

Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych.

Posiedzenie

z dnia 7 Kwietnia 1910 r.

Rok III. № 4.

Obecni:

Przewodniczący Wydziału p. J. Lewiński.
Sekretarz p. J. Tur.

Członkowie Towarzystwa pp.: T. Banachiewicz, Ign. Baranowski, Wł. Gorczyński, J. Kowalczyk, F. Kucharzewski, W. Mayzel, R. Merecki, Sł. Miklaszewski, Wł. Sierpiński, L. Silberstein, Z. Weyberg i Z. Wóycicki.

Goście pp.: C. Łopuski, St. Sterling, T. Wolski.

1. Pan T. Banachiewicz:

O pewnem kryterium w teorii błędów.

Komunikat zgłoszony dn. 27 lutego 1910 r.

Kwestya kryterium matematycznego, na którego zasadzie możnaby bez skrupułu odrzucać obserwacye, wykazujące znaczne odchylenia, oddawna zajmuje astronomów i geodetów¹⁾, lecz mimo to dotychczas nie jest całkowicie wyjaśniona.

Bardzo rozpowszechniony jest pogląd, że wszystkie obserwacye, dające wyniki nie zupełnie niemożliwe, winny być w rachunku uwzględnione z wagą, nadaną im a priori, mniej natomiast zwolen-

¹⁾ Przegląd odnośnej literatury patrz Czuber: Theorie der Beobachtungsfehler (1892) str. 211 — 231; tenże: Die Entwicklung der Wahrsch.-theorie und ihrer Anwendungen (1899), str. 212 i następne. Pogląd Newcomba vide: Compendium of spherical astronomy (1906), str. 57.

ników ma chwiejna reguła odrzucania obserwacji, o ile odchylenie jej jest większe, niż możnaby się „racjonalnie“ spodziewać.

W komunikacie, zatytułowanym, jak niniejszy (Spraw. z pos. T-wa N. Warsz., Wydział III, pos. 2. XII. 1909 r.), p. Gosiewski ustanawia nowe kryterium dla tego przypadku, gdy szukana wielkość jest bezpośrednio mierzona; w przeciwieństwie do innych badaczy p. Gosiewski zakłada przytem domyślnie w rachunkach, że błędy obserwacji, włącznie z odrzucaną, podlegając prawu Gauss'a, mają jedną i tę samą miarę dokładności (h). W tem założeniu, jak wiadomo, średnia arytmetyczna ze wszystkich obserwacji jest bezsprzecznie najprawdopodobniejszą wartością niewiadomej, zaproponowane odrzucanie obserwacji nie jest więc wskazane. Poniżej zajmujemy się nieco odmiennem wyprowadzeniem, oraz wyjaśnieniem znaczenia nowego kryterium.

Nietrudno zauważyć, że podstawą jego jest następujące dowolne założenie: „obserwację należy wyłączyć wtedy (i tylko wtedy), jeżeli błąd prawdopodobny średniej arytmetycznej z $n + 1$ dostrzeżeń, obliczony według zwykłych reguł z kwadratów odchyień od średniej, wypada większy, niż błąd prawdopodobny średniej arytmetycznej, obliczony według tychże reguł z kwadratów¹⁾ odchyień, otrzymanych po odrzuceniu owej obserwacji“.

Z powyższego założenia szukane kryterium daje się wyprowadzić w sposób następujący.

Niechaj bezpośrednio zamierzone wartości niewiadomej x będą x_1, x_2, \dots, x_n, y , gdzie y jest wartość kwestyonowana.

Oznaczmy przez \bar{x} i \bar{x}' średnie arytmetyczne:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \bar{x}' = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + y}{n + 1} \quad (1);$$

błędy średnie \bar{x} i \bar{x}' , obliczone, jak powyżej określono, oznaczamy przez m_x i m'_x . Będzie z określenia

$$m_x = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}, \quad (2) \quad \text{i} \quad m'_x = \sqrt{\frac{[vv']}{(n+1)n}} \quad \dots \quad (3),$$

gdzie oznaczono, jak zwykle

$$[vv] = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \quad [vv'] = \sum_i (x_i - \bar{x}')^2 + (y - \bar{x}')^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

¹⁾ Gdyby obliczać błąd prawdopodobny z pierwszych potęg wartości bezwzględnych odchyień, kryterium wypadłoby zgoła odmienne.

Z zasadniczej własności średnich arytmetycznych obracania w minimum odnośnych sum kwadratów od odchyłeń wynikają na $[vv]'$ następujące granice

$$[vv] + (y - \bar{x}')^2 < [vv]' < [vv] + (y - \bar{x})^2,$$

czyli $[vv]' = [vv] + \varepsilon^2 \dots \dots \dots (4),$

gdzie $(y - \bar{x}')^2 < \varepsilon^2 < (y - \bar{x})^2 \dots \dots \dots (5).$

Wstawiając wartość (4) na $[vv]'$ do wyrażenia (3), mamy

$$m'_x = \sqrt{\frac{[vv] + \varepsilon^2}{(n+1)n}} \dots \dots \dots (6).$$

Według założenia, obserwację y należy wyłączyć, jeżeli $m'_x < m_x^2$, to jest kiedy, z (6) i (2)

$$\frac{[vv] + \varepsilon^2}{(n+1)n} < \frac{[vv]}{n(n-1)},$$

czyli, kiedy

$$\varepsilon^2 > [vv] \frac{n+1}{n-1} - [vv] = 2 \frac{[vv]}{n-1} = 2\mu^2 \dots \dots (7),$$

gdzie przez μ oznaczyliśmy pozorny błąd średni jednej obserwacji,

określony przez wzór $\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$.

Kładąc w (7) $\varepsilon = |y - \bar{x}|$, a więc zaniedbując w wyrażeniu na granicę odchyłeń, stanowiących o wyłączeniu obserwacji, wielkość mniejszą od $\frac{\varepsilon}{n+1}$ [jak to widać ze wzorów (5) i (1)], otrzymujemy ostatecznie

o ile $|y - \bar{x}|$ jest $> \sqrt{2} \mu$ obserwację y należy wyłączyć . . . (8)

" " $|y - \bar{x}|$ " $< \sqrt{2} \mu$ " " " zachować . . . (9).

Nierówności (8) i (9) najzupełniej odpowiadają nierównościom (11) i (12) komunikatu p. Gosiewskiego, o ile w tych ostatnich zaniechać małe wielkości, odrzucane przez p. Gosiewskiego w toku obliczeń.

Z tego kryterium wypadałoby, że w każdym normalnym (z błędami z Gaussowskiej dyspersji) szeregu dostrzeżeń, około 16% obserwacji kwalifikowałoby się do odrzucenia, tyle bowiem dostrzeżeń przeciętnie wykazuje odchylenia większe od $\sqrt{2} \mu$. Wyłączanie takich obserwacji byłoby więc środkiem nadzwyczaj radykalnym, ale czy byłoby pożyteczne? Otóż założenia poczynione są tego ro-

dzaju, że otrzymane z nich kryterium nie daje żadnej gwarancji prawdopodobnego polepszenia rezultatu przez wyłączenie owych mało zgodnych obserwacji. W samej rzeczy, niema zasady¹⁾ do uważania m_x , obliczonego ze wzoru (2), za błąd średni \bar{x} ; nierówność $m_x^2 < m'_x{}^2$ nie pozwala więc wnioskować, że \bar{x} jest dokładniejszą wartością, niewiadomej, niż \bar{x}' . Nie ulega tylko wątpliwości, że kryterium daje interesującą wskazówkę, kiedy wyłączenie obserwacji pozornie polepsza rezultat; tylko że osiągnięcie pozornej zgodności wyników nie należy do zadań teorii wyrównywania błędów spostrzeżeń.

RÉSUMÉ.

M-r T. Banachiewicz:

Sur un critérium dans la théorie des erreurs.

Communication annoncée 27. II. 1910.

La limite des résidus des observations à exclure du calcul de la moyenne arithmétique, proposée par M. Gosiewski (C. R. des Séances de la Soc. Scient. de Vars., séance du 2. XII. 1909, pg. 354), repose au fond sur la supposition suivante: une observation doit être exclue, si son exclusion diminue l'erreur moyenne du résultat,

cette dernière étant calculée par la formule ordinaire $\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$.

Nous montrons d'une manière simple, que cette supposition conduit à qualifier d'exclusion 16% des observations, dans une série normale. Toutefois l'amélioration de la moyenne arithmétique n'est qu'apparente,

parce que la formule $\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$, appliquée aux observations choisies, ne donne plus l'erreur moyenne de cette moyenne.

¹⁾ Ogólny wzór (3) nie jest stosowalny po usunięciu jednej normalnej, lecz wybranej obserwacji; odrzucając z $n + 1$ dostrzeżeń jedno najmniej zgodne, zmieniamy przez to prawo częstości błędów w pozostałych dostrzeżeniach i to w ten sposób, że nie możemy napisać równości: wartość średnia $[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0$, która występuje (patrz np. Cz u b e r Theorie der Beob.-Fehler. str. 152) przy wyprowadzaniu wzoru (3).

2. Pan Wł. Gosiewski:

O sposobie poprawienia w rachunku średniej arytmetycznej wartości niewiadomej podejrzanych.

A. Sposób pierwszy.

Komunikat zgłoszony dn. 4 marca 1910 r.

Idąc za myślą podniesioną w komunikacie poprzednim¹⁾, zamierzamy teraz okazać, że zamiast wyłączać ze średniej arytmetycznej wartość niewiadomej podejrzanej, lepiej jest ją poprawić.

Dwa są sposoby rozwiązania tego zadania: jeden, powiedzmy: pierwszy, i ten jest przedmiotem komunikatu niniejszego drugi odkładamy na później.

Ażeby uwydatnić pewne strony kwestyi, które poprzednio mogły być pominięte, wygodniej będzie i dla nas i dla czytelnika, gdy rozpoczniemy rzecz od samego początku.

§ 1.

Niech więc x_1, x_2, \dots, x_n oznaczają wartości niewiadomej x , otrzymane przez jej pomiary bezpośrednie, dokonane w jednakowych warunkach i jednakowo starannie, przez obserwatora i narzędziem, którym odpowiadająca dokładność jest niewiadoma.

Niech dalej

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i (1)$$

oznacza średnią arytmetyczną tych wartości. Wtedy będzie

$$x = \bar{x} + \eta \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (\bar{x} - x_i)^2} (2)$$

z prawdopodobieństwem, równem

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{\frac{n+1}{2}}} (3),$$

¹⁾ „O pewnym kryterium w teorii błędów“. (Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Rok II (1909), zeszyt 9 (Grudzień) str. 347.

gdzie jest ogólnie

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = (z-1) \Gamma(z-1) \dots \quad (4).$$

Wyraz drugi po stronie prawej równania (2) jest błędem ewentualnym $x - \bar{x}$, który dopełniamy z prawdopodobieństwem (3), gdy niewiadomą x zastępujemy średnią arytmetyczną \bar{x} . Zatem nadzieję matematyczną wartości bezwzględnej $|x - \bar{x}|$ tego błędu, t. j.

$$\begin{aligned} \xi_n &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (\bar{x} - x_i)^2} \int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i (\bar{x} - x_i)^2} \dots \quad (5) \end{aligned}$$

nazywamy błędem *prawdopodobnym*.

Na mocy tej definicji istnieje równanie

$$\text{nadz. mat. } |x - \bar{x}| = \xi_n \dots \quad (6);$$

w myśl zaś tego równania wyłania się, jako jedyna w tym względzie ucieczka, zasada następująca:

Gdy do szeregu wartości niewiadomej dostrzeżonych danych przybywają po kolei nowe, i przy tem dostrzeżone dobrze, t. j. takie, które mogą raczej zmniejszać aniżeli powiększać błąd ewentualny $|x - \bar{x}|$, jego nadzieja matematyczna, a zatem błąd prawdopodobny ξ_n powinien wówczas maleć, lub co najmniej stać w mierze.

§ 2.

To wiedząc, przypuścemy, że do szeregu danych poprzednio n wartości dostrzeżonych przybywa nowa y w tych samych co tamte warunkach, jeszcze nieoznaczona, ale dobra. Wówczas średnia arytmetyczna przyjmuje postać

$$\frac{n\bar{x} + y}{n + 1},$$

a błąd prawdopodobny staje się według wzoru (5) równym

$$\xi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{n+1} \left\{ \left(\frac{n\bar{x}+y}{n+1} - y\right)^2 + \sum_i \left(\frac{n\bar{x}+y}{n+1} - x_i\right)^2 \right\}} \quad (7).$$

Z uwagi jednak, że y ma być dostrzeżoną dobrą, wymagalna jest według wygłoszonej zasady nierówność $\xi_{n+1} \leq \xi_n$, która, po uwzględnieniu wzorów (5) i (7), oraz łatwych zresztą przekształceń przyjmuje postać

$$(y - \bar{x})^2 \leq \rho^2,$$

gdzie

$$\rho = \sqrt{\frac{n+1}{n} \left(\frac{n+1}{n} \alpha_n^2 - 1 \right) \sum_i (\bar{x} - x_i)^2},$$

$$\alpha_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2},$$

albo raczej postać

$$\bar{x} - \rho \leq y \leq \bar{x} + \rho \quad \dots \quad (8)$$

Pod tą właśnie postacią (8) wyrażamy warunek, że y jest wartością niewiadomej dostrzeżoną — dobrą.

Jeśli więc w szeregu wartości danych x_1, x_2, \dots, x_n niema ani jednej, któraby się znalazła po za granicami nierówności (8), twierdzimy wtedy, że wszystkie one również jak y są dobre. Zdarza się to jednak bardzo rzadko. Najczęściej niektóre z tych wartości są mniejsze od $\bar{x} - \rho$, a niektóre inne większe od $\bar{x} + \rho$; wszystkie atoli obu tych kategorii nazywamy jednym mianem najwięcej podejrzanych, a zadanie, które zamierzamy rozwiązać, polega na poprawieniu tych właśnie najwięcej podejrzanych wartości.

§ 3.

Przypuśćmy, że między wartościami danymi, wszystkie począwszy od x_{m+1} aż do x_n włącznie są najwięcej podejrzane. Wyrażamy to, pisząc

$$x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_{m+1}, \dots, x_n.$$

Założmy

$$|x_{m+\lambda} - (\bar{x} \mp \rho)| = r_\lambda,$$

gdzie stosownie do tego czy podejrzone $x_{m+\lambda}$ należy do pierwszej lub drugiej kategorii zatrzymujemy znak — lub +, i niech będzie wtedy

$$r_1 < r_2 < \dots < r_{n-m}.$$

Szeregowi temu odpowiadają widocznie wartości podejrzone

$$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n,$$

uporządkowane według wzrastającego podejrzenia.

Zacznijmy od poprawienia najmniej podejrzanego x_{m+1} .

