SUR UNE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES ÉLÉMENTS COMPLEXES

Par W. Sosnowski †

1. Soit une conique arbitraire dans un plan. Elle détermine, sur chaque droite du plan, une involution polaire conjugée qui lui est relative.

Sur une sécante, l'involution est hyperbolique et les points d'intersection de la droite avec la conique sont les points doubles de l'involution.

Sur une tangente l'involution dégénère de façon que tout point de la droite devienne point de contact.

C'était le point de départ des considérations de Staudt [1]). L'auteur lia toute involution sur une droite avec un couple de points. Dans le cas d'une involution hyperbolique, c'était un couple de points doubles, dans le cas elliptique, par contre, il généralisa la notion de point.

Il arriva de cette manière à identifier un couple de points complexes conjugués avec une involution elliptique sur une droite. Pour discerner les points d'un tel couple, Staudt lia l'involution elliptique avec l'orientation d'une droite. Sa définition était la suivante:

Un point complexe est une involution elliptique orientée sur une droite. Cette droite s'appelle *support* des points complexes [2]).

De la même manière prit jour la définition d'une droite complexe dans un plan et d'un plan dans l'espace. Cela fit ressortir dans l'espace les droites complexes de seconde espèce qui n'ont pas de porteur réel. Ce sont des droites qui réunissent les points complexes avec les supports réels obliques.

2. Pour éviter les droites complexes de seconde espèce, on se bornera uniquement à des considérations de figures planes. Remarquons, cependant, que la définition de Staudt, quoique'elle prenne son origine de la considération du lien entre la conique et les droites, peut être étendue sur une base plus générale.

Il s'agit notamment de toutes les involutions qui ont des points doubles. A l'aide de cette définition, on peut faire associer des points doubles aux involutions qui ne les ont pas. Si l'on envisage toutes les

---

[1]) Voir G. Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage.*

[2]) Cf. aussi C. Juel, *Vorlesungen über projektive Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Staudtschen Imaginärtheorie,* Berlin 1934.

http://rcin.org.pl

projectivités sur les droites, la définition d'un point complexe peut se baser sur ce que toute projectivité elliptique a des points doubles.

On doit toutefois admettre qu'à différentes projectivités, on associe le même point.

On évite cette difficulté en ne considérant que des involutions, car deux involutions elliptiques différentes n'ont sûrement aucun point double commun.

La question subsiste si l'on ne peut pas trouver une autre classe de projectivités qui donnerait une base suffisante à la définition du point complexe. La définition, basée uniquement sur une classe d'involutions apparaît plus que problématique.

La classe de projectivités choisie pour ce but doit satisfaire aux conditions suivantes:

I. A tout point complexe correspond une et une seule projectivité de la classe.

II. A toute projectivité de la classe correspond un et un seul point complexe.

La classe des involutions elliptiques ne satisfait pas à cette condition, d'où la nécessité d'une liaison artificielle de l'involution avec l'orientation d'une droite.

III. La projectivité d'une classe est déterminée à l'aide d'un nombre de points aussi petit que possible.

Les involutions sont déterminées à l'aide de quatre points (deux couples).

IV. Les constructions élémentaires des points d'intersection peuvent se faire facilement.

Si l'on adopte la définition de Staudt, l'intersection d'une droite avec la conique se fait aisément; par contre, l'intersection de deux droites nécessite quelques constructions assez compliquées.

3. J'appelle *involution d'ordre n* toute projectivité dont la n-ième itération est une identité tandis que la m-ième ne l'est pas si $m<n$.

Une involution du premier ordre est donc une identité.

Par contre, l'involution dans le sens ordinaire est une involution du deuxième ordre. Cette désignation sera maintenue dans la suite.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ n points et soit φ une involution du n-ième ordre, où

$$x_2=\varphi(x_1), \qquad x_3=\varphi(x_2), \qquad \dots, \qquad x_1=\varphi(x_n).$$

J'appelle *cycle de l'involution φ* l'ensemble de points $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cycliquement ordonné.

Le cycle d'une involution du n-ième ordre se compose donc de n points différents.

Proposition 1. *Trois points arbitraires cycliquement ordonnés, situés sur une droite, forment un cycle d'une et une seule involution du 3-ième ordre.*

http://rcin.org.pl

Démonstration. Désignons ces points par x, y, z. Il existe une et une seule projectivité qui transforme les points x, y, z en points y, z, x respectivement. J'affirme que c'est une involution du 3-ième ordre.

Supposons, pour le prouver, qu'un point arbitraire t transforme cette projectivité en u, u en v et v en w. Le rapport anharmonique de deux couples de points étant invariant des projectivités, on a

$$(x,y;z,t)=(y,z;x,u)=(z,x;y,v)=(x,y;z,w);$$

il s'ensuit que $t=w$, ce qui était à démontrer.

