równania zwyczajnego różniczkowego n^{go} rzędu

$$\frac{d^n\psi}{dx^n_{\mu+3}} = \Psi\left(\psi, \frac{d\psi}{dx_{\mu+3}}, \frac{d^2\psi}{dx^2_{\mu+3}}, \ldots \frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}_{\mu+3}}\right), \tag{7}$$

a oznaczając całkę tę przez

$$\Pi_2\left(\psi, \frac{d\psi}{dx_{\mu+3}}, \frac{d^2\psi}{dx^2_{\mu+3}}, \ldots \frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}_{\mu+3}}\right) = \textit{stałéj}$$

otrzymamy

$$\xi = \Pi_2(\psi, \psi', \psi'', \ldots \psi^{(n-1)})$$

jako rozwiązanie jednoczesne trzech pierwszych równań układu (1).

Postępując tak daléj otrzymamy rozwiązania jednoczesne 4ech, 5ciu ... $\nu - 1$, w końcu wszystkich ν równań (1). To ostatnie rozwiązanie winno być rozwiązaniem równania o pochodnych częściowych kształtu

$$\left(\frac{\partial F_{\nu-2}}{\partial x_{\mu+\nu}}\right) + \left(\frac{\partial F_{\nu-2}}{\partial \omega}\right)\omega' + \ldots + \left(\frac{\partial F_{\nu+2}}{\partial \omega^{(p-1)}}\right)\Omega(\omega, \omega', \ldots \omega^{(p-1)}) = 0 \tag{8}$$

gdzie p jest mniéjszem lub równém μ. Równanie to sprowadza się do układu jednoczesnego

$$\frac{d\omega}{dx_{\mu+\nu}} = \omega', \quad \frac{d\omega'}{dx_{\mu+\nu}} = \omega'', \ldots \frac{d\omega^{(p-1)}}{dx_{\mu+\nu}} = \Omega(\omega, \omega', \ldots \omega^{(p-1)})$$

którego całkowanie sprowadza się do zcałkowania równania p^{go} rzędu

$$\frac{d^p\omega}{dx_{\mu+\nu}} = \Omega\left(\omega, \frac{d\omega}{dx_{\mu+\nu}}, \frac{d^2\omega}{dx^2_{\mu+\nu}}, \ldots \frac{d^{p-1}\omega}{dx^{p-1}_{\mu+\nu}}\right) \tag{9}$$

Niech będzie *pierwszą* całką tego równania

$$\Pi\left(\omega, \frac{d\omega}{dx_{\mu+\nu}}, \frac{d^2\omega}{dx^2_{\mu+\nu}}, \ldots \frac{d^{p-1}\omega}{dx^{p-1}_{\mu+\nu}}\right) = C_1,$$

gdzie C_1 oznacza stałą dowolną, będziemy mieli

$$V_1 = \Pi(\omega, \omega', \ldots \omega^{(p-1)}) \tag{10}$$

jako rozwiązanie wspólne wszystkim równaniom układu (1).

Całkując zupełnie równanie (9) otrzymamy widocznie p takich rozwiązań wspólnych, czyli p równań całkowych żądanych.

Lecz z drugiéj strony wiadomo że istnieje μ równań całkowych układu różniczkowego danego: gdyby więc zdarzyło się że $p < \mu$, aby dopełnić liczby, trzebaby było się udać do poprzednich równań jak $A[V] = 0$ lub (4) lub (6) któreśmy tylko w części rozwiązali i posiłkować się dalszemi rowiązaniami tych równań, zaniechanemi poprzednio. W każdym szczególnym przypadku z łatwością dostrzedz można w jaki najprostszy sposób szukać tych rozwiązań dopełniających.

Zauważmy jeszcze, dla streszczenia wszelkich trudności naszego sposobu, że, dla otrzymania rozwiązania jednoczesnego układu (1), musieliśmy stworzyć ν równań pomocniczych takich jak (9), których rząd nigdy nie jest wyższym od μ, które są równaniami o jednéj zmiennéj niezależnéj, i których nie żądamy jak tylko *pierwszéj* całki (t. j. równania rzędu o jedność niższego). Inne rozwiązania są w ogóle dane przez zupełne rozwiązanie ostatniego z równań o których mowa.

Oto streszczenie naszego sposobu całkowania:

Niech będzie dany układ jednoczesny (1) *czyniący zadosyć warunkom* (2), *bierzemy jednę z całek pierwszego z tych równań, niech będzie funkcyą* φ; *tworzymy wyrażenia* $B[\varphi]$, $B^2[\varphi]$ *czyli* φ', ... $B^m[\varphi]$ *czyli* $\varphi^{(m)}$, *aż dojdziemy do*

$$B^m[\varphi] = \Phi(\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(m-1)})$$

wyrażenia mogącego być przedstawionêm w funkcyi poprzedzających nie zawierającego wyraźnie zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_{m-1}$ *lecz mogącego zawierać pozostałe zmienne, przyczém* m *jest zawsze mniéjszém lub równém* μ.