Opuszcmy w tym celu w szeregu wartości danych wszystkie podejrzone, i obliczmy średnią arytmetyczną \bar{x}_m samych tylko wartości pozostałych x_1, x_2, \dots, x_m , oraz odpowiadające im ρ_m według wzoru na ρ w § poprzednim, i uważajmy nierówność

$$\bar{x}_m - \rho_m \leq y \leq \bar{x}_m + \rho_m \dots \dots \dots (9).$$

Z uwagi, że nie wszystkie wogóle wartości x_1, x_2, \dots, x_m zadość czynią nierówności (9), a wszystkie natomiast zadość czynią nierówności (8), mamy

$$\bar{x} - \rho < \bar{x}_m - \rho_m, \quad \bar{x} + \rho > \bar{x}_m + \rho_m.$$

Według zatem nierówności (9) będzie

$$|y - x_{m+1}| \geq |\bar{x}_m \mp \rho - x_{m+1}|,$$

gdzie należy zatrzymać znak — lub +, stosownie do tego, czy podejrzone x_{m+1} należy do kategorii pierwszej lub drugiej.

Ale $|y - x_{m+1}|$ jest wartością ewentualną błędu popełnionego przez obserwatora, który tylko przez mimowolną omyłkę wziął x_{m+1} podejrzone za wartość niewiadomej x , zamiast wziąć y dobre.

A że wtedy

$$\min. |y - \bar{x}_{m+1}| = |x_m \mp \rho_m - x_{m+1}|,$$

a błąd najmniejszy jest oraz najprawdopodobniejszy, zatem osiągniemy wynik najlepszy, jeśli x_{m+1} zastąpimy wartością

$$\min. y = \bar{x}_m - \rho_m, \text{ lub } \max. y = \bar{x}_m + \rho_m,$$

stosownie do przypadku kategorii pierwszej lub drugiej podejrzanego x_{m+1} .

Przypuszcmy, dla ustalenia poglądu, że zamiast x_{m+1} należy położyć $\min. y = \bar{x}_m - \rho_m$ w przypadku rozważanym; będziemy wówczas mieli

$$\frac{m\bar{x}_m + \min. y}{m + 1} = \bar{x}_m - \frac{\rho_m}{m + 1} \dots \dots \dots (I)$$

oraz

$$\xi_{m+1} = \xi_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{m} \sum_i (\bar{x}_m - x_i)^2} \dots \dots (II)$$

$$< \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \sqrt{\frac{1}{m+1} \left\{ \left(\frac{m\bar{x}_m + x_{m+1}}{m+1} - x_{m+1} \right)^2 + \sum_i \left(\frac{m\bar{x}_m + x_{m+1}}{m+1} - x_i \right)^2 \right\}}$$

Z drugiej strony jest

$$\bar{x}_m - \frac{\rho_m}{m+1} = \frac{m\bar{x}_m + x_{m+1}}{m+1} + \frac{\min. (y - x_{m+1})}{m+1},$$

skąd znowu widać, że średnia (I) jest między możliwymi najmniej różna od średniej $(m\bar{x}_m + x_{m+1}) / (m + 1)$.

Tak zatem postępując, osiągamy błąd prawdopodobny mniejszy, kosztem minimalnej tylko zmiany średniej arytmetycznej.

§ 4.

Na mocy wyniku (I), (II), układ wartości

$$x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_{m+1}, \dots, x_n \dots \dots \dots (10)$$

zastępujemy nowym, poprawionym:

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \bar{x}_m - \rho_m \mid x_{m+2}, \dots, x_n,$$

w którym już jest tylko $n - m - 1$ wartości podejrzanych.

Wychodząc wtedy z układu $m + 1$ wartości już dobrych

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \bar{x}_m - \rho_m \dots \dots \dots (11)$$

poprawimy tak samo jak przódą wartość podejznaną x_{m+2} , i w ten sposób postępując dalej, aż do wyczerpania wszystkich wartości najwięcej podejrzanych, poprawimy je wszystkie.

Otrzymamy więc w końcu na średnią pierwotną \bar{x} — średnią poprawioną \bar{x}_n , minimalnie różną od \bar{x} , i z błędem prawdopodobnym (II); albowiem mając na względzie błędy obserwatora tylko najprawdopodobniejsze (najmniejsze), korzystamy jedynie z przypadku skrajnego nierówności postaci (9), t. j. z samych równości.

§ 5.

Do wykonania tego wszystkiego potrzebne są po drodze liczby $\rho_m, \rho_{m+1}, \dots, \rho_{n-1}$. Określmy ich prawdopodobne znaczenie.

Zrobimy to, posługując się wzorami na ρ i α_n w § 2.

Zauważmy najprzód, że liczba α_n^2 zadość czyni warunkowi

$$\frac{n}{n-1} < \alpha_n^2 < \frac{n-1}{n-2},$$

z którego wynika

$$\alpha_n^2 = \frac{n - \varepsilon_n}{n - 1 - \varepsilon_n},$$

gdzie ε_n jest funkcją skąznika n , stale dodatną i mniejszą od jedności.

Na tej zasadzie mamy

$$\rho = \sqrt{\frac{2 + \frac{2 - \varepsilon_n}{n} - \frac{\varepsilon_n}{n^2}}{n - 1 - \varepsilon_n} \Sigma_i (\bar{x} - x_i)^2},$$

a przeto w przypadku $n = \infty$:

$$\lim. \rho = \lim. \sqrt{\frac{2}{n} \Sigma_i (\bar{x} - x_i)^2} = \frac{1}{h},$$

gdzie h jest miarą dokładności według Gauss'a.

Tak więc $1/\rho$ przy n skończonem, jest miarą prawdopodobną (nadzieją mat. miary) dokładności całego szeregu wartości danych (10). Na zasadzie tej właśnie miary, wydzieliliśmy z szeregu (10), za pomocą nierówności (8), wszystkie wartości najwięcej podejrzane x_{m+1}, \dots, x_n .

Następnie, na zasadzie miary dokładności prawdopodobnej $1/\rho_m$ szeregu wartości x_1, x_2, \dots, x_m , poprawiliśmy wartość podejrzaną x_{m+1} , a tem samem utworzyliśmy szereg $m + 1$ wartości dobrych (11). Na zasadzie znowu miary dokładności prawdopodobnej $1/\rho_{m+1}$, przybyła znowu do szeregu (11) jedna wartość prawdopodobnie dobra, i t. d. aż do samego końca.

Gdyśmy więc z całego szeregu wartości danych (10) wyrugowali już wszystkie najwięcej podejrzane, przez zastąpienie ich kolejne prawdopodobnie dobrymi, to wyznaczwszy następnie odpowiednie ρ_n , $1/\rho_n$ wyrażać będzie miarą prawdopodobną dokładności szeregu wartości tak poprawionego.

Ponieważ z istoty rzeczy

$$\Sigma_i (\bar{x}_n - x'_i)^2 < \Sigma_i (\bar{x} - x_i)^2$$

gdzie x'_i oznaczają wartości szeregu (10) poprawionego, zatem mamy nierówność $\rho_n < \rho$, a tem samem i nierówność

$$1/\rho_n > 1/\rho.$$

Szereg więc wartości poprawiony jest dokładniejszy od szeregu wartości pierwotnego. Ujawnia się to w ten sposób, że zastępując w nierówności (8) wartości \bar{x} i ρ wartościami \bar{x}_n i ρ_n , otrzymujemy nierówność, po za granicami której nie znajduje się już żadna z wartości szeregu poprawionego.

§ 6.

Omawiane zadanie rozwiązaliśmy w przypadku, gdy dokładność dostrzeżenia odosobnionego jest zgoła niewiadoma. Można je jednak rozwiązywać w taki sam sposób w przypadku ogólniejszym, t. j. gdy prócz danych zadania poprzednich, znamy nadto pewną liczbę wyników dostrzeżeń, dokonanych przez obserwatora w celu wyrobówowania narzędzia.

Niech np. z_1, z_2, \dots, z_n oznaczają wartości niewiadomej z , otrzymane wtedy próbowaniem narzędziem, rozumie się jednorodne z wartościami x_i . Wówczas kładąc

$$\sigma_{n'} = \Sigma_i (\bar{z} - z_i)^2,$$

gdzie \bar{z} jest średnią arytmetyczną wartości z_i , oraz $n' + n - 1 = \mu$ będzie, zamiast (2) i (3) § 1:

$$x = \bar{x} + \eta \sqrt{\frac{1}{n} \{ \sigma_{n'} + \Sigma_i (\bar{x} - x_i)^2 \}} \dots \dots (2')$$

z prawdopodobieństwem, równem

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{\frac{\mu+1}{2}}} \dots \dots \dots (3').$$

Stąd widać, że i w tym przypadku obowiązuje podobne postępowanie jak przód, jakkolwiek wyniki będą więcej złożone.

§ 7.

W celu liczbowego wyjaśnienia powyższej teorii rozwiążmy zadanie następujące:

Dajmy, że na wyznaczenie niewiadomej x posiadamy szereg następujących liczb:

45,00	38,33	42,50
31,25	27,50	39,17
42,50	43,43	45,00
45,00	40,63	40,83
37,50	36,25	

otrzymanych przez jej pomiary bezpośrednie, dokonane przez nie-wiadomego obserwatora i niewiadomem narzędziem. Chodzi o wy-znaczenie liczb najwięcej podejrzanych i ich poprawienie.

Ażeby ułatwić zorientowanie się w rachunku, podajemy naj-przód następujące wyliczenia, na które powoływać się będziemy, w kolei rozumie się takiej, w jakiej mogą być wykonane.

$$\lg. \left\{ \frac{n+1}{n} \left(\frac{n+1}{n} \alpha_n^2 - 1 \right) \right\}_{n=14} = \bar{1},22586. \quad (12)$$

$$\lg. \left\{ \frac{m+1}{m} \left(\frac{m+1}{m} \alpha_m^2 - 1 \right) \right\}_{m=13} = \bar{1},26391. \quad (13)$$

$$\lg. \left\{ \frac{m+1}{m} \left(\frac{m+1}{m} \alpha_m^2 - 1 \right) \right\}_{m=12} = \bar{1},30478. \quad (14)$$

$$\lg. \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right\}_{n=14} = \bar{1},35331. \quad (15)$$

$$\lg. \{ \Sigma_i (\bar{x} - x_i)^2 \} = 2,54943 \quad (16)$$

$$\lg. \left\{ \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma_i (\bar{x} - x_i)^2} \right\}_{n=14} = 0,70165. \quad (17)$$

oraz po wyłączeniu 31,25 i 27,50:

$$\lg. \{ \Sigma_i (\bar{x}_m - x_i)^2 \}_{m=12} = 2,00860 \quad (18)$$

po wyłączeniu zaś 27,50 i zastąpieniu 31,25 przez 36,80:

$$\lg. \{ \Sigma_i (\bar{x}_m - x'_i) \}_{m=13} = 2,06236. \quad (19),$$

a po zastąpieniu 31,25 przez 36,80 i 27,50 przez 36,39:

$$\lg. \{ \Sigma_i (\bar{x}_n - x'_i)^2 \}_{n=14} = 2,14814. \quad (20)$$

$$\lg. \left\{ \sqrt{\frac{1}{n} \Sigma_i (\bar{x} - x'_i)^2} \right\}_{n=14} = 0,50101. \quad (21).$$

Średnia arytmetyczna wszystkich liczb danych wynosi $\bar{x} = 39,63$, a na mocy (12) i (16) znajdujemy

$$\lg. \rho = \frac{1}{2}(\bar{1},22586 + 2,54943) = 0,88765,$$

zatem $\rho = 7,72$. Mamy tedy $x - \rho = 31,91$, $x + \rho = 47,35$, i tym sposobem otrzymujemy dwie tylko nierówności

$$31,25 \text{ i } 27,50 < 31,91$$

wykazujące dwie liczby najwięcej podejrzane w porządku wzrastającego podejrzenia: 31,25 i 27,50.

Wyłączając je z rachunku, znajdujemy na średnią arytmetyczną $\bar{x}_{12} = 41,34$, a na mocy (14) i (18):

$$\lg. \rho_{12} = \frac{1}{2}(\bar{1},30478 + 2,00860) = 0,65669,$$

t. j. $\rho_{12} = 4,54$, a tem samym $x_{12} - \rho_{12} = 36,80$, $\bar{x}_{12} + \rho_{12} = 45,88$, i następnie nierówność: $36,80 \leq y \leq 45,80$, z której wynika min. $y = 36,80$.

Liczbę więc podejrzaną 31,25 należy zastąpić najlepszą poprawioną min. $y = 36,80$.

Wprowadzając 36,80 do $\bar{x}_{12} = 41,34$, uzyskuje ono poprawkę $-\rho_{12}/13 = -0,35$, co daje na nową średnią $\bar{x}_{13} = 41,34 - 0,35 = 40,99$.

To mając, z (13) i (19) otrzymujemy

$$\lg. \rho_{13} = \frac{1}{2}(\bar{1},26391 + 2,06236) = 0,66314.$$

zatem $\rho_{13} = 4,60$, a tem samym $\bar{x}_{13} - \rho_{13} = 36,39$, $\bar{x}_{13} + \rho_{13} = 45,59$, które określają nierówność $36,39 \leq y \leq 45,59$, dającą min. $y = 36,39$.

Zatem liczbę podejrzaną 27,50 należy zastąpić najlepszą poprawioną min. $y = 36,39$.

Wprowadzając 36,39 do $\bar{x}_{13} = 40,99$, uzyskuje ono poprawkę $-\rho_{13}/14 = -0,43$, co daje na ostateczną średnią poprawioną

$$\bar{x}_{14} = 40,66.$$

Prócz tego, według (15) i (21) mamy

$$\lg. \xi_{14} = \bar{1},35331 + 0,50101 = \bar{1},85432,$$

zatem $\xi_{14} = 0,715 = 0,72$, co łącznie z wynikiem poprzedzającym, prowadzi, według (6), do równania następującego:

$$\text{nadz. mat. } |x - 40,66| = 0,72 \dots \dots (22).$$

Ale pierwotnie mieliśmy $\bar{x} = 39,63$, oraz na mocy (15) i (17):

$$\lg. \xi_{14} = \bar{1},35331 + 0,70165 = 0,05496,$$

t. j. $\xi_{14} = 1,135 = 1,14$, a według (6):

$$\text{nadz. mat. } |x - 39,63| = 1,14 \dots (23)$$

Z porównania wyników (22) i (23) wprost widać, że (22) jest lepszy od (23).

Należy się jeszcze sprawdzić, t. j. okazać, że po zastąpieniu 31,25 i 27,50 liczbami 36,80 i 36,39, otrzymamy z danego szereg liczb, w którym już nie ma ani jednej podejrzaney.

Jakoż, na mocy (12) i (20) znajdujemy

$$\lg. \rho_{14} = \frac{1}{2} (\bar{1},22586 + 2,14814) = 0,68700,$$

t. j. $\rho_{14} = 4,86$, a tem samym $\bar{x}_{14} - \rho_{14} = 35,80$, $x_{14} + \rho_{14} = 45,52$.

