

# Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych:

---

## Posiedzenie

z dnia 7 Grudnia 1911 r.

Rok IV. № 10.

Obecni:

Przewodniczący Wydziału p. J. Lewiński.  
Sekretarz p. J. Tur.

Członkowie Towarzystwa pp.: W. Biernacki, J. J. Boguski, B. Danielewicz, S. Dickstein, Z. Dmochowski, J. Eismond, Wł. Gorczyński, L. Kryński, F. Kucharzewski, W. Mayzel, R. Merecki, Sł. Miklaszewski, M. Rejchman, J. Sosnowski, K. Stołyhwo, Z. Weyberg.

## Komunikaty.

---

1. Pan Feliks Kucharzewski:

**Zegarmistrzostwo Kochańskiego.**

Komunikat zgłoszony dn. 17 listopada 1911 roku.

Kochański<sup>1)</sup> pisał o zegarmistrzostwie w latach 1664, 1685 i 1687. Była to epoka największego rozwoju tej sztuki, w której dziedzinie pracowali znakomici uczeni: Huygens i przy-

---

<sup>1)</sup> Por. „Statyka Kochańskiego“. Sprawozd. T. N. W. 1910. Wydz. n. mat. przyr. 321—339.

jaciel Kochańskiego, Leibniz. Huygens zwłaszcza rozwinął swą działalność w obu kierunkach ówczesnego rozwoju zegarmistrzostwa, zajmując się, tak zastosowaniem wahadła do zegarów, jak i sprężyny spiralnej, zwanej włosem, do zegarków kieszonkowych.

Próby budowy zegarów wahadłowych sięgają końca XVI w. Jost Bodeker, wikaryusz katedry w Osnabrück, opisując w r. 1587 zegar, jaki umieścił na tym kościele, zaznacza wyraźnie<sup>1)</sup> zastąpienie w nim starodawnego kolibnika<sup>2)</sup> wahadłem odśrodkowym, regulującym również dobrze ruch zegara. Według świadectwa Bechera<sup>3)</sup>, zbudować miał Jost Burgi z Pragi, na dworze Rudolfa II, a więc przed r. 1612, zegar wahadłowy. Wszakże, ani Bodeker ani Burgi nie znali izochronizmu wahadła, którą to własność zauważył w Pizie Galileusz, jeszcze w r. 1583, a opisał ściśle dopiero w swoich Dyalogach, ogłoszonych w r. 1638.

Galileusz stosował pierwotnie wahadło do spostrzeżeń astronomicznych, popychając je ręką, a do liczenia wahań używał licznika, złożonego z lekkiego kółka zębatego, wyciętego z cienkiej tekturki; drażek poziomy, umocowany przy sznurku wahadła, przesuwiał to kółko przy każdym wahnięciu o jeden ząbek; liczbę zaś całkowitych obrotów kółka zębatego dawało drugie kółko i skazówka<sup>4)</sup>. Pod koniec życia, niewidomy, dyktował synowi Wincentemu i uczniowi Viviani'emu, szkic zegara wahadłowego<sup>5)</sup>, którego model sporządzony został przez Wincentego dopiero w r. 1649. Tak szkic, jak model, pozostały nieznanne; astronomowie posługiwali się wahadłem w ten sam sposób, jak

---

1) Por. Bassermann-Jordan. „Die Geschichte der Räderuhr“. Frankfurt a. M. 1905.

2) Tak tłumaczy Mrongovius niemieckie *Unruhe* (franc. *foliot*). Był to wahacz (balansyer) dawnych zegarów, drażek poziomy, osadzony na osi pionowej, którego szybkość wahań można było zmniejszać przez zawieszanie ciężarków na obu końcach.

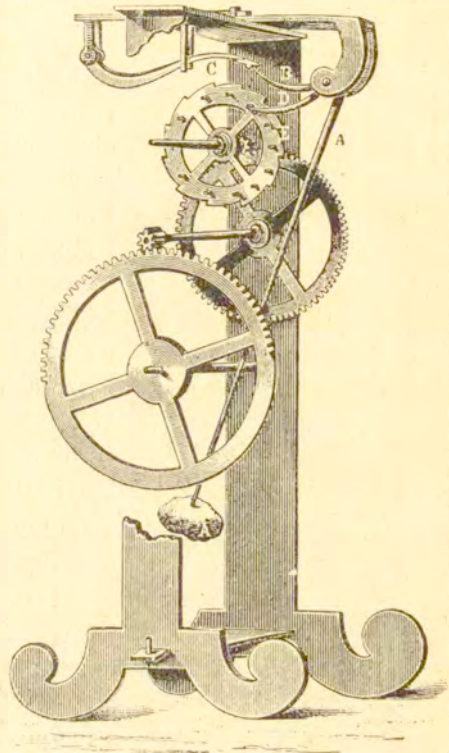
3) *De nova temporis demetiendi ratione theoria*. London, 1680.

4) Por. opis w Galileusza „*Opere*“ Milano, 1832, t. II, str. 152, a rysunek sporządzony według tego opisu w dziele: Gerland-Traumüller: *Geschichte der Physikalischen Experimentierkunst*. Leipzig, 1899, str. 120.

5) Por. artykuł E. Gerlanda: „Ueber die Erfindung der Pendeluh“.  
*Bibl. Math.* III Folge, 5 Band, 1904, p. 234–247.



to czynił Galileusz a i nasz Heweliusz w r. 1654 do obserwacji używał wahadła. Dopiero gdy Huygens w r. 1657 opatentował swój pomysł, upominać się zaczęli włosi o pierwszeństwo dla Galileusza, a szkic Viviani'ego zakomunikowany w 1659 r. Huygensowi, pozostał w jego papierach<sup>1)</sup>. Szkic ten przedstawia rys. 1. Mechanizm zegarowy, poruszany za pomocą ciężaru, niewyobrażonego na rysunku, wprawia w ruch kółko *E*. Ruch tego kółka hamuje haczyk *C*, wstrzymując, gdy opadnie na kółko *E*, opuszczanie się ciężaru poruszającego. Na osi połączonej stale z wahadłem *A*, umocowane są dwa zęby, z których jeden *B*, w chwili gdy wahadło zbliżone jest do mechanizmu (jak na rysunku), podtrzymuje haczyk *C*, umożliwiając ruch koła *E*. Koło to wszakże wnet zatrzymane zostaje przez drugi ząb *D*, zaczepiający o kolki, nabite na bocznej ścianie koła. Gdy wahadło odchyli się w drugą stronę, oddalając się od mechanizmu, ząb *D* puszcza kołek boczny koła *E* a ząb *B* — koniec haczyka *C*. Ząb *B*, opadając na kolki boczne koła *E*, popychany przez nie, daje popęd wahadłu. Przy każdym wahnięciu, koło *E* przesuwa się tym sposobem o jeden kołek boczny. Chód zegara zbudowanego według tego szkicu, sprawdzany był we Florencji<sup>2)</sup>.

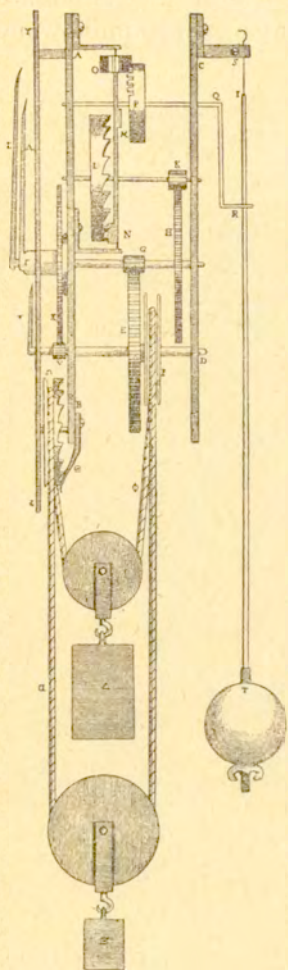


Rys. 1.

<sup>1)</sup> Por. Huygens. Oeuvres complètes, t. III, p. 8.

<sup>2)</sup> Por. Saunier-Speckhart: Die Geschichte der Zeitmesskunst. Bautzen 1903, p. 472.

Astronomowie, potrzebujący przy obserwacjach dokładnych zegarów, pracowali nad przystosowaniem do nich wahadła. Nie



Rys. 2.

powiodło się to Heveliuszowi<sup>1)</sup>, podczas gdy Huygens, w broszurce *Horologium*, wydrukowanej w Hadze w r. 1658, podał rysunek mechanizmu zegarowego, z przystosowaniem doń wahadłem (rys. 2), stanowiący istotny zawiązek zegarów wahadłowych. W mechanizmie tym zasługuje na uwagę zawieszenie ciężaru poruszającego  $\Delta$  i przeciwwagi  $\Xi$  na dwóch blokach  $\Omega$  i  $F$ , z których pierwszy służy do nakręcania zegara, a drugi do wprowadzania w ruch mechanizmu. Wychwyty wrzecionowy<sup>2)</sup>, złożony z koła  $L$  i wrzeciona ze skrzydełkami  $M$  i  $N$ , komunikuje ruch, za pośrednictwem trybu  $O$ , kołu  $P$ , połączonemu z widelkami  $QR$ , popychającymi wahadło  $T$ . Po cyferblacie  $YZ$  chodzą skazówki: godzinna  $\Lambda$ , minutowa  $\Sigma$  i sekundowa  $\Psi$ .

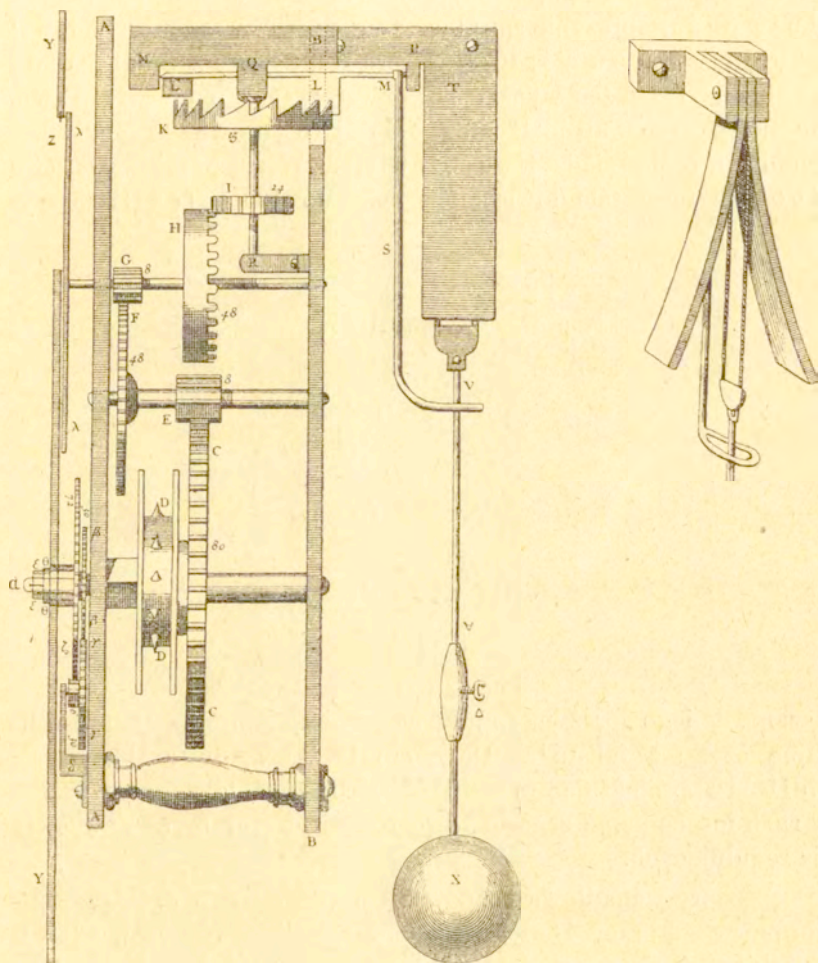
Huygens ulepszył swój pomysł i rozwinął w powszechnie cenionym dziele: *Horologium oscillatorium* z r. 1673. Jak to uwidoczniła rysunek z tego dzieła wyjęty (rys. 3), proponował wtedy wahadło cykloidalne, które nieutrzymało się w praktyce. Wrzeciono, poprzednio umieszczone pionowo w nowym projekcie ma położenie poziome. Urządzenie takie wprowadzono przedtem w Anglii.

<sup>1)</sup> Por. Huygens: *Oeuvres complètes*, t. III, str. 91 (list Heveliusza z lipca 1660 r.) i str. 133 (odpowiedź Huygensa z października t. r.).

<sup>2)</sup> Wychwyty ten, używany w dawnych zegarach, dochowany został w zegarze z r. 1348, znajdującym się w South Kensington Museum. Por. Gerland-Traumüller. l. c., str. 81.



Zegarki kieszonkowe z XVI w., zwane „jajkami norymberskimi“, miały ustrój przedstawiony na rys. 4. Zegarek wprawiała w ruch sprężyna, umieszczona w bębnie *R*. Obok bębna

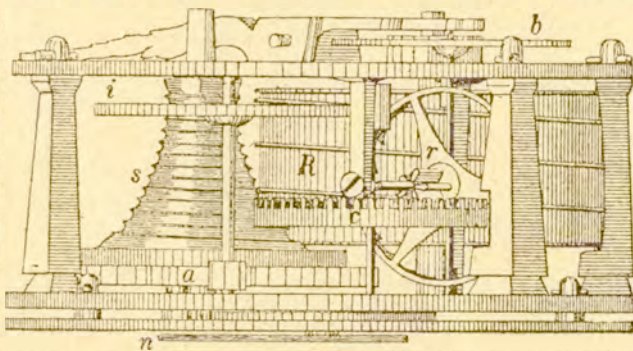


Rys. 3.

znajdował się ślimak *s*, połączony z bębniem struną a później łańcuszkiem. Koło *a*, u spodu ślimaka, wprawiało w ruch dalsze koła: *i* i *c*, z których pierwsze poruszało skazówkę godzinną *n*, a drugie nadawało ruch kołu wychwytowemu *r*, umieszczoneму

przy wrzecionie. Na osi wrzeciona osadzony był wahacz kołowy (balans) *b*. W niektórych z tych zegarków stosowane były, do regulowania ruchu wahacza, dwie proste szczecinki.

Pierwszy zegarek, z użytą w tym celu, według wskazówek Huygensa, sprężyną spiralną, zwaną dziś włosem, zbudował Thuret w Paryżu w r. 1674. Skoro Huygens zażądał patentu we Francji na ten wynalazek, powstał spór o pierwszeństwo. Anglicy przyznawali je Robertowi Hooke, we Francji pretendował o nie ksiądz Hautefeuille. Wszakże pierwszeństwo Hooke'a nie zostało dowiedzione, a co do Hautefeuille'a wy-



Rys. 4.

kazano, że jego sprężyna regulująca nie była spiralną ale prostolinijną czy też falistą<sup>1)</sup>. Do pomysłu Huygensa zbliżył się Leibniz, projektując w r. 1677<sup>2)</sup> zastosowanie do wprawiania w ruch mechanizmu zegarka, dwóch sprężyn spiralnych nawzajem się regulujących.

Zegary wahadłowe rozpowszechniły się szybko, po ogłoszeniu pierwszej pracy Huygensa; zegarki kieszonkowe z włosem spiralnym dopiero w XVIII w. częściej pojawiać się zaczęły. Tak jedno, jak i drugie, przez dłuższy czas jeszcze, niedawały dokładności wymaganej przy mierzeniu długości geograficznej na morzu;

<sup>1)</sup> Por. J. Rambal. Enseignement théorique de l'horlogerie. Genève, 1889, p. 251.

<sup>2)</sup> Por. E. Gerland. Leibnizens nachgelassene Schriften. Leipzig 1906, str. 122.



zadaniu temu odpowiedział dopiero w r. 1764 chronometr Harrisona.

Solski, w *Architekcie Polskim* z r. 1690, w „Nauce XVII o biegu minuty w różnych zegarkach“, powiada: „Im większe są zegary, tym ramiona i perpendykuly<sup>1)</sup> mniej minut czynią w godzinę“ i szkicuje takie trzy ustroje:

1) „Małego pectoralika“, nakręcanego co 12 godzin, ze „sprężynką“ w „kłótcę“ zamkniętą, „na którą się zwija strónka albo łańcuszek“; w tym zegarku „minut liczba 10272 na godzinę“.

2) „Stołowego zegaru sporego na ćwierć łokcia“, mającego „minut 6121 w godzinie jednej“.

3) „Zegaru średniego z wagami i z perpendykiem“, który rachuje minut 1248 w godzinie“.

Solski nadmienia, że „wielkie zegary na godzinę czynią minut około 400“. Wogóle nie obliczano wtedy mechanizmów zegarowych odpowiednio do pewnej skończonej, całkowitej lub ułamkowej, liczby wahań na sekundę.