Tworzymy następnie równanie m*go* *rzędu*

$$\frac{d^m\varphi}{dx^m_{\mu+2}} = \Phi\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dx_{\mu+2}}, \frac{d^2\varphi}{dx^2_{\mu+2}}, \ldots \frac{d^{m-1}\varphi}{dx^{m-1}_{\mu+2}}\right)$$

którego pierwsza całka

$$\Pi_1\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dx_{\mu+2}}, \frac{d^2\varphi}{dx^2_{\mu+2}}, \ldots \frac{d^{m-1}\varphi}{dx^{m-1}_{\mu+2}}\right) = \text{stałéj}$$

daje

$$\psi = \Pi_1(\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(m-1)}).$$

Tworzymy w dalszym ciągu wyrażenia

$$G[\psi] = \psi', \quad G^2[\psi] = \psi'', \ldots G^{(n)}[\psi] = \psi^{(n)}$$

aż dojdziemy do

$$G^{(n)}[\psi] = \Psi(\psi, \psi', \ldots \psi^{(n)})$$

gdzie Ψ *nie zawiera już wyraźnie* $x_1, x_2 \dots x_{\mu+2}$, *a* n *jest mniéjszém lub równém* μ.

Tworzymy równanie n^{go} *rzędu*

$$\frac{d^n\psi}{dx^n_{\mu+3}} = \Psi\left(\psi, \frac{d\psi}{dx_{\mu+3}}, \frac{d^2\psi}{dx^2_{\mu+3}}, \dots \frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}_{\mu+3}}\right) = stałéj$$

którego pierwsza całka

$$\Pi_2\left(\psi, \frac{d\psi}{dx_{\mu+3}}, \frac{d^2\psi}{dx^2_{\mu+3}}, \dots \frac{d^{n-1}\psi}{dx^{n-1}_{\mu+3}}\right) = stałéj$$

daje

$$\xi = \Pi_2(\psi, \psi', \psi'', \dots \psi^{(n-1)}).$$

Postępujemy tak daléj, aż dojdziemy do równania

$$\frac{d^p\omega}{dx^p_{\mu+\nu}} = \Omega\left(\omega, \frac{d\omega}{dx_{\mu+\nu}}, \frac{d^2\omega}{dx^2_{\mu+\nu}}, \dots \frac{d^{p-1}\omega}{dx^{p-1}_{\mu+\nu}}\right)$$

którego p *całek są* p *rozwiązaniami wspólnemi układu* (1).

Jeżeli $p < \mu$ *musimy szukać jeszcze rozwiązań dopełniających, tak aby liczba równań całkowych układu danego dochodziła do* μ.

Przykład. Jeden przykład wystarczy na pokazanie jak w praktyce postępować należy używając powyższego sposobu całkowania.

Niech będą dane trzy równania jednoczesne o różniczkach zwyczajnych 5ciu zmiennych

$$(x-1)(dy-du) + (u-y-2)\,dx = 0$$

$$(x-1)(u-1)\,dz + (2x-u-y)(u-1)\,dx + (2u-t-x)(x-1)\,du = 0$$

$$(u-1)(dt-dx) + (t+u-2)\,du = 0.$$

Rozwiążmy te równania co do dy, dz, dt:

$$dy = -\frac{u+y-2}{x-1}\,dx + du$$

$$dz = -\frac{2x-u-y}{x-1}\,dx - \frac{2u-t-x}{u-1}\,du$$

$$dt = dx - \frac{t+u-2}{u-1}\,du.$$

Układ ten jest równoważnym z układem o pochodnych częściowych:

$$A[V] = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{u+y-2}{x-1}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2x-u-y}{x-1}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$B[V] = \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2u-t-x}{u-1}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{t+u-2}{u-1} = 0.$$

Z tych dwóch równań utwórzmy kombinacyę

$$AB[V] - BA[V] = \left(\frac{2}{u-1} - \frac{2}{x-1}\right)\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{2}{x-1}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{2}{u-1}\frac{\partial V}{\partial t};$$

ponieważ kombinacya ta nie jest *tożsamościowo* zerem, mamy układ trzech równań

$$A[\mathrm{V}]=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}+\frac{y-u}{u-1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}-\frac{1-y}{u-1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}=0$$

$$B[\mathrm{V}]=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}-\frac{u-t}{u-1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}-\frac{t-1}{u-1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}=0$$

$$G[\mathrm{V}]=\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}+\frac{x-u}{u-1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}-\frac{x-1}{u-1}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}=0.$$

Tu już widzimy z łatwością że kombinacye $AB[V]-BA[V]$, $GA[V]-AG[V]$, $GB[V]-BG[V]$, są *tożsamościowo* zerami, a zatém układ dany ma *dwa* równania całkowe.