To daje nierówność

$$35,80 \leq y \leq 45,52,$$

wykazującą, że każda liczba szeregu danych poprawionego zadość czyni tej nierówności, a więc podejrzaną być już nie może.

Dyskusya:

1. P. T. Banachiewicz. Wzory na błąd średni (i prawdopodobny) średniej arytmetycznej, w razie normalnej dyspersyi błędów, są wprowadzone tylko dla przypadku pełnego uwzględnienia w jednakowej wadze wszystkich spostrzeżeń. Tymczasem wyniki powyższego komunikatu oparte są na założeniu, że wzory odnośne są ogólnie stosowalne.

2. P. W. Gosiewski. Autor zarzutu nie wniknął w sprawę, że wzory (1), (2) i (3), na których opiera się cała treść komunikatu, odnoszą się wprawdzie do przypadku jednakowej wagi, ale też zgoła i niewiadomej. To zmienia całkiem postać rzeczy, co zresztą widać ze wzorów (2) i (3), w których waga, t. j. stała

$$h^2 = \left(\frac{n}{2 \sum_i (\bar{x} - x_i)^2} \right)_{n = \infty}$$

wcale nie figuruje.

Zatem wagi, jakkolwiek stałej, ponieważ jest niewiadoma, w uwagę brać nie można, jak również i mówić nie potrzeba o pełnem lub niepełnem uwzględnieniu w jednakowej wadze wszystkich dostrzeżeń, skoro tej wagi nie znamy; tu bowiem w grę wchodzi nie sama liczba dostrzeżeń, ale i ich jakość. Dość w tym względzie porównać znane wzory Gauss'a

$$x = \bar{x} + \frac{t}{\sqrt{\text{waga}}}, \quad \frac{\sqrt{n} e^{-n t^2} dt}{\sqrt{\pi}}$$

z odnośnemi komunikatu (2) i (3), wziętemi pod postacią

$$x = \bar{x} + \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sqrt{\sum_i (\bar{x} - x_i)^2} t, \quad \sqrt{\frac{n}{\pi}} \left[1 + \frac{n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2 t^2}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \right]^{-\frac{n+1}{2}} dt,$$

aby się przekonać, że uważa się tu nie *samą* wagę dostrzeżenia odosobnionego, lecz

$$(\text{nadz. mat. } \sqrt{\text{waga}})^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2 \sum_i (\bar{x} - x_i)^2}$$

Pozornie więc tylko wydawać się może, jakoby tu pomieniona waga była raz taką, drugi raz inną, zależnie od uważanej grupy n lub $n - 1$ dostrzeżeń. To nie ona *sama*, to jej *nadzieja* matematyczna jest raz taka drugi raz inna, zupełnie podobnie, jak pod warunkiem jednakowych wygranych, ceny biletów na różne loterye mogą przecież być różne, zależnie od organizacji loteryi.

Zatem warunek stałości wagi dostrzeżenia odosobnionego, postawiony w premisach zadania, jest eo ipso zachowany i w jego rozwiązaniu, bez żadnych nowych założeń.

3. P. T. Banachiewicz: We wzorach (2) i (3) waga nie występuje, gdyż dokładność średniej arytmetycznej z bezpośrednich rezultatów pomiarów o jednakowej wadze nie zależy od ich wagi. Poprawienie zaś obserwacji podejrzanej (tak, jak to poprawienie rozamie komunikat) nie jest niczem innym, tylko nadaniem jej odmiennej (zmniejszonej) wagi, przez co wzory podstawowe (2) i (3) przestają być stosowalne.

4. P. W. Gosiewski. Ani jedno, ani drugie z twierdzeń powyższych nie jest prawdziwe. Bowiem dokładność średniej arytmetycznej n bezpośrednich rezultatów pomiarów o jednakowej wadze h^2 wynosi $h\sqrt{n}$, gdzie h niewiadome, a wykluczenie rezultatu podejzrzanego z rachunku tej średniej wychodzi na to samo, co zastąpienie go (rezultatu podejzrzanego) średnią arytmetyczną $n-1$ rezultatów pozostałych. Zresztą dowód wyczerpujący, że wzory (2) i (3) nie przestają być stosowalnemi w rozważanym przypadku, jako wymagający więcej miejsca, będzie podany przy innej sposobności.

3. Pan Z. Weyberg:

Z badań nad krystalogenezą.

Komunikat zgłoszony dn. 22 lutego 1910 r.

Oddawna podawaną przez różnych autorów zdolność ałunu potasowoglinowego—krystalizowania się z roztworu chlorowodorowego z płaszczyznami dwunastościanu pentagonalnego autor poddał badaniom ilościowym t. j. zajął się oznaczeniem stężenia chlorowodoru najpomysłniejszego dla powstawania płaszczyzn wspomnianych.

Z badań tych okazuje się, że do koncentracji 9.418 g HCl na 100 g H₂O kryształu ałunu są tak samo jak w czystym roztworze kombinacją ośmiościanu, sześciianu i dwunastościanu rombowego. Poczynając od tego stężenia zjawiają się ściany (201) i (211).

W miarę powiększania się ilości chlorowodoru w roztworze potęguje się łatwość tworzenia się płaszczyzn (201), a warunki dla ścian (211) i (110) stają się coraz niepomysłniejsze. W stężeniu 19.779 HCl na 100 g H₂O nie ma już ścian (110) i (211) natomiast (201) dochodzą do najpomysłniejszych dla siebie warunków; stan ten trwa do stężenia 33.827 g HCl na 100 g H₂O, które zarazem jest stężeniem powodującym najwyższą rozpuszczalność ałunu. Powyżej tej zawartości chlorowodoru ałun przestaje się krystalizować.

Godna uwagi jest okoliczność, że punkty zwrotne w kształtach kryształów są zarazem punktami zwrotnymi w figurach wytrawionych. Mianowicie do stężenia 9.418 HCl na 100 g H₂O figury wytrawione nie różnią się od otrzymanych czystą wodą. Od tej koncentracji krawędzi figur wytrawionych zaczynają się rozdawać. W stężeniu 19.779 HCl na 100 H₂O są one już wyraźnie sześciopromienne i tak trwają do koncentracji 33.827 g na 100 g H₂O, poczem już gmatwać się poczynają.

Dalsze badania nad krystalizacją ałunu w roztworach zakwaszonych innymi kwasami są w toku.

4. Pan Władysław Gorczyński:

O przebiegu rocznym i dziennym usłonecznienia w Krakowie.

(Z Biura Meteorologicznego przy Muzeum w Warszawie).

Komunikat zgłoszony dn. 27 lutego 1910 r.

Otrzymawszy od Akademii Umiejętności w Krakowie wezwanie do napisania pracy „O insolacji ziem polskich“ do działu geografii fizycznej wydawnictwa zbiorowego p. t. „Encyklopedia Polska“, przystąpiłem do zebrania i opracowania danych odnoszących. Dane te winny z jednej strony obejmować warunki usłonecznienia, mierzone instrumentalnie za pomocą heliografów, a z drugiej strony pomiary natężenia promieniowania słonecznego. Z kombinacji usłonecznienia i promieniowania otrzymuje się dopiero wartość insolacji lub sum ciepła, dostarczanych powierzchni ziemi.

Komunikat niniejszy przedstawia jedną z prac przygotowanych do ogólniejszego tematu „Insolacji ziem polskich“.

I. Dane historyczne.

Usłonecznienie w Krakowie mierzone jest od czerwca 1883 roku bez żadnej przerwy, obejmuje więc obecnie z górą 25 lat. Przez cały ten czas działał heliograf o kuli szklanej (Sunshine Recorder Campbell-Stokes); z uwagi że przyrząd ten został w swej formie ostatecznej wprowadzony w użycie dopiero w r. 1880, dane krakowskie należą do bardzo nielicznych seryi obserwacyjnych, obejmujących możliwie długoletnie spostrzeżenia nad usłonecznieniem. Warto przytem zaznaczyć, że serya krakowska odznacza się swą pełnością, niema w niej przerw, a bliższe rozejrzenie się w materiale świadczy o dobrej porównywalności rezultatów w ciągu całego okresu pomiarów. Każdy, kto miał do czynienia z opracowaniem dłuższych szeregów obserwacyjnych, oceni łatwo doniosłość takiego kardynalnego warunku, jakim jest porównywalność poszczególnych seryi pomiarów, i wyrazi za nią uznanie Obserwatorium Krakowskiemu, prowadzącemu spostrzeżenia meteorologiczne.

Spostrzeżenia te drukowane są w zeszytach miesięcznych pod nagłówkiem: „Meteorologische Beobachtungen angestellt auf der K. K. Sternwarte in Krakau“, wydawanych zaraz po ukończeniu każdego miesiąca. Do tych danych miesięcznych dołączane były do r. 1900 średnie pięcioletnie; od roku zaś 1903 wydawane są, po upływie każdego okresu rocznego, większe zeszyty p. t. „Resultate der meteorologischen, seismologischen und magnetischen Beobachtungen“¹⁾.

W r. 1887 zaczął funkcyonować w Krakowie, niezależnie od heliografu szklanego, heliograf fotograficzny (system Jordan). Sumy miesięczne godzin słonecznych według tego ostatniego heliografu podawane były do sierpnia 1908 r.

Zaznaczymy wreszcie, że pomiary nad usłonecznieniem w Krakowie drukowane są w sumach codziennych i miesięcznych; przebieg dzienny podany jest tylko w przeciętnych dla okresów: 1883—1885, 1886—1890, 1891—1895 i 1896—1900.

Co do sposobu ustawienia heliografów nie znajdujemy bliższych danych w spostrzeżeniach.

¹⁾ Cały zbiór tych spostrzeżeń meteorologicznych krakowskich za okres, odkąd zaczął działać heliograf, został mi łaskawie nadesłany przez p. Wł. Dziewulskiego, adjunkta Obserwatorium Astronomicznego w Krakowie, któremu też składam uprzejme podziękowanie. Od r. 1903 spostrzeżenia te są zresztą stale nadsyłane do biblioteki Biura Meteorologicznego przy Muzeum w Warszawie.

II. Porównanie wskazań heliografu szklanego i fotograficznego w Krakowie.

Oдноśne dane zestawione są w tab. I. Z porównań sum rocznych usłonecznienia widzimy, że heliograf fotograficzny daje zawsze wartości większe, niż heliograf szklany. W okresie 1887—1907 różnice roczne wahają się w granicach od 1 do 10%, biorąc za punkt wyjścia wskazania przyrządu Campbella. Różnica średnia wynosi okrągło 3% dla sum rocznych. W przebiegu rocznym odchylenia silniejsze zdają się występować w miesiącach zimowych, mniejsze w letnich. Tak np. w okresie dziesięcioletnim 1896—1905, wypada: dla zimy 4%, wiosny 3%, lata 2%, jesieni 3% (za rok 3%).

Tabela I.

Porównanie wskazań heliografów systemu Campbela i Jordana w Krakowie.

Comparaison des indications des héliographes du système Campbell et Jordan à Cracovie.

a) Sumy roczne godzin słonecznych.

Sommes annuelles de la durée de l'insolation.

Rok	Heliograf Campbella	Heliograf Jordana	Różnica		Rok	Heliograf Campbella	Heliograf Jordana	Różnica	
			godz. słon.	%				godz. słon.	%
1887	1698	1794	96	5,6	1897	1527	1542	15	1,0
1888	1814	1879	65	3,6	1898	1678	1696	18	1,1
1889	1810	1897	87	4,8	1899	1577	1612	35	2,2
1890	1808	1893	85	4,7	1900	1673	1691	18	1,1
1891	1610	1700	90	5,6	1901	1717	1743	26	1,5
1892	1821	1859	38	2,1	1902	1602	1651	49	3,1
1893	1666	1731	65	3,9	1903	1528	1551	23	1,5
1894	1593	1626	33	2,1	1904	1706	1799	93	5,4
1895	1706	1738	32	1,9	1905	1493	1632	139	9,3
1896	1569	1614	45	2,9	1906	1607	1716	109	6,8
					1907	1695	1821	126	7,4
Année	Héliographe du Campbell	Héliographe du Jordan	Heures du soleil		Année	Héliographe du Campbell	Héliographe du Jordan	Heures du soleil	
			Différences					Différences	

NB. Różnice podane są odnośnie do wskazań heliografu systemu Campbella.

Les différences sont déduites par rapport à l'héliographe du système Campbell.

b) Sumy miesięczne w przeciętnych pięcioletnich.
Sommes mensuelles (moyennes de cinq ans).

Mie- siące Mois	1891 — 1895			1896 — 1900			1901 — 1905		
	Campb.	Jord.	%	Campb.	Jord.	%	Campb.	Jord.	%
I	54,2	56,8	4,9	53,1	54,0	1,7	65,7	69,6	6,0
II	72,8	75,8	4,2	72,2	74,0	2,5	74,3	77,2	3,9
III	114,1	118,4	3,2	119,9	123,6	3,1	102,0	108,4	6,3
IV	179,9	184,8	2,7	123,3	126,2	2,4	131,4	136,6	4,0
V	218,9	228,8	4,6	165,1	167,2	1,3	226,0	232,0	2,7
VI	175,7	184,2	4,8	251,0	256,0	2,0	195,8	198,2	1,2
VII	241,7	248,2	2,7	207,2	209,6	1,2	247,1	254,0	2,8
VIII	223,7	230,0	2,8	213,7	215,8	1,0	211,6	218,2	3,1
IX	186,3	193,8	4,0	161,9	163,4	0,9	162,9	170,0	4,4
X	109,1	113,0	3,6	119,3	121,2	1,6	99,9	102,6	2,7
XI	62,8	63,2	0,6	59,2	62,0	4,8	51,3	54,0	5,3
XII	31,7	33,8	6,6	56,9	58,0	1,9	41,0	43,6	6,3
Rok Année	1670,9	1731,0	3,6	1602,9	1631,0	1,7	1609,2	1675,2	4,1

NB. % podane są jako różnice wskazań heliografów w odniesieniu do danych dla heliografu Campbella.

Les valeurs „%“ sont déduites d'après les différences des deux héliographes, par rapport à l'héliographe du système Campbell.

Z charakteru jednak różnic i ich nieregularnych zmienności w poszczególnych okresach wolno wnioskować, że odchylenia wskazań heliografu systemu Jordana od heliografu Campbella są raczej natury przypadkowej, zależąc od niejednakowej czułości używanych papierków fotograficznych. Przychodzimy więc i dla Krakowa do wniosku, zgodnego z rezultatami porównań analogicznych, dokonywanych w innych miejscowościach, a mianowicie, że heliografy fotograficzne wskazują więcej, niż heliografy szklane, lecz że różnice są tu zmienne i mają charakter bardziej przypadkowy. Z tego względu zajmiemy się w dalszym ciągu dyskusją wskazań wyłącznie tylko heliografu Campbella.