Powyższe szczegóły historyczne, dotyczące zegarmistrzostwa, pozwolą zdać sobie sprawę ze znaczenia technicznego i historycznego pism zegarmistrzowskich Kochańskiego.

---

Pierwsze i najgłówniejsze z tych pism stanowi księgę IX obszernego dzieła jezuita Kacpra Schotta, wydanego w Würzburgu w r. 1664, pod tytułem:

*Technica curiosa sive mirabilia artis, libris XII comprehensa, quibus varia experimenta, variaque technasmata pneumatica, hydraulica, hydrotechnica, mechanica, graphica, cyclo-metrica, chronometrica, automatica, cabalistica, aliaque artis arcana ac miracula rara, curiosa, ingeniosa magnamque partem nova et ante hac inaudita, eruditi orbis utilitati, delectationi, disceptationique proponuntur.*

W dziele tem, na tysiącu przeszło stronic in 4<sup>o</sup>, podał Schott opisy doświadczeń pneumatycznych Guericke'go (*Mirabilia magdeburgica*), Roberta Boyle (*M-lia anglicana*), Torricelli'ego, Waleryana Magni, Roberval'a i innych

---

<sup>1)</sup> Kolibniki i wahadła.

(*M-lia varia*) i własne tych doświadczeń roztrząsanie (*Scrutinium physicum*), dalej opisy różnych nowych przyrządów, pomysłu własnego i innych (*M-lia hydrotechnica*, *M-lia mechanica*), pomysły języka uniwersalnego i tachygrafii (*M-lia graphica*), obliczenia liczby  $\pi$  (*M-lia cyclometrica*), zegarmistrzostwo Kochańskiego (*M-lia chronometrica*), pomysły dotyczące ruchu wiecznego Bechera, Kochańskiego i Solskiego (*M-lia automatica*), wreszcie różności (*M-lia miscellanea*) i kabałę (*M-lia cabalistica*).

Schott cenił wysoko współpracownictwo młodego kolegi z Moguncyi, którego Statykę wydrukował w swoim *Cursus Mathematicus* z r. 1661. Ale, gdy ta ostatnia nosiła nazwisko Kochańskiego, to przy zegarmistrzostwie nazwisko to nie zostało wymienione. W przemowie (proemium) tylko do księgi IX, Schott, zaznaczywszy, że ze wszystkich znanych sposobów mierzenia czasu, najmniej niedokładności przedstawia zastosowanie wahadła i że od zegarów wahadłowych spodziewać się należy wielkich usług, zapowiada podanie w tej księdze nowych, różnorodnych i jaknajdowcipniej obmyślanych ustrojów zegarowych, zaczerpniętych z nowej chronometrii mechanicznej i nowej umiejętności ruchów „quam *Amicus* conscribere coepit, suoque tempore multis auctam atque expolitam, Deo dante praelo preparabit, non sine Litterariae Reipublicae emolumento“. Że tym „przyjacielem“ był Kochański a nie kto inny, dowodzi oprócz innych szczegółów, powołanie się w rozdziale trzecim, zaczerpniętym, podobnie jak i dalsze rozdziały księgi IX, dosłownie z pisma „przyjaciela“, na Statykę jako na pracę własną i w rozdziale ósmym — anagram, ukrywający pomysł wahacza magnetycznego dla zegarków kieszonkowych. Rozwiązanie tego anagramu znajdujemy w pracy Kochańskiego z r. 1685, w której tenże powołuje się znów na swe zegarmistrzostwo, stanowiące księgę IX *Techniki* Schotta.

Był to pierwszy ogólny wykład zegarmistrzostwa, jak wykazuje bibliografia<sup>1)</sup>, notująca przedtem same tylko opisy zegarów słonecznych, wodnych i piaskowych. Późniejsi autorowie kompendyów zegarmistrzowskich: Derham<sup>2)</sup> w Anglii i Dom Alle-

1) Por. „Die gesammte Literatur über Uhrmacherei und Zeitmeskunde“... zusammengestellt von M. Loeske. Bautzen, 1897.

2) The artificial Clockmaker. London, 1714.



xandre<sup>1)</sup> we Francyi, powołują się na tę pracę i wyrażają o niej z wielkiem uznaniem, wymieniając wszakże Schott'a, jako jej autora, a nie Kochańskiego. Derham odsyła tam czytelnika co do opisu różnych szczegółów ustrojów a Dom Alexandre streszcza pobieżnie całą księgę IX *Techniki*. W ozdobnem dziele: *Histoire de l'Horlogerie*, z r. 1849, zegarmistrz francuski Piotr Dubois powtarza streszczenie Alexandre'a, z dodaniem wybornych kopii trzech tablic rysunków *Techniki*.

Cała księga IX, jak objaśnia Schott na wstępie, podzieloną została przez Kochańskiego na dwie części: pierwszą „jakoby przygotowawczą“ (quasi parasevatica), obejmującą różne zasady i ustroje chronometrii mechanicznej i drugą, poświęconą nowym pomysłom różnych zegarów (automaturgica), a także łatwiejszym sposobom uwieczniania ich ruchu. Część pierwsza składa się z siedmiu a druga z czterech rozdziałów. Projekty więcej złożonych machin o ruchu wiecznym odłożone zostały do księgi X.

W rozdziale pierwszym streszcza Schott z pracy Kochańskiego opis różnych rodzajów kół, używanych w owym czasie w zegarmistrzostwie, z zębami, palcami i t. p., nadmieniając, że te różne zazębienia „przyjaciół“ nazywa wogóle „ansae rotantes“ i że one „do ruchów zegarowych albo winny albo mogą być używane, jak słusznie ostrzega przyjaciel“. W rozdziale drugim, również streszczonym przez Schott'a, podany jest krótki opis wahadła a prawa jego ruchu wyłożone w sześciu postulatach. Rzecz ta, opracowywana przez fizyków florenckich, a wyłożona prawidłowo dopiero przez Borelli'ego<sup>2)</sup>, nie była wtedy jeszcze treściwiej formułowaną i inni autorowie wykładali ją w długich szeregach twierdzeń<sup>3)</sup>. Podawszy postulaty, wyjęte z pracy Kochańskiego, Schott nadmienia, że sprawdzili je licznemi doświadczeniami: Fabry (lib. 2 et 5 suae Phisicae), Mersenne (in versione Galilaei lib. 1 art. 18), a także „przyjaciel“ w Mougneyi. Jak pisze Schott, Kochański wykonał te doświadczenia za pomocą dwu ściśle jednakich kul ołowianych, zawieszono-

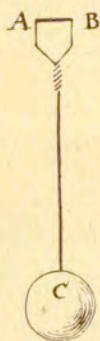
<sup>1)</sup> *Traité général des Horloges*. Paris 1734.

<sup>2)</sup> „De vi repercussionis et motionibus naturalibus a gravitate pendentibus“. Bononiae 1667.

<sup>3)</sup> W dziele Honorata Fabry: „Tractatus Physicus de motu locali“, z r. 1646, Księga ósma de motu funependulorum, obejmuje na 37 stronach 46 twierdzeń, obok wielu wniosków i lemmatów.

nych na drutach mosiężnych. Końce drutów, stanowiące środki wahań, miały kształt jak na rys. 5 oś *AB*. Należy się więc miejsce Kochańskiego u, w dziejach fizyki doświadczalnej, w szeregu pracowników obok Fabry'ego i Mersenne'a.

O doświadczeniach nad wahadłem wspominał już Kochański w swej „Statyce“, pisanej w r. 1660 (data listu Kochańskiego do Schott'a, podanego na końcu *Theoreses Mechanicae*). Przystępując tam w paragrafie czwartym, automaturgicznym, do opisanu pomysłów ruchu wiecznego, zaznacza<sup>1)</sup> że głównym składnikiem w pierwszym pomysle jest wahadło, nad którym pracował i doszedł do obmyślenia „kilku praktyk, znacznie różnych od ogłoszonej przez Huygensa“ (*Horologium* 1658). Nadmienia, że „przystosowane przez tegoż wahadło, do zwykłego zegara, czyni wprawdzie zegar doskonalszym, nie daje wszakże tej doskonałości, do którejby tenże mógł być doprowadzony“.



Rys. 5.

Po dwóch rozdziałach, streszczonych przez Schott'a, następują dalsze pióra Kochańskiego. Rozdział trzeci *Mensurae Chronometricae* zaczyna Kochański wzmianką o niedogodnościach, z jakimi walczyć musieli astronomowie, stosujący wahadło do mierzenia czasu, gdy w nocy trzeba było wyteżać wzrok przy liczeniu wahań i o skargach na to Galileusza, którego nie wymienia z nazwiska, mówiąc tylko „illud tamen incommodum Vir hac aetate nostra per quam celebris querebatur“.

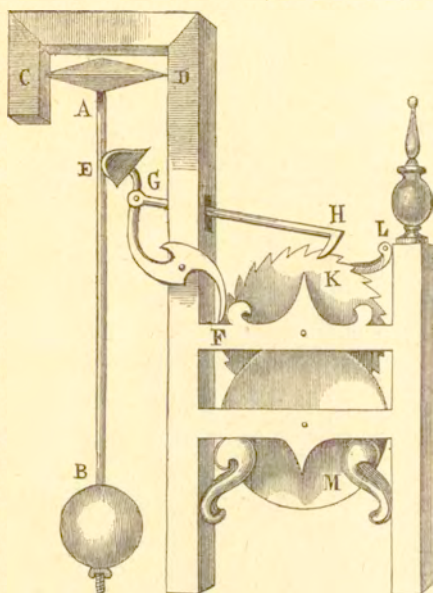
W dziewięciu „propositiones“ opisuje Kochański dziewięć ustrojów zegarowych, z których dwa pierwsze (rys. 6 i 7) są właściwie licznikami wahań i równie jak zegar Galileusza (rys. 1), który przypominają swym ogólnym wyglądem, nie mają uwidocznionego na rysunku ciężaru poruszającego; z dodanym wszakże ciężarem, wprawiającym w ruch koło *M*, służyć mogą jako zegary. Przedstawiają też te dwa ustroje ważne dla dziejów zegarmistrzostwa znaczenie, wykazując, że pierwotny pomysł Galileusza znajdował różnych naśladowców i stwierdzają pogląd Gerlanda<sup>2)</sup> na pierwszeństwo Galileusza przed Huygensem w zastosowaniu wahadła do zegarów.

<sup>1)</sup> G. Schott: „Cursus Mathematicus“. 1661, p. 652.

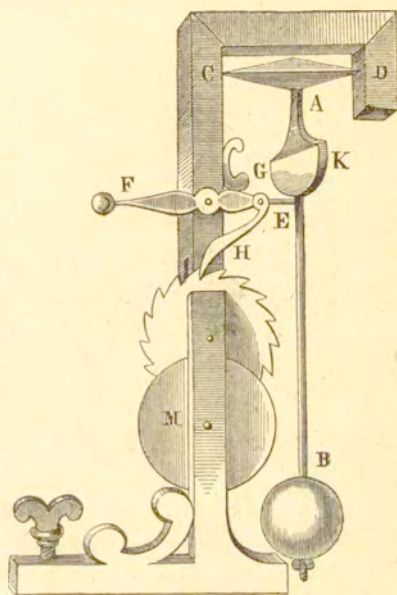
<sup>2)</sup> Por. przyp. 5, str. 414.



Trzeci pomysł, zupełnego już zegara (rys. 8), uderza oryginalnością wychwyty, złożonego z koła *DE*, z ząbzeniami, o które zahaczają tryby umieszczone na osi wahadła. Równie oryginalny jest wychwyty czwartego zegara (rys. 9), złożony z ramienia *AC*, z mocowanego z prętem wahadła i łąty korbowej *CD*, zamieniającej wahań na ruch kołowy ciągły punktu *D*. Punkt ten należąc może do koła *D*, albo też do mogąc zastąpić to koło korby *K*,



Rys. 6.

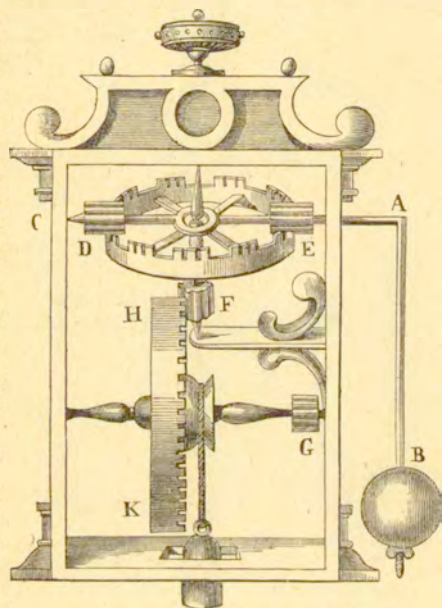


Rys. 7.

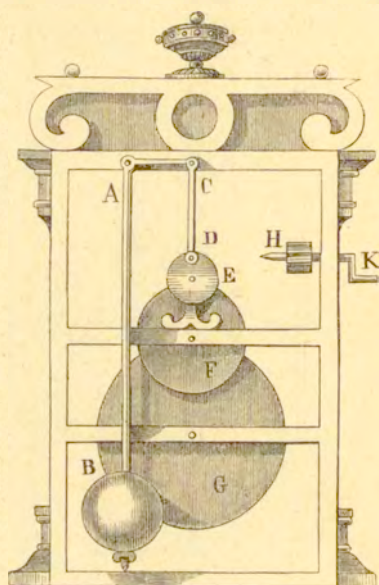
z mocowanej z trybem *H*, jak przedstawiono z boku na rysunku. Kochański objaśnia, że koła *D*, *E*, *F*, *G* i odpowiadające im tryby są zębate, a pomysł miał na celu urzeczywistnienie w zegarze wyłącznie ruchów kołowych, w myśl zasady Arystotelesa: *Circulum omnium admirabilium esse principium*. Oryginalne wychwyty tych dwóch zegarów mniej są proste od wychwyty wrzecionowego, użytego w zegarze Huygensa (rys. 2), w zastosowaniu jednak mogły oddać pewne usługi.

Obserwacya na sztucznej sferze, ruchu ekliptyki w około osi równika, nasunęła Kochańskiemu dwa następne pomysły. W pierwszym z nich (rys. 10) punkt *M* wahadła *AB* przesuwa się

przy każdym wahnięciu, razem z wózkiem *G*, jeżdżącym po drutach *HI* i *KL*. Wózek ten ma u spodu łąpkę, obejmującą brzeg krążka eliptycznego *FE*, umieszczonego pochyło na osi *CD*. Gdy, pod działaniem ciężaru, obraca się koło *N* i oś *CD* robi pół obrotu, umocowany na niej pochyło krążek *FE* przyjmuje położenie wskazane linią kropkowaną, przesuując wózek *G*, zgodnie z ruchem punktu *M* pręta wahadłowego. Rolę krążka *FE* odgrywać może także walec z ukośnymi nacięciami, przedstawiony obok na osi



Rys. 8.



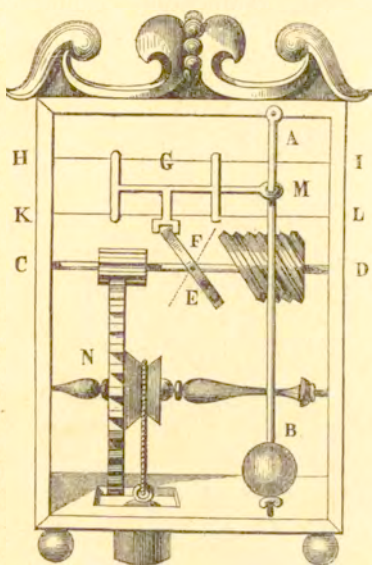
Rys. 9.

*CD*, a wtedy spód łąпки *G* ma zazębienie odpowiadające tym nacięciom. W drugim zegarze (rys. 11) pręt wahadłowy *AB*, ruchomy około osi *AC*, jest przedłużony do *D* i podczas wahanja opiera się o brzegi skośnie ściętego walca *FA*, który wprawiany jest w ruch trybem *L*.