Równanie $A[V]=0$ uważane jako równanie linijne o pochodnych częściowych względem zmiennych y, z, t, ma spółczynniki stałe i daje

$$\frac{dz}{dy}=\frac{x-u}{u-1}, \qquad \frac{dt}{dy}=\frac{1-x}{u-1}$$

$$c=z-\frac{x-u}{u-1}y, \qquad c'=t+\frac{1-x}{1-u}y$$

jako całki. Weźmy pierwszą z nich za φ, to jest

$$z-\frac{x-u}{u-1}y=\varphi$$

będziemy mieli

$$B[\varphi]=-1-\frac{1}{u-1}=\varphi$$

a już φ' nie jest zależném od y, z, i t: więc

$$\varphi'=\Phi=-1-\frac{1}{u-1}.$$

Równanie

$$\frac{d\varphi}{dx}=-1-\frac{1}{u-1}$$

daje

$$\varphi+\left(1+\frac{1}{u-1}\right)x=\textit{stałéj}$$

a podstawiając za φ wartość otrzymamy

$$z-\frac{x-u}{u-1}y+x+\frac{x}{u-1}=\psi$$

funkcyę ψ czyniącą zadosyć obu równaniom $A[\mathrm{V}]=0$ i $B[\mathrm{V}]=0$.

Postępując daléj

$$G[\psi]=\frac{x-1}{(u-1)^2}y-\frac{x}{(u-1)^2}-\frac{u-t}{u-1}=\psi'$$

$$G^2[\psi]=-\frac{x-1}{(u-1)^3}y+\frac{x}{(u-1)^3}-\frac{t-1}{(u-1^2)}=\psi''.$$

Lecz widzimy z łatwością że

$$\psi'' = -\frac{2}{u-1}(\psi' + 1)$$

a zatém

$$\psi'' = \Psi',$$

i mamy do zcałkowania równanie

$$\frac{d^2\psi}{du^2} = -2\frac{\psi' + 1}{u-1} = -2\frac{\frac{d\psi}{du} + 1}{u-1}.$$

Pierwszą całką tego równania jest

$$(\psi' + 1)(u-1)^2 = C$$

a podstawiając za ψ' wartość:

$$xy + tu + y - x - u - t + 1 = C.$$

Drugą całką będzie

$$\psi = -\frac{C}{u-1} - u + C'$$

podstawiając za ψ i za C wartości otrzymamy

$$z + y + x + t + u - 1 = C.$$

Możemy więc przedstawić prościéj dwa równania całkowe układu danego przez

$$\begin{cases} z + xy + tu = C \\ x + y + z + t + u = C'. \end{cases}$$

Opuściliśmy jędnę całkę pierwszego równania $A[V] = 0$, z któréj nie uczyniliśmy żadnego użytku. Łatwo sprawdzić że ta całka nie dałaby była żadnego równania całkowego różnego od poprzedzających. W saméj rzeczy, przerabiając ją

$$\varphi = t - \frac{1-x}{u-1}y, \qquad B[\varphi] = \varphi' = \frac{1}{u-1}$$

$$\varphi = \frac{x}{u-1} + C_1, \qquad \frac{x-1}{u-1}y + t - \frac{x}{u-1} = \psi$$

$$-\frac{x-1}{(u-1)^2}y + \frac{x}{(u-1)^2} - \frac{t-1}{u-1} = -\frac{1}{u-1}\left(\frac{x-1}{u-1}y + t - \frac{x}{u-1} - 1\right) = \psi'$$

$$\psi' = \Psi = -\frac{\psi - 1}{u-1} = \frac{d\psi}{du}$$

$$(u-1)(\psi - 1) = C'_1.$$

Podstawiając wartość ψ, otrzymamy

$$xy + tu - y - t - x - u = C_1$$

lecz to równanie można wyprowadzić algebraicznie z dwóch równań całkowych otrzymanych powyżéj, odejmując poprostu drugie od pierwszego.

V

Zastosowania do całkowania równań o pochodnych częściowych wyższych zrędów według metody Ampera [1].

Wiadomo że wszelka całka równania o pochodnych częściowych winna zawierać jedną lub więcéj funkcyj dowolnych ilości, które już są funkcyami zmiennych niezależnych.

Metoda Ampera polega na zastąpieniu jednéj lub kilku ze zmiennych niezależnych zachodzących w daném równaniu różniczkowém przez nowe zmienne niezależne (które właśnie są ilościami wchodzącemi w skład funkcyj dowolnych powyższych); te nowe zmienne niezależne zostają następnie wyznaczonemi tak, aby równanie dane rozpadło się na inne równania, w którychby pochodne częściowe były brane tylko względem jednéj zmiennéj niezależnéj; równania takie zostają z łatwością zcałkowane jak równania zwyczajne. Zwykle równania te są dane przez warunki, którym zadość czynić mają dowolne funkcyj całkowych pierwotnych.