III. Przebieg uśłonecznienia w Krakowie w przeciętnych dziennych.

Aby uniknąć rozpatrywania sum miesięcznych, przedstawiających się w postaci liczb trzycyfrowych, a także ze względu na niejednakową długość poszczególnych miesięcy w roku, najdogod-

niej jest przedstawić przebieg roczny w postaci przeciętnych dziennych, jak to jest uczynione w tab. II.

Tab. II.

Ustalonecznienie w Krakowie w przeciętnych dziennych.
La durée de l'insolation à Cracovie (en moyennes diurnes).

Mois Miesiące	Liczby przeciętne dzienne godzin słonecznych za miesiące: Valeurs moyennes diurnes des heures du soleil, pendant les mois:												Pory roku Saisons:					Rok. Année
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XII, I, II	III, IV, V	VI, VII, VIII	IX, X, XI		
Rok Année																		
1884	2,1	2,7	4,0	3,0	7,9	5,1	8,1	7,6	6,0	3,2	1,4	1,0*	—	5,0	6,9	3,5	4,3	
1885	2,6	3,6	4,2	6,6	6,5	9,5	6,2	5,6	6,4	3,7	1,6*	2,2	2,4	5,8	7,1	3,9	4,9	
1886	1,5	2,0	4,8	8,5	7,9	5,0	8,2	7,7	7,5	3,9	2,8	1,1*	1,9	7,1	7,0	4,7	5,1	
1887	2,2	4,1	2,8	6,6	4,6	6,9	9,9	6,5	5,5	2,4	2,4	2,0*	2,5	4,7	7,8	3,4	4,7	
1888	1,4*	2,4	3,2	6,9	7,7	9,0	6,5	7,7	7,4	2,9	2,5	2,0	1,9	5,9	7,7	4,3	5,0	
1889	1,6	2,1	3,0	5,2	10,0	11,0	7,3	7,9	4,7	3,4	1,2*	1,6	1,9	6,1	8,7	3,1	4,9	
1890	2,0	4,1	5,8	5,1	7,4	6,3	7,9	9,6	5,4	2,8	1,2*	1,9	2,6	6,1	7,9	3,1	5,0	
1891	1,1*	3,1	4,0	4,0	7,0	5,2	5,7	7,2	6,6	5,5	2,1	1,4	2,0	5,0	6,0	4,7	4,4	
1892	1,8	3,3	4,8	5,8	6,9	6,1	7,6	9,1	6,5	3,9	1,7	0,9*	2,2	5,8	7,6	4,0	4,9	
1893	1,5	2,1	3,4	7,1	5,8	6,6	8,3	6,9	6,5	4,1	1,5	0,8*	1,5	5,4	7,3	4,0	4,7	
1894	3,1	2,9	3,4	6,2	6,9	3,9	9,7	6,0	4,8	1,8	2,8	0,8*	2,3	5,5	6,5	3,1	4,4	
1895	1,2	1,5	2,7	7,0	8,8	7,7	7,8	6,9	6,7	2,3	2,3	1,2*	1,2	6,2	7,5	3,8	4,7	
1896	1,9	2,1	4,8	3,8	5,0	8,8	8,2	4,5	4,8	3,9	2,2	1,5*	1,7	4,5	7,2	3,6	4,3	
1897	1,4*	2,8	2,2	4,7	3,6	9,1	6,0	7,5	5,7	2,9	2,2	2,0	1,9	3,5	7,5	3,6	4,2	
1898	2,3	2,9	4,2	2,5	6,3	8,9	5,9	9,1	5,8	3,3	1,9*	1,9*	2,4	4,3	8,0	3,7	4,6	
1899	2,2	2,5	4,5	4,6	5,1	6,7	5,7	6,3	5,2	5,0	1,9*	1,9*	2,2	4,7	6,2	4,1	4,3	
1900	0,7*	2,4	3,6	4,9	6,6	8,4	7,7	7,1	5,5	4,1	1,9	1,9	1,7	5,0	7,7	3,8	4,6	
1901	2,5	4,0	2,7	4,8	8,8	6,4	7,9	5,9	5,8	4,4	1,6*	1,6*	2,8	5,4	6,7	3,9	4,7	
1902	2,0	2,9	3,9	5,4	6,2	6,2	6,8	6,4	6,2	2,2	3,2	1,4*	2,2	5,2	6,5	3,9	4,4	
1903	2,2	2,5	3,7	3,7	7,6	3,9	5,8	6,9	7,3	3,9	1,0*	1,5	2,0	5,0	5,5	4,1	4,2	
1904	1,2*	1,8	4,2	4,2	7,3	8,7	10,7	8,4	3,3	3,1	1,3	1,3	1,5	5,2	7,3	2,6	4,7	
1905	2,6	2,1	2,0	3,9	6,5	7,4	8,6	6,5	4,5	2,6	1,3	0,8*	2,0	4,1	7,5	2,8	4,1	
1906	1,8	2,1	4,4	7,2	6,6	5,5	6,8	7,1	3,7	4,2	2,5	0,8*	1,6	6,1	6,5	3,5	4,5	
1907	1,9	2,8	3,0	3,8	8,8	5,1	6,9	6,9	6,9	6,1	2,1	1,2*	1,8	5,2	6,3	5,0	4,6	
1908	2,2	1,9	4,0	4,3	6,7	8,3	6,6	4,5	4,8	3,5	2,5	1,4*	1,8	5,0	6,5	3,6	4,2	
1909	2,6	2,3	3,8	5,5	6,6	7,0	7,4	6,8	5,3	3,9	1,4	1,3*	2,1	5,3	7,1	3,5	4,5	
1886—1890	1,7*	2,9	3,9	6,4	7,5	7,7	7,9	7,9	6,1	3,1	2,0	1,7*	2,1	5,9	7,8	3,7	4,9	
1891—1895	1,7	2,6	3,7	6,0	7,1	5,9	7,8	7,2	6,2	3,5	2,1	1,0*	1,8	5,6	7,0	3,9	4,6	
1896—1900	1,7*	2,6	3,9	4,1	5,3	8,4	6,7	6,9	5,4	3,9	2,0	1,8	2,0	4,4	7,3	3,8	4,4	
1901—1905	2,1	2,7	3,3	4,4	7,3	6,5	8,0	6,8	5,4	3,2	1,7	1,3*	2,0	5,0	7,1	3,4	4,4	
1886—1895	1,7	2,8	3,8	6,2	7,3	6,8	7,9	7,6	6,2	3,3	2,1	1,4*	2,0	5,8	7,4	3,8	4,78	
1896—1905	1,9	2,6	3,6	4,3	6,3	7,5	7,3	6,9	5,4	3,5	1,9	1,6*	2,0	4,7	7,2	3,6	4,41	
1886—1905	1,82	2,63	3,69	5,25	6,80	7,11	7,61	7,21	5,79	3,42	1,95	1,48	1,99	5,15	7,31	3,72	4,60	
1884—1909	1,90	2,65	3,73	5,20	6,89	7,03	7,48	7,02	5,72	3,58	1,94	1,44	2,00	5,27	7,18	3,75	4,57	

Z tabeli tej widzimy, że w latach poszczególnych okresu 1884 — 1909 maximum godzin słonecznych przypada na miesiące między majem i sierpniem (najczęściej jednak w lipcu); minimum między listopadem i styczniem (najczęściej w grudniu).

W tab. II znajdujemy, prócz wartości miesięcznych, także i dane dla pór roku. Wartość dla zimy (XII, I, II) tworzona była, dobierając przeciętną grudniową z roku poprzedzającego.

O znacznych różnicach w przebiegu rocznym dla poszczególnych pięcioleci będzie mowa w dalszym ciągu niniejszego komunikatu.

IV. Usłonecznienie w Krakowie w $\%$ usłonecznienia możliwego.

Charakterystyka przebiegu rocznego w postaci sum godzin słonecznych lub przeciętnych dziennych dla miesięcy kolejnych zyskuje nader cenne uzupełnienie w przedstawieniu procentowem stosunku usłonecznienia możliwego do zarejestrowanego przez heliograf. Z powodu niedostatecznej czułości heliografów przy wschodzie i zachodzie słońca, usłonecznienie możliwe (dla nieba stale pogodnego) jest różne od „usłonecznienia teoretycznego“, obliczonego astronomicznie jako czas od wschodu do zachodu słońca.

Dla szerokości geograficznej Krakowa ($\varphi = 50^{\circ}, 07$) otrzymujemy następującą tabelkę: (por. Tab. III na str. 170—171).

Poprawki, które należy odejmować od usłonecznienia teoretycznego dla otrzymania usłonecznienia możliwego, obliczane były w ten sposób, że dla każdego roku i miesiąca wypisywane były najwyższe wartości dzienne godzin słonecznych; znając zaś (z „Tables Météorologiques Internationales“) dla danego dnia odpowiadający czas między wschodem i zachodem słońca, można było stąd łatwo obliczyć szukaną różnicę.

Jak widać z tab. III poprawki te są zmienne z roku na rok, a także są różne i dla poszczególnych miesięcy. Poprawki roczne wahają się w granicach od 1.2 (w r. 1888) do 2.5 (w r. 1905 i 1903). Rok 1903 ma więc i pod względem usłonecznienia znaczenie również wyjątkowe, jak i pod względem natężenia promieniowania słonecznego¹⁾. Jest rzeczą nie tylko interesującą, ale

¹⁾ Por. Lad. Gorczyński. On the depression in the value of the total intensity of the solar radiation in 1903, according to measurements made at the Central Station of the Polish Meteorological Service at Warsaw (Monthly Weather Review, Weather Bureau, Washington. 1907).

i godną zanotowania, że depresja radiacyjna i związane z nią zmniejszenie sum ciepła, wykryta w tym czasie dla Warszawy, daje się wykryć także i w przebiegu usłonecznienia dla innych miejscowości.

Tab. III.

a) *Usłonecznienie teoretyczne i możliwe w Krakowie oraz odpowiadające wartości poprawek.*

Durée de l'insolation théorique et possible à Cracovie ainsi que les valeurs correspondantes de correction.

Miesiące	Sumy miesięczne dla usłonecznienia teoretyczn.	Odpowiadające przeciętne dzień.	1896 — 1905		1886 — 1895		1886 — 1909	
			Po- prawka	Usłoneczn. możliwe	Po- prawka	Usłon. możliwe	Po- prawka	Usłon. możliwe
I	264,3	8,5	1,8	6,7	1,6	6,9	1,6	6,9
II	279,6	10,0	1,6	8,4	1,2	8,8	1,4	8,6
III	366,0	11,8	1,9	9,9	1,5	10,3	1,8	10,0
IV	410,8	13,7	2,2	11,5	1,2	12,5	1,8	11,9
V	475,4	15,3	2,1	13,2	1,5	13,8	1,8	13,5
VI	486,7	16,2	1,8	14,4	2,1	14,1	1,9	14,3
VII	491,0	15,8	1,8	14,0	1,5	14,3	1,6	14,2
VIII	446,8	14,4	1,5	12,9	1,2	12,2	1,4	13,0
IX	378,2	12,6	1,6	11,0	1,3	11,3	1,4	11,2
X	332,6	10,7	1,8	9,9	1,5	9,2	1,7	9,0
XI	270,8	9,0	1,6	7,4	1,2	7,8	1,4	7,6
XII	250,7	8,1	1,6	6,5	1,8	6,3	1,8	6,3
Rok Année	4453,2	12,2	1,8	10,4	1,5	10,7	1,6	10,6
Mois	Sommes mensuelles de la durée théorique de l'insolation	Moyennes diurnes correspondantes	Correction	Durée possible de l'insolation	Correction	Durée possible de l'insolation	Correction	Durée possible de l'insolation

NB. Dla roku przestępnego wartość za luty należy zwiększyć o 10,1 godzin słonecznych. La somme de février doit être augmentée de 10,1 heures pour une année bissextile.

b) *Poprawki przeciętne (w godz. słon. na dzień) w latach poszczególnych.*

Valeurs moyennes de la correction (en heures du soleil par jour) pendant les années consécutives.

Rok Année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1880	—	—	—	—	—	—	1,6	1,3	1,2	1,4
1890	1,3	1,5	1,3	1,8	1,7	1,7	1,9	1,5	1,8	1,3
1900	1,5	1,4	1,6	2,5	1,9	2,5	1,7	1,8	1,8	1,5

Zauważymy, że wartości poprawek, podane w części a) tab. III dla Krakowa, są dość bliskie do analogicznych danych, ogłoszonych świeżo przez d-ra W. Martena (*Ergebnisse der Meteorologischen Beobachtungen in Potsdam im J. 1904*).

Mianowicie wyprowadził dr. Marten, dla okresu dziesięcioletniego 1893—1902 w Potsdamie, następujące wartości poprawek:

styczeń	0.9	wrzesień	1.8
luty	1.1	październik	1.9
marzec	2.2	listopad	1.0
kwiecień	2.2	grudzień	0.7
maj	1.3	zima	0.9
czerwiec	1.2	wiosna	1.9
lipiec	0.9	lato	1.3
sierpień	1.8	jesień	1.6
		rok	1.4

W Krakowie zaś dla analogicznych pór roku, w okresie 1886—1909, otrzymujemy: zima 1.6, wiosna 1.8, lato 1.6, jesień 1.5, rok 1.6.

Obliczywszy z pomocą poprawek miesięcznych usłonecznienie możliwe dla każdego miesiąca w danym roku, otrzymaliśmy w ten sposób wartości, przedstawione w tab. IV (str. 172).

Z danych tych widać, że w średnich rocznych zaledwie 43% t. j. mniej niż połowę usłonecznienia możliwego otrzymujemy faktycznie w Krakowie. Wahania w poszczególnych latach wynoszą od 39 do 49% dla roku; dla oddzielnych miesięcy są one znacznie większe.

Tab. IV.