Proposition 2. *Toute involution du 3-ième ordre n'a aucun point double réel.*

Démonstration. Supposons que x, y, z forment un cycle de cette involution dont t est un point double. Il en résulte que

$$(x,y;z,t)=(y,z;x,t)=(z,x;y,t).$$

Ces rapports anharmoniques ne peuvent avoir, tous les trois, le même signe et, par conséquent, être égaux; t ne peut pas être un point double, ce qui était à démontrer.

4. A chaque involution du 3-ième ordre on peut faire correspondre un et un seul point complexe. On le considère comme faisant partie des points de la droite sur laquelle l'involution est déterminée. A différentes involutions on fait correspondre différents points.

Puisque l'involution du 3-ième ordre (en vertu de la proposition 2) n'a aucun point double réel, la théorie de Staudt lui fait correspondre un couple de points complexes, conjugués. Ces mêmes points sont considérés comme associés à l'involution réciproque du 3-ième ordre. L'un d'eux est associé à l'involution du 3-ième ordre, l'autre — à l'une de ses involutions réciproques. Les points complexes conjugués sont considérés comme correspondants aux involutions du 3-ième ordre.

Il en résulte évidemment que les conditions I et II sont satisfaites.

Remarquons que tout point complexe est déterminé par trois points réels qui forment un cycle d'une involution du 3-ième ordre.

Désignons par $)xyz($ le point complexe qui correspond au cycle (x,y,z). Ce point peut être associé à différents cycles s'ils correspondent à la même involution du 3-ième ordre. En particulier, $)xyz(=)yzx(=)zxy($. Le point $)xzy(=)zyx(=)yxz($ est conjugué, par contre, avec $)xyz($.

Un ensemble de trois points cycliquement ordonné est la plus simple figure rectiligne qui peut déterminer sur des droites réelles un point complexe dont l'ensemble est à deux dimensions.

On voit de suite que la condition III est aussi satisfaite.

5. De la même manière, à toute involution du 3-ième ordre dans un faisceau de rayons, on fait correspondre une et une seule droite com-

http://rcin.org.pl

plexe. On la considère comme faisant partie des droites de ce faisceau. Un point complexe est situé sur l'une des droites complexes si les involutions correspondantes se trouvent dans une position de perspective et dans ce cas seulement.

Problème 1. Faire passer une droite par deux points complexes donnés.

Si les deux points ont un support commun réel, ce dernier est la droite cherchée, réel dans ce cas.

Supposons que les supports réels de ces deux points soient deux droites différentes et désignons par x leur point d'intersection réel. Soient $)xyz($ et $)xuv($ les points complexes donnés, t le point d'intersection réel de deux droites $\overline{yu}$ et $\overline{xv}$.

L'involution du 3-ième ordre dans le faisceau de rayons de sommet t, dont le cycle est

$$(\overline{tx},\overline{ty},\overline{tz})=(\overline{tx},\overline{tu},\overline{tv}),$$

est située dans une position de perspective avec les involutions (x,y,z) et (x,u,v); la droite complexe $)\overline{tx},\overline{ty},\overline{tz}($ est alors la droite cherchée.

Problème 2. Déterminer le point d'intersection de deux droites complexes données.

On trouve la solution en appliquant le principe de dualité.

Les constructions élémentaires du premier degré ont, comme on le voit, des solutions tout-à-fait simples, plus simples que celles dans la théorie de Staudt.

6. Considérons maintenant les points complexes situés sur une conique.

Soit une conique S sur laquelle sont donnés trois points $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$. Faisons passer par $\ddot{x}$ une tangente à S coupant la droite $\ddot{y}\ddot{z}$ en un point x. On détermine pareillement les points y et z.

Les points x,y,z sont situés sur la même droite L (droite de Pascal d'un hexagone inscrit dans une conique $\ddot{x}\ddot{x}\ddot{y}\ddot{y}\ddot{z}\ddot{z}$). Les deux points complexes conjugués $)xyz($ et $)xzy($ sont les points d'intersection de la droite L avec la conique S.

Supposons, pour le prouver, que les points $\ddot{x}$ et $\ddot{z}$ soient pris pour sommets de deux faisceaux de rayons se trouvant mutuellement dans un rapport projectif tel que les droites correspondantes se coupent aux points de la conique.