Trudności tego sposobu całkowania można streścić w dwóch punktach :

1° Liczba funkcyj dowolnych, które mają wchodzić w całkę pierwotną jest w ogólności nieoznaczona, a zatém zadanie nie jest dobrze określoném. Aby obejść w pewnych przynajmniéj razach tę trudność, Ampère dowodzi że *ile razy całka pierwotna równania o pochodnych częściowych* n^go^ *rzędu nie zawiera ani szeregów nieskończonych ani całkowań częściowych, winno zawierać* n *funkcyj dowolnych*. Ampère nie zajmuje się tylko całkami wyżéj wyszczególnionego gatunku, które nazywa *całkami pierwszego rodzaju* i metoda jego stosuje się tylko wyłącznie do tych ostatnich całek.

2° Równania do których można sprowadzić za pomocą metody Ampèra równanie dane, są w ogóle w liczbie albo za wielkiéj albo za małéj, albo wreszcie zawierają koniecznie pochodne wzięte względem wielu zmiennych, tak że w największéj liczbie przypadków bardzo jest trudno, jeżeli nie niepodobna, wyznaczyć za pomocą tych równań wszystkie ilości, których wyznaczenie jest niezbędném dla otrzymania całki ostatecznéj lub nawet tylko pośredniéj równania danego.

Aby właśnie przezwyciężyć w części tę ostatnią trudność, zamierzamy użyć przestawionéj w poprzedzających ustępach teryi. Może ona w przypadku niedostatecznéj liczby równań, wyznaczyć wszystkie mogące być wyprowadzonemi z tych równań równania całkowe, bez względu na inne równania, które mogłyby zachodzić lecz pod kształtem nieprzystępnym. Możnaby za pomocą téj teoryi, postawić z łatwością konieczne warunki aby Metoda Ampèra mogła być zastosowaną, możnaby z saméj zewnętrznéj formy spółczynników równania danego poznać czy równanie to może mieć całkę pośrednią lub nie, i wyznaczyć ją natychmiast w pierwszym razie.

Co się tyczy równań o pochodnych częściowych pierwszego rzędu, jedna z trudności powyższych nie ma miéjsca : wiadomo bowiem że całka takiego równania zawiera koniecznie jednę funkcyą dowolną i nie zawiera ich więcéj nad jednę. Druga zaś trudność została również usuniętą przez pracę Lagrange'a, Ampère'a, Cauchego i p. Serret'a z jednéj strony, a przez prace Jakobiego z drugiéj. Mamy teraz dwie metody zupełnie dokładne całkowanie tego rodzaju równań : na jednę z nich złożyły się prace czterech powyżéj wymienionych matematyków, druga zaproponowana przez Pfaffa jest utworem Jakobiego.

[1] Patrz Dziennik Szkoły Politechnicznéj Paryzkiéj, zeszyt 17ty i 18ty.

Lecz już przechodząc do pochodnych częściowych drugiego rzędu, w równaniach zawierających te pochodne, napotykamy od razu na wszelkie wymienione powyżéj trudności: od czasu Ampera żaden ważniéjszy krok nie został, można powiedzieć, uczynionym w téj teoryi.

Weźmiemy pod uwagę jedno z tych równań szczególniéjszego kształtu, równanie nad którém zresztą zeszły się usiłowania najznakomitszych matematyków którzy się tym przedmiotem zajmowali, a to z przyczyny ważności zastosowań tego równania do Geometryi i Fizyki matematycznéj, i pokażemy wjaki sposób proponujemy spożytkować poprzednio wyłożone teorye do równań o pochodnych wyższych rzędów.

Użyjemy, dla ułatwienia czytelnikowi, znakowania Ampera, którego metodę przypomniemy w kilku słowach upraszczając gdzie można dowodzenia.

Niech będzie równanie

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{M} + \mathrm{N}(rt - s^2) = 0$$

w którém, uważając x i y za zmienne niezależne, z za funkcyę tych zmiennych, oznaczamy dla skrócenia

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y}$$

zaś H, K, L, M i N są jakiemikolwiek funkcyami zmiennych x, y i z, mogącemi zawierać nadto p i q.