*Uslonecznienie w Krakowie w % usłonecznienia możliwego.
La durée de l'insolation, à Cracovie, en % de l'insolation possible.*

Rok Année	% usłonecznienia możliwego za miesiące: % de la durée possible de l'insolation, pour les mois:												Rok Année %
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
1884	34	30	42	27	60	41	60	61	65	42	27	24*	45
1885	36	43	46	56	50	65	47	49	57	42	26*	34	49
1886	22	24	47	67	56	36	57	60	67	40	38	18*	48
1887	29	47	27	52	35	47	68	48	48	25*	29	31	43
1888	19*	26	31	53	55	59	47	57	64	32	30	29	45
1889	25	22	29	41	71	74	52	60	41	38	30	24*	45
1890	28	46	53	39	52	50	53	72	45	29	16*	28	46
1891	16*	34	37	34	50	36	42	52	58	57	28	23	41
1892	24	37	44	46	49	43	51	71	60	43	22	14*	45
1893	27	24	37	58	42	47	56	51	60	41	20	16*	45
1894	43	34	32	53	52	31	63	47	42	21	34	15*	42
1895	20	19	27	57	65	51	55	53	63	23	32	17*	45
1896	28	26	46	32	46	59	57	35	43	43	29	25*	42
1897	20*	35	23	37	27	61	45	57	53	30	27	29	39
1898	31	35	39	25*	46	60	41	71	52	45	26	28	44
1899	29	26	42	37	37	47	40	47	50	54	23*	28	39
1900	11*	26	35	39	49	57	53	56	50	45	26	27	43
1901	38	45	27	40	62	43	55	44	50	49	20*	25	44
1902	38	29	38	40	47	43	50	53	56	23*	42	23*	42
1903	35	33	40	39	58	30	46	56	65	41	17*	24	43
1904	18*	26	44	41	55	60	74	64	29	36	18*	19	46
1905	37	28	24	37	48	55	59	52	42	31	18	17*	42
1906	25	25	47	60	49	38	49	53	31	53	34	13*	43
1907	27	31	34	31	66	36	50	58	61	64	27	21*	44
1908	30	24	39	39	51	57	46	38	43	38	30	29*	40
1909	33	29	39	49	46	48	51	51	47	45	19	18*	42
1886—1890	25*	33	37	50	54	53	55	59	53	33	31	26	45,4
1891—1895	26	30	35	50	52	42	53	55	57	37	27	17*	43,6
1896—1900	24*	30	37	34	41	57	47	53	50	43	26	27	41,4
1901—1905	33	32	35	39	54	46	57	54	48	36	23	22*	43,4
1886—1895	25	31	36	50	53	47	54	57	55	35	29	22*	44,5
1896—1905	29	31	36	37	48	52	52	54	49	40	25	24*	42,4
1886—1905	26,9	31,1	36,1	43,4	50,1	49,5	53,2	55,3	51,9	37,3	26,8	23,0	43,5
1884—1909	27,8	32,5	37,3	43,4	50,9	49,0	52,6	54,5	51,6	39,6	26,8	23,0	43,5

Ze względu na różnice poprawek w poszczególnych latach bieg wartości procentowych usłonecznienia nie jest równoległy do przebiegu sum lub przeciętnych dziennych dla godzin słonecznych (por. tab. II i IV).

Maxima % usłonecznienia występują w półroczu letniem, minima w półroczu zimowem. Biorąc okres dwudziestopięcioletni lub dłuższy, otrzymujemy maximum główne w sierpniu, maximum drugorzędne w maju; minimum zaś przypada na grudzień.

V. Liczby dni bez usłonecznienia w Krakowie.

Obok wartości godzin słonecznych i % usłonecznienia możliwego, charakterystyczną dla stosunków insolacyjnych rzeczą są także i liczby dni bez usłonecznienia. Liczby te zostały obrachowane dla Krakowa, wybierając w każdym miesiącu, w okresie 1884 — 1909, te dni, w których słońce nie dało żadnego śladu na heliografie Campbell'a. Odnośne wartości są zestawione w tab. V (po str. 174).

W ciągu roku dni takich jest w Krakowie przeciętnie 92; wahania spotykamy tu w granicach od 73 do 106. Najwięcej dni bez usłonecznienia przypada na porę zimową (zwłaszcza na grudzień); dalej idzie z kolei jesień, a później wiosna. Najmniej dni bez bezpośredniego promieniowania słonecznego wykazuje pora letnia; w lipcu i w sierpniu przypada przeciętnie nie więcej od 2 takich dni.

VI. Zmiany usłonecznienia w ciągu dłuższych okresów czasu.

W poprzednich tabelkach zauważyć łatwo, że nawet średnie dziesięcioletnie dla różnych okresów wykazują nie tylko stosunkowo znaczne różnice, ale że charakter tych różnic jest szczególnie w tem znaczeniu, że liczby przeciętne godzin słonecznych ulegają od r. 1886 systematycznemu zmniejszaniu, o ile rozpatrujemy np. średnie pięcioletnie.

Aby przekonać się, o ile fakt ten, tak wyraźnie występujący dla Krakowa (por. część dolna tab. II), nie ma przypadkiem charakteru lokalnego i że zwłaszcza nie wchodzi tu w grę czynniki natury instrumentalnej, zestawiliśmy w tab. VI wartości usłonecznienia dla paru innych miejscowości w Europie (Kraków, Rostock, Wiedeń i Pawłowski). Wybrane zostały stacje możliwie długoletnie, co dla usłonecznienia może odpowiadać okresowi dopiero od r. 1881.

Tab. V.

Liczba dni bez usłonecznienia w Krakowie.

Nombre des jours sans l'insolation, à Cracovie.

Mois Miesiąc	Liczby dni bez usłonecznienia za miesiące: Nombre des jours sans l'insolation, pour les mois:												Pory roku Saisons				Rok An- née
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XII, I, II	III, IV, V	VI, VII, VIII	IX, X, XI	I—XII
1884	12	10	6	14	1	5	2	1	2	7	17	13	—	21	8	26	90
1885	16	8	6	3	5	2	3	3	2	6	17	12	37	14	8	25	83
1886	16	17	10	4	6	4	0	1	1	9	9	13	45	20	5	19	90
1887	12	7	10	3	6	2	0	7	7	11	13	14	32	19	9	31	92
1888	19	10	9	5	3	3	2	3	4	7	13	15	43	17	8	24	93
1889	21	9	8	8	0	0	4	0	8	7	21	20	45	16	4	36	106
1890	13	7	3	1	2	1	3	0	7	9	21	18	40	6	4	37	85
1891	21	13	6	10	6	1	4	1	5	3	15	16	52	22	6	23	101
1892	11	11	10	6	3	4	3	1	5	7	18	19	38	19	8	30	98
1893	15	5	8	2	6	5	2	4	3	8	16	19	39	16	11	27	93
1894	7	6	8	4	4	1	0	3	6	12	12	15	32	16	4	30	78
1895	16	14	7	4	1	1	1	1	2	10	13	19	45	12	3	25	89
1896	16	9	7	6	6	3	0	6	7	4	14	17	44	19	9	25	95
1897	16	10	11	10	11	1	2	1	3	13	12	16	43	32	4	28	106
1898	14	5	6	12	3	0	6	3	1	7	15	12	35	21	9	23	84
1899	12	11	5	6	7	0	2	3	4	2	13	15	35	18	5	19	80
1900	21	13	9	5	6	1	6	3	2	5	16	15	49	20	10	23	102
1901	7	6	13	3	0	4	0	2	4	5	15	14	23	16	6	24	73
1902	13	14	6	6	4	8	1	2	2	10	10	18	41	16	11	22	94
1903	13	8	5	8	1	8	8	1	3	10	18	17	39	14	17	31	100
1904	18	12	8	8	2	0	0	0	7	10	16	14	47	18	0	33	95
1905	12	10	13	5	4	1	0	3	6	6	16	23	36	22	4	28	99
1906	10	9	6	2	2	5	4	1	6	4	8	22	42	10	10	18	79
1907	15	9	3	7	2	7	3	1	3	1	14	18	46	12	11	18	83
1908	11	11	9	6	2	2	4	5	4	12	13	14	40	17	11	29	93
1909	11	11	7	4	5	1	1	3	5	6	16	17	36	16	5	27	87
1886—1890	16,2	10,0	8,0	4,2	3,4	2,0	1,8*	2,2	5,4	8,6	15,4	16,0	42,2	15,6	6,0	29,4	93,2
1891—1895	14,0	9,8	7,8	5,2	4,0	2,4	2,0*	2,0*	4,2	8,0	14,8	17,6	41,4	17,0	6,4	27,0	91,8
1896—1900	15,8	9,6	7,6	7,8	6,6	1,0	3,2	3,2	3,4	6,2	14,0	15,0	40,4	22,0	7,4	23,6	93,4
1901—1905	12,6	10,0	9,0	6,0	2,2	4,2	1,8	1,6*	4,4	8,2	15,0	17,2	39,8	17,2	7,6	27,6	92,2
1886—1895	15,1	9,9	7,9	4,7	3,7	2,2	1,9*	2,1	4,8	8,3	15,1	16,8	41,8	16,3	6,2	28,2	92,5
1896—1905	14,2	9,8	8,3	6,9	4,4	2,6	2,5	2,4*	3,9	7,2	14,5	16,1	40,1	19,6	7,5	25,6	92,8
1886—1905	14,6	9,9	8,1	5,8	4,1	2,4	2,2*	2,3	4,4	7,8	14,8	16,5	41,0	18,0	6,9	27,0	92,7
1884—1909	14,2	9,8	7,7	5,8	3,8	2,7	2,3*	2,3*	4,2	7,3	14,7	16,3	40,3	17,3	7,3	26,2	91,1

Tab. VI.

*Zmiany roczne usłonecznienia (w przeciętnych dziennych)
w okresie 1881—1905.*

*Valeurs annuelles de la durée de l'insolation (en moyennes diurnes)
pendant la période 1881—1905.*

	Kraków Cracovie	Rostock	Wiedeń Vienne	Pawłowski Pavlovsk
1881	—	—	4,6	—
1882	—	—	5,1	—
1883	—	—	5,0	—
1884	4,3	4,2	4,7	—
1885	4,9	4,7	5,5	4,5
1886	5,1	5,1	5,1	5,1
1887	4,7	4,8	5,1	4,7
1888	5,0	4,1	4,9	4,5
1889	4,9	4,7	4,6	4,7
1890	5,0	4,6	5,3	4,4
1891	4,4	4,6	4,9	4,9
1892	4,9	4,8	5,1	4,0
1893	4,7	4,9	5,7	4,6
1894	4,4	4,0	5,5	4,0
1895	4,7	4,3	5,2	4,8
1896	4,3	4,7	4,9	4,9
1897	4,2	4,4	4,6	4,3
1898	4,6	3,4	5,0	4,3
1899	4,3	4,5	4,5	4,4
1900	4,6	4,5	4,8	4,6
1901	4,7	4,7	5,3	5,2
1902	4,4	(3,8)	4,8	3,8
1903	4,2	(3,5)	4,7	3,8
1904	4,7	4,1	4,8	4,2
1905	4,1		4,6	4,1
Średnie pięcioletnie: Moyennes de cinq ans:				
1881 — 1885	—	—	5,0	—
1886 — 1890	4,9	4,7	5,0	4,7
1891 — 1895	4,6	4,5	5,3	4,5
1896 — 1900	4,4	4,3	4,8	4,5
1901 — 1905	4,4	(4,0)	4,9	4,2
Średnie dziesięciol.: Moyennes de dix ans:				
1886 — 1895	4,8	4,6	5,1	4,6
1896 — 1905	4,4	4,2	4,8	4,4
Średnie za cały okres: Moyennes générales:	4,6	4,4	5,0	4,5

Z tab. VI widać, że Kraków nie jest bynajmniej odosobniony, lecz że, co do charakteru zmian w okresach pięcioletnich, inne miejscowości blisko mu odpowiadają. Można więc uważać za fakt stwierdzony, że liczby godzin słonecznych ulegały stopniowemu zmniejszaniu się w okresie dwudziestopięcioletnim 1881 — 1905. Podkreślając ten ważny wniosek, dodamy, że dalsze szeregi pomiarów wyjaśnią nam, czy wahanie to ma charakter peryodyczny i jaki jest jego dokładny czas trwania.

VII. Przebieg dzienny usłonecznienia w Krakowie.

W tab. VII podany jest przebieg dzienny usłonecznienia w Krakowie dla trzech okresów pięcioletnich: 1886—1890, 1891—1895 i 1896—1900.

Dla krótkości, podano tylko liczby odnośne dla pór roku; liczby te przedstawiają ułamki, wyrażające części godzin z usłonecznieniem w danym interwale. Dla ich otrzymania zwykle sumy miesięczne dla poszczególnych okresów godzinnych wypada dzielić przez liczbę dni w danym miesiącu.

W tab. VIII (por. str. 178) podany jest przebieg odnośny dla okresu piętnastoletniego: 1886—1900 z wyszczególnieniem danych dla miesięcy kolejnych. Widać stąd, jak maximum, w przebiegu dziennym, przesuwają się od godzin popołudniowych (w grudniu i styczniu 1—2 po poł.) do przedpołudniowych (w lipcu 10—11 rano). Z wyjątkiem lata, godziny popołudniowe wykazują w Krakowie nieco więcej godzin słonecznych niż okres przedpołudniowy; różnica nie jest znaczna i w sumie rocznej nie dochodzi do 30 godzin słonecznych. Zresztą w ocenie tej wypadłoby uwzględnić możliwe błędy wskutek niedokładności w wyznaczaniu usłonecznienia dla interwałów godzinnych.

Tab. VII.

*Przebieg dzienny usłonecznienia w Krakowie dla pór roku.
Marche diurne de la durée de l'insolation, à Cracovie, pendant les
4 saisons.*

	a = przed połudn. avant midi	4-5 a	5-6 a	6-7 a	7-8 a	8-9 a	9-10 a	10-11 a	11 a-12	Suma od południa Sommes semidiurnes	Suma całodzienna Somme diurne
		p = po południu après midi	8-7 p	7-6 p	6-5 p	5-4 p	4-3 p	3-2 p	2-1 p		
1886 — 1890	Zima {a	—	—	—	.08	.11	.23	.29	.32	0.98	} 2.11
	Hiver {p	—	—	—	.04	.16	.29	.32	.32	1.13	
	Wiosna {a	.01	.15	.31	.41	.46	.50	.53	.54	2.91	} 5.95
	Printemps {p	.01	.16	.32	.43	.49	.53	.55	.55	3.04	
	Lato {a	.06	.32	.49	.56	.60	.61	.61	.64	3.89	} 7.82
	Été {p	.07	.35	.51	.55	.59	.60	.62	.64	3.93	
	Jesień {a	—	—	.06	.20	.30	.37	.41	.44	1.78	} 3.72
	Automne {p	—	.00	.08	.23	.35	.40	.44	.44	1.94	
	Rok {a	.02	.12	.22	.30	.37	.43	.46	.49	2.41	} 4.92
	Année {p	.02	.11	.23	.32	.40	.46	.48	.49	2.51	
1891 — 1895	Zima {a	—	—	.00	.03	.09	.18	.25	.27	0.82	} 1.76
	Hiver {p	—	—	—	.03	.13	.24	.27	.27	0.94	
	Wiosna {a	.01	.12	.29	.41	.46	.49	.49	.50	2.77	} 5.58
	Printemps {p	.01	.12	.28	.41	.46	.50	.51	.52	2.81	
	Lato {a	.04	.27	.43	.49	.53	.56	.58	.59	3.49	} 6.97
	Été {p	.04	.29	.44	.50	.52	.55	.57	.57	3.48	
	Jesień {a	—	.00	.05	.20	.34	.41	.44	.46	1.90	} 3.94
	Automne {p	—	.01	.07	.22	.37	.44	.46	.47	2.04	
	Rok {a	.01	.10	.19	.28	.36	.41	.44	.45	2.24	} 4.58
	Année {p	.01	.10	.20	.29	.38	.44	.46	.46	2.34	
1896 — 1900	Zima {a	—	—	—	.02	.11	.23	.29	.31	0.96	} 2.02
	Hiver {p	—	—	—	.02	.13	.28	.32	.31	1.06	
	Wiosna {a	.00	.09	.20	.29	.37	.41	.42	.43	2.21	} 4.44
	Printemps {p	.00	.09	.19	.31	.37	.41	.43	.43	2.23	
	Lato {a	.05	.31	.49	.55	.58	.60	.61	.60	3.79	} 7.30
	Été {p	.05	.30	.45	.51	.53	.54	.55	.58	3.51	
	Jesień {a	—	—	.03	.17	.29	.39	.44	.46	1.78	} 3.70
	Automne {p	—	.00	.05	.19	.34	.43	.45	.46	1.92	
	Rok {a	.01	.10	.18	.26	.34	.41	.44	.45	2.19	} 4.39
	Année {p	.01	.10	.17	.26	.35	.42	.44	.45	2.20	

NB. O przed znakiem dziesiętnym są, dla krótkości, opuszczane. Wartości największe z pośród danych dla godzin są odznaczone grubszym drukiem. Z pośród równych wartości przeciętnych odznaczano tą, dla której odnośna suma z danych miesięcy była największą.