Désignons cette projectivité par φ. Elle transforme le faisceau de sommet $\ddot{x}$ en un faisceau de sommet $\ddot{z}$. Considérons maintenant les droites $\ddot{x}x,\ddot{x}y,\ddot{x}z$ que la projectivité φ transforme en droites $\ddot{z}y,\ddot{z}z,\ddot{z}x$ (fig. 1). De même φ transforme la droite complexe $)\ddot{x}x,\ddot{x}y,\ddot{x}z($ en la droite $)\ddot{z}y,\ddot{z}z,\ddot{z}x($. Le point d'intersection de ces droites doit être un point complexe situé sur la conique S. Ce point est donc un point complexe $)xyz($ de la droite L, ce qui était à prouver.

http://rcin.org.pl

On voit que sur une conique, aussi bien que sur une droite, à tout ensemble de 3 points cycliquement ordonné correspond un point con-

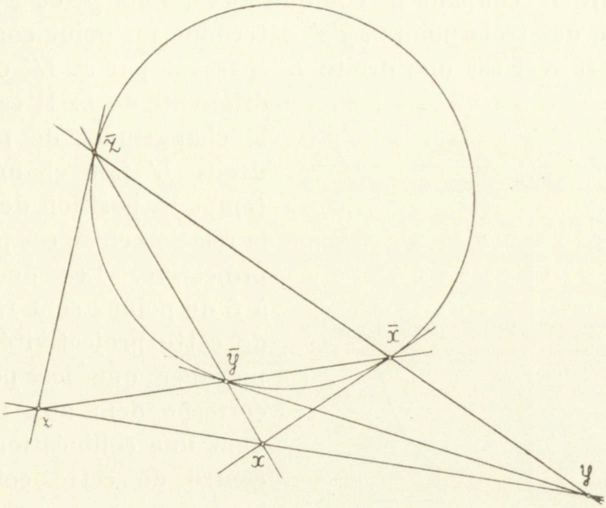

Fig. 1

jugué de la conique et que les supports réels de ce point c'est la droite de Pascal d'un des hexagones dont on a parlé plus haut.

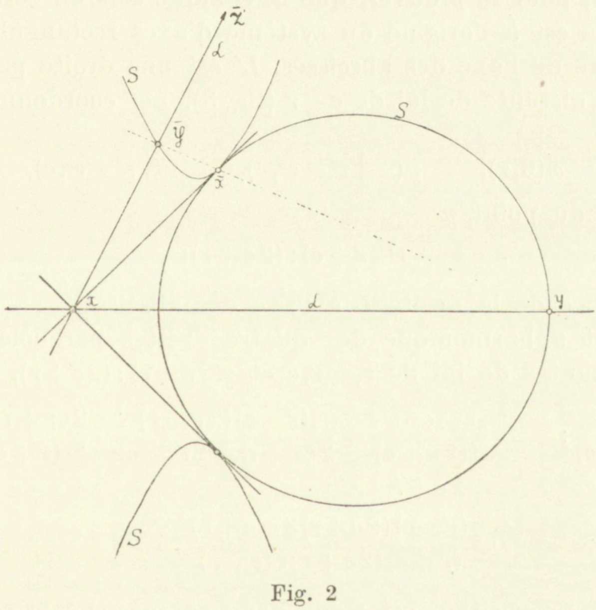

Fig. 2

7. Soient une conique S et une droite L qui ne la coupe pas. Déterminer les points d'intersection de la droite L avec la conique S.

On choisit sur L un point arbitraire x, et on cherche les points y et z du cycle correspondant. Il s'ensuit qu'il existe sur S trois points $\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$

http://rcin.org.pl

tels que L soit une droite de Pascal de l'hexagone $\ddot{x}x\ddot{y}y\ddot{z}z$ et $\ddot{x}x$ — une tangente à S. Faisons passer par le point x une tangente $x\ddot{x}$ et une sécante arbitraire L' coupant la conique aux points $\ddot{y}'$ et $\ddot{z}'$.

L'ensemble des trois points $\ddot{x}\ddot{y}'\ddot{z}'$ détermine un point complexe $)xy'z'($ dont le support réel est une droite L'' passant par x. L'' est en général différente de L. Il est évident que le changement de position de la droite L' fait changer en même temps la position de la droite L'', la relation entre ces positions étant projective. Les deux tangentes à S du point x sont rayons doubles de cette projectivité. Il faut remarquer que les points $\ddot{y}'$ et $\ddot{z}'$ correspondent aux points y' et z' dans une collinéation centrale. Le centre de cette collinéation est le point $\ddot{x}$ et son axe est la seconde tangente à S du point x, qui ne passe pas par $\ddot{x}$. Le coefficient de cette collinéation est le nombre -3 (fig. 2).

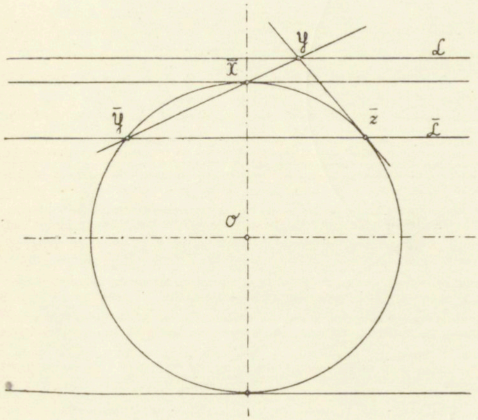

Fig. 3

Supposons, pour le prouver, que la conique soit un cercle de rayon r dont le centre est à l'origine du système d'axes rectangulaire. x est un point impropre de l'axe des abscisses. L' est une droite parallèle à l'axe des abscisses, distante de lui de $c<r$ (fig. 3). Les coordonnées des points sont

$$\ddot{x}(0,r), \qquad \ddot{y}(-\sqrt{r^2-c^2},c), \qquad \ddot{z}(\sqrt{r^2-c^2},c),$$

et l'ordonnée du point y

$$r(2r+c):(2c+r);$$

c'est la distance de la droite L à l'axe des abscisses.