Niech będzie α pewna funkcya, jeszcze nieoznaczona, zmiennych x i y: weźmy za zmienne niezależne x i α i uważajmy y jako funkcyę tych zmiennych; oznaczmy dla odróżnienia pochodne częściowe wzięte w tém ostatniem przypuszczeniu, zamykając je w nawiasach ( ), będziemy mieli:

$$\text{(2)} \qquad t = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}$$

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)} = \frac{\partial q}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) - \frac{\partial q}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right) = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) - \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

a zatém

$$\text{(3)} \qquad s = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \cdot \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}$$

$$\text{(4)} \qquad r = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \frac{\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2.$$

Wyraziliśmy w ten sposób wszystkie pochodne drugiego rzędu w naszym nowym układzie zmiennych niezależnych x α. Zostawmy tymczasowo dla skrócenia pisania t zamiast jego wartości $\dfrac{\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}$ i podstawmy wartości (3) i (4) w równanie (1): opuściwszy nawiasy jako już zbyteczne, otrzymamy

$$(5) \qquad \left[H\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)+2K\frac{\partial q}{\partial x}+M-N\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right]+\left[H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2K\frac{\partial y}{\partial x}+L+N\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right]t=0$$

zważywszy że

$$s^2-rt=\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Ponieważ do téj pory nie określiliśmy bynajmniéj w jaki sposób α zależy od y i x lub co wychodzi na jedno, y od x i α, załóżmy że funkcya ta nieokreślona jest taką iż $\frac{\partial y}{\partial x}$ sprowadza drugi nawias [ ] równania (5) do zera. Podstawiając w ten nawias dla skrócenia wartości (2), (3), (4), będziemy mieli

$$(H+Nt)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2(K-Ns)\frac{\partial y}{\partial x}+L+Nr=0$$

co wymaga aby $\frac{\partial y}{\partial x}$ miało wartość

$$(6) \qquad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{K-Ns\pm\sqrt{K^2-HL+MN}}{H+Nt}$$

zważywszy iż na zasadzie równania (1)

$$Hr+2Ks+N(rt-s^2)=-HL.$$

Znosząc mianownik, i podstawiając z równania (3) wartość $\frac{\partial q}{\partial x}$ zamiast $s+t\frac{\partial y}{\partial x}$, otrzymamy:

$$(7) \qquad H\frac{\partial y}{\partial x}+N\frac{\partial q}{\partial x}=K\pm\sqrt{K^2-HL+MN}.$$

Pozostała część równania (5), sprowadzona do zera na mocy (6), daje

$$H\frac{\partial p}{\partial x}+\left(2K-H\frac{\partial y}{\partial x}-N\frac{\partial q}{\partial x}\right)\frac{\partial q}{\partial x}+M=0$$

a na zasadzie (7)

$$(8) \qquad H\frac{\partial p}{\partial x}+\left(K\mp\sqrt{K^2+HL+MN}\right)\frac{\partial q}{\partial x}+M=0.$$

Każde z równań (7) i (8) przedstawia dwa równania, stosownie do znaku jaki przyjmiemy przed znakiem pierwiastkowym. Znaki wyższe odpowiadają jednéj z wartości $\frac{dy}{dx}$ danych przez (6), znaki niższe drugiéj. Nazwijmy jednę z tych wartości $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\alpha_1}$ a drugą $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\alpha_2}$ to jest, nadajmy naszéj funkcyi nieokreślonéj α dwie wartości α_1 i α_2 z których jedna będzie wyznaczoną przez pierwszą z wartości $\frac{\partial y}{\partial x}$, pozostała przez drugą. Aby wyznaczyć α ze znanego $\frac{\partial y}{\partial x}$, mamy równanie o po-

pochodnych częściowych

$$\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\alpha$$

które to równanie nie wyznacza właściwie α lecz tylko funkcyę dowolną α : rozumiemy przez to, że jeżeli jakakolwiek wartość podstawiona za α czyni zadosyć temu równaniu, sprawdzonem ono zostaje również przez jakąkolwiek funkcyę téj wartości : mamy bowiem, oznaczając tę funkcyę przez $f(\alpha)$:

$$\frac{\frac{\partial f(\alpha)}{\partial x}}{\frac{\partial f(\alpha)}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}f'(\alpha)}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}f'(\alpha)} = \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}}.$$

Z tego wynika, że ilości któreśmy nazwali α_1 i α_2 pozostają jeszcze dowolnemi o tyle, że w dalszym ciągą będzie nam wolno zastąpić α_1 przez funkcyę dowolną α_1 i podobnież α_2 przez funkcyę dowolną α_2.

Uczyńmy widocznemi cztery równania (7) i (8) rozdzielając je na dwa układy : w pierwszym układzie zmiennemi niezależnemi będą x i α_1. w drugim x i α_2. Załóżmy jeszcze dla skrócenia.

$$G = K^2 - HL + MN$$

i zgódźmy się uważać $\sqrt{G}$ arytmetycznie : będziemy mieli

$$(10)\quad \begin{cases} N\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{\alpha_1} + H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\alpha_1} - K - \sqrt{G} = 0 \\ H\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\alpha_1} + \left(K - \sqrt{G}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{\alpha_1} + M = 0 \end{cases}$$

jako pierwszy układ ; drugim będzie

$$(11)\quad \begin{cases} N\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{\alpha_2} + H\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\alpha_2} - K + \sqrt{G} = 0 \\ H\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\alpha_2} + \left(K + \sqrt{G}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{\alpha_2} + M = 0. \end{cases}$$