Les nombres (avec le premier 0 supprimé) indiquent la fraction de l'heure (dans l'intervalle donnée), enregistrée par l'héliographe Campbell. Les fractions maxima (se rapportant aux plus grandes sommes) sont en caractère gras.

Tab. VIII.

*Przebieg dzienny usłonecznienia w Krakowie.
Okres piętnastoletni 1886—1900.*

*Marche diurne de la durée de l'insolation à Cracovie.
Période de quinze ans 1886 - 1900.*

a= {przed południem {avant midi	4-5 a	5-6 a	6-7 a	7-8 a	8-9 a	9-10a	10-11a	11a-12	Sumy od południa Sommes semidiur- nes	Suma codzienna Somme diurne
p= {po południu {après midi	8-7 p	7-6 p	6-5 p	5-4 p	4-3 p	3-2 p	2-1 p	1 p-12		
Styczeń {a	—	—	—	.00	.06	.18	.26	.29	0.79	} 1.73
Janvier {p	—	—	—	.00	.11	.26	.29	.28	0.94	
Luty {a	—	—	.00	.07	.20	.29	.33	.36	1.25	} 2.68
Février {p	—	—	.00	.10	.28	.33	.36	.36	1.43	
Marzec {a	—	—	.06	.24	.33	.37	.39	.42	1.81	} 3.82
Mars {p	—	—	.06	.28	.38	.43	.43	.43	2.01	
Kwiecień {a	—	.08	.33	.41	.46	.49	.51	.51	2.79	} 5.52
Avril {p	—	.07	.31	.41	.45	.49	.50	.50	2.73	
Maj {a	.02	.28	.41	.44	.49	.53	.54	.55	3.26	} 6.63
Mai {p	.02	.29	.42	.46	.50	.54	.56	.57	3.37	
Czerwiec {a	.09	.37	.47	.52	.56	.57	.57	.58	3.73	} 7.29
Juin {p	.10	.38	.46	.48	.52	.52	.54	.56	3.56	
Lipiec {a	.05	.36	.48	.55	.57	.58	.59	.58	3.76	} 7.48
Juillet {p	.05	.37	.50	.54	.56	.54	.57	.56	3.72	
Sierpień {a	.00	.16	.45	.54	.59	.62	.65	.66	3.67	} 7.33
Août {p	.00	.17	.45	.54	.58	.62	.64	.66	3.66	
Wrzesień {a	—	.00	.14	.42	.53	.59	.60	.62	2.90	} 5.89
Septembre {p	—	.00	.19	.46	.54	.58	.61	.61	2.99	
Październik {a	—	—	.00	.14	.29	.35	.41	.44	1.63	} 3.48
Octobre {p	—	—	.00	.17	.36	.42	.45	.45	1.85	
Listopad {a	—	—	—	.01	.11	.23	.27	.31	0.93	} 2.02
Novembre {p	—	—	—	.01	.18	.28	.31	.31	1.09	
Grudzień {a	—	—	—	—	.05	.18	.24	.26	0.73	} 1.52
Décembre {p	—	—	—	.00	.04	.22	.27	.26	0.79	
Zima {a	—	—	—	.02	.10	.21	.28	.30	0.91	} 1.96
Hiver {p	—	—	—	.03	.14	.27	.31	.30	1.05	
Wiosna {a	.01	.12	.27	.37	.43	.46	.48	.49	2.63	} 5.33
Printemps {p	.01	.12	.27	.39	.44	.48	.49	.50	2.70	
Lato {a	.05	.30	.47	.53	.57	.59	.60	.61	3.72	} 7.36
Été {p	.05	.31	.47	.52	.55	.57	.58	.59	3.64	
Jesień {a	—	.00	.05	.19	.31	.39	.43	.45	1.82	} 3.81
Automne {p	—	.00	.07	.22	.36	.43	.45	.46	1.99	
Rok {a	.01	.11	.20	.28	.35	.42	.45	.46	2.28	} 4.63
Année {p	.02	.11	.20	.29	.37	.44	.46	.46	2.35	

M-r Władysław Gorczyński:

**Sur la marche annuelle et diurne de la durée
de l'insolation à Cracovie.**

Communication annoncée 27. II. 1910.

(Du Bureau Météorologique du Musée de l'Industrie et de l'Agriculture à Varsovie).

Le mémoire en question se compose de sept parties, dont voici un court résumé.

Partie I (p. 165)¹⁾ donne un aperçu historique sur les mesures de la durée de l'insolation à Cracovie. Un héliographe du système Campbell fonctionne à Cracovie depuis 1883; il s'y trouve aussi un héliographe photographique (système Jordan).

Partie II (pp. 166—167) contient une „Comparaison des indications des deux héliographes (du système Campbell et du système Jordan) à Cracovie“.

On voit de la Table I (p. 166) que les différences dans les sommes annuelles de la durée de l'insolation, obtenues avec les deux héliographes, peuvent s'accroître jusqu'à 10%; c'est l'héliographe photographique (du système Jordan) qui donne toujours les valeurs plus élevées.

La différence moyenne, pendant la période 1896 — 1905, est de 3%; pour les saisons on obtient: hiver 4%, printemps 3%, été 2%, automne 3%.

La marche de ces différences n'est pas pourtant constante et varie beaucoup d'une année à l'autre.

Partie III (pp. 167—169) donne la „Marche annuelle de la durée de l'insolation à Cracovie, en moyennes diurnes.“ C'est la tab. II qui contient les valeurs correspondantes pour les mois successifs, pour les quatre saisons et pour l'année entière.

Partie IV (pp. 169 — 173) discute la „Durée de l'insolation, à Cracovie, en % de l'insolation possible“. Dans la tab. III (pag. 170) sont citées les corrections, nécessaires pour obtenir la durée de l'insolation, possible à être enregistrée par l'héliographe (du système Campbell, à Cracovie). Les valeurs de ces corrections changent beaucoup d'un an à l'autre. Les corrections en question se calcu-

¹⁾ Les pages en parenthèses se rapportent au texte polonais qui précède le résumé français.

lent pour chaque mois, en choisissant les jours avec la durée maximum de l'insolation et en comparant cette durée avec la durée astronomique.

Pour les quatre saisons, les valeurs moyennes (1886 — 1909) diurnes de ces corrections sont égales à: hiver 1,6, printemps 1,8, été 1,6, automne 1,5, année 1,6 heures du soleil.

Tab. IV (p. 172) donne les % de l'insolation possible à Cracovie. La marche annuelle présente ici cette particularité que, à côté du maximum principal en août il y a un maximum secondaire au mois de mai. Le minimum est en décembre.

Partie V (p. 173) s'occupe avec les „Nombres des jours sans l'insolation, à Cracovie“. C'est la tabl. V (p. 174) qui contient les valeurs correspondantes.

Partie VI (pp. 173—176) discute les „changements dans les valeurs de la durée de l'insolation pendant les périodes plus longues“. Si l'on considère les moyennes de cinq ans (voir tabl. VI, p. 175) à Cracovie, on voit tout de suite que la durée de l'insolation y diminue depuis le commencement des mesures héliographiques. Pour s'assurer que cette diminution n'a pas un caractère local, on a comparé, dans la tabl. VI, les valeurs analogues, trouvées à Cracovie (Pologne), à Rostock (Allemagne), à Vienne (Autriche) et à Pavlovsk (Russie). On voit que les changements et la diminution se présentent non seulement à Cracovie, mais à d'autres endroits. En soulignant ce fait important ajoutons qu'il serait intéressant de constater si les variations des valeurs de l'insolation ont un caractère périodique et quelle est exactement la durée de cette période.

Enfin, la Partie VII (pp. 176—178) contient deux tables: Tab. VII (p. 177) et Tab. VIII (p. 178) se rapportant à la marche diurne de la durée de l'insolation à Cracovie. Dans ces tables il est surtout intéressant de voir comment la fraction maximum de la durée de l'insolation (pendant l'intervalle horaire indiqué) change sa position pendant les mois consécutifs. Cette valeur maximum tombe dans l'intervalle 1—2 heures après midi pendant les mois de décembre et de janvier tandis que le mois de juillet se caractérise par un maximum de 10 à 11 heures avant midi.

5. Pan Stefan Sterling:

Badania nad budową i funkcją kończyn przednich wielorybów uzębionych i bezzębnych.

Przedstawił p. J. Tur.

Komunikat nadesłany dn. 15 Marca 1910 r.

Jako najlepszy przykład konwergencji przytacza się zwykle przeobrażenie się kończyny przedniej w płetwę u kopalnych Plesiosaurów i Ichthyosaurów oraz u obecnie żyjących waleni. U tych różnych grup zwierzęcych, których przodkowie zamieszkiwali łąd stały, też same prawa przystosowania do środowiska wodnego doprowadziły do tego samego mniej więcej typu płetwy. Rzecz prosta, iż stopień przeobrażenia kończyny zależny jest od dawności przystosowania: im dłużej pewna grupa musiała się przystosowywać do nowego środowiska, tem wyraźniejsze zmiany dostrzedz się dadzą na kończynach. Dlatego też u Plesiosaurów, znalezionych w liasie, zmiana kończyny jest mniej wyraźna aniżeli u Ichthyosaurów, które przez kilka epok geologicznych (trias, jura, kreda) odgrywały doniosłą rolę w faunie wodnej i musiały wskutek tego ulegć dalej posuniętym zmianom kończyny przedniej. Toż samo prawo wpływu dawności trwania można by zastosować i do dziś żyjących „waleniowatych“ z uwzględnieniem jedynie różnego sposobu prowadzenia życia (a więc odżywiania się, zdobywania sobie pokarmu, ruchliwości i zręczności i t. p.). U syrenowatych, które dziś jeszcze zupełnie niesłusznie zaliczane bywają przez niektórych zoologów do „waleniowatych“ budowa łopatki jest o wiele bardziej zbliżona do budowy łopatki u płetwonogich, aniżeli u waleni mięsożernych: posiada bowiem łopatka syrenowatych również silnie rozwinięty grzebień, jak np. mors (*Trichechus*) lub foka (*Phoca*), a *acromion* jeszcze bardziej wystaje, aniżeli u tych płetwonogich, które posiadają — jak wiadomo — typowe łopatki zwierząt drapieżnych. Tu jednak zaraz podkreślić należy, iż owo morfologiczne podobieństwo łopatki syrenowatych oraz płetwonogich jest również tylko zjawiskiem konwergencji, ponieważ formy te nie są ze sobą zupełnie spokrewnione. Powracając do przedniej kończyny syrenowatych, znajdujemy, iż mięśnie ramienia i przedramienia zachowały się wogóle, a w samej ręce — nie mówiąc już o takich mięśniach jak *mm. extensor et flexor pollicis*, *mm. flexor et abductor digiti quinti* — znaleźć można jeszcze *m. interossei*;

jest to chyba wystarczający dowód, iż przystosowanie nie doprowadziło jeszcze do zbyt dalekich zmian, że syrenowate zachowały jeszcze charakterystyczne cechy przedniej kończyny ssaków i że raczej strona zewnętrzna przypomina płetwę, podczas gdy wewnętrzna budowa zupełnie zewnętrznemu wyglądowi nie odpowiada, zwłaszcza, iż ustawienie kości i stawy są całkiem inne, niż u waleni i znowu dadzą porównać jedynie z odpowiednimi organami płetwonogich.

To stosunkowo nieznaczne przekształcenie syrenowatych tłumaczy się sposobem życia, jaki prowadzą one: są to, jak wiadomo, zwierzęta, zamieszkujące powierzchnię morza, a częściej nawet wybrzeża wielkich rzek, karmią się roślinami wodnymi, wskutek czego zmuszone są do wykonywania ruchów powolnych. Zupełnie inaczej jednak przedstawia się sprawa z mięsożernymi waleniami, które, znajdując się ciągle na otwartym morzu, zmuszone są do szybkich, zręcznych ruchów. Czynność posuwania ciała naprzód wziął na siebie ogon, który przeobraził się w szeroką płetwę ogonową; natomiast kończyny przednie utraciły własności organów ruchu, a stały się wyłącznie sterem. Do tego jednak kończyny musiały ulegć daleko idącym zmianom, co też rzeczywiście nastąpiło.

U wielorybów łopatka przedstawia trzystronną, bardziej szeroką, niż wysoką płytkę z górnym wypukłym a bocznymi — prostymi lub wgiętymi bokami. Na pierwszy zaraz rzut oka zwraca uwagę, że nie posiada ona grzebienia, cecha charakterystyczna dla wszystkich waleni i wyróżniająca łopatkę ich ze wszystkich ssaków. O ile grzebień zachował się jeszcze jako cieniuchna listewka kostna, można wówczas wykryć niewielką *fossam supraspinatam*; w przeciwnym razie cała łopatka przedstawia dużą płaszczyzną trójboczną; na jej zewnętrznym przednim boku wystaje długi haczykowaty wierzchołek (*acromion*) oraz bardziej na wewnątrz, nad stawem wyrostek kruczy (*proc. coracoideus*). Zwykle obydwa te wyrostki są dość długie (*Delphinapterus*, *Monodon*, *Globocephalus*), u niektórych rodzajów (*Balaenoptera rostrata*) natomiast wyrostek kruczy jest bardzo mały lub może nawet zaniknąć prawie zupełnie (*Platanista gangetica*); ba, ów proces zaniku może posunąć się jeszcze dalej — mianowicie Eschricht komunikuje: Łopatka keporkak'a wyróżnia się całkowicie przez to, że wierzchołek i wyrostek kruczy, które są zwykle u *Cetacea* tak długie, znikają

całkowicie lub zaznaczone są, jako słabe wypukłości“. Ponieważ grzebień powstają zwykle w tych miejscach, gdzie mogą służyć jako potężna podstawa dla przyczepów mięśniowych, łatwo więc da się wywnioskować, iż wraz z zanikiem grzebieni następuje zanik muskulatury.