Le rapport anharmonique des quatre droites parallèles à l'axe des abscisses, distantes de lui de $r,-r,c$ et $r(2r+c):(2c+r)$, est

$$\frac{r-c}{r-\dfrac{r(2r+c)}{2c+r}}:\frac{-r-c}{-r-\dfrac{r(2r+c)}{2c+r}}=\frac{(r-c)(2c+r)}{2cr+r^2-2r^2-cr}\cdot\frac{2cr+r^2+2r^2+cr}{(r+c)(2c+r)}$$

$$=\frac{(r-c)(2c+r)3r(c+r)}{(r+c)(2c+r)r(c-r)}=-3.$$

Puisque la proposition est vraie dans ce cas, elle le sera pour tout autre conique et tout autre point extérieur x. Cela résulte de ce que la conique peut toujours être rapportée projectivement au cercle de manière que x se transforme en un point impropre et la valeur numérique du rapport anharmonique reste invariable.

http://rcin.org.pl

8. Il en résulte une construction bien simple d'une involution du 3-ième ordre à laquelle on a fait associer un point complexe commun à la conique S et à la droite arbitraire L.

Problème 3. *Etant données une conique S et une droite extérieure L, trouver les points d'intersection complexes.*

Choisissons sur L un point arbitraire x, et menons par celui-ci deux droites M et N touchant la conique S. Considérons, sur la droite M,

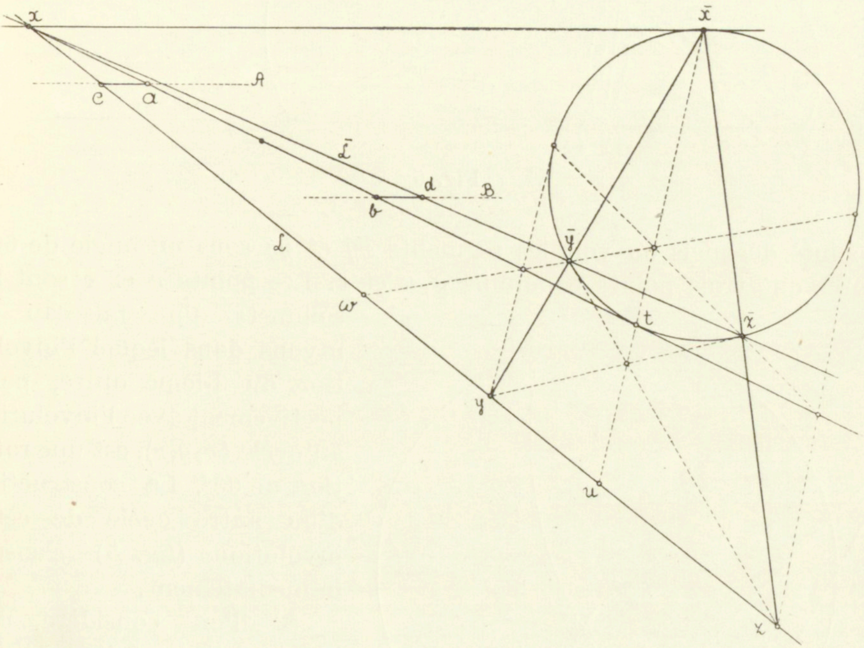

Fig. 4

deux segments $\overline{xa}$ et $\overline{xb}=3\overline{xa}$; faisons passer par a et b des droites A et B parallèles à N. La droite L coupe A au point c; la droite $\ddot{L}$, qui correspond à L, coupe B en un point d tel que $\overline{ac}=\overline{bd}$. Partant de là, il est facile de tracer la droite $\ddot{L}$ et de déterminer les points $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$, où elle coupe la conique S. Les points $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$ sont projetés sur la droite L du point $\ddot{x}$, où la droite N touche la conique S, et l'on a ainsi les points y et z. Les points complexes cherchés sont $)xyz($ et $)xzy($ (fig. 4).

Le problème de dualité, c'est-à-dire faire passer d'un point donné une droite complexe tangentiellement à une conique, se résout pareillement. Ces constructions ne sont donc pas plus compliquées que celles dans la méthode de Staudt.