Mamy w ten sposób cztery równania o pochodnych częściowych, do których dołączyć jeszcze możemy wiadomy związek

$$dz = pdx + qdy$$

pomiędzy siedmioma zmiennemi $x, y, z, p, q, \alpha_1, \alpha_2$. W równaniach (10) zmienne niezależne nie są te same co w (11) : w pierwsze z nich wchodzi bowiem α_1, w drugie α_2. Możnaby z łatwością sprowadzić je do tychsamych zmiennych niezależnych, lecz kształt ich nie byłby już tak dogodnym, bo pochodne nie byłyby brane względem jednéj zmiennéj niezależnéj, a przez to równania powyższe nie mogłyby być całkowanemi jak równania o różniczkach zwyczajnych. Mielibyśmy bowiem, zważywszy że

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\alpha_2}=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\alpha_1}+\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)_x\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right)_{\alpha_2},$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\alpha_2}=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\alpha_2}+\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha_1}\right)_x\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right)_{\alpha_2},$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{\alpha_2}=\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{\alpha_1}+\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha_1}\right)_x\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right)_{\alpha_2},$$

$$\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right)_{\alpha_2}=-\frac{\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)_{\alpha_1}}{\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1}\right)_x},$$

równania (11) przekształcone na równania:

$$\text{(11 bis)}\quad\left\{\begin{aligned}&\left[N\left(\frac{\partial q}{\partial \alpha_1}\right)_x+H\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\right)_x\right]\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)_{\alpha_1}-2\sqrt{G}\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1}\right)_x=0\\&\left[H\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha_1}\right)_x+\left(K+\sqrt{G}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{\alpha_1}\right]\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right)_{\alpha_1}-2\sqrt{G}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{\alpha_1}\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1}\right)_x=0,\end{aligned}\right.$$

w których zmiennemi niezależnemi są x i α_1 tak jak w równaniach (10) lecz w których pochodne są brane tak względem jednéj, jak względem drugiéj z tych zmiennych niezależnych. Zauważmy jeszcze mimochodem, że przedstawiając równania (11bis) pod kształtem

$$N\frac{\partial q}{\partial \alpha_1}+H\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}=2\sqrt{G}\frac{\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}}$$

$$H\frac{\partial p}{\partial \alpha_1}+\left(K+\sqrt{G}\right)\frac{\partial q}{\partial \alpha}=2\sqrt{G}\frac{\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}}\frac{\partial q}{\partial x}$$

i rugując N z pierwszego z tych równań za pomocą pierwszego równania (10), otrzymamy na mocy drugiego równanie

$$\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial q}{\partial \alpha_1}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial \alpha_1}$$

któreśmy już byli otrzymali dochodząc do równań (3) i (4). Widzieliśmy przytém że równanie to jest właściwie przekształceniem równania

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x},$$

biorąc x i α za zmienne niezależne. Ztąd wynika, że jeżeli będzie można wyciągnąć z tych równań wartości p i q w funkcyi x, y i z, wyrażenie

$$dz=pdx+qdy$$

będzie różniczką dokładną, która zcałkowana da wartość funkcyi z.

Wróćmy do układów (10) i (11). Dwa te układy mogą być uważane każden z osobna jako układy o różniczkach zwyczajnych. Przedstawmy je jednym typem

$$(12)\qquad \begin{cases} dz = pdx + qdy \\ \mathrm{N}dq + \mathrm{H}dy - \left(\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}}\right) dx = 0 \\ \mathrm{H}dp + \left(\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}\right) dq + \mathrm{M}dx = 0 \end{cases}$$

gdzie znaki górne i dolne przed $\sqrt{\mathrm{G}}$ odpowiadają sobie nawzajem. Biorąc pod uwagę znaki górne, stałe dowolne całkowania mają być zastąpione przez funkcye dowolne α_1, w razie znaków dolnych, przez funkcye dowolne ilości α_2. Każdy z tych układów uważany oddzielnie może mieć układ całkowy złożony najwyżéj z 3 równań: równań tych całkowych może jeszcze istnieć tylko dwa, lub jedno, lub nawet może ich nie być żadnego. Zobaczmy do czego nas doprowadzą te różne przypadki i jakie ztąd będziemy mogli wyciągnąć wnioski.

Przypuśćmy że żaden ze spółczynników powyższych równań nie jest zerem. Łatwo będzie zmodyfikować nasze rozumowania w każdym szczególnym przypadku jednego lub kilku z tych spółczynników równych zeru.