Staw ramieniowy zachował swą funkcję, choć w cokolwiek odmiennej formie, co wytłomaczyć się daje położeniem płetwy i zlaniem się obydwu *tubercula* w jeden duży nawewnątrz zwrócony guz. Ramię i przedramię uległy bardzo wielkiemu skróceniu, zwłaszcza *humerus*, który wynosi niekiedy zaledwie połowę długości przedramienia. Kości sprychowa i łokciowa są spłaszczone, biegną równolegle i obok siebie, prawie że bez *spatium interosseum* i bez jakichkolwiek śladów skrzyżowania. Dość silnie rozwinięty wyrostek łokciowy (*olecranon*) zwrócony jest nazewnątrz ku środkowi, ponieważ — jak już wyżej zwrócono uwagę — ramię i przedramię ustawiają się w jednej osi, wskutek czego cała kończyna staje się jeszcze bardziej podobną do płetwy. A dzięki znacznemu skróceniu ramienia (najsilniej zaznaczonemu u delfinów: długość całego ramienia równa się mniej więcej jego grubości i szerokości) oraz spłaszczeniu ramienia i przedramienia zniknęły w kościach jamy, wypełnione szpikiem, przez co kości te nabyły większej trwałości i mocy. Jeżeli jeszcze dodamy do tego wszystkiego, że stawy wiążące wszelkie kości ramienia, przedramienia, ręki wogóle przestały funkcyonować, to owo podobieństwo do płetwy stanie się jeszcze wyraźniejszym, zwłaszcza gdy wskutek wieloczłonkowości (*hyperphalangii*) cała kończyna przednia przekształciła się w sztywną, nieruchomą w sobie trójkątną płytkę. Wraz z owym procesem przemiany morfologicznej następuje zanik mięśni na odpowiednich kościach: u wielorybów uzębionych zniknęły rzeczywiście wszystkie mięśnie od ramienia aż do wierzchołka płetwy. Natomiast ścięgna, służące jako spoidła drobnych licznych kostek skieletowych palców waleni, nie tylko nie zanikły, lecz przeciwnie rozwinęły się silnie. Jednym słowem, wszystkie te zmiany, które stanowią zjawisko wtórne i powstały na drodze przystosowania do nowego środowiska, wpłynęły zasadniczo na fizyologiczną stronę kończyny przedniej, pozbawiając ją zdolności ruchu a nadając jej wyłącznie cechy steru, jako trójkątnej płytki. Natomiast jako specjalny organ ruchu działa teraz wielka płetwa ogonowa, która potężnymi uderzeniami o wodę wprawia zwierzę w ruch. Płetwa zaś piersiowa,

t. j. kończyła przednia, musi podczas pływania ulegać ciśnieniu przecinanych wód, aby owo ciśnienie możliwie zmniejszyć i w ten sposób powiększyć szybkość ruchu; nie będąc w użyciu płetwa przybliża się jak może najbardziej do powierzchni ciała. Przeciwnie, o ile rozchodzi się o zwolnienie ruchu lub nawet nagle zatrzymanie się na miejscu, ster zmuszony jest ustawić się w kierunku możliwie prostopadłym do całego ciała. Rzecz zrozumiała, że o ile zwierzę używa jednej tylko płetwy — prawej lub lewej — i stawia ją prostopadle do całego ciała, wówczas steruje na prawo lub na lewo; wreszcie mogą służyć płetwy piersiowe jako organy regulacyjne do zachowania równowagi. Do wykonywania wszystkich tych czynności służą mięśnie, z których każdy poszczególnie zbadałem wraz z funkcją jego na dorosłym egzemplarzu delfina (*Phocaena communis*).

Co dotyczy silnie rozwiniętej u waleniowatych warstwy mięsnej (*panniculus carnosus*), to należy tu uwzględnić tylko tę część jego, która ciągnąc się od strony brzusznej przytwierdza się pojedynczymi pęczkami do podstawy ramienia i wspólnie z mięśniem piersiowym (*m. pectoralis*) służy do przyciągania (addukcyi), stosunkowo dość nieznacznego zresztą.

Już wyżej zaznaczono, iż w parze ze zmianami układu kostnego da się zauważyć zanik mięśni. Prócz całkiem szczątkowego mięśnia trójgłowego (*m. triceps*) pozostał jedyny cienki pęczek mięśniowy, który wraz z włóknami *triceps*'u i przyczepem mięśnia piersiowego wypełnia w części „dołek pachowy“. Pęczek mięśniowy bierze początek na wierzchołku łokciowym i przyczepia się do łokciowego napiastka, być może odpowiada on zginaczowi napiastka łokciowego (*flexor carpi ulnaris*)¹⁾. O ile posiada on jakąkolwiek funkcję — a trudno to, naturalnie, rozstrzygnąć wobec tego, iż mięsień ten jest bardzo drobny — to polega ona przypuszczalnie na skręcaniu ku środkowi tylnej wypukłości płetwy (=V palcowi).

Ponieważ łopatka nie posiada grzebienia przeto mięsień równoboczny (*m. trapezius*) uległ zanikowemu; u manata (syrenowate)

¹⁾ Jest to, zapewne, ten sam mięsień, który Murie oznaczył u *Globiocephalus melas*, jako „diminutive triceps“ z „two heads of origin“, ale „single in Phocaena, grampus, and Lagenorhynchus“. Murie podaje tylko jego początek, ale nic nie mówi o przyczepie, a z rysunku (Pl. 37, fig. 70) widać wyraźnie, iż mięsień przyczepia się do V-go palca, co dla mięśnia trójgłowego dotychczas nigdy jeszcze nie było opisane.

istnieje jeszcze, ale wskutek niewielkiej długości szyi jest nader przykrócony. Musimy zatem uwzględnić następujące mięśnie.

Mięsień czworoboczny (*m. rhomboideus*) (rys. I) — pojedynczy. Cienki; początek na kręgach piersiowych, przyczep do kręgowego brzegu łopatki. [Że jest on pojedynczy podaje również Murie — u *Globiocephalus*, *Lagenorhynchus* i *Phocaena*, Meckel, Flower — u *Phocaena* i in., podczas gdy Rapp i Stannius odróżniają czworoboczny górny od dolnego]. Ponieważ jest bardzo cienki, nie odgrywa, zapewne, zbyt wielkiej roli. Ciągnie całą kończynę ku środkowi i cokolwiek ku górze.

Mięsień, podnoszący kąt łopatki (*m. levator anguli scapulae*) (rys. I), cienki, mały, bierze początek na *proc. transv.* atlasu (Rapp, Murie) i przytwierdza się do środkowego (t. j. do górnego) kąta łopatki (*angulus medialis scapulae*) [„diminutive“ u *Globiocephalus*, „triflingly in other Cete“ (Murie)]. Jak już sama nazwa wskazuje zadanie mięśnia tego polega na podnoszeniu łopatki, a więc bezpośrednio całej kończyny; funkcya ta jednak jest wogóle zapewne, niewielka.

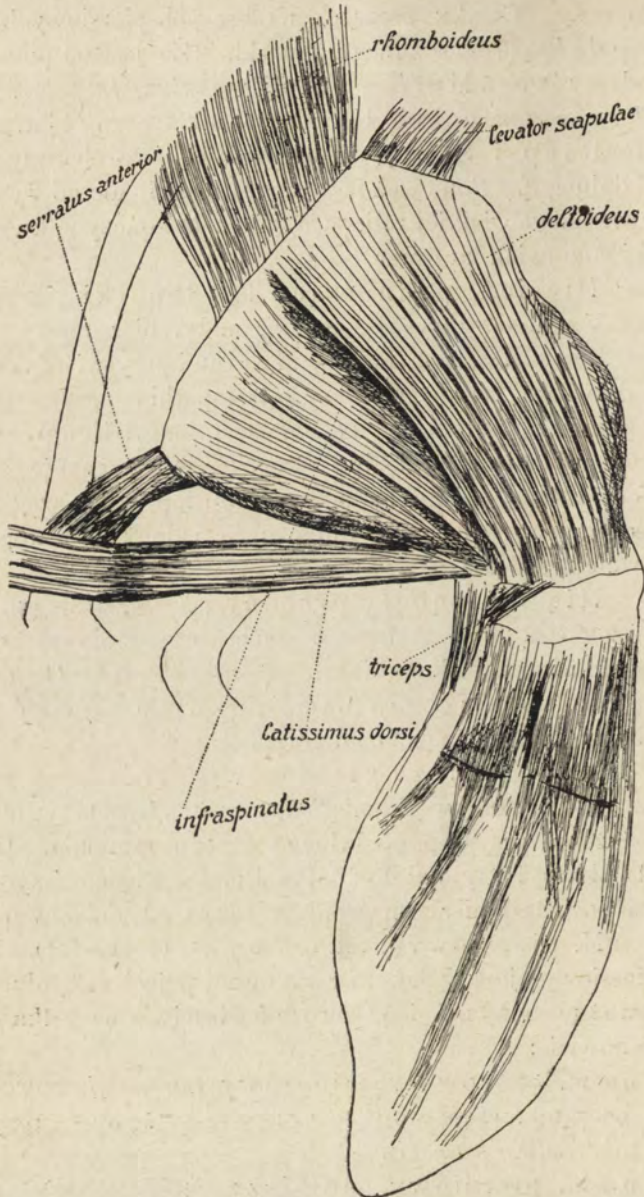
Mięsień zębaty przedni (*m. serratus anterior*) bierze początek na górnych żebrach i przyczepia się do chrząstki dolnego kąta łopatki (*angul. infer. scap.*). Ciągnie łopatkę ku tyłowi i obraca przednią (szprychową) część płetwy cokolwiek na zewnątrz i ku górze.

M. najszerszy grzbietowy (*m. latissimus dorsi*) (rys. I—II), długi wazki mięsień; początek trzema pasmami na 4—6 żebr., przyczep do tylnego brzegu ramienia. Ciągnie całą płetwę ku tyłowi do środka i pod względem fizyologicznym posiada doniosłe znaczenie wówczas, gdy działa wspólnie z

M. piersiowym (*m. pectoralis* I—II—III). Nazwa „piersiowy“ jest w danym razie raczej pojęciem ogólnem, ponieważ możemy mięsień ten rozbić właściwie na kilka części, mianowicie:

- 1) na *m. żebrowo-ramieniowy* (*m. costohumeralis*).
(początek: część mostkowa pierwszego żebra — przyczep: *tuberculum humeri*),
- 2) na *m. piersiowy mniejszy* (*m. pectoralis minor*),
t. j. głęboką, biorącą swój początek na przedniej części mostka porcyę właściwego

3) m. piersiowego większego (*m. pectoralis major*);
ten ostatni biegnie od zewnętrznej powierzchni mostka, łą-



Rys. I. Przednia kończyna (pr.) *Phocaena communis*—z zewnątrz.

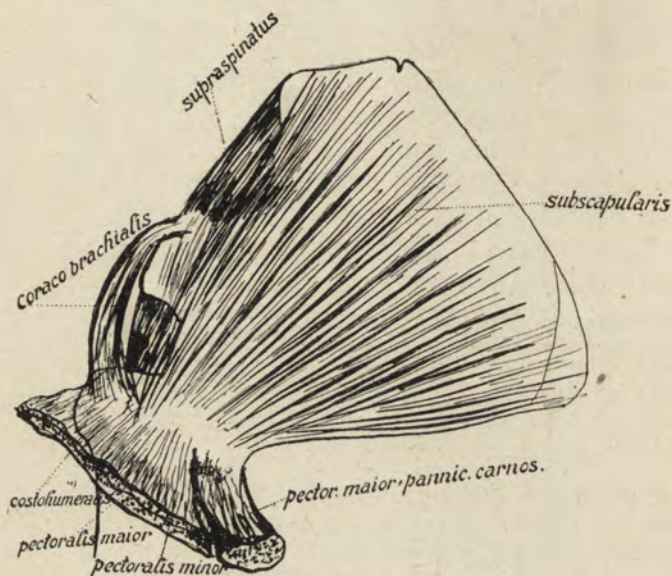
czy się warstwą mięsną (*panniculus carnosus*) i przyczepia się do dalszego końca ramienia (a może nawet w części do bliższego końca łokcia).

Wszystkie te części zwały się jednak do tego stopnia w jeden mięsień, że byłoby bezcelowem oddzielanie ich, zwłaszcza, że i pod względem fizyologicznym mają wspólną czynność. Zwłaszcza część ostatnia (t. j. *m. pector. major*), ponieważ stanowi silny dobrze rozwinięty mięsień, ma za zadanie wspólnie z najszerszym mięśniem grzbietowym (*m. latissimus dorsi*) ciągnąć kończynę w tył ku środkowi. Naturalnie, wchodzi tu w grę także i przyciąganie (addukcja), w której przyjmują udział dwie drugie części *pectoralis'u*; ponieważ są to jednak mięśnie słabe i cienkie, przeto i sam ruch przyciągania jest, zdaje się, dość nieznaczny. Pozostaje nam jeszcze tylko zwrócić uwagę na zupełnie cienki, biorący początek na potylicy a przyczepiający się do przedniej powierzchni guza ramieniowego mięsień [*m. cephalo-humeralis* (Rapp), *m. occipito-(mastoideo)-humeralis* (Huxley), „combined occipital-trapezius, cleidomastoid and clavicular deltoid, fused in a humeromastoid (Macalister) etc.]; mięsień ten ciągnie kończynę w kierunku głowy. Wyliczyliśmy zatem wszystkie mięśnie, poruszające łopatkę (wraz z przyległą kończyną).



Rys. II. Przednia kończyna (pr.) Phocaena comm.—od spodu widziana.

Gdybyśmy chcieli jeszcze raz w krótkości określić funkcję wyliczonych mięśni, musielibyśmy je zatem podzielić na dwie grupy, z których jedna (*pannic. adipos.*, *latissim. dorsi*, *pectoralis*) służy do przyciągania (addukcyi) oraz wewnętrznego ruchu obrotowego, podczas gdy druga, złożona z pozostałych mięśni ma na celu odciąganie (abdukcję) oraz zewnętrzny ruch obrotowy, w czem pomagają jej mięśnie łopatki, pełniące tę samą czynność.



Rys. III. Łopátka *Phocaena comm.*—od wewnątrz.