9. La plus simple involution du 3-ième ordre dans un faisceau de rayons est une rotation de 60°. Cette involution correspond, d'après sa

http://rcin.org.pl

signification, à l'involution rectangulaire de la méthode de Staudt. Soit un cycle arbitraire d'une involution du 3-ième ordre (x,y,z) sur une droite réelle. Traçons deux arcs de circonférences — lieux géométriques

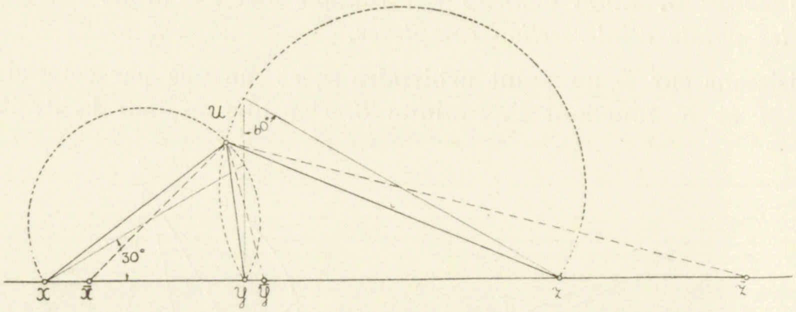

Fig. 5

des points desquels on voit les segments $\overline{xy}$ et $\overline{yz}$ sous un angle de 60°. Ces arcs ont trois points communs y, u et v. Les points u et v sont les sommets d'un faisceau de rayons dans lequel l'involution du 3-ième ordre, perspectivement avec l'involution au cycle (x,y,z), est une rotation de 60°. La construction d'un autre cycle de cette involution (fig. 5) s'ensuit immédiatement.

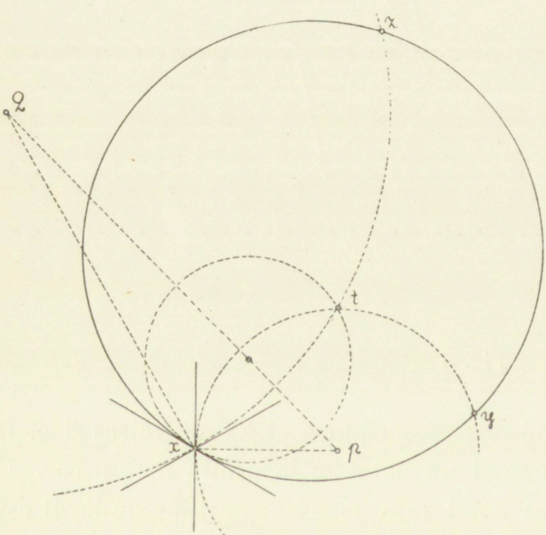

Fig. 6

Si l'on considère une involution du 3-ième ordre sur un cercle arbitraire dans le plan de Gauss, la plus simple involution sera une rotation de 120°. Les points doubles d'une telle involution se trouvent alors au centre du cercle et au point impropre. Si l'on désigne le cycle arbitraire de cette involution par (x,y,z), et si l'on fait passer des circonférences par le centre t du cercle, les points x,y et y,z, on voit que ces circonférences se coupent sous un angle de 60°. Puisque la projectivité sur le plan de Gauss est une représentation qui conserve les angles, la propriété dont on a parlée plus haut a lieu même si le point double t n'est pas le centre du cercle. Si l'on prend donc, sur le cercle, un point arbitraire x, on trouvera y de la condition que la circonférence passant par t et x coupe le cercle sous un angle de 60° (fig. 6).

http://rcin.org.pl

Il résulte de la construction ci-dessus que, dans le plan de Gauss, deux points doubles d'une involution du 3-ième ordre déterminent complètement cette involution. Une involution du 3-ième ordre est aussi déterminée si l'on donne un point double et le cercle (ou une droite) qui se représente sur lui-même. Par contre, deux couples de points, à savoir le couple primitif et le couple transformé, situés sur la même droite, ou sur le même cercle, déterminent généralement deux involutions du 3-ième ordre, parfois une seule, et dans certains cas aucune (fig. 7).

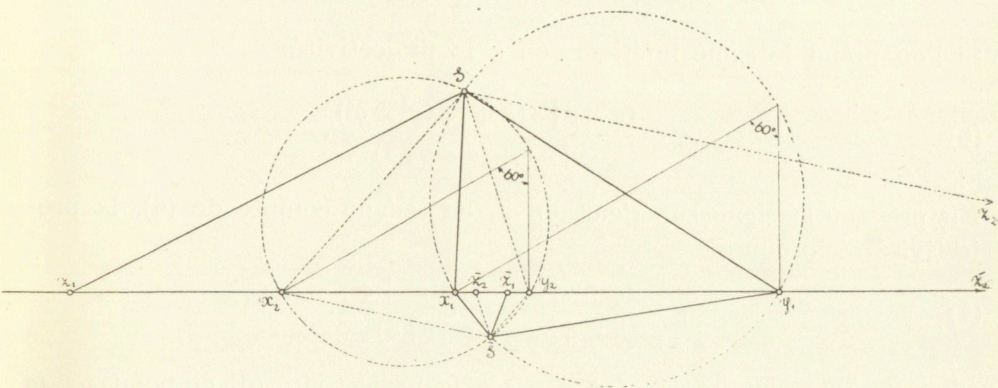

Fig. 7

10. On complètera maintenant les considérations précédentes par des calculs qui s'y rapportent.

Soit un axe de coordonnées. Toute projectivité elliptique ayant deux points doubles conjugués complexes $p+iq$ et $p-iq$, peut s'exprimer comme suit:

$$y=\frac{(\mu+2p)x-(p^2+q^2)}{x+\mu}, \tag{1}$$

où μ est un paramètre arbitraire.

La fonction réciproque est

$$y=\frac{\mu x+(p^2+q^2)}{-x+(\mu+2p)}. \tag{2}$$

La deuxième itération de la projectivité primitive s'exprime

$$y=\frac{[(\mu+2p)^2-(p^2+q^2)]x-2(p^2+q^2)(\mu+p)}{2(\mu+p)x-[(p^2+q^2)-\mu^2]}. \tag{3}$$

Dans le cas d'une involution du 3-ième ordre, elle doit être identique à l'involution réciproque. Il s'ensuit que

$$\mu=\frac{(p^2+q^2)-(\mu+2p)^2}{2(\mu+p)}. \tag{4}$$

http://rcin.org.pl

Alors

$$2\mu^2+2p\mu-p^2-q^2+\mu^2+4p\mu+4p^2=0,$$
$$3\mu^2+6p\mu+3p^2-q^2=0,$$
$$3(\mu+p)^2=q^2,$$
(5)
$$\mu_{1,2}+p=\pm\frac{q}{\sqrt{3}},$$
$$\mu_{1,2}=\frac{-p\sqrt{3}\pm q}{\sqrt{3}}.$$

Si l'on prend le signe inférieur, on a la projectivité

$$y=\frac{(q-p\sqrt{3})x+\sqrt{3}(p^2+q^2)}{-\sqrt{3}x+(q-p\sqrt{3})}. \tag{6}$$

En prenant le signe supérieur, on a, en tenant compte de (6), la projectivité réciproque

$$y=\frac{(q+p\sqrt{3})x-\sqrt{3}(p^2+q^2)}{-\sqrt{3}x+(q-p\sqrt{3})}. \tag{7}$$

On fait correspondre le point $p+iq$ à la projectivité (6) et point $p-iq$ à la projectivité (7).

La seconde projectivité peut être obtenue de la première en changeant q en $-q$. On peut donc considérer, en général, que le point $p+iq$ correspond à la projectivité (6).

11. On va voir maintenant si les involutions d'ordre n ($n=4,5,\ldots$) peuvent aussi servir de point de départ pour l'introduction des points complexes. On peut dire d'une manière générale, qu'une classe d'involution d'ordre n ne peut être employée dans ce but que s'il existe un et un seul nombre $m<n$ tel que m et n soient premiers entre eux. Dans ce cas la m-ième itération d'une involution d'ordre n est aussi une involution d'ordre n différente de la première. Les deux involutions ont exactement deux points doubles communs. Si ces derniers sont conjugués et complexes, on peut faire correspondre le premier point double à la première involution et le second point double — à la deuxième.

La propriété en question n'ont que les nombres $3, 4, 6$, et ce n'est qu'eux qui peuvent être pris en considération en introduisant les points complexes d'après la méthode de Staudt.

Le nombre 2, employé par Staudt, n'a pas cette propriété, et, par conséquent, on doit faire correspondre les deux points doubles à la même involution.

12. Pour les involutions d'ordre 4, on démontre les propositions suivantes:

http://rcin.org.pl

***Proposition* 3.** *Si les points x, y, z et t forment un cycle d'une involution d'ordre 4, $(x,z; y,t)$ est un rapport harmonique.*

Démonstration. Les rapports anharmoniques suivants sont égaux

$$(xzyt)=(ytzx)=(zxty)=(tyxz),$$

ce qui ne peut avoir lieu que si les couples xz et yt sont divisés harmoniquement.

***Proposition* 4.** *Si $(x,z; y,t)$ est un rapport harmonique, il existe une (et une seule) involution d'ordre 4 de cycle $(xyzt)$.*

Démonstration. On sait qu'il n'existe qu'une et une seule projectivité qui transforme les points x,y,z en y,z,t respectivement. Si

$$(xyzt)=-1,$$

et si la projectivité envisagée transforme t en u, on a

$$(ytzu)=-1,$$

et, comme $(ytzx)=-1$,

$$u=x,$$

ce qui était à démontrer.