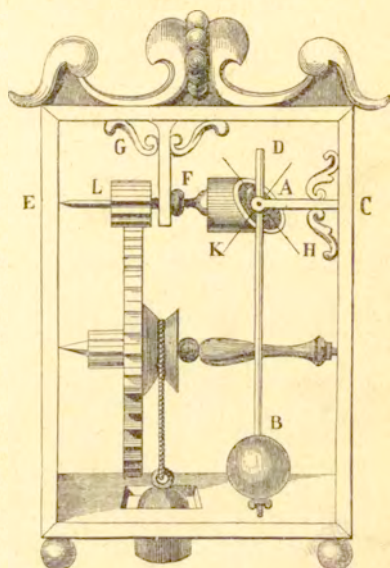
W propozycjach siódmej i ósmej, miał na celu Kochański przystosowanie wahadła do starych mechanizmów zegarowych, z wychwytem wrzecionowym pionowym, takim jak w pierwszym zegarze Huygensa (rys. 2). W propozycji siódmej (rys. 12), koniec drążka *FE*, zmocowanego z wrzecionem, chwyta-



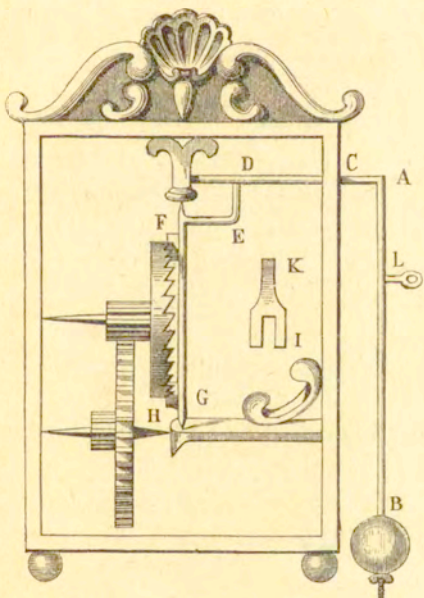
ny jest przez łapkę *DE*, mającą kształt taki, jak obok na rysunku *KI*. W propozycji ósmej (rys. 13), przedstawione w perspektywie



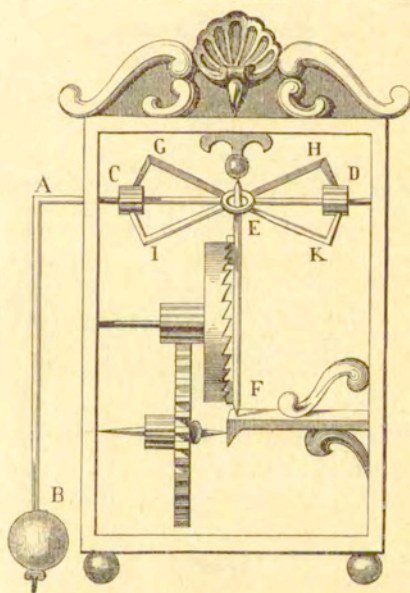
Rys. 10.



Rys. 11.



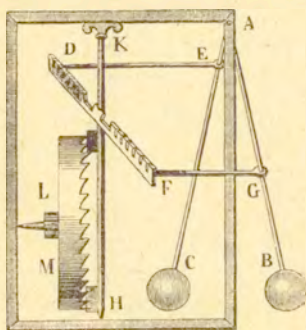
Rys. 12.



Rys. 13.

łuki *GI* i *HK*, mają częściowe zazębienia, podobne do zazębień koła *DE* (rys. 8) w pomysle trzecim.

Zastosowanie wychwytu wrzecionowego w tych dwóch zegarach nie różni się od takiegoż zastosowania w zegarze Huygensa (rys. 2), który służył za wzór zegarom astronomicznym późniejszym. Nie można się też zgodzić na zdanie Alexandre'a, który o ustrojach opisanych w „Technice“ Schott'a mówi ogólnikowo, że stoją one niżej od używanych za jego czasów (1738 r.) w zegarach astronomicznych sekundowych; niższość ta bowiem odnosiłby się chyba mogła do wykonania rysunków, nie zawsze dość jasnych. Dubois, z powołania zegarmistrz, podawszy wybrane kopie tych rysunków, twierdzi przeciwnie, że „wszystkie propozycje autora są bardzo ciekawe, ale nie przedstawiają wielkiej użyteczności dla artystów naszych czasów (1849 r.); wszakże, gdyby wystudowano starannie różne systemy tego autora, wyciągnąwszy z nich można pewną korzyść dla nowoczesnego zegarmistrzostwa.



Rys. 14.

Pomysł dziewiąty (rys. 14) polega na zastosowaniu do dawnego mechanizmu zegarowego, z wychwytem wrzecionowym i wahaczem, dwóch wahadeł  $AC$  i  $AB$ , których wahania odpowiadają ruchom wahacza poziomego  $DF$ , połączonego z prętami wahadeł za pośrednictwem drążków  $FG$  i  $DE$ . Z powodu przedstawienia wahacza i drążków w perspektywie, podczas gdy mechanizm zegarowy i wahadła rzucone są na płaszczyznę pionową, pomysł nie dość jasno uwidoczniiony jest na rysunku. Kochański sądzi, że zastosowanie dwóch wahadeł dać może większą regularność chodu zegara, że wszakże jedno wahadło mogłoby wystarczyć, przy bardzo dokładnem wycięciu zębów koła  $LM$ . Originalny pomysł zegara o dwóch wahadłach próbował później urzeczywistnić w odmienny sposób Campani<sup>1)</sup> Dom Alexandre twierdzi o pomysle dziewiątym, że „obawiać się należy aby dwa wahadła nie zatrzymały ruchu“; Dubois przeciwnie odnosi wyżej przytoczony pochlebny sąd do wszystkich dziewięciu pomysłów, a więc i do dwuwahadłowego.

<sup>1)</sup> „Matthaei Campani Horologium“. Amstelodami, apud Elsevirium 1678.



W rozdziale czwartym mówi Kochański o motorach zegarowych. Opisując działanie sprężyn, przytacza dziwaczne zdanie van Helmonta, który w swem głośnem dziele *Ortus medicinae*<sup>1)</sup> utrzymywał, że przy wietrze północnym sprężyny ciężej się rozwijają i że wahadło dwa razy dłuższe porusza się dwa razy wolniej. Kochański sądzi, że van Helmontowi powodziło się lepiej w kwestyach chemicznych, aniżeli fizyko-matematycznych.

Przechodząc do sposobów regulowania ruchu sprężyn, mówi: „Używane są dwa sposoby regulowania: pierwszy, częściej spotykany, który widzimy i w dawniejszych zegarach, polega na zmiennym nacisku jakiegokolwiek drugiej sprężyny, wywieranym na krążek, mający kształt serca. Ten krążek bowiem mniej bywa naciskany przez sprężynę hamującą, gdy sprężyna zegarowa ma mniejszą siłę; gdy zaś ma ona siłę większą, siła ta jest więcej osłabiona, tak, że w ten sposób powstaje pewna równowaga. A że sposób ten jest bardzo dogodny i mniej złożony, więc jest stosowany i teraz przez współczesnych, dlatego, że jest znacznie prostszy i pożyteczny a doświadczenie uczy, że zegary w ten sposób zbudowane, mają bieg regularniejszy od wielu innych, zrobionych według następującego, subtelniejszego sposobu“.

W powyższych słowach opisał Kochański sprężynę hamującą, zwaną przez anglików *stack-freed*<sup>2)</sup> a używaną w zegarkach, przed rozpowszechnieniem ślimaka. Sprężyna hamująca, łukowego kształtu, wywierała nacisk na oś sprężyny zegarowej, za pośrednictwem umocowanego na tej osi excentryka. Koniec sprężyny hamującej dotykał dłuższych promieni excentryka i wywierał większy nacisk, podczas silniejszego rozwijania się sprężyny zegarowej. Opisem Kochańskiego posilkowali się dawniejsi pisarze, według których Piotr Leroy<sup>3)</sup>, Berthoud<sup>4)</sup> i Moinet<sup>5)</sup>

<sup>1)</sup> Wenecya 1651. W rozdziale de tempore, ustępy 50 i 51.

<sup>2)</sup> Por. „A History of Watches and other Timekeepers“ by J. F. Kendal. London 1892. Str. 59.

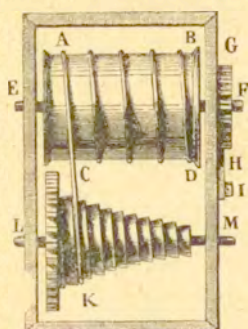
<sup>3)</sup> „Etreennes chronométriques“. Paris 1760.

<sup>4)</sup> „Histoire de la mesure du temps par les horloges“. Paris an X (1802). T. I, str. 77.

<sup>5)</sup> „Nouveau traité général d'horlogerie“. Paris 2<sup>m</sup>e ed. T. II, str. 181.

opisali niezbyt jasno sprężynę hamującą; dopiero Speckhart<sup>1)</sup> podał wyraźny rysunek ustroju. To też, dla historii zegarmistrzostwa, przytoczone słowa Kochańskiego mają znaczenie źródłowe, wykazując przytem, jak wolno wchodził w użycie ślimak, skoro wprowadzony w pierwszej połowie XVI w., stosowany był jeszcze w drugiej połowie XVII w., równolegle ze sprężyną hamującą.

Jakkolwiek sposób regulowania ruchu sprężyny za pomocą ślimaka, uważał Kochański za mniej dogodny, opisał jednak ślimak szczegółowo, dodając przytem, że jest to urządzenie dość



Rys. 15.

pospolite, stosowane także do automatów kuchennych. Ślimak Kochańskiego (rys. 15) nieczem się nie różni od ślimaka w jajku norymberskiem (rys. 4). Kochański nadmienia, że zegarmistrze jego czasów próbowali dokładności ślimaka, wsłuchując się w chód zegara. Uważając tę próbę za niezbyt pewną, proponuje dwie inne: pierwszą statyczną, za pomocą ciężaru zawieszzonego na strunie, owijającej ślimak, a drugą chronometryczną, za pomocą wahadła. Pierwsza z dwu proponowanych prób weszła

w życie w formie urządzenia mechanicznego do obróbki ślimaka, tak aby jego zwoje odpowiadały ściśle zmianom napięcia sprężyny. Związek więc pomysłu machin, budowanych w tym celu w XVIII w. a opisanych przez Berthoud'a<sup>2)</sup>, przypisać należy Kochańskiemu.

Pomiędzy różnemi zawieszeniami ciężarów zegarowych, jakie podaje Kochański, figuruje także zawieszenie dwublokowe, takie jak w zegarze Huygensa (rys. 2). Bloki stałe, przedstawione tam z boku, na rysunku Kochańskiego (rys. 16), widziane są w elewacyi. Ponieważ zawieszenie to przedstawia Kochański w szeregu innych, używanych podówczas, nie wzmiankując o Huygensie, o którym w „Statyce“ mówił tylko, jako o stosu-

<sup>1)</sup> Saunier-Speckhart, l. c. str. 192.

<sup>2)</sup> „Essai sur l'horlogerie“. Paris 1763, t. I, str. 156.

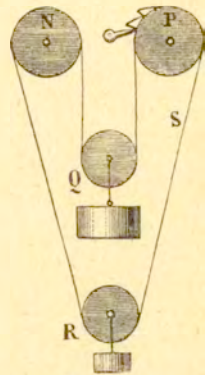


jącym wahadło do dawnych ustrojów zegarowych, wnosić stąd wypada, że przypisywanie przez niektórych historyków zegarmistrzostwa, wynalazku tego zawieszenia Huygeniowi, nie ma podstawy. Dom Alexandre podnosi zawieszenie dwublokowe podane w „Technice“ Schott’a, a zwłaszcza tę jego zaletę, że przy podnoszeniu ciężaru (nakręcaniu zegara), ruch wahadła nie zostaje wstrzymanym: Dubois daje kopię z „Techniki“ Schott’a, wszystkich rysunków zawiesznień.

W rozdziale piątym „Signa chronometrica optica seu indices“, daje Kochański szczegóły urządzania skazówek na różnych figurach tarcz zegarowych. Opisuje więc urządzenie skazówek na tarczach: kwadratowej, sześciokątnej lub eliptycznej, takie, że koniec każdej skazówki, wydłużającej się to znów skracającej podczas ruchu, dochodzi zawsze do cyfr wypisanych na obwodzie tarczy, a więc położonych w różnych odległościach od jej środka.

Przy dwóch tarczach nierównoległych, jako sposób przesyłki ruchu, proponuje Kochański, tak zwany obecnie łącznik Cardana<sup>1)</sup> i podaje jego rysunek. Pierścienie tego systemu, używane do zawieszania busoli na okrętach, podał w „Statyce“, przy opisie maszyny o ruchu wiecznym. Dom Alexandre wyraża uznanie dla opisu tych dowcipnych urządzeń a Dubois podaje rysunek wydłużającej się skazówki.

Rozdziały, szósty „Signa acustica“ i siódmy „Ornamenta et Parerga machinarum chronometricarum“, traktują o mechanizmach zegarowych bijących godziny, lub budzikach i o ozdobach zegarów. Część drugą, taumaturgiczną, rozpoczyna rozdział ósmy „Chronometra paradoxa“, w którym między innymi proponuje Kochański zastosowanie wahadła do zegarków kieszonkowych, zawieszając ustrój zegarka w pierścieniach, o których była mowa. W kryptogramie zaś, który przytoczony będzie niżej, zamyka pomysł innego urządzenia zegarka z wahadłem.



Rys. 16.

<sup>1)</sup> Na str. 452 dzieła „De Subtilitate“ wspomina Cardan nie o łączniku ale o pokrewnych pierścieniach, jako o rzeczy znanej. Niewłaściwie więc tak jednemu jak i drugiemu nadawane jest jego nazwisko.

W rozdziale dziewiątym „Chronometra expedita“ opisuje różne klepsydry a między niemi urządzoną do odwracania co godzinę, klepsydrę z sześćdziesięcioma kulkami, z których każda w ciągu minuty przebiega drogę helisoidalną. Rozdział dziesiąty „Horometra nova reliqua“ obejmuje pomysły, polegające na kombinacji klepsydr z ruchem zegarowym kołowym. Prawdopodobnie większość klepsydr, podanych w tych dwóch rozdziałach, jest własnego pomysłu autora. Inne zupełnie opisuje Dominik Martinelli w dziełku *Horologi Elementari*, wydanem w Wenecyi w r. 1649<sup>1)</sup>. Rozdział jedenasty „Horometra perpetuata“ wkracza już w dziedzinę mrzonek o ruchu wiecznym.

Praca Kochańskiego o zegarmistrzostwie, obok opisu własnych pomysłów autora, daje obraz stanu tej sztuki w epoce największego jej rozwoju, bezpośrednio po rozgłosnem wystąpieniu Huygensa, z zastosowaniem wahadła do zegarów. Ogólne wykładu zegarmistrzostwa nie było przedtem. Wzmiankowane dziełko Martinelli'ego z r. 1649 traktowało tylko o rozmaitych kombinacjach klepsydr. Wydana w r. 1665 broszurka Capriglia *Misura del tempo cioè trattato d'horologij da ruota*, o której bibliograf włoski Riccardi wspomina, że jest prawdopodobnie pierwszą książką, traktującą o zegarach z kołami<sup>2)</sup>, obejmuje zaledwie skąpe wzmianki o ustrojach zegarowych z XVI w. Praca więc Kochańskiego stanowi pierwszy ogólny wykład zegarmistrzostwa, po którym dopiero książki Dom Alexandre'a i Derhama, objęły całość przedmiotu.

Stanowiąc niezbędnę źródło dla historyka, „Zegarmistrzostwo“ Kochańskiego świadczy jednocześnie o gruntownej znajomości przedmiotu, nie tylko naukowej, ale i warsztatowej, autora. Własną pomysłowość wykazał głównie w projektach ustrojów zegarowych, piątym i szóstym (rys. 10 i 11). Zaproponował sposób próbowania dokładności ślimaka, stanowiący zawiązek pomysłu maszyn budowanych w tym celu w XVIII w. Dom Alexandre i Dubois wyrazili uznanie dla różnych szczegółów urządzania skazówek zegarowych, podanych przez Kochańskiego. Pomysły różno-

<sup>1)</sup> Przekład tego dziełka (według edycyi z r. 1663) podał Ozanam w t. III swoich *Recréations Mathématiques* (edycya z r. 1741).

<sup>2)</sup> Por. P. Riccardi. *Biblioteca Matematica*. 1893 str. 238.



rodnych klepsydr, kombinowanych z kołami, wykazują także niezwykłą biegłość w projektowaniu ustrojów mechanicznych.

Podobieństwo dwóch pierwszych zegarów Kochańskiego, do zegaru Galileusza, dopuszcza wniosek, że myśl przystosowania wahadła do zegarów była ogólnie rozpowszechnioną w pierwszej połowie XVII w. Nie można więc wątpić o istnieniu zegarów wahadłowych Bodekera i Burgi'ego, o których była wzmianka, jak i o zegarze wahadłowym, zbudowanym według podań angielskich <sup>1)</sup>, przez Ryszarda Harrisa w r. 1641. Spór o pierwszeństwo wynalazku, jaki toczyli uczniowie Galileusza z Huygensem, traci znaczenie, zegar zaś Huygensa z r. 1658 pozostaje jako najwybitniejsze z urzeczywistnionych w tym czasie zastosowań wahadła do zegarów, gdyż na niem wzorować się zaczęły natychmiast zegary astronomiczne i publiczne w Holandyi i innych krajach.