Wyrugujmy dq z dwóch ostatnich równań (12); otrzymamy

$$\mathrm{HN}dp + (\mathrm{K}^2 - \mathrm{G} + \mathrm{MN})\,dx - \mathrm{H}\left(\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}\right) dy = 0$$

a że

$$\mathrm{K}^2 - \mathrm{G} + \mathrm{MN} = \mathrm{HL},$$

więc

$$\mathrm{N}dp - \left(\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}\right) dy + \mathrm{L}dx = 0.$$

Zastąpmy tém ostatniém równaniem ostatnie równanie układu (12), i rozwiążmy następnie ten układ co do dp, dq, dz, otrzymamy:

$$(13)\qquad \begin{cases} dp = \dfrac{\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{N}} dy - \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}} dx \\ dq = -\dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{N}} dy + \dfrac{\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{N}} dx \\ dz = qdy + pdx. \end{cases}$$

Gdyby N było zerem, rozwiązaćby należało układ co do innych różniczek jak dp i dq.

Równanie (13) równoważném jest na mocy tego, cośmy powiedzieli w poprzedzających ustępach, układowi jednoczesnemu

$$(14)\,(^*)\qquad \begin{cases} A\,[\mathrm{V}] = \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \dfrac{\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{N}} \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial p} - \dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{N}} \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial q} + q \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = 0 \\ B\,[\mathrm{V}] = \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}} \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial p} + \dfrac{\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{N}} \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial q} + p \dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

(*) Układ (14) został wprowadzonym z (13) inną drogą przez Bour'a (Patrz Sprawozdanie z posiedzeń Akademii Nauk paryzkiéj, a mianowicie z posiedzenia 24 Marca 1862 r.).

Warunek aby zachodziły trzy równania całkowe zawartym jest w równaniach następujących:

$$A\left[-\frac{L}{N}\right]-B\left[\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}\right]=0$$

$$B\left[\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}\right]-B\left[-\frac{H}{N}\right]=0$$

$$A[p]-B[q]=0.$$

To ostatnie równanie staje się

$$\frac{K\mp\sqrt{G}}{N}-\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}=\mp\frac{2\sqrt{G}}{N}=0, \quad \text{czyli } G=0,$$

przez co warunki powyższe stają się po uproszczeniu

$$(15)\qquad \begin{cases} A\left[\frac{L}{N}\right]+B\left[\frac{K}{N}\right]=0 \\ A\left[\frac{K}{N}\right]+B\left[\frac{H}{N}\right]=0 \\ G=0 \end{cases}$$

Ostatni z tych warunków, mianowicie $G=0$, pokazuje nam że w razie gdy jest spełnionym, dwa układy (12) o których mowa sprowadzają się do jednego, to jest że $\alpha_1=\alpha_2$, co zresztą widać także z równania (6). Jeżeli nadto dwa pierwsze warunki (15) zachodzą, za pomocą prawidła podanego w ustępie czwartym, otrzymamy trzy równania całkowe kształtu

$$f_1(x, y, z, p, q)=\text{stałéj},$$
$$f_2(x, y, z, p, q)=\text{stałéj},$$
$$f_3(x, y, z, p, q)=\text{stałéj}.$$

Stałe, jakeśmy powiedzieli, są funkcyami α, i jak wiadomo, możemy zastąpić jedną z nich przez samo α, naprzykład pierwszą: będziemy mieli wówczas, oznaczając przez φ i ψ dwie funkcye dowolne

$$f_1(x, y, z, p, q)=\alpha,$$
$$f_2(x, y, z, p, q)=\varphi(\alpha),$$
$$f_3(x, y, z, p, q)=\psi(\alpha).$$

Podstawiając pierwsze z tych równań w dwa pozostałe, otrzymamy:

$$(16)\qquad \begin{cases} f_2(x, y, z, p, q)=\varphi(f_1), \\ f_3(x, y, z, p, q)=\psi(f_1). \end{cases}$$

równania, z których gdybyśmy wyciągnęli wartości na p i q i podstawili w wyrażenie

$$dz=pdx+qdy,$$

otrzymalibyśmy z w funkcyi x i y przez zwykłe całkowanie.

Przypuśćmy powtóre że warunki (15) nie zachodzą. Stosując do układu (14) sposób podany w ustępie trzecim, musielibyśmy utworzyć równanie

$$\mp\frac{2\sqrt{G}}{N}\frac{\partial V}{\partial z}+\left\{A\left[\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}\right]+B\left[\frac{H}{N}\right]\right\}\frac{\partial V}{\partial q}$$
$$-\left\{A\left[\frac{L}{N}\right]+B\left[\frac{K\pm\sqrt{G}}{N}\right]\right\}\frac{\partial V}{\partial p}=0$$

wyciągnąć z tego równania jednę z pochodnych naprzykład $\frac{dV}{dz}$, podstawić ją w dwa równania (14) i otrzymać w ten sposób układ trzech równań jednoczesnych o pochodnych częściowych, do których zastosowaćby należało znane postępowanie, które wskazałoby warunki istnienia dwóch równań całkowych.