***Proposition* 5.** *Une involution du 4-ième ordre n'a aucun point double réel.*

Démonstration. Si une involution d'ordre 4, de cycle $(xyzt)$ en avait un, son itération, qui est une involution d'ordre 2, devrait l'avoir aussi. Mais l'involution du deuxième ordre a comme couple de points correspondants xz et yt. D'après la proposition 3, ces couples forment une division harmonique. L'involution du 2-ième ordre est alors elliptique et ne peut avoir de point double.

***Proposition* 6.** *Une involution du 4-ième ordre est déterminée par trois points ordonnés, situés sur une droite, le premier se change en le deuxième, le deuxième en le troisième, et le troisième en un point conjugué harmoniquement avec le deuxième par rapport au premier et le troisième.*

La démonstration résulte immédiatement des propositions 3 et 4.

13. Il résulte de ces propositions qu'à toute involution du 4-ième ordre, on peut faire correspondre un point complexe de manière qu'aux points conjugués échoient les involutions réciproques. On voit encore que les points ordonnés x, y et z, situés sur une droite, déterminent un point complexe qui peut être désigné par (xyz).

Si l'on désigne par t un point conjugué harmoniquement avec y par rapport à x et z, on a

$$(xyz)=(yzt)=(ztx)=(txy).$$

http://rcin.org.pl

Par contre, le point

$$(zyx)=(tzy)=(xtz)=(yxt)$$

est conjugué avec le précédent.

De façon analogue, s'il s'agit d'involutions du 4-ième ordre dans un faisceau, on peut leur faire correspondre des droites complexes de manière qu'un point complexe soit situé sur la droite complexe si les involutions correspondantes sont liées perspectivement.

Les problèmes des jonctions et des intersections se résolvent comme les problèmes 1 et 2. Par contre, s'il s'agit de déterminer les points d'intersection d'une droite L avec la conique S, on prend sur L un point arbitraire x, et on trace sa polaire relative à S qui coupe L au point z. Les tangentes à S, partant des points x et z, forment un quadrilatère circonscrit à S. L'une de ses diagonales est L et les deux autres coupent L aux points y et t. Les points complexes cherchés sont alors (xyz) et (xtz).

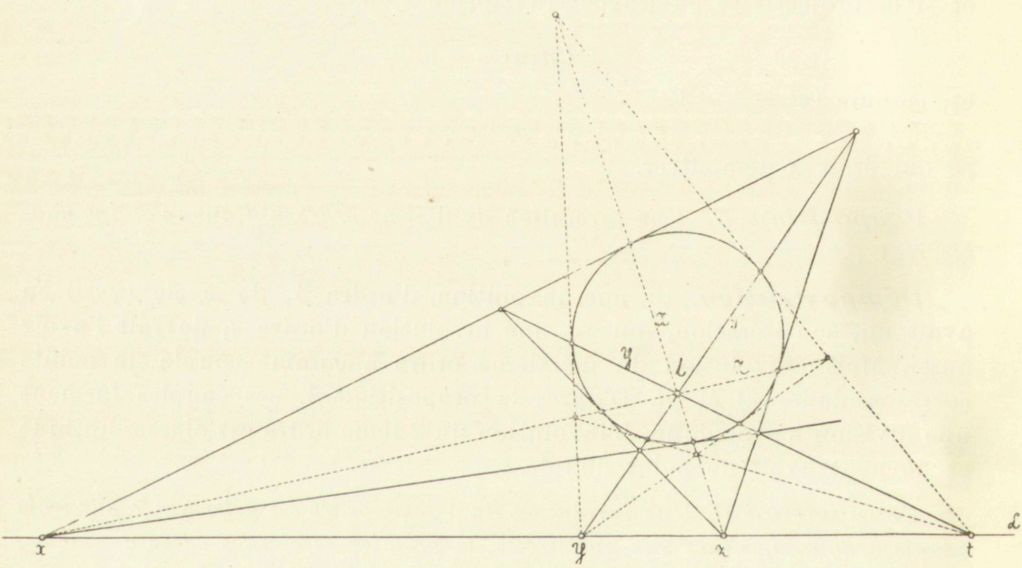

Fig. 8

La démonstration est analogue à celle qui fut donnée dans la section 7 (fig. 8).

14. Dans le calcul, semblable à celui de la section 10, on utilise la propriété que l'itération d'une involution du 4-ième ordre est une involution d'ordre 2 à laquelle s'applique la formule

$$y=\frac{px-(p^2+q^2)}{x-p},$$

http://rcin.org.pl

d'où à cause de (3),

$$\frac{p^2+q^2-\mu^2}{2(\mu+p)}=p.$$

Donc

$$p^2+q^2-\mu^2-2p\mu-2p^2=0,$$

$$\mu^2+2p\mu+p^2=q^2$$

$$\mu_{1,2}=-p\pm q.$$

A l'involution

$$y=\frac{(p-q)x-(p^2+q^2)}{x-(p+q)},$$

on fait correspondre $p+iq$, ce qui revient à prendre le signe supérieur; à l'involution

$$y=\frac{(p+q)x-(p^2+q^2)}{x-(p-q)}$$

le point $p-iq$.