Założone w r. 1682, czasopismo naukowe lipskie *Acta Eruditorum*, w którym w r. 1684 ukazała się praca Leibniza, dająca pierwsze podstawy rachunku różniczkowego, podało w r. 1685 artykuł Kochańskiego p. t.:

*Novum genus perpendiculi pro horologiis rotatis portatilibus. Vulgarium elatere vibrante instructorum nova dispositio et ex hac suprema perfectio.*

Opisywany wahacz magnetyczny nazwany został nowym, ponieważ dotąd niebył w użyciu, jakkolwiek Kochański zbudował go w Moguncyi w r. 1659 a w księdze IX „Techniki“ Schott'a zapowiedział w kryptogramie:

RGT. TCO. MME. RIP. NAE. INS. ATE.

mającym znaczyć:

PER MAGNETIS TRACTIONEM  
12 21 1    8 19 2 13 9 3 16 18    4 10 14 5 20 11 6 17 15 7

a utworzonym przez wyjmowanie od lewej do prawej ręki każdej trzeciej litery i tak dalej każdej trzeciej z liter pozostających, jak pokazują wypisane pod literami liczby porządkowe.

<sup>1)</sup> Por. J. F. Kendal, l. c. str. 77.

Jak opowiada Kochański, do wynalezienia wahacza magnetycznego doprowadziło go przypadkowe spostrzeżenie, że zwykle wahadło może regulować ruch zegara. Spostrzeżenie to uczynił przedtem, nim go doszła wiadomość o zegarze wahadłowym Huygensa. Posiadał zegarek z wahaczem złożonym z dwóch skrzydeł. Gdy jedno z tych skrzydeł, odłamane, odpadło, zauważył, że skrzydło pozostałe wykonywa razem z osią ruchu, wprawdzie szybsze niż gdy były dwa skrzydła, ale zupełnie jednostajne i równotrwałe. Przypomniało mu się wtedy wahadło, używane przez Galileusza do mierzenia czasu, o którym czytał i z którym sam robił doświadczenia. Przytaczaliśmy o tych doświadczeniach wzmiankę Schott'a. Opowiadanie to Kochańskiego stwierdza wnioski, w sprawie zastosowania wahadła do zegarów, wywiedzione ze szczegółowego rozpatrzenia jego „Zegarmistrzostwa“.

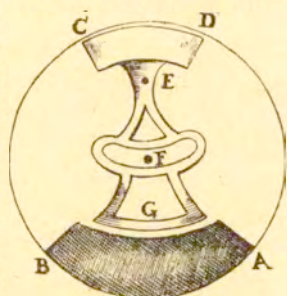
Podobny przypadek, mówi dalej Kochański, doprowadził go około r. 1672 do zastosowania sprężyny regulującej ruch wahacza w zegarku. Zauważył w starym zegarku, zużyтым i uszkodzonym, jak wahacz, obficie obciążony ołowiem, uderzając mocno o dwie giętkie szczecinki, uskuteczniał wahania równotrwałe, jakkolwiek szybsze. Zastrzega się przytem, że przytacza tę obserwację nie dla przypisania sobie zasługi wynalazku, ale dla wykazania, jak wynalazki podobne mogą być wprowadzane w życie, bez wiedzy uczonych. Z uwagi tej wyciągnąć można wniosek, że jeżeli w historii zegarmistrzostwa wymieniani są jako współzawodnicy Huygensa w sprawie wynalazku włosa spiralnego Hooke i Hautefeuille, to Kochański stawiany być winien obok nich, w rzędzie uczonych, którzy w wieku XVII pracowali nad zastąpieniem w zegarkach, starodawnych szczecinek, sprężyną regulującą.

Zegarek z wahaczem magnetycznym przedstawił Kochański w r. 1667 Ferdynandowi II księciu Etruryi. Koło *ABCD* (rys. 17) wyobraża odwrotną stronę zegarka, *AB*—kawałek magnesu dość ciężkiego, *EFG*—wahacz magnetyczny stalowy, z osią wahań w punkcie *E*, *CD*—przeciwwagą (*antisacoma*) z metalu innego niż stal, zrównoważoną z całym wahaczem *EFG*. Środek mechanizmu *F*, na rysunku 18, przedstawia się jako oś *FH*, z którą razem cały mechanizm jest oparty wewnątrz kopert na czopach *H*

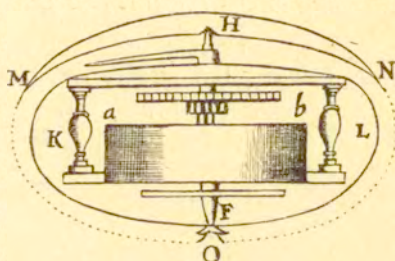


i *F.* Kochański nie tai, że jego zegarek ma dwie wady: 1) zbyt wielki ciężar magnesu, 2) działanie magnesu na różne części żelazne mechanizmu; zapewnia wszakże że chodzi regularnie a jako zaletę podnosi zawieszenie mechanizmu na czopach.

Zastanawia się następnie nad liczbami wahań, przyjmowanymi przez ówczesnych zegarmistrzów. Liczby te, jak widzieliśmy z podanych na wstępie liczb Solskiego, brane były dowolnie.



Rys. 17.



Rys. 18.

Kochański podaje obliczone przez siebie liczby zębów, kół i trybów dwóch ustrojów pięciokołowych, z liczbami wahań:

7200	10800
72 I	72 I
60 II 12	64 II 12
56 III 8	60 III 8
48 IV 7	60 IV 8
15 V 6	21 V 7.

W obu ustrojach koło I obraca się raz na 6 godz., koło II (ze skazówką minutową) raz na godzinę a koło IV 60 razy na godzinę. Dzieląc iloczyny liczb zębów kół, przez iloczyny liczb zębów trybów, otrzymujemy liczby wahań:

$$\frac{72 \times 60 \times 56 \times 48 \times 15}{12 \times 8 \times 7 \times 6} = 43200$$

$$\frac{72 \times 64 \times 60 \times 60 \times 21}{12 \times 8 \times 8 \times 7} = 64800,$$

odpowiadające jednemu obrotowi koła I czyli sześciu godzinom. Jednej więc godzinie odpowiadają liczby wahań 7200 i 10800, a jed-

nej sekundzie: 2 i 3. Liczby więc zębów projektowane przez Kochańskiego odpowiadają całkowitym liczbom wahań na sekundę. W dalszym rozwoju zegarmistrzostwa utrzymała się ta metoda i wahacze zegarków nowoczesnych poruszają się zwykle: w chronometrach morskich 4, w zwykłych zegarkach 5, w bardzo małych 6 razy na sekundę, czyli mają liczby wahań na godzinę: 14400, 18000 i 21600<sup>1)</sup>).

Kochański nadmienia, że wybrał przytoczone dwa obliczenia ustrojów zegarowych z pomiędzy wielu, jakie przygotował w swem dziele: *Cogitata et inventa polymathematica*. Rozprawkę swą zamyka postawieniem dwóch zadań, dotyczących praktyki, które przed kilkoma laty rozwiązał. Pierwsze dotyczy obróbki kólek zębatych a drugie, obróbki zwojów ślimaka, wzmiankowanej już w „Zegarmistrzostwie“. *Sed de his et aliis, alias*. Temi słowy kończy.

---

Podany w *Acta Eruditorum* z r. 1687 artykuł Kochańskiego: *Mensurae universales magnitudinum ac temporum*, składa się z następujących czterech rozdziałów: 1. *Nova mensura universalis temporum*. 2. *Nova mensura universalis magnitudinum*. 3. *Mensuram facilis ad posteros, vel absentes transmissio*. 4. *Penduli portatilis ac horologiorum perfectio*.

Jako nową miarę czasu proponuje Kochański drganie płomienia świecy, palącej się na wolnem i spokojnem powietrzu, a jako nową miarę długości—odległość między włosami pióra ptasiego, wróblego lub jaskółczego. Wspomina także o swym pomysle hydraulicznej jednostki ciężaru, odmiennym od opisanego przez Burattini'ego<sup>2)</sup>). Udatniejszemi są, podane w rozdziale 3, wyniki doświadczeń nad rozciągliwością w wilgoci różnych gatunków papieru, używanego do wyrobu miar. Znalazł on, że najwytrzy-

---

<sup>1)</sup> Por. J. Rambal: *Enseignement théorique de l'horlogerie*“. Genève, 1889. Str. 53.

<sup>2)</sup> „amicus quondam meus“, pisze Kochański „in suo hac de re tractatu, Italice in Lituania edito“. Mowa tu o *Mierze Powszechnej* Burattini'ego, wydanej w przedruku włoskim i przekładzie polskim przez L. Birkenmajera w Krakowie w r. 1897.



malszym był gruby papier gdański, który też Rogaliński<sup>1)</sup>, przytaczając doświadczenia Kochańskiego, zaleca „dla ksiąg grodowych urzędowych“.

Odnoszący się do zegarmistrzostwa rozdział 4, zaczyna Kochański od wzmianki o swych doświadczeniach nad wahadłem, z których wyciągnął wniosek, że „wahania jednego i tegoż samego wahadła w łukach nierównych nie są równe“. Mówi następnie o zegarze, który zbudował, z dwoma wahadłami, do pomiaru długości geograficznych na morzu. W zegarze tym drążki wahadeł były sztywne, a tylko u wierzchu kończyły się krótkimi kawałkami wąskich i giętkich sprężyn stalowych. Opis ten przypomina spłaszczenie drążka wahadłowego z pierwszych doświadczeń Kochańskiego (rys. 5). Mówi on o sprawdzeniu doświadczeniem, że owe sprężyny, podobnie jak kierownice cykloidalne (rys. 3), nie dopuszczają zbaczania płaszczyzny ani też opóźniania wahań, w zegarze jego bardzo krótkotrwałych, tak, że dwa całkowite, albo cztery jednostronne odpowiadały jednej sekundzie<sup>2)</sup>. Wyraża też nadzieję, że jego zegar okaże się na morzu dogodniejszym w użyciu, od zegara z wahadłem cykloidalnym.

Jeżeli szczegół przytoczony, że w zegarze morskim Kochańskiego, drążki wahadeł zakończone były krótkimi kawałkami wąskich i giętkich sprężyn, zestawimy z historią sposobów zawieszania wahadła w zegarach, to dojdziemy do wniosku, wyznaczającego Kochańskiemu nader zaszczytne stanowisko w dziejach zegarmistrzostwa. Gdy w XVIII w. badał Berthoud<sup>3)</sup> dwa sposoby zawieszania wahadła w zegarach astronomicznych, mianowicie, zawieszenie na ostrzu i zawieszenie sprężynowe, po długich roztrząsaniach doszedł do przyznania wyższości temu ostatniemu. W następstwie, po przeprowadzonych z inicjatywy astronoma królewskiego Bessel'a, doświadczeniach paryskich Laugier'a i Winnerl'a, zawieszenie sprężynowe uznanem zostało za jedyne, zapewniające bezwzględny izochronizm wahadła. Moinet przypuszcza, że pierwsze zawieszenie sprężynowe pojawiło się w końcu XVII w.<sup>4)</sup>, nie przytaczając żadnych ściślejszych

<sup>1)</sup> *Doświadczenia skutków*, t. IV (r. 1776), str. 289.

<sup>2)</sup> Wahacze dzisiejszych chronometrów morskich poruszają się także 4 razy na sekundę. (Por. str. 434).

<sup>3)</sup> *Essai sur l'horlogerie*, t. II, str. 59 i nast.

<sup>4)</sup> *Nouveau traité général d'horlogerie*, t. II, str. 474 i 492.

danych. Gdy inni historycy zegarmistrzostwa milczą o tej sprawie, a tylko w rozpatrywanem piśmie Kochańskiego znajdujemy wiadomość o jego własnej pracy nad tym przedmiotem, poczytywać musimy naszego uczonego za pierwszego inicjatora zawieszenia sprężynowego, uważanego i dziś za najlepiej zabezpieczające izochronizm wahadła<sup>1)</sup>.

Przechodząc do zegarków kieszonkowych, powtarza Kochański, wyszczególnione w poprzednim artykule wady swego wahacza magnetycznego i odrzucając ten wynalazek, zastanawia się tylko nad takim ulepszeniem budowy zegarków z włosem spiralnym lub prostym, aby wstrząśnienia przy chodzeniu, lub jeździe konnej, nie wywierały wpływu na regularność ich chodu. Podnosi więc ponownie zalety proponowanego w poprzednim artykule systemu zawieszenia mechanizmu wewnątrz kopert.

Z rozpatrzenia pism zegarmistrzowskich Kochańskiego, o których u nas pierwszą wiadomość podał Żebrawski, a z których najgłówniejsze „Zegarmistrzostwo“, stanowiące księgę dzieł wiață dzieła *Technica Curiosa*, przez obcych autorów znanę było jedynie jako praca Schott'a, wyciągnąć można następane wnioski:

„Zegarmistrzostwo“ Kochańskiego było pierwszym ogólnym wykładem tej sztuki. Przed r. 1664 pisano wyłącznie o zegarach słonecznych, wodnych i piaskowych, a jedna tylko broszura *Horologium Huygensa* z r. 1658 obejmowała opis, obmyślnego przez tego uczonego zastosowania wahadła do zegarów kołowych. W „Zegarmistrzostwie“ opisane zostało to zastosowanie, obok dawniejszego pomysłu Galileusza i innych będących owocem rozmyślań i doświadczeń Kochańskiego.

Pierwsze dzieła, traktujące w ogóle o zegarmistrzostwie, ukazały się dopiero w wieku XVIII, a ich autorowie: Derham w Anglii i Dom Alexandre we Francyi, czerpali wiadomości o zegarach dawniejszych wyłącznie z Kochańskiego, którego nazwiska nie znali. Powoływali się więc na Schott'a, jako autora dzieła *Technica curiosa*. Tak samo postąpił Dubois, w swej historii zegarmistrzostwa z r. 1849.

<sup>1)</sup> Por. J. Rambal, l. c., str. 144 i nast.



Kochański, będąc w latach 1657 — 1660 profesorem w Moguncyi, wykonał szereg doświadczeń nad wahadłem i doszedł do wyników, zgodnych z otrzymanymi przez Fabry'ego i Merseenne'a; obok tych więc stanąć winien w szeregu w dziejach fizyki doświadczalnej. Równocześnie z Huygens'em pracował nad zastosowaniem wahadła do zegarów i doszedł do obmyślenia paru ustrojów, odmiennych od opisanego w *Horologium* z r. 1658. Zajmując się praktycznie zegarmistrzostwem, proponował, między innymi, próbowanie dokładności ślimaka za pomocą ciężaru, zawieszzonego na strunie owijającej ślimak, a pomysł ten urzeczywistniony został w XVIII stuleciu, w postaci machin, obrabiających ślimak w ten sposób, aby jego zwoje odpowiadały ściśle zmianom natężenia sprężyny.

Zajmowało także Kochańskiego, podobnie jak przedtem Huygensa, zastosowanie zegarów wahadłowych do pomiaru długości geograficznych na morzu. Prace obu uczonych nie wydały pożądaných owoców, gdyż dopiero chronometry XVIII w. pozwoliły wykonywać dokładnie pomiar długości. Wszakże z pracy Kochańskiego, nad zegarem wahadłowym okrętowym, pozostała w zegarmistrzostwie cenna pamiątka w postaci do dziś używanego zawieszenia sprężynowego wahadła.

Opracowując ustrój zegarków kieszonkowych, doszedł Kochański, około r. 1672, do zastosowania sprężyny regulującej ruch wahacza kołowego, a jeżeli nie przyjął udziału w sporze, jaki o pierwszeństwo wynalazku toczyli z Huygensem — Hooke i Hautefeuille, to jednak w dziejach zegarmistrzostwa zasługuje na wzmiankę w równym rzędzie z dwoma ostatnimi. Zaznaczeniem wad własnego pomysłu wahacza magnetycznego stwierdził rzetelną praktykę zegarmistrzoską, widniejącą we wszystkich jego pismach w tym zakresie. Wykazują ją zwłaszcza obliczenia ustrojów zegarowych, odniesione do pełnej liczby wahań w ciągu sekundy, które wyrugowały dawne dowolne i do dziś pozostają w użyciu.

M-r F. Kucharzewski:

## L'horlogerie de Kochański.

Communication annoncée 17. XI. 1911.

Adam Kochański, mathématicien polonais (\* 1631†1700), ami de Leibniz et contemporain de Huygens a laissé trois écrits latins sur l'horlogerie.