Na samej łopatce wchodzą w grę następujące odciągacze :

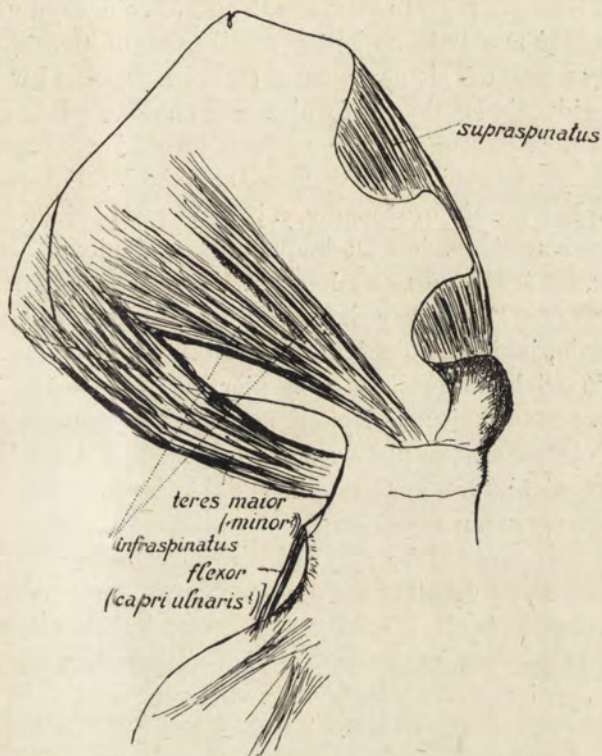
nader silnie rozwinięty, zajmujący całą przednią powierzchnię łopatki i stąd też biorący początek

m. trójkątny (*m. deltoideus*) rys. I. Przyczepia się on za pomocą tęgiego ścięgna do przedniej powierzchni ramienia, wskutek czego obraca całą pletwę w poprzek, tak iż część sprychowa stoi prostopadłe do powierzchni ciała, lecz równoległe do płaszczyzny wody. Czynności tej dokonywa on wspólnie z

m. nadgrzebieniowym (*m. supraspinatus*), rys. III—IV (który wypełnia *fossam. supraspinatam*, przyczep do dolnego zewnętrznego końca guza ramieniowego) oraz z małym

m. kruczo-barkowym (*coraco-brachialis*) rys. III (począt.: *process. coracoid.* — przyczep.: *tuberc. humeri*). — Również i

m. podgrzebieniowy (*m. infraspinatus*) (rys. IV) (ciągnie od dolnej części wielkiej u waleniowatych *fossa infraspinata* do górnej i bocznej powierzchni guza ramien.) obraca płetwę nazewnątrz oraz cokolwiek ku górze. A nawet przednia część dużego



Rys. IV. Łopátka. *Phocaena comm.*—zzewnątrz.

m. podłopatkowego (*m. subscapularis*) (rys. III) (wypełnia on wewnętrzną płaszczyznę łopátki i przytwierdza się do *tuberc. hum.*) może obracać nieznacznie nazewnątrz, podczas gdy większa tylna część, a więc prawdopodobnie i cały mięsień pociąga płetwę ku środkowi. Wreszcie

m. obły większy (+ mniejszy?) [*m. teres maior (+minor?)*] (rys. IV) (początek na chrząstce łopatkowej i spod-

niej powierzchni łopatki — przyczep.: wspólnie z *m. latissim. dorsi* do tylnego brzegu ramienia) ciągnie płetwę ku tyłowi i obraca nazewnątrz ku środkowi.

Z tego wszystkiego wypływa, że cała muskulatura łopatki przeznaczona jest głównie do odciągania (abdukcji) ewent. do zewnętrznego ruchu obrotowego, do czego pomagają w znacznym stopniu mięśnie drugiej, powyżej przytoczonej grupy (*m. czworoboczny*, podnoszący kąt łopatki, zębaty przedni oraz głowobarkowy). Na tym rodzaju ruchu polega głównie czynność płetwy; aby osiągnąć możliwie najlepsze wyniki w tym kierunku, guz ramieniowy przesunął się nazewnątrz (w bok), naprzód i w dół; z tego punktu widzenia stanie się również zrozumiałem, dlaczego położenie płetwy, w jakim znajdujemy ją u zarodków, musiało później w samodzielnym życiu zwierzęcia ulegz zmianie. U zarodków mianowicie płetwa leży prostopadle, t. j. przylega do ciała, tak iż część szprychowa zwrócona jest ku dołowi (guz ramieniowy — bardziej nazewnątrz, ku środkowi i ku górze rys. V a), jest to, zapewne, najwygodniejsza pozycja dla zarodka, znajdującego się w ciele matki. Doświadczenia, jakich dokonałem na zarodku (*Phocaena comm.*) wykazały, iż działalność mięśni przy pierwotnem położeniu guza ramieniow. jest ograniczona i pozwala na nieznaczne ruchy ku przodowi. Położenie zatem płetwy w płaszczyźnie prostopadłej nie mogłoby przynieść zwierzęciu zbyt wielkiej korzyści, ponieważ zarówno w utrzymywaniu równowagi, jak i sterowaniu na prawo lub na lewo płetwa odgrywałaby rolę nader nieznaczną. Natomiast położenie, jakie przyjmuje płetwa u dorosłego zwierzęcia (rys. V b), mianowicie, iż ustawia się ona całą swą powierzchnią mniej więcej prostopadle do powierzchni całego ciała, t. j. szprycha znajduje się nazewnątrz, poziomo, równoległe do powierzchni ciała, jest dla wieloryba rzeczywiście pożyteczne: płetwa może się obracać ku przodowi blisko na 90° w ten sposób, że w płetwie leżącej prostopadle do powierzchni ciała szprycha ustawia się również prostopadle do tej powierzchni. A właśnie owo prostopadłe poprzeczne ustawienie konieczne jest do nagłego zatrzymania się lub zwolnienia szybkości biegu obustronnie, na prawo lub na lewo — zapewne tylko jednostronnie. Przypuszczalnie nie zachodzi potrzeba zupełnego przyciągania (abdukcji), ponieważ płetwy służą zawsze do podtrzymania równowagi; dlatego też i odpowiednia muskulatura jest słabo rozwinięta i jest raczej przeznaczona do odwodzenia (abdukcji) ewent. ruchu obrotowego nazewnątrz i naprzód.

Tak się przedstawia sprawa u wielorybów uzębionych. Odmiennie stosunki spotykamy u wielorybów bezzębnych. Naturalnie, nie mogłem tu korzystać z dorosłych zwierząt, a czyniłem me spostrzeżenia na zarodkach, szkieletach dorosłych osobników oraz ko-



a)



b)

Rys. V. Przednia kończyna (pr.) *Delphinus delphis*: a) położenie u zarodka; b) położenie u dorosłego osobnika.

rzostałem z tych nielicznych danych, jakie znalazłem w literaturze zagranicznej, zwłaszcza angielskiej. Już samo badanie szkieletu przedniej kończyny musi doprowadzić do wniosku, że i funkcya jej jest odmienna, niż płetwy *Odontoceti*. Przypatrując się systemowi

kostnemu u *Balaenoptera musculus* (którego kończynę zarodka widać na roentgenogramie—rys. VI), zauważamy, że i u dorosłego egzemplarza, chociaż ramię jest bardzo skrócone, nie posiada prawie jednak tej części, która w fizjologii płetwy odgrywa niezwykle doniosłe znaczenie, służąc jako miejsce przyczepu wielu silnych



Rys. VI. Roentgenogram przedniej kończyny zarodka *Balaenoptera musculus*, długość 138,8 cm ($\frac{1}{2}$ w. n.).

mięśni, mianowicie guza (*tuberculum humeri*); naturalnie, musi to wpływać na zmianę działalności płetwy, jak się to poniżej okaże. Kości przedramienia, chociaż są spłaszczone, nie uległy jednak tak znacznemu skróceniu, jak u walenii uzębionych, przestrzeń międzykostna (*spatium interosseum*) jest znacznie większa, aniżeli w kończynach tych ostatnich, a co najważniejsze—zachowały się jeszcze stawy łokciowy i napiętkowy, a nawet częściowo i międzypiętkowy. W ten sposób kończyna Mysticeti zachowała bez porównania więcej cech kończyny ssaków; proces zanikowy nie posunął się do tak

dalekich granic, jak to się zauważyć daje u walenii uzębionych. Do tego przyczynia się znacznie samo ustawienie płetwy, która nie leży w płaszczyźnie prostopadłej ku powierzchni ciała, a pod pewnym kątem ostrym, t. j. część szprychowa opada pod pewnym ostrym, niekiedy zbliżonym do prostego, kątem do powierzchni wody, nie jest więc zwrócona ku tyłowi; płetwa zatem nie jest sierpowato

zagięta, lecz wyciągnięta w kierunku prostym. A miało to niezwykle doniosły wpływ na szkielet ręki. U *Balaenidae*, które posiadają cokolwiek zaokrągloną płetwę, zachowało się jeszcze 5 palców; natomiast u *Balaenopteridae* z zupełnie prostą płetwą pierwszy palec zaniknął, jak to widać nawet na rękę większego zarodka (patrz roentgenogram rys. VI); we wcześniejszych stadiach rozwoju palec ten jednak daje się jeszcze wykazać. Odmienne ustawienie kończyny musi również wpływać na wielocłonkowość palców (*hyperphalangia*): nie jest ona tak znaczna jak u walenii uzębionych, których ku tyłowi zagięta płetwa wymagała większej ilości elementów kostnych. Dlatego też i ilość kości napiąstka u *Mysticeti* jest normalna, t. j. taka sama jak u innych ssaków, podczas gdy walenie uzębione posiadają aż 12 elementów napiąstkowych (trzy szeregu bliższego + pięć szeregu dalszego + *pisiforme* + *praepollex* + *centrale*, często podwójne). Jednym słowem, szkielet płetwy oraz ustawienie tej ostatniej w stosunku do reszty ciała wielorybów bezzębnych różni się znacznie od płetwy walenii uzębionych, zwłaszcza pod względem niewielkiego stosunkowo procesu zanikowego. To samo da się powiedzieć i o muskulaturze. A więc znajdujemy u dorosłego zwierzęcia (u *Balaenoptera rostrata*—podług Carte-Macalister) na grzbietowej stronie kończyny słabo rozwinięty mięsień prostujący palec ogólny (*extensor digitorum communis*) (początek: *spatium interosseum* i torebka główki szprychy i łokcia — przyczep: czterema ścięgnami do końcowych członów każdego palca „sending a slight expansion into the sides of each of the proximal phalanges“). Znacznie więcej mięśni pozostało na dolnej (brzuszej) stronie płetwy. A więc:

zginacz napiąstka szprychowego (*flexor carpi radialis*) (począt.: w górnej przedniej płaszcz. szprychy — przyczep: do kości dłoniowej pierwszego palca),

zginacz palców ogólny (*flex. digit. communis*), leży nawewnątrz od poprzedniego, bierze początek na wyrostku łokciowym i ramieniu, ciągnie czterema ścięgnami do końcowych członów każdego palca, wysyłając po drodze „a slip to each of the intermediate phalanges“.

m. dłoniowy długi (*m. palmaris longus*) — nadzwyczaj drobny i niewidoczny (począt. — wyrostek łokciowy, przyczep: kość dłoniowa czwartego palca) — wreszcie

zginacz napiąstka łokciowego (*flexor carpi ulnaris*) (począt.: wewnętrzna powierzchnia wyrostka łokc., przyczep: wewnętrzna powierzchnia kości dłoniowej 4-go palca).

Na samej łopacie wyodrębnić można te same mięśnie, co u waleni uzębionych; mięśnie nad — i podgrzebieniowy, podłopatkowy i kruczobarkowy przytwierdzają się również do guza ramieniowego. Ale ten ostatni, zwykle nader słabo rozwinięty, jak to już wyżej zaznaczono, leży nazewnątrz, t. j. wprost odwrotnie niż u *Odontoceti*, u których zwrócony jest nawewnątrz, a więc odmiennie niż to ma zwykle miejsce u ssaków. Chociaż pozostałe mięśnie działają w ten sam sposób, co u waleni uzębionych, to mając jednak na uwadze owo ustawienie guza, które musi powodować inną czynność mięśni do niego przytwierdzonych, zwłaszcza m. trójkątnego, łatwo możemy wywnioskować, że funkcya płetwy wielorybów bezzębnych służy głównie jako organ utrzymywania równowagi. Nie mamy tu już do czynienia z tak doskonałą płytką trójboczną, jak u *Odontoceti*; płetwa taka wskutek obecności stawów nie mogłaby już czynić ruchów obrotowych, wskutek zaś odmiennego ustawienia całej kończyny oraz guza ramieniowego (ewent. odmiennego działania przytwierdzonych doń mięśni) może się tylko wznosić lub opadać. Stosownie do tego, czy zbliża się ona do ciała czy też oddala odeń, kąt pomiędzy nią a powierzchnią ciała powiększa się lub zmniejsza. Dla ruchów większych, silniejszych służy muskulatura łopatki i biegnące ku niej mięśnie, dla drobnych, nieznaczących — mięśnie samej płetwy; wreszcie opadanie płetwy odgrywa, zapewne, rolę niepoślednią i podczas zanurzania się zwierząt pod wodę.

Przyjrząwszy się kończynom przednim wielorybów uzębionych i bezzębnych oraz funkcji tych kończyn, dochodzimy do wniosku, że w ukształtowaniu się płetwy obu tych grup mamy znowu do czynienia raczej ze zjawiskiem konwergencyi, aniżeli powinowactwa genetycznego. Porównywając płetwy ze sobą, musimy dojść do wniosku, że typ płetwy *Odontoceti* bardziej odbiega od typu kończyny zwykłych ssaków, niż typ płetwy *Mysticeti*, że zatem i walenie uzębione muszą pochodzić od ssaków, występujących we wcześniejszych epokach geologicznych, aniżeli przodkowie wielorybów bezzębnych. W ten sposób teoria dwurodowa (dyfiletyczna) waleniowatych, dla której *Kükenthal* znalazł podwa-

linę w budowie skóry, zyskuje w budowie kończyny oraz czynności fizyologicznej tej ostatniej nowe potwierdzenie.

Wrocław, Instytut Zoologiczny Uniwersytetu. Luty 1910.

Główne źródła bibliograficzne.

- 1) Carte Alex. a. Macalister Alex. On the Anatomy of Balaeoptera rostrata. Philosoph. Transact. 1868.
 - 2) Eimer Theodor. Vergleichend anatomisch-physiologische Untersuchungen über das Skelett der Wirbeltiere. Leipzig 1901.
 - 3) Eschricht Daniel Friedrich. Zoolog. - anatomisch - physiologische Unters. über Nordischen Wallthiere. Leipzig 1849.
 - 4) Kükenthal Willy. Ueber die Anpassung von Säugetieren an das Leben im Wasser. Zoolog. Jahrbücher Bd. V. 1891.
 - 5) Kükenthal Willy. Vergleichend-anatomische und entwickelungsgeschichtliche Untersuchungen an Waltieren. Bd. II. Jena 1893.
 - 6) Kükenthal Willy. Die Wale der Arctis. (Fauna Arctica. B. I. 1900).
 - 7) Murie James. On the Form and Structure of the Manatee (*Manatus americanus*). Transactions of the Zool. Society of London, Vol. VIII, 1874.
 - 8) Murie James. On the Organization of the Caaing Whale (*Globiocephalus melas*). Transactions of the Zool. Society of London, Vol. VIII, 1874.
 - 9) Racovitza G. Émile. Cétacés 1902.
 - 10) Rapp Wilhelm. Die Cetaceen. 1837.
 - 11) Struthers J. Account of rudiment fingermuscles in Hyperoodon. Journ. Anat. a. Physiol. 1874.
-