15. Les involutions du 4-ième ordre fournissent des constructions pareilles à celles que l'on emploie dans les involutions du 2-ième ordre. Si $(xyzt)$ est le cycle d'une involution du 4-ième ordre, celle-ci a les mêmes points doubles conjugués que l'involution du 2-ième ordre dans laquelle les couples de points x,z et y,t se correspondent.

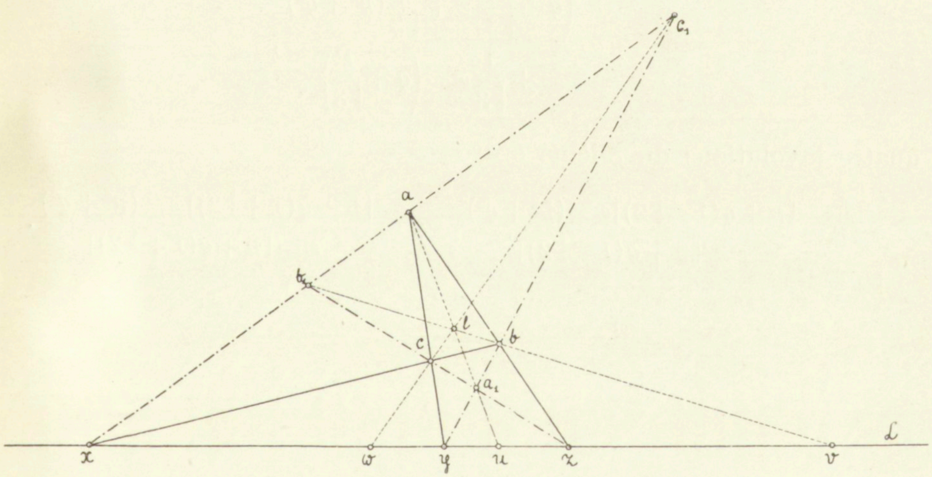

Fig. 9

En ce qui concerne les involutions du 6-ième ordre, il est facile d'en donner la construction, dans laquelle la première itération est une involution donnée du 3-ième ordre, de cycle (xyz). Dans ce but, on trace un triangle abc tel que les prolongements des côtés ab, bc et ca passent respectivement par z, x et y (fig. 9 et aussi fig. 4). On trace ensuite un

http://rcin.org.pl

triangle $\ddot{a}\ddot{b}\ddot{c}$ dont les côtés $\ddot{a}\ddot{b}, \ddot{b}\ddot{c}$ et $\ddot{c}\ddot{a}$ passent respectivement par les points zc, xa et yb. Les droites $a\ddot{a}, b\ddot{b}, c\ddot{c}$ se coupent en un point (Théorème de Desargues) et la droite en u, v et w.

Les points x, w, y, u, z et v forment un cycle d'une involution du 6-ième ordre.

Une projectivité qui transforme x, w, y en w, y, u respectivement doit aussi transformer le point z, conjugué harmoniquement avec w par rapport à x et y, en le point v conjugué harmoniquement avec y par rapport à w et u.

On peut démontrer de la même manière que le point u doit être transformable en z, et v en x, ce qui était à démontrer.

La même configuration complète le cycle $(xwyuzv)$ si l'on donne trois de ses points initiaux x, w, y.

16. Terminons en donnant des formules aux involutions d'ordre 5,6 et 8 dont les points doubles sont $p+iq$ et $p-iq$.

On a: quatre involutions du 5-ième ordre

$$y = \frac{\left(p \pm q\sqrt{1-\frac{2}{5}}\right)x - (p^2+q^2)}{x - \left(p \mp q\sqrt{1-\frac{2}{5}}\right)}, \qquad y = \frac{\left(p \pm q\sqrt{1+\frac{2}{5}}\right)x - (p^2+q^2)}{x - \left(p \mp q\sqrt{1+\frac{2}{5}}\right)},$$

deux involutions du 6-ième ordre

$$y = \frac{\left(q \pm \frac{P}{\sqrt{3}}\right)x \mp \frac{1}{\sqrt{3}}(p^2+q^2)}{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x - \left(q \mp \frac{P}{\sqrt{3}}\right)},$$

quatre involutions du 8-ième ordre

$$y = \frac{[p \pm q(1-\sqrt{2})]x - (p^2+q^2)}{x - [p \mp q(1-\sqrt{2})]}, \quad y = \frac{[p \pm q(1+\sqrt{2})]x - (p^2+q^2)}{x - [p \mp q(1+\sqrt{2})]}.$$

http://rcin.org.pl