Le premier est entré comme livre IX dans l'ouvrage: *Technica curiosa sive mirabilia artis. Herbipoli 1664*, du jesuite Gaspard Schott. Visant avant tout les applications nouvelles de la science, Schott ne pouvait omettre celle du pendule à l'horloge — objet d'une controverse entre Huygens et les élèves de Galilée. Il a donc obtenu pour son ouvrage, comme il le dit dans le *proemium* du livre IX, la description de „novas, varias ingeniosissimeque „constructas horometrorum mechanicorum omnis generis species, „e nova chronometria mechanica, novaque motuum scientia, „quam *amicus* conscribere coepit, suoque tempore multis auctam „atque expolitam, Deo dante praelo preparabit, non sine litterariae „reipublicae emolumento excerptas“... mentionnant ensuite que „totum hunc de chronometricis librum, ordinis et compendii gratia „in duas *amico* dispertiar partes“. Décrivant (ch. 1) les différentes roues des horloges, Schott dit: „Hae rotae... varia requirunt in „superficiebus suis variarum figurarum corpuscula, quas in uni- „versum ansas rotantes appellat *amicus*“ et enfin après avoir énoncé les définitions et les lois des vibrations du pendule (ch. 2): „Depre- „hendit hoc frequenti experimento P. Honoratus Fabri,... etiam „Mersennus... Idem deprehendit accurato experimento *amicus* Mo- „guntiae, sumptis duabus sphaeris plumbeis aequalibus, aequegra- „vibus et aequopolitis in superficie, suspensis ex duobus filis „aeneis ex eodem globo dissectis, ideoque aequocrassis, rectis ad „sensum, et ejusdem longitudinis. Filorum extremitas ea quae „erat centrum motuum, formata erat in eum modum, quem fig. 3 „(notre fig. 5, p. 422) sicutaxis *AB* malleo non nihil tusus et pla- „nus redditus fuerit etc. Haec pauca ex multis quae *amicus* habet, „sufficiunt instituto nostro. Nunc ad chronometrica technasmata „cum eodem progredimur“...



L'ami inconnu, tant de fois cité, dont l'écrit constitue les chapitres suivants du livre IX, se laisse deviner, quand il rappelle au commencement du ch. III, avoir donné déjà quelques notions mécaniques „in Theoresibus meis Analectorum loco a P. Casp. „Schotto in Cursu suo Mathematico propositis“. Or *Analecta mathematica sive theoreses mechanicae* dans le *Cursus Mathematicus* de Schott sont signés Kochański et forment sa *Statique* dont on a donné ici même l'analyse <sup>1)</sup>. Ce qu'en dit Schott prouve que dans l'histoire de la physique expérimentale le nom de Kochański doit être placé à côté de ceux de Fabry et Mersenne.

Kochański donne un aperçu complet de l'état de l'horlogerie à l'époque du plus grand développement de cet art, immédiatement après la publication d'*Horologium* de Huygens (1658). Il a déjà dit dans sa *Statique* avoir réussi: „praxes longe diversas ab ea, „quam Christianus Hugenius publicavit, applicato perpendiculo „ad horologium vulgare rotatum“. Son écrit constitue le premier traité général d'horlogerie connu. Les auteurs du XVIII s., Dom Alexandre en France et Derham en Angleterre, mentionnent cet écrit sous le nom de Schott.

Parmis les neuf projets d'horloges avec pendule, qu'il y donne, le cinquième et sixième (fig. 10 et 11) se distinguent par leur originalité. Kochański propose aussi une méthode pour essayer l'exactitude de la fusée et sa proposition renferme le germe de l'idée des machines spéciales, construites dans ce but au XVIII s. et décrites par Berthoud. Dom Alexandre et Dubois ont rendu justice aux différents détails de l'arrangement des aiguilles. Il y a aussi de très curieuses clépsydras, combinées avec des roues. Toutes ces inventions montrent la grande facilité de Kochański à projeter des constructions mécaniques.

Les deux premières horloges de Kochański (fig. 6 et 7) ont quelque analogie avec l'horloge de Galilée (fig. 1). Cette analogie permet de conclure que l'idée d'application du pendule aux horloges était assez répandue dans la première moitié du XVII s. et qu'elle a même pu être réalisée antérieurement aux travaux de Huygens par Bodecker et Burgi en Allemagne et Ri-

<sup>1)</sup> Comptes rendus des séances de la Société Scientifique de Varsovie, III Année (1910), fascicule 7 (Octobre), p. 336.

chard Harris en Angleterre. Le controverse au sujet de la priorité de l'invention, qui a eu lieu entre les successeurs de Galilée et Huygens, perd ainsi tout intérêt et l'horloge de Huygens de 1658 reste seulement la plus importante des différentes applications du pendule aux horloges, effectuées au XVII s.

Dans son article: *Novum genus perpendiculi pro horologiis rotatis portatilibus. Vulgarium elatere vibrante instructorum nova dispositio et ex hac suprema perfectio*, publié dans les *Acta Eruditorum* en 1685, Kochański décrit sa montre avec pendule magnétique, construite en 1667 et offerte à Ferdinand II, duc d'Etrurie. Plus importantes que cette invention sont les remarques suivantes de Kochański:

„Ad hoc porro inveniendum manuduxerat me alia quaedam „observatio mea et quidem (ut quod res est fatear) plane fortuita, „videlicet aptitudo perpendiculi communis ad reddendum regularem „horologii vulgaris cursum, antequam quidquam inaudivissem, „illud a Cl. Hugenio ad idem applicatum fuisse. Cum enim nactus „fuissem horologium quoddam portatile, in quo altera medietas „librilis, in duo velut cochlearia (ut mos erat antiquior) efformati, „casu quodam abrupta fuerat, observavi alteram medietatem super- „stitem, et axi suo cohaerentem, veloces quidem, sed tamen unifor- „mes, in situ debito, vibrationes peregisse; ac tum mihi venerat in men- „tem Galilaei pendulum quo illum in demetiendis temporibus usum „fuisse, alicubi legeram, ac etiam ipsis ego fueram expertus.

„Consimilis quoque casus me circa annum 1672 deduxerat ad „usum elateris, in reddendis uniformibus vibrationibus librilis in ho- „rologio portatili. Observaveram enim in quodam horologio perve- „tusto, ac usu jam detrito, librile illius plumbo liberaliter affixo „praegravatum, dum in geminas setas tenues, atque multum flexi- „biles, fortiter inter vibrandum impingeret, vibrationes aequiditur- „nas, quamvis eas perquam incitatas consecutum fuisse. Quae non „idcirco percenseo, ut horum inventorum laudem in me transferre „velim, sed ut eruditis constet, res omnium oculis expositas, applica- „tiones ad usus minus obvios, nobis etiam incogitantibus, velut ul- „tro ingerere solere...“.

Les paroles de Kochański confirment la conclusion au sujet de l'application du pendule aux horloges, tirée de l'écrit précédent. Elles indiquent aussi que dans l'histoire de l'horlogerie Kochański devrait prendre rang parmi les savants qui, comme



Hooke et Hautefeuille, travaillaient au XVII s. pour remplacer dans les montres les anciens poils de brosse par un ressort réglant le mouvement du balancier.

Quelques parties de l'écrit de Kochański: *Mensurae universales magnitudinum ac temporum*, publié dans les *Acta Eruditorum* en 1687 se rapportent à l'horlogerie. Nous en tirons la mention suivante:

„Vibrationes ejusdem penduli in arcibus inaequalibus inae-  
„quales esse, a multo tempore experientia oculis ipsis manifesta  
„didici. Hanc quidem inaequalitatem cycloidis adminiculo sublatam  
„esse non ignoro, videtur mihi cycloidis usus cum pendulo e fascia  
„appenso, in usus nauticos, ad longitudines terrae investigandas,  
„ob navis agitationem, nonnihil impeditus esse. Quamobrem con-  
„struxi horologium, cujus rotae ad numeros actronomicos decurrunt,  
„in eoque duo pendula aequalia appensa sunt ex elateribus chaly-  
„bdaeis, mediocriter latis, at facile flexibilibus, et breviusculis quidem,  
„sed qui pro re nata produci nonnihil, vel contrahi possunt, reliquae  
„pendulorum virgae sunt rigidae. Experiatur autem elateres hos ad  
„instar cycloidis, digressiones et in iis moras pendulis non permitte-  
„re, sed aequales ad sensum vibrationes peragere: quae quidem in  
„horologio meo breves sunt. Nam binae compositae sive quaternae  
„simplices uni secundo respondent: verum et in longioribus pendu-  
„lis e convenienti elatere pendentibus de felici successu dubitare  
„non licet. Experiatur itaque navigantes, an non pendulum elate-  
„re hujusmodi sustentatum, altero illo suspenso e fascia cycloidem  
„stringente, sit in maii commodius“.

Kochański travaillait donc simultanément avec Huygens à la construction d'une horloge marine. De son travail est resté le ressort de suspension, usité jusqu'aujourd'hui. Selon Moinet, la première suspension à ressort paraît dater de la fin du XVII siècle. „Elle était formée d'une seule lame très mince, longue de quelques pouces et d'une grande flexibilité, que l'on croyait alors essentielle“. Cette description concorde avec les paroles de Kochański, lequel devient ainsi le premier initiateur de la suspension du pendule à ressort.

2. Pan Wiktor Biernacki:

W sprawie ciśnienia energii promienistej.

Komunikat zgłoszony dn. 7 grudnia 1911 r.

Maxwell (w r. 1874), opierając się na założeniu, że fale świetlne są zjawiskiem elektromagnetycznym, wykazał, że muszą one sprawiać ciśnienie na ciała przez nie oświetlane, i że ciśnienie to  $p \left( w \frac{Dn}{cm^2} \right)$ , w przypadku prostopadłego padania fal na ciało, wynosi:

$$p = (1 + r)E,$$

gdzie  $E$  oznacza gęstość objętościową energii fal padających  $\left( w \frac{Eg}{cm^3} : \frac{Eg}{cm^3} = \frac{Dn \cdot cm}{cm^3} = \frac{Dn}{cm^2} \right)$ ,  $r$ —spółczynnik odbicia, t. j. ułamek, wykazujący, jaka część energii padającej odbiciu ulega. Wychodząc z założeń bardziej ogólnych, termodynamicznych, do takiegoż samego wniosku doszedł Bartoli (w r. 1879), niezależnie od istoty fal świetlnych. Wreszcie lord Rayleigh wykazał (w r. 1902), że wzór Maxwell'a — Bartoli'ego dotyczy wszelkich fal, nie tylko fal w eterze (fal świetlnych, widzialnych lub niewidzialnych), lecz także i fal w ośrodkach materjalnych, np. fal dźwiękowych, lub też fal na powierzchni cieczy. Badania eksperymentalne Lebediewa oraz Nichols'a i Hull'a (dla fal świetlnych, 1901 r.), Kapcowa (dla fal na powierzchni cieczy, 1905 r.) i Altberg'a (dla fal dźwiękowych, 1903 r.) sprawdziły słuszność teorii Maxwell'a — Bartoli'ego.

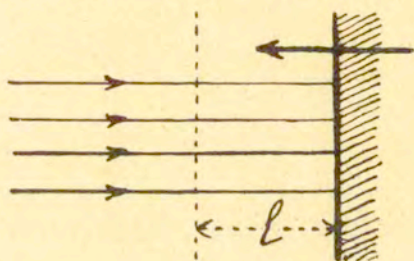
W komunikacie niniejszym chcę podać prosty sposób otrzymania wartości ciśnienia energii promienistej, niezależnie od jej istoty, wychodząc jedynie z zasady zachowania energii <sup>1)</sup>. Drude <sup>2)</sup> wykazał ciśnienie energii promienistej na ciało bezwzględnie czarne w sposób następujący. Niechaj równoległa wiązka jakichkolwiek (elektromagnetycznych, dźwiękowych i t. d.) promieni pada prostopadle na całkowicie je pochłaniające ciało; gęstość obje-

<sup>1)</sup> Słuszność nadmienić wymaga, że w r. 1894 E. Guillaume (Arch. de Sciences Phys. et Natur., str. 121) otrzymał wzór Maxwell'a — Bartoli'ego, również wychodząc z zasady zachowania energii; niedość jednak ściśle rozumowania Guillaume'a na wiele zarzutów się naraziły.

<sup>2)</sup> „Lehrbuch der Optik“, Lipsk. 1900, str. 447—449.



tościową padającej energii oznaczmy przez  $E$ . Kosztem pochłanianej energii promienistej otrzymuje się ciepło. Przesuwajmy ciało oświetlane w kierunku wręcz przeciwnym kierunkowi promieni padających (rys. 1). W tym czasie, w którym ciało przesunie się o długość  $l$ , każdy  $cm^2$  jego powierzchni pochłonie energii o  $El$  więcej, aniżeliby pochłoniął, gdyby ciało się nie poruszało; ten nadmiar pochłanianej energii, zamieniającej się w cieple bezwzględnie czarnem na ciepło, wymaga przy ruchu rozważanym wydatku równoważnej ilości pracy zewnętrznej. Innymi słowy, ruch rozważany ciała napotyka opór ze strony fal (promieni) padających; to znaczy, fale cisną na ciała, na które padają. Oznaczając to ciśnienie przez  $p$ , widzimy, że praca wydatkowana wynosi  $pl$ , nadmiar energii pochłanianej —  $El$ , zatem  $pl=El$ , czyli  $p = E$ ; to znaczy: ciśnienie energii promienistej, padającej prostopadle na ciało bezwzględnie czarne, równa się gęstości objętościowej tej energii. W sposób przedstawiony Drude zupełnie ściśle obliczył ciśnienie energii promienistej na ciała bezwzględnie czarne.



Rys. 1.

Lecz warunki dynamiczne padania energii promienistej są wciąż jednakowe, niezależnie od własności ciała, na które promienie padają; dalsze skutki jedynie od własności ciała zależą. Na pewnych analogiach oprzeć się tu muszę. W przypadku ciała bezwzględnie czarnego padająca energia promienista na ciepło całkowicie się zamienia. Podobnie rzecz się ma przy uderzeniu, dajmy na to, sprężystej kulki o całkowicie niesprężystą, np. glinianą ścianę: przy uderzeniu całkowita energia cynetyczna kulki na ciepło się zamienia. Przy każdej przemianie energii odbywa się praca w ilości równej energii, przemianie ulegającej. Rozważmy jeszcze uderzenie sprężystej kulki o ścianę doskonale sprężystą. W tym przypadku mamy do czynienia z podwójną przemianą energii: 1) energia cynetyczna kulki przekształca się w równoważną ilość energii potencjalnej, zawartej w odkształconej kulce i części ścianki uderzonej; ta ilość energii równa się ilości energii, ulegającej przemianie na ciepło w przypadku, gdy kulka uderza o ścianę niesprężystą; 2) energia potencjalna odkształconych kulki i ściany zamienia się na taką samą ilość energii

cynetycznej odskakującej kulki; kulka odskakuje istotnie z tą samą prędkością, z jaką padała na ścianę. Widzimy, że w przypadku uderzenia kulki o ściankę sprężystą przemiana energii jest podwójna, a więc i praca omawiana jest podwójna w porównaniu z przypadkiem uderzenia o ściankę niesprężystą. Popęd (impuls) uderzenia jest w pierwszym przypadku dwa razy większy, aniżeli w drugim; możemy więc powiedzieć, że i ciśnienie (chwilowe) przy uderzeniu o ściankę sprężystą jest dwa razy większe, aniżeli przy uderzeniu o ściankę niesprężystą. Lecz sam *fakt padania* kulki na ścianę sprawia w obu przypadkach skutki dynamiczne jednakowe; też sama ilość energii przemianie ulega, też sama praca zachodzi, takż sam jest popęd uderzenia, tak samo więc wielkie jest i ciśnienie. Jednak w przypadku ściany niesprężystej dalszej przemiany energii nie mamy, i jedynym skutkiem uderzenia jest ciepło; natomiast w przypadku ściany sprężystej nowa przemiana energii zachodzi, co takż samą pracę, takż sam jeszcze popęd i takież samo jeszcze ciśnienie (chwilowe) dodaje.

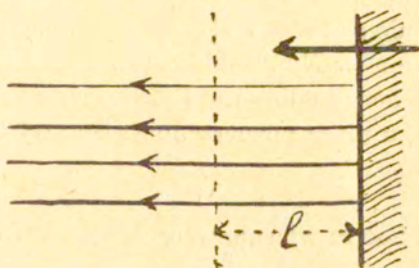
Opierając się na analogii podanej, twierdzę, że ciśnienie  $p$  energii promienistej, padającej prostopadle na powierzchnię  *dowolnego*, a nie tylko bezwzględnie czarnego, ciała, dzięki samemu tylko podaniu tej energii, równa się jej gęstości objętościowej  $E$ .