Może się zdarzyć że każden z dwóch układów otrzymanych biorąc kolejno znaki górne i dolne przed $\sqrt{G}$, da dwa równania całkowe kształtu

$$\text{(17)}\qquad \begin{cases} f_1(x, y, z, p, q)=\text{stałéj}, \\ f_2(x, y, z, p, q)=\text{stałéj}, \end{cases}\qquad \begin{cases} F_1(x, y, z, p, q)=\text{stałéj}, \\ F_2(x, y, z, p, q)=\text{stałéj}. \end{cases}$$

Stałe pierwszego układu całkowego są funkcyami α_1, stałe drugiego funkcyami α_2: co nam da w podobny sposób jak poprzednio, dwa równania

$$\text{(18)}\qquad f_2(x, y, z, p, q)=\varphi(f_1),\qquad F_2(x, y, z, p, q)=\psi(F_1).$$

z których znów wyciągnąwszy p i q i podstawiwszy w wyrażenie

$$dz=pdx+qdy$$

otrzymamy z w funkcyi p i q przez proste całkowanie.

Jeżeli jeden tylko z układów wyżéj uważanych jest zdolnym mieć dwa równania całkowe

$$f_1(x, y, z, p, q)=\alpha$$
$$f_2(x, y, z, p, q)=\varphi(\alpha)$$

będziemy mieli podstawiając

$$\text{(19)}\qquad f_1(x, y, z, p, q)=\varphi(f_1)$$

tylko całkę pośrednią równania danego, w któréj ψ oznacza stałą dowolną. Widzimy ztąd, że nasz sposób pozwala nam wykazać wprost czy istnieje całka pośrednia, czy nie, i wyznaczyć ją w pierwszym razie; możemy także wypisać warunki, którym zadość czynić muszą spółczynniki równania danego, aby mogła zachodzić całka pośrednia.

Wreszcie, w przypadku gdyby układ przedstawiał jedno tylko równanie całkowe, jakkolwiek całka pośrednia nie istnieje, z tego równania otrzymanego z łatwością naszemi sposobami, można jeszcze dojść w pewnych przypadkach metodą Ampera do całki ostatecznéj.

Sposób nasz jest szczególniéj dogodnym w razie dość złożonych spółczynników kiedy nie można rozpoznać od razu układów całkowalnych : pozwala on iść wprost do celu gdy to jest możebném, lub uwalnia od bezpotrzebnych ubocznych próbowań, pokazując w jakich razach nie ma co kusić się o całkę pośrednią lub ostateczną, gdy takowe nie mogą być otrzymanemi.

Przykład. Objaśnimy naszą metodę na bardzo prostym przykładzie.

Niech będzie równanie

$$r = qs + xt + x(rt - s^2) + 1 = 0.$$

Mamy tu

$$\mathrm{H} = 1, \quad \mathrm{K} = -\frac{q}{2}, \quad \mathrm{L} = x, \quad \mathrm{M} = 1, \quad \mathrm{N} = x,$$

$$\mathrm{G} = \mathrm{K}^2 - \mathrm{HL} + \mathrm{MN} = \frac{q^2}{4}$$

Widzimy z łatwością naprzód, że nie ma trzech równań całkowych, bo G nie jest zerem, następnie podstawiając w (14) że znaki wyższe nie mogą dać nam dwóch równań całkowych.

Drugi układ (14) (biorąc znaki niższe) staje się

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + 0 - \frac{1}{x}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q} + q\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = 0 = A[\mathrm{V}]$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p} - \frac{q}{x}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q} + p\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = 0 = B[\mathrm{V}]$$

Ponieważ G nie jest zerem, utwórzmy równanie

$$AB[\mathrm{V}] - AB[\mathrm{V}] = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q} + \frac{q}{x}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = 0,$$

które staje się po uproszczeniu

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = 0,$$

a układ trzech równań o pochodnych częściowych staje się

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} - \frac{1}{x}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q} + 0 = 0 = B[\mathrm{V}],$$

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \frac{q}{x}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p} = 0 = A[\mathrm{V}].$$

Tu widzimy z łatwością, że warunki całkowalności są sprawdzonemi: istnieje więc całka pośrednia. Jest ona niezależną od z, to jest, że z nie wchodzi w nią wyraźnie.

Ostatnie z powyższych równań daje

$$dx = -dp = -\frac{x}{q}dq,$$

czyli

$$x + p = \text{stałéj}, \qquad qx = \text{stałéj},$$

a więc

$$\psi = x + p, \qquad \varphi = xq$$

$$B[\psi]=\psi'=0\,,\qquad A[\varphi]=\varphi'=-1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-1\,,\qquad \varphi+y=\textit{stałéj},\qquad qx+y=\textit{stałéj}$$

a więc

$$qx+y=f(p+x)$$

jest całką pośrednią, w któréj f oznacza funkcyę dowolną.