W sposób zupełnie podobny do przedstawionego również i ciśnienie energii promienistej na ciało ją promieniujące obliczyć możemy. Rozważmy jedynie wiązkę promieni równoległych i prostopadłych do powierzchni ciała promieniującego; niechaj to ciało, nasamprzód, będzie bezwzględnie czarne. Gęstość objętościową energii promieni, przez ciało wysyłanych, oznaczmy przez  $E'$ . Przesuwajmy ciało w kierunku tych promieni; w czasie, w którym przesunie się ono o długość  $l$ , każdy  $cm^2$  jego powierzchni pochłonie energię w ilości  $E'l$ , która na ciepło w ciele się zamienia (Rys. 2). Nadmiar energii w ciele przy tym ruchu powstaje; ruch ten wymaga więc pracy na pokonanie ciśnienia energii wypromieniowywanej. Oznaczając ciśnienie to przez  $p'$ , mamy, oczywiście:  $p'l = E'l$ , czyli  $p' = E'$ , to znaczy: ciśnienie promieni prostopadłych ku ciału promieniującemu bezwzględnie czarnemu na to ciało równa się gęstości wypromieniowywanej w tym kierunku energii. Przypuszczaliśmy, że promienie przez ciało pochłaniane są przez toż samo ciało wysyłane. Lecz pochodzenie tych promieni pozostaje sprawą obojętną. Gdyby promienie te ciśnienia nie sprawiały, ciało w ru-



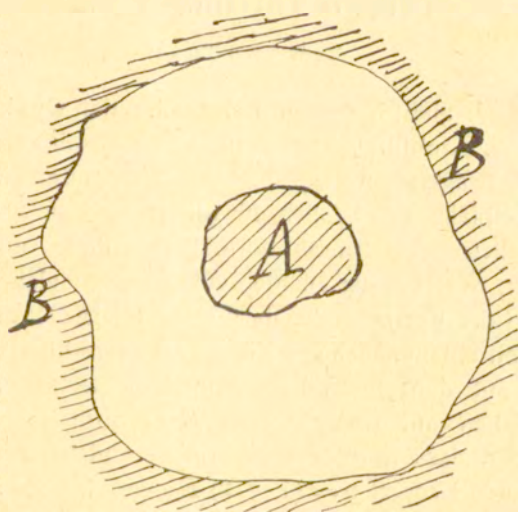
chu opisanym poruszało by się jednostajnie dzięki bezwładności; skoro jednak ciało, pochłaniając te promienie, ogrzewa się, ruch wymaga pracy; promienie cisną na ciało doganiające, że się tak wyrażę, je, i ciśnienie to równe jest ich energii objętościowej.

Obojętną również pozostaje powierzchnia ciała. Zdolność promieniowania powierzchni ciała jest proporcjonalną do jej zdolności pochłaniającej. Ciało promieniujące tak samo mocno pochłania też promienie przez się wysyłane. Rozważmy, istotnie, dowolne ciało *A* (rys. 3), umieszczone wewnątrz doskonale zwierciadlanej (a więc



Rys. 2.

wcale nie promieniującej) osłony *B* o jednakowej z ciałem *A* temperaturze. Ciało *A* promieniuje, lecz jednocześnie tak samo mocno



Rys. 3.

pochłania wypromieniowywaną przez się energię, bo osłona *B*, sama nie promieniując, zwraca ciału *A* jedynie tylko wysyłane przez nie promienie.

Możemy więc twierdzić, że ciśnienie  $p'$  energii promienistej, oddalającej się w kierunku prostopadłym od ciała (wypromienionej przez nie, lub odbitej) niezależnie od istoty ciała równa się gęstości objętościowej  $E'$  tej energii. Jeśli zatem energia promienista o gęstości objętościowej  $E$  pada prostopadłe na powierzchnię ciała o współczynniku odbicia  $r$ , wówczas ciało ulega ciśnieniu  $= E$ , dzięki energii padającej, i ciśnieniu:  $E' = rE$ , dzięki energii odbitej; całkowite więc ciśnienie, jakiemu w tym przypadku ulega powierzchnia ciała, wynosi:

$$p = (1 + r) \cdot E.$$

Jest to właśnie wzór Maxwell'a—Bartoli'ego.

---

ZUSAMMENFASSUNG.

Herr W. Biernacki:

**Ueber den Strahlungsdruck.**

Angemeldet 7. XII. 1911.

Drude <sup>1)</sup> giebt in seinem Lehrbuche der Optik eine einfache Ableitung des Strahlungsdruckes für einen absolut schwarzen Körper. Der Vortragende meint, dass die mechanische Wirkung (der Druck) der einfallenden Wellen für alle Körper die gleiche ist, dass also die Wellen infolge ihres normalen Einfalles auf alle Körper einen Druck, welcher der Dichte der Energie gleich ist, ausüben. Weiter zeigt der Vortragende, dass auch der Druck der in normaler Richtung von einem beliebigen Körper ausgestrahlten oder reflectierten Wellen auf denselben ihrer Energiedichte gleich ist. Fallen deshalb Wellen mit Energiedichte  $E$  in normaler Richtung auf einen Körper, dessen Reflexionsvermögen gleich  $r$  ist, so erleidet der Körper den Druck:  $p = (1 + r) E$ , wie Maxwell und Bartoli gezeigt haben.

---

<sup>1)</sup> Lehrbuch der Optik, Leipzig, 1900, s. 447.



3. Pan W. Sierpiński:

O szeregu zbieżnym funkcji ciągłych, którego suma posiada pantachiczne nieciągłości 2-go rodzaju.

Komunikat zgłoszony d. 6 listopada 1911 r.

W niniejszym komunikacie pragnę dowieść na przykładzie, że suma szeregu zbieżnego funkcji ciągłych może przedstawiać funkcję, posiadającą wszędzie gęste nieciągłości 2-go rodzaju<sup>1)</sup>.

Położmy przez skrócenie

$$\varphi(x) = \left| \frac{x+1}{2} \right| + \left| \frac{x-1}{2} \right| - |x|. \dots (1).$$

Funkcja ta<sup>2)</sup> będzie ciągłą dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej i równą zero dla  $|x| \geq 1$ .

Położmy dalej:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(2^n x - 3). \dots (2).$$

Powiadam, że szereg ten będzie zbieżnym i suma jego będzie funkcją wszędzie ciągłą, z wyjątkiem wartości  $x = 0$ , dla której  $\psi(x)$  jest ciągłą ze strony lewej, zaś ze strony prawej posiada nieciągłość 2-go rodzaju.

Dla  $x \leq 0$  mamy przy wszelkiem naturalnem  $n$ :  $2^n x - 3 < -1$ , zatem stale  $\varphi(2^n x - 3) = 0$ , skąd  $\psi(x) = 0$ . Dla  $x \geq 1$  mamy przy  $n \geq 2$ :  $2^n x - 3 \geq 1$ , skąd  $\varphi(2^n x - 3) = 0$ , oraz  $\psi(x) = \varphi(2x - 3)$ , co dowodzi o zbieżności szeregu (2) i ciągłości naszej funkcji dla  $x \geq 1$ .

Aby dowieść zbieżność naszego szeregu i ciągłość funkcji  $\psi(x)$  dla przedziału  $(0,1)$  z włączeniem dolnej jego granicy, wystarczy ją dowieść dla każdego z przedziałów

$$\left( \frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^{p-1}} \right), \text{ gdzie } p = 1, 2, 3, \dots$$

<sup>1)</sup> Podział nieciągłości na dwa rodzaje wprowadził Dini: zob. np. Dini-Lüroth, Grundlagen etc. Lipsk 1892, p. 51 i 52.

<sup>2)</sup> Zob. np. Prace mat.-fiz. T. XXII, str. 64.

Dla

$$\frac{1}{2^p} \leq x \leq \frac{1}{2^{p-1}}$$

mamy

$$2^{n-p} - 3 \leq 2^n x - 3 \leq 2^{n-p+1} - 3,$$

przy  $n \leq p$  będzie  $2^{n-p+1} - 3 \leq 2 - 3 = -1$ ,

zaś przy  $n \geq p + 2$  będzie  $2^{n-p} - 3 \geq 2^2 - 3 = 1$ .

W każdym więc razie przy  $n \neq p + 1$  będzie

$$|2^n x - 3| \geq 1, \text{ skąd } \varphi(2^n x - 3) = 0.$$

Jest zatem w uważanym przedziale

$$\psi(x) = \varphi(2^{p+1}x - 3),$$

co dowodzi o ciągłości naszej funkcji.

Mamy więc:

$$\text{dla } x \leq 0, \quad \psi(x) = 0$$

$$\text{dla } x \geq 1, \quad \psi(x) = \varphi(2x - 3),$$

$$\text{dla } \frac{1}{2^p} \leq x \leq \frac{1}{2^{p-1}}, \quad \psi(x) = \varphi(2^{p+1}x - 3),$$

a że stale  $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ , więc też stale

$$0 \leq \psi(x) \leq 1 \dots \dots \dots (3).$$

Z dotychczasowych naszych badań wynika, że funkcya  $\psi(x)$  jest ciągłą dla wszystkich różnych od zera wartości zmiennej, zaś dla  $x = 0$  ciągłą ze strony lewej. Udowodnimy obecnie, że dla  $x = 0$   $\psi(x)$  posiada ze strony prawej nieciągłość drugiego rodzaju.

W przedziale  $\left(\frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^{p-1}}\right)$  mamy, jak dowiedliśmy

$$\psi(x) = \varphi(2^{p+1}x - 3).$$

Kładąc  $x = \frac{1}{2^p}$  otrzymamy:  $\psi\left(\frac{1}{2^p}\right) = \varphi(-1) = 0$ ,

kładąc zaś  $x = \frac{3}{2^{p+1}}$  otrzymamy  $\psi\left(\frac{3}{2^{p+1}}\right) = \varphi(0) = 1$ .

Mamy więc przy wszelkiem naturalnem  $p$ :

$$\psi\left(\frac{1}{2^p}\right) = 0, \quad \psi\left(\frac{3}{2^{p+1}}\right) = 1,$$



skąd w jednej chwili wyprowadzamy wniosek, że funkcya  $\psi(x)$  posiada dla  $x = 0$  z prawej strony nieciągłość 2-go rodzaju.

Położmy teraz w przedziale  $(0,1)$ :

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \sum_{l=1}^m \psi\left(x - \frac{l}{m}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m(x)}{m^3} \dots (4).$$

Szereg ten jest zbieżnym jednostajnie w całym uważanym przedziale, gdyż, wobec (3) mamy stale

$$0 \leq \frac{\theta_m(x)}{m^3} \leq \frac{1}{m^2}.$$

Funkcya  $F(x)$  będzie więc ciągłą ze strony prawej lub lewej tam, gdzie wszystkie funkcje  $\psi\left(x - \frac{l}{m}\right)$  będą z odpowiedniej strony ciągłe: więc ze strony lewej wszędzie, zaś z obu stron dla wszystkich  $x$  niewymiernych.

Niech teraz  $x$  oznacza liczbę wymierną, leżącą wewnątrz przedziału  $(0,1)$ , równą ułamkowi nieprzywiedlnemu  $\frac{p}{q}$ .

Funkcya  $\psi\left(x - \frac{l}{m}\right)$  będzie dla  $x = \frac{p}{q}$  nieciągłą tylko wtedy, jeżeli  $l = pk$  oraz  $m = qk$ , gdzie  $k$  oznacza liczbę naturalną. Usuńmy z szeregu  $F(x)$  wszystkie te składniki, dla których  $\frac{l}{m} = \frac{p}{q}$  i pozostałą sumę oznaczmy przez  $F_1(x)$ . Przedstawiając  $F_1(x)$  w postaci sumy

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\theta}_m(x)}{m^3},$$

będziemy mieli znowu  $0 \leq \frac{\bar{\theta}_m(x)}{m^3} \leq \frac{1}{m^2}$ , skąd wniesiemy o jej jednostajnej zbieżności. Wszystkie składniki sumy  $F_1(x)$  są przytem ciągłe dla  $x = \frac{p}{q}$ , skąd wniosek, że sama funkcya  $F_1(x)$  jest ciągłą dla  $x = \frac{p}{q}$ . Mamy przytem oczywiście

$$F(x) = F_1(x) + \frac{\psi\left(x - \frac{p}{q}\right)}{q^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Drugi składnik naszego wzoru jest dla  $x = \frac{p}{q}$  nieciągłym drugiego rodzaju ze strony prawej i ciągłym z lewej: wobec ciągłości pierwszego składnika wnosimy, że  $F(x)$  jest dla  $x = \frac{p}{q}$  ciągłą ze strony lewej, zaś z prawej daje nieciągłość 2-go rodzaju. Tak więc zachowuje się funkcja  $F(x)$  dla wszystkich wartości wymiernych wewnątrz przedziału  $(0,1)$ .

Wobec (2) i (4) mamy:

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi\left(2^n \left[x - \frac{l}{m}\right] - 3\right)}{m^3},$$

a że wobec  $\varphi(x) \geq 0$  szereg jest zbieżnym bezwzględnie, więc możemy zmienić porządek sumowania i napisać

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \dots \dots \dots (5),$$

kładąc

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^m \frac{\varphi\left(2^n \left[x - \frac{l}{m}\right] - 3\right)}{m^3}.$$

Wobec  $|\varphi(x)| \leq 1$  wnosimy, że szereg  $f_n(x)$  jest zbieżnym jednostajnie, a że wszystkie jego składniki są w przedziale  $(0,1)$  ciągłe, więc  $f_n(x)$  przedstawia funkcję, ciągłą w przedziale  $(0,1)$ .

Szereg (5) funkcji ciągłych w przedziale  $(0,1)$  przedstawia więc funkcję mającą dla każdej wartości wymiernej wewnątrz tego przedziału nieciągłość 2-go rodzaju ze strony prawej. Jasnym jest, że funkcja  $F(1 - x)$  posiadać będzie dla wymiernych  $x$  wewnątrz przedziału  $(0,1)$  nieciągłości 2-go rodzaju ze strony lewej i będzie wszędzie ciągłą ze strony prawej. Stąd łatwy wniosek że funkcja

$$F(x) + F(1 - x),$$



rozwijająca się na szereg funkcj ciągłych

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f_n(x) + f_n(1-x))$$

będzie ciągłą dla wszystkich  $x$  niewymiernych, zaś dla  $x$  wymiernych wewnątrz przedziału  $(0,1)$  będzie z każdej strony nieciągłą 2-go rodzaju.

RÉSUMÉ.

M-r W. Sierpiński:

**Sur une série des fonctions continues, dont la somme admet des discontinuités pantachiques de seconde espèce.**

Communication annoncée 6. XI. 1911.

Posons

$$\varphi(x) = \left| \frac{x+1}{2} \right| + \left| \frac{x-1}{2} \right| - |x|,$$

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^m \frac{\varphi\left(2^n \left[ x - \frac{l}{m} \right] - 3\right)}{m^3},$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x).$$

Je démontre, que les fonctions  $f_n(x)$  sont continues, et que la fonction  $F(x)$  admet dans  $(0,1)$  des discontinuités de seconde espèce à droite pour tout  $x$  rationnel.

4. M-r St. Ruziewicz:

**Sur une classe des séries potentielles, pantachiquement convergentes et pantachiquement divergentes sur son cercle de convergence.**

(O pewnej klasie szeregów potęgowych pantachicznie zbieżnych i pantachicznie rozbieżnych na swem kole zbieżności).

Communication annoncée 28. XI. 1911.

Presentée par M-r W. Sierpiński.

Dans le n<sup>o</sup> précédent de ce Bulletin M. W. Sierpiński a démontré qu'une série potentielle peut être pantachiquement con-

vergente et en même temps pantachiquement divergente sur son cercle de convergence, en envisageant, comme exemple, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z^{2k}.$$

Dans le même ordre d'idées je veux donner un exemple un peu plus général.

Désignons par  $f(z)$  la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{kq^k}}{k},$$

$q$  étant une nombre impair  $> 1$ .

Le rayon de convergence de notre série est  $R = 1$ .

$m$  étant un nombre naturel et  $l$  un entier, nous examinerons la convergence de notre série pour

$$z = e^{\frac{l}{q^m} \pi i}.$$

$q$  étant un nombre impair et  $l$  un entier, nous aurons évidemment pour  $k \geq m$ :

$$z^{kq^k} = e^{k l q^{k-m} \pi i} = (-1)^{kl},$$

or :

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{z^{kq^k}}{k} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^{kl}}{k}.$$

La série

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^{kl}}{k}$$

est évidemment convergente pour  $l$  impair et divergente pour  $l$  pair.

La série  $f(z)$  converge donc pour  $z = e^{\frac{l}{q^m} \pi i}$ , si  $l$  est impair, et diverge, si  $l$  est pair.

Les nombres

$$\frac{2n}{q^m} \quad (m, n \text{ naturel})$$

et de même les nombres



$$\frac{2n-1}{q^m} \quad (m, n \text{ naturel})$$

formant évidemment des ensembles denses dans (0,2), nous avons démontré que la série  $f(z)$  est pantachiquement convergente et pantachiquement divergente sur son cercle de convergence.

5. Pan Władysław Gorczyński:

### O zmienności opadu

według obserwacji warszawskich od 1803 roku.

(Wiadomość z Biura Meteorologicznego Sieci Warszawskiej).

Komunikat zgłoszony dn. 5 Października 1911 r.

#### WSTĘP.

W pracy poprzedniej „O opadach w Warszawie“, ogłoszonej w Sprawozdaniach Towarzystwa Naukowego (zeszyt VIII, Rok 1911) rozważane były stosunki pluwiometryczne w Warszawie ze względu na wysokość, częstość i rodzaj opadu. W opracowaniu niniejszem poruszona jest natomiast ważna kwestya zmienności opadu na zasadzie obserwacji, sięgających 1803 roku i obejmujących materiały z górą stuletni.

#### A. O zmienności wogóle.

##### 1. Zmienność bezwzględna i względna wysokości opadu.

Jako miarę zmienności opadu użyć można odchyłeń wartości poszczególnych od średniej wieloletniej.

Dla Warszawy (w średniej za lat 50 od r. 1851 do r. 1900) otrzymuje się rezultaty następujące:

Zmienność t. zw. bezwzględna odpowiada wartościom średnim odchyłeń bez względu na znak; zmienność względna wyraża stosunek zmienności bezwzględnej do przeciętnej wysokości opadu. Ta ostatnia wielkość wynosi dla Warszawy 42,1% w średniej dla 12 miesięcy.

Całkowity opad, który spada w ciągu roku, nie przedstawia tak wielkiej stosunkowo zmienności jak ta, którą otrzymujemy miesięcznie; tak np. odchylenie prawdopodobne opadu rocznego

Tabela I.

*Zmienność bezwzględna i względna wysokości i opadu  
w Warszawie (okres 1851 — 1900).*

*Variabilité absolue et relative des précipitations à Varsovie.  
Moyennes de 50 ans: 1851 — 1900.*

Miesiące Mois	Zmienność Variab.		Miesiące Mois	Zmienność Variab.	
	bezw. abs. mm	wzgl. rel. %		bezw. abs. mm	wzgl. rel. %
I . . .	14.7	44.8	VII . . .	36.2	42.3
II . . .	15.7	51.0	VIII . . .	34.6	48.7
III . . .	16.1	43.0	IX . . .	22.6	46.1
IV . . .	16.0	42.1	X . . .	20.4	46.8
V . . .	17.7	33.5	XI . . .	14.8	42.2
VI . . .	25.7	36.6	XII . . .	15.4	42.7
			Rok Année)	87.5	15.3

(wynoszące koło 90 mm) stanowi około  $\frac{1}{6}$  całej wysokości, gdy tymczasem w miesiącach pojedynczych odchylenie prawdopodobnie waha się od  $\frac{1}{2}$  do  $\frac{1}{3}$  ilości miesięcznej. Stąd też pochodzi, że suma wysokości prawdopodobnych opadu dla kolejnych miesięcy nie odpowiada i jest mianowicie mniejsza od sumy dla 4 pór lub dla całego roku.

Jest rzeczą charakterystyczną, że gdy maximum zmienności bezwzględnej przypada na lipiec, a minimum na styczeń, to dla zmienności względnej maximum występuje w lutym, a minimum w maju.

## 2. Zmienność dla liczb dni z opadem.

Poszukiwania w tym kierunku są dla Warszawy ogromnie utrudnione tą okolicznością, że danych co do liczby dni z opadem nie można uważać za jednorodne. Jak to widzieliśmy w pracy poprzedniej, dopiero od r. 1864 odnośne liczby nadają się do zestawień, ale i w tym okresie spotykają się niekiedy wątpliwe wartości. Z tego względu ograniczymy się do podania tylko niektórych ogólnikowych danych w tym kierunku.



Można odrazu powiedzieć, że zmienność liczby dni z opadem jest mniejsza, niż wysokości opadu.

Tak np. wybierając dla Warszawy najwyższą i najniższą sumę roczną, otrzymujemy:

dla wysokości opadów w <i>mm</i> .	Max. : Min. = 1184 : 372
(okres 1803—1910)	czyli okrągło 3.2.

Dla pięćdziesięciolecia 1851—1900 stosunek ten wynosi jednak tylko 2.2.

dla liczby dni z opadem $\geq 0.1$ <i>mm</i> .	Max. : Min. = 203 : 109
(okres 1864—1910).	czyli okrągło 1.8.

Stosuje się to także i do sum miesięcznych, jak to widać z porównania Max. i Min. w Tab. VIII (pracy poprzedniej „Opady w Warszawie“, dla wysokości opadów i w Tab. XI (tamże) dla liczby dni z opadem.

Wartość średnia odchyleń dla sum miesięcznych i rocznych liczby dni z opadem ( $> 0.2$  *mm*) wynosi około 13 dni dla roku i przeważnie 3 do 4 dni dla poszczególnych miesięcy. Zmienność względna wynosi około 10% dla roku; dla miesięcy waha się ona przeważnie w granicach od 20 do 30%.

Warto przypomnieć, że dla wysokości opadów zmienność względna wynosi dla roku 15%, wahając się od 33 do 51% dla miesięcy.

Z poszukiwań G. Hellmann'a wynika, że grupa dni z opadem 1—5 *mm* daje nie tylko największą ilość opadu w kolejnych miesiącach i w ciągu roku, ale odznacza się nadto najmniejszą zmiennością względną.

### 3. *Wahania skrajne dla wysokości w mm. i liczby dni z opadem.*

Jak to wynika z danych, przytoczonych w pracy poprzedniej, sumy roczne opadów w Warszawie wykazują w okresie 1803—1910 wahania między 1184 *mm* (w r. 1833) i 372 *mm* (w r. 1822). Najwyższa suma miesięczna otrzymana była w lipcu 1844 r. (229 *mm*), najniższa zaś (0 *mm*) w listopadzie 1814 r.

Wogóle sumy miesięczne opadu mogą dochodzić niekiedy do powyżej 300 *mm*; tak np. Klusy na Mazurach wykazują 310 *mm*. w sierpniu 1844 r., a w pobliskich Gorzycach zanotowano nawet 313 *mm* w lipcu 1885 r. Są to jednak wyjątki; sumy miesięczne powyżej 200 *mm* są wogóle rzadko obserwowane na nizinie polskiej.

Tworząc stosunki:

$$k = \frac{\text{najwyższa suma miesięczna opadu}}{\text{średnia suma miesięczna opadu}},$$

otrzymujemy, że dla Warszawy  $k$  równa się 2.5 i to zarówno dla miesięcy półroczna zimowego, jak i letniego. Największą wartość stosunku wykazuje wrzesień (2.8), najmniejszą styczeń (2.2).

Wszystkie te wartości stosują się do pięćdziesięciolecia 1851—1900, dla którego stosunek:

$$\frac{\text{najwyższa suma roczna opadu}}{\text{najniższa suma roczna opadu}} = \frac{148}{66} = 2,2.$$

Wynikałoby stąd, że najwyższe sumy miesięczne wysokości opadów przewyższają odpowiednie średnie miesięczne w przybliżeniu o tyleż, o ile maximum roczne opadu jest większe od minimum rocznego.

Wartości mniejsze dla liczby dni z opadem muszą z natury rzeczy zawierać się w ciaśniejszych granicach, niż wysokości opadów w *mm*. Sumy roczne liczby dni z opadem wogóle rzadko tylko przekraczają w Warszawie 200 i są niższe od 100.

Najwyższe sumy miesięczne wahają się w granicach od 20 (dla września) i 28 dni (dla grudnia).

Dla liczby dni ze śniegiem wykazuje Warszawa maximum 92 dni (pierwszy śnieg 4/X, ostatni 19/V, czas trwania 216 dni) i minimum 29 dni (od 12/XII do 6/III, dni 134). Max. i Min. miesięczne dla liczby dni ze śniegiem podane zostały w pracy poprzedniej „o opadach w Warszawie“.

## B. O odchyleniach opadu i prawdopodobieństwach zmian.

### 4. *Odchylenia dodatnie i ujemne dla wysokości opadów (w okresie 1813—1887, według Pietkiewicza).*

Jeżeli wziąć odchylenia, otrzymane przez potrącenie średniej ilości miesięcznej opadu z ilości otrzymanej dla tegoż miesiąca w większym szeregu lat, to zauważymy, że odchyłeń ujemnych jest licznie więcej, lecz że co do wielkości ustępują one dodatnim. Powstaje tym sposobem w wypadkowej średniej kompensata między mniejszą liczbą lat, w których opad był nader obfity, a większą liczbą lat, w których był słabszy. Stąd wypada, że prawdopodobieństwo pewnego odchylenia, obrachowane za-



pomocą metody najmniejszych kwadratów, nie odpowiada w tym razie stosunkom rzeczywistym, albowiem w zasadzie tej metody leży konieczność, żeby liczba odchyłeń ujemnych i dodatnich była równa i żeby tym sposobem odchylenie ujemne danej wielkości było tak samo prawdopodobne, jak i jej odchylenie dodatnie. Tego właśnie nie mamy w stosunku do opadów <sup>1)</sup>. W czerwcu tylko wypada w okresie 1813—1887 tyleż odchyłeń dodatnich, co i ujemnych, ale są miesiące, w których odchyłeń ujemnych jest przeszło półtora raza więcej niż dodatnich i o tyleż prawdopodobieństwo pewnego odchylenia ujemnego jest większe od prawdopodobieństwa odchylenia dodatniego tejże wielkości.

Stąd również wynika, że ilość opadu najbardziej dla danego miesiąca prawdopodobna nie zgadza się ze średnią arytmetyczną, otrzymaną dla tego miesiąca ze spostrzeżeń całego szeregu lat. Aby otrzymać tę prawdopodobną ilość opadu, należy wziąć liczbę taką, któraby dawała tyleż odchyłeń ujemnych, co i dodatnich. Uwzględniając ten warunek, wyznaczył A. Pietkiewicz (w t. IX. Pam. Fizyograficznego) ilości prawdopodobne opadu dla Warszawy (Tab. II).

A. Pietkiewicz obliczył także, ile lat potrzeba w Warszawie dla otrzymania średniej wysokości opadu z błędem prawdopodobnym  $\pm 1$  mm dla poszczególnych miesięcy, a  $\pm 10$  mm. dla roku całego; z tych rachunków wypada, że dla miesięcy półroczna zimowego potrzeba przeciętnie koło lat 100 dla „błędu“ — 1 mm, i koło 300 lat dla + 1 mm. W ciągu lata liczby te zwiększają się znacznie; największą zmiennością odznacza się sierpień, który według Pietkiewicza wymagałby z górą 1000 lat dla dokładności do + 1 mm. Dla sumy rocznej dokładność do + 10 mm wymaga lat 94, do — 10 mm. tylko 66 lat.

Porównywując różne wysokości opadów, obserwowane w poszczególnych latach za okres 1813—1887 bez r. 1835 t. j. za 74 lata, otrzymał A. Pietkiewicz następującą tabelę: (tab. III).

W rozważanym okresie 74-letnim (t. j. na 888 miesięcy) znalazł A. Pietkiewicz 515 miesięcy poniżej, a 373 miesiące powyżej odpowiednich średnich. Obserwując, ile miesięcy po kolei jest jednocześnie powyżej lub poniżej średniej, otrzymuje się następujące zestawienie:

Uwaga. Dla okresu 1803—1910 odchylenia dla opadów w Warszawie układają się jednak w sposób bardziej zgodny z wymaganiami rachunku prawdopodobieństwa, jak to wynika z komunikatu p. B. Danielewicz na posiedzeniu Komisji Meteorologicznej T. N. W. w dn. 3 lutego 1912 r.

Tabela II.

*Wysokości średnie i prawdopodobne opadu, według Pietkiewicza, w Warszawie (Obserwatorium) za 74 lata (w okresie 1813—1887 bez 1835 r.)*

*Valeurs moyennes et probables des précipitations à Varsovie (1813—1888) d'après M. Pietkiewicz.*

	Wys. średnia za 74 lata Moyennes	Wys. opadu prawdopod. Valeurs prob. mm	Wartości średn. odchyl. w mm Ecart moy.		Liczby *) od- chyień (74 l.) Nombres des écarts		Prawdopodobień- stwo zmian Probabilité des changements		
			ujemn. —	dotat- nich +	poniż. —	po- wyżej +	wogóle en gé- neral	z — na +	z + na —
XII. . .	36.8	31.8	13.0	23.1	47	27	0.	0.	0.
I . . .	29.3	24.0	9.9	19.6	43	31	.46	.40	.56
II . . .	27.8	20.9	8.1	21.9	47	27	.41	.30	.55
III . . .	34.5	28.5	9.7	21.6	46	28	.31*	.26*	.41*
IV . . .	35.2	32.0	11.6	18.0	42	32	.38	.35	.43
V . . .	53.7	52.5	19.4	21.7	38	36	.58	.57	.59
VI . . .	67.3	67.3	24.4	24.4	37	37	.50	.50	.50
VII . . .	77.2	74.1	30.3	36.5	44	30	.47	.38	.57
VIII . . .	77.7	72.4	28.9	39.5	44	34	.49	.46	.53
IX . . .	49.0	44.3	17.4	26.7	44	30	.51	.43	.62
X . . .	43.7	37.4	16.5	29.0	44	30	.47	.41	.57
XI . . .	38.8	35.5	13.3	19.0	44	31	.47	.41	.57
							.50	.37	.68
Zima . . .	93.9	83.9	24.7	43.6	41	33	.35	.27	.46
Wiosna . . .	123.3	114.4	22.4	40.3	45	29	.46	.42	.52
Lato . . .	222.3	212.3	51.2	71.1	41	33	.54	.46	.64
Jesień . . .	131.4	122.1	33.5	52.1	43	31	.50	.47	.55
Rok . . .	571.0	561.8	96.4	114.7	41	33	—	—	—

\*) Liczby odchyień wskazują, ile w ciągu wzmiankowanych 74 lat było miesięcy (pór roku lub lat) poniżej i powyżej odpowiedniej wartości średniej. Widzimy, że liczba odchyień ujemnych jest większa od dodatnich.



Tabela III.

*Częstość poszczególnych wysokości opadu w Warszawie.*

*Fréquence des diverses sommes des précipitations pendant les saisons, à Varsovie.*

Zima Hiver XII, I, II		Wiosna Prin- temps III, IV, V		Lato Eté VI, VII, VIII		Jesień Automne IX, X, XI		Rok Année XII, I—XII	
mm	Liczba lat <sup>*)</sup>	mm	Liczba lat <sup>*)</sup>	mm	Liczba lat <sup>*)</sup>	mm	Liczba lat <sup>*)</sup>	um	Liczba lat <sup>*)</sup>
< 30	2	< 40	1	< 90	2	< 50	4	< 420	8
30—60	13	40—70	2	90—120	2	50—80	8	420—470	10
60—83,9	22	70—100	20	120—150	7	80—110	14	470—561,8	19
83,9—110	11	100—114,4	14	150—180	14	110—122,1	11	561,8—650	15
110—140	18	114,4—140	16	180—212,3	12	122,1—150	12	650—750	16
140—170	4	140—170	12	212,3—240	11	150—210	19	750—800	2
170—200	3	170—200	4	240—270	8	210—270	5	800—900	3
> 200	1	200—230	2	270—300	6	> 270	1	> 900	1
—	—	230—260	2	300—330	4	—	—	—	—
—	—	> 260	1	330—360	3	—	—	—	—
—	—	—	—	360—390	3	—	—	—	—
—	—	—	—	390—420	1	—	—	—	—
—	—	—	—	> 420	1	—	—	—	—
—	74	—	74	—	74	—	74	—	74

Liczba miesięcy w grupach z jednakowymi odchyleniami od średnich:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
liczby grup miesięcy „suchych“:													
83	50	31	15	8	7	4	6	1	0	0	1	0	0
liczby grup miesięcy „mokrych“:													
121	46	21	6	6	1	1	1	0	0	1	1	0	0

\*) La colonne avec en tête „Liczby odchyień“ (nombre des écarts) indique combien de fois on a observé les écarts — et + des sommes des précipitations pendant les 74 années.

Dane te pokazują, że w 83 przypadkach (na 888) miesiące „suche“ występowały pojedynczo, w 50 przypadkach dwa miesiące kolejne były suche i t. d.

5. *Prawdopodobieństwo zmian (według A. Pietkiewicza).*

Odchylenia jednakowe, trwające przez kilka miesięcy zwłaszcza w kierunku posuchy, trafiają się nierzadko. Mamy nawet dwa przypadki, z których jeden w ujemnym, drugi w dodatnim znaczeniu ciągnął się przez 12 miesięcy. W pierwszym wypadku (od kwietnia 1846 r. do marca 1847 r.) opad wynosił zaledwie 315.5 mm t. j. prawie połowę średniej wysokości rocznej; w drugim (od września 1850 r., do sierpnia 1851 r.), wysokość doszła do 1161 mm, t. j. do rozmiaru z górą dwukrotnego w porównaniu ze średnią.

Podobny znajdujemy stosunek i dla pór roku; mianowicie dla 74 lat (296 pór roku) było:

grup „suchych“	grup „mokrych“
28 po 1 porze roku (28)	37 po 1 porze roku . . (37)
18 „ 2 „ (36)	18 „ 2 „ . . (36)
6 „ 3 „ (18)	9 „ 3 „ . . (27)
7 „ 4 „ (28)	2 „ 4 „ . . (8)
5 „ 5 „ (25)	3 „ 6 „ . . (18)
2 „ 6 „ (12)	
2 „ 7 „ (14)	
1 „ 9 „ (9)	
razem 69 pór „suchych“ 170	69 pór „mokrych“ 126

Porównyując rezultaty otrzymane dla grup z wynikami analogicznymi, wyprowadzonymi według rachunku prawdopodobieństwa, dochodzimy do wniosku, że grup krótszych mamy mniej, a dłuższych więcej, niż rachunek wykazuje. Stąd wniosek, że pogoda w kierunku raz powziętym bardziej się utrwała, niż to przypadek zrządzić może.

Zgodnie z większą liczbą spostrzeganych miesięcy „suchych“ prawdopodobieństwo ich zmiany do 5 miesięcy włącznie jest mniejsze, aniżeli „mokrych“. Z drugiej jednak strony grupy miesięcy „mokrych“ odznaczają się większą intensywnością i kiedy



zmiana po 4 miesiącach „mokrych“ nie objawia się, to 4 przeciw 1 stawiać można, że i następny miesiąc zachowa charakter „mokry“.

To samo daje się zauważyć i dla pór roku; pory roku „suche“ mają mniejsze prawdopodobieństwo zmiany, aniżeli „mokre“; jeżeli np. po 3 porach roku charakter pogody nie zmienia się, to szansa dłuższej posuchy jest prawie 3 przeciwko 1. W jednym przypadku posucha trwała bez przerwy przez 9 pór roku (od zimy 1822 r. do zimy 1824 r. włącznie).

Rozpatrując teraz prawdopodobieństwo zmiany wogóle w przejściu z każdego miesiąca do następnego znajdujemy, że najmniejsze prawdopodobieństwo zmiany zachodzi od lutego do marca (na 100 wypadków 69 jednakową zachowują cechę pogody, a zmieniają 31); przeciwnie kwiecień z majem kontrastują najbardziej ze wszystkich miesięcy, jestto epoka najczęściej decydująca o zmianie charakteru pogody; maj z czerwcem oraz listopad z grudniem równą przedstawiają szansę tak pod względem zachowania jednakowego, jak i odmiennego stanu pogodowego. Ponieważ prawdopodobieństwo zmiany jest wogóle mniejsze niż 0.50, przeto znajdujemy i tu potwierdzenie już wykazanej powyżej reguły utrwalania się pogody w pewnym kierunku.

Ze względu, że zmiana charakteru pogody następuje w dwu przeciwnych kierunkach (posucha przechodzi w słotę albo ta ostatnia w posuchę), nasuwa się pytanie, z jakim prawdopodobieństwem oczekiwać można zmiany w każdym z tych dwóch kierunków? Dane Tab. II wykazują, że prawdopodobieństwo zmiany miesiąca „suchego“ (—) na „mokry“ (+) jest wszędzie mniejsze od prawdopodobieństwa zmiany miesiąca „mokrego“ (+) na „suchy“ (—); tylko w maju szansa jest równa. Zgadza się to zupełnie z większą liczbą spostrzeganych miesięcy „suchych“ niż mokrych. I tu od lutego do marca mamy w obu kierunkach prawdopodobieństwo zmiany najmniejsze, od kwietnia zaś do maja największe, chociaż co do nadziei wypogodzenia ustępstwo należy się epoce od sierpnia do września, a bardziej jeszcze od listopada do grudnia; w tym ostatnim razie, jeśli listopad odznaczał się obfitym opadem, to 2 przeciw 1 stawiać można, że grudzień będzie „suchy“.

Co do pór roku, to okazuje się, że wiosna częściej idzie za zimą, lato mniej już naśladuje wiosnę; jesień najbardziej kontrastuje z latem, zima zaś z równą szansą zachowuje, jak i zmienia charakter jesieni. Wogóle jeśli pora poprzedzająca była „sucha“, to i następująca po niej mniejszą ma szansę na zmianę cechy pogody; jeśli zaś pora poprzedzająca była „mokra“, to szansa zmiany znacznie się powiększa; tak np. po „suchej“ zimie następuje „sucha“ wiosna z prawdopodobieństwem prawie 3 przeciw 1; po „mokrem“ zaś lecie wyglądać można „suchej“ jesieni z prawdopodobieństwem 2 przeciw 1.

Rolnicy wypowiadają niekiedy zdanie, że lato naśladuje często zimę. Dokładne zestawienie jednak tych dwóch pór roku pokazuje, że prawdopodobieństwo, że po „suchej“ zimie nastąpi „suche“ lato jest mało różne od zmiany z „suchej“ zimy na „mokre“ lato.

#### 6. *Prawdopodobieństwo zmian sum opadu (według poszukiwań G. Hellmanna).*

Podobne poszukiwania, jak i A. Pietkiewicz, ogłosił także i G. Hellmann dla dorzeczy Niemiec północnych. Praca jego zawiera wiele danych, interesujących dla ziem polskich i dlatego też podajemy stąd niektóre ważniejsze rezultaty, dotyczące opadów w dorzeczu Wisły, a w szczególności w Warszawie.

Przedewszystkiem obliczone zostało prawdopodobieństwo (w %) miesięcy „suchych“ i „mokrych“, gdzie przymiotnik „suchy“ lub „mokry“ wyraża, czy częstość sum miesięcznych, rozważanych w danym okresie wieloletnim, jest większa dla sum powyżej (od 100%) czy też poniżej odnośnej średniej sumy miesięcznej. W tym celu zestawiono, jak często w danym miesiącu zdarzały się w różnych latach poszczególne interwale sum miesięcznych opadu, wyrażonych w procentach sumy średniej miesięcznej.

Znalezione w ten sposób liczby (dla Warszawy z 78 lat do r. 1900) zostały następnie przeliczone procentowo lub, innemi słowami, odniesione do stu lat.

Z Tab. IV wynika, że w Warszawie najczęściej zdarzają się miesiące z sumą opadu poniżej średniej („suche“); tylko czerwiec i sierpień uchyla się od tej reguły, wykazując maximum częstości dla grupy 101—125% sum średnich miesięcznych.



W kolejnych miesiącach maximum częstości przesuwa się dość prawidłowo w tym sensie, że w miesiącach ulewnych co do wysokości opadu przeważają niższe interwale, a w miesiącach letnich obfitszych w ilość opadu występują głównie nieco wyższe lub średnie interwale procentowe.

Tabela IV.

*Prawdopodobieństwo (w %) miesięcy „suchych“ i „mokrych“ w Warszawie za 78 lat (do r. 1900).*

*Probabilité (en %) des mois „secs“ et „humides“ à Varsovie. Période de 78 ans (jusqu'à 1900).*

% średniej sumy mies. % des sommes moy. mens- suelles	M i e s i ą c e   M o i s												Suma Somme
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
0—25	2.6	9.0	1.3	5.1	1.3	2.6	3.8	5.1	3.8	12.8	7.7	6.4	5.1
26—50	<b>22.0</b>	14.3	20.5	11.5	10.3	11.5	11.5	15.4	16.6	12.8	9.0	18.0	14.5
51—75	16.9	<b>28.6</b>	19.2	<b>20.5</b>	<b>24.4</b>	16.6	<b>25.6</b>	<b>18.0</b>	18.0	15.4	<b>20.5</b>	<b>20.5</b>	<b>20.3</b>
76—100	15.6	13.0	<b>21.8</b>	<b>20.5</b>	16.6	19.2	20.5	16.6	<b>24.4</b>	<b>16.6</b>	19.2	18.0	18.5
101—125	7.8	11.7	9.0	18.0	19.2	<b>25.6</b>	12.8	<b>18.0</b>	11.5	12.8	16.6	6.4	14.1
126—150	15.6	3.9	7.7	11.5	16.6	10.3	10.3	7.7	11.5	10.3	12.8	12.8	10.9
151—175	7.8	6.5	6.4	5.1	7.7	7.7	2.6	9.0	6.4	6.4	5.1	6.4	6.4
176—200	6.5	3.9	6.4	1.3	—	3.8	5.1	3.8	1.3	7.7	5.1	2.6	4.0
201—225	—	1.3	3.8	1.3	2.6	1.3	5.1	1.3	1.3	1.3	2.6	3.8	2.2
226—250	5.2	3.9	—	1.3	—	1.3	—	5.1	1.3	1.3	—	3.8	1.9
> 250	—	3.9	3.8	3.8	1.3	—	2.6	—	3.8	2.6	1.3	1.3	2.0

Niższe bezwzględnie wartości średnie wysokości opadów w miesiącach zimowych powstają więc w ten sposób, że najczęściej występują sumy miesięczne o  $\frac{1}{4}$  do  $\frac{1}{2}$  lub od  $\frac{1}{2}$  do  $\frac{3}{4}$  wartości średniej, a tylko stosunkowo dość rzadko zjawiają się szczególnie duże sumy miesięczne, dwukrotnie lub nawet więcej przewyższające odnośną sumę średnią. Natomiast w miesiącach letnich najczęściej oczekiwać należy takich sum miesięcznych, które albo są bliskie albo nieco przewyższają średnią (arytmetyczną) sumę opadu.

Biorąc okres 1851—1900 (obejmujący 600 miesięcy) i obliczając, ile miesięcy ma sumę poniżej lub powyżej średniej, przekonujemy się, że odchyłeń ujemnych jest więcej. Przeliczając to procentowo, możemy powiedzieć, że dla Warszawy:

1) prawdopodobieństwo, że wysokość opadu w danym miesiącu jest powyżej przeciętnej, wynosi 42%, a poniżej przeciętnej 56%; pozostające 2% odpowiadają sumom przeciętnym;

2) prawdopodobieństwo, że w dwóch następujących po sobie miesiącach utrzymuje się charakter odchylenia od średniej, wynosi 47%, gdy 53% odpowiada prawdopodobieństwu zmiany.

3) prawdopodobieństwo, że w dwóch następujących po sobie latach utrzymuje się charakter odchyłeń od średniej sumy rocznej, wynosi 51%, gdy dla zmiany 49%.

Wynika z tego, że tendencja do utrzymania charakteru odchylenia od danego miesiąca lub roku do miesiąca lub roku następnego nie daje się wyraźnie uchwycić w Warszawie.

Przechodząc teraz z kolei do pytania, jakie jest prawdopodobieństwo, że kilka miesięcy z rzędu mają jednakowy charakter odchyłeń t. j. że opady są stale zbyt niskie lub za wysokie, przekonujemy się (por. Tab. V), że uwydatnia się większa skłonność do długotrwałej suszy, niż do całego szeregu miesięcy mokrych.

Stąd wynika, że, począwszy zwłaszcza od 4 kolejnych miesięcy, daleko częściej wypadają całe szeregi miesięcy suchych (poniżej normy) niż mokrych. Pod tym względem można zacytować w Warszawie szereg 9 miesięcy poniżej normy od grudnia 1891 r. do sierpnia 1892 r.

Dobrze jest jednak zaznaczyć, że dla liczb dni z opadem różnice w częstości grup poniżej i powyżej normy są mniej znaczne, niż dla wysokości opadów.

Przechodząc do odchyłeń rocznych nie konstatujemy dla Warszawy różnic wybitniejszych dla obu grup; co zaś do pytania, ile razy dany miesiąc powtarza swój charakter odchylenia w kolejnych latach, widzimy podobny rezultat jak dla kolejno po sobie następujących miesięcy.

Jako przykład cytujemy, że w Warszawie luty był w przeciągu 13 lat kolejnych (1880—1892) zbyt suchy; również raz zdarzyło się, że styczeń był zbyt mokry przez 9 lat (1851—1859) z rzędu. Przez 8 lat zbyt suchy był w Warszawie: styczeń w okresie 1876—1883, kwiecień 1880—1887, wrzesień 1851—1858, gru-



dzień 1893—1900, zaś marzec w okresie 1879—1887 był zbyt suchy przez 9 lat z rzędu.

Z powyższego wogóle wynika, że istnieje pewna tendencya do utrzymania charakteru odchylenia danego miesiąca przez cały

Tabela V.

*Ile razy w 50 latach (okresu 1851—1900). Obserwowano kolejno 1, 2, 3... okresów miesięcznych lub rocznych powyżej (>), poniżej (<) lub równych normie.*

*Combien de fois on a observé à Varsovie (pendant 50 ans 1851—1900) 1, 2, 3... périodes mensuelles ou annuelles successives avec les sommes de précipitations au-dessus (>), au-dessous (<) ou égales aux valeurs normales.*

Liczba kol. okresów Nombres des pér. succes.	Miesiące Mois kolejne successifs			Lata Années			Miesiące lat kolejnych Mois des années succes.		
	norm. ∧	norm. ∨	norm.	norm. ∧	norm. ∨	norm.	norm. ∧	norm. ∨	norm.
1	95	66	12	4	4	3	75	52	12
2	36	42	—	3	4	—	40	46	—
3	14	16	—	3	2	—	17	18	—
4	4	16	—	—	—	—	4	7	—
5	3	5	—	1	1	—	3	2	—
6	2	3	—	—	—	—	1	3	—
7	—	2	—	—	—	—	—	4	—
8	—	1	—	—	—	—	—	4	—
9	—	1	—	—	—	—	1	1	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	—	—	—	—	—	—	—	1	—
Suma (od 2)	59	86	—	—	—	—	66	85	—

szereg lat kolejnych, mimo że pozostałe miesiące sąsiednie mogą mieć inne i wogóle zmienne odchylenia.

C. O okresach suchych i mokrych w Warszawie.

7. O porach roku szczególnie suchych i mokrych w okresie 1851—1900.

Zazwyczaj uważa się porę roku za suchą lub za mokrą, gdy odpowiadająca suma opadów jest niższa lub wyższa od wartości normalnej. Definicja taka mieści jednak w sobie dużo braków; np. w ciągu trzech miesięcy danej pory roku dwa mogą mieć opady niższe od przeciętnych, a pozostały miesiąc mieć taką nadwyżkę opadów, że całą porę roku wypadnie zdefiniować, jako mokrą.

G. Hellmann zaproponował uważać daną porę roku jako suchą lub mokrą, gdy każdy z trzech miesięcy, ją składających, ma odchylenia jednego i tego samego znaku.

W ten sposób liczba pór roku suchych albo mokrych okazuje się naturalnie znacznie mniejszą, niż w razie zastosowania metody poprzedniej. Jak wynika z Tab. VI, w Warszawie było w okresie 1851—1900 (200 pór) tylko 52 pory roku suche lub mokre według definicyi Hellmann'a. Z tych 52 pór 19 było mokrych, a 33 suchych. Szczególna przewaga pór suchych charakterystyczna jest przytem dla zimy i jesieni.

Z Tab. VI wynika nadto, że, jakkolwiek pór mokrych (+) jest mniej, to jednak dają one odchylenia procentowo większe, niż pory roku suche (—). W ten sposób zachodzi więc kompensacya, a mianowicie pory mokre, choć przytrafiają się rzadziej, mają jednak większe natężenia.

Według danych Tab. VI, obliczyć można prawdopodobieństwo (w %) pór roku „suchych“ lub „mokrych“ według definicyi Hellmann'a; dla Warszawy prawdopodobieństwo, że dana pora roku będzie sucha lub mokra, wynosi w procentach:

	Zima.	Wiosna.	Lato.	Jesień.	
„mokra“ . . .	12	10	12	4	%
„sucha“ . . .	24	14	12	16	%

Dla jesieni (wrzesień, październik, listopad) prawdopodobieństwo, że w Warszawie wszystkie 3 miesiące tej pory roku będą miały odchylenia ujemne, jest cztery razy większe, niż przy-



Tabela VI.

*Wykaz pór roku szczególnie suchych i mokrych w okresie  
1851—1900 w Warszawie (według G. Hellmann'a).*

*Saisons spécialement secs et humides à Varsovie, pendant la période  
1851—1900 (d'après G. Hellmann).*

	Sumy opadów w mm Sommets de précipitations en mm					Odchylenia od średn. w % Écarts en %			
	Pory roku Saisons				12 mies. 12 mois XII; I - XI	Pory roku Saisons			
	XII, I, II	III, IV, V	VI, VII, VIII	IX, X, XI		XII, I, II	III, IV, V	VI, VII, VIII	IX, X, XI
	mm	mm	mm	mm	mm	‰	‰	‰	‰
1851	170	209	329	153	861	+70	+63	—	—
1852	119	92	161	102	474	+20	—	—	—
1853	129	168	383	120	800	+29	+31	—	—
1854	121	183	279	103	686	—	—	+28	—
1855	160	197	325	172	854	+60	—	+50	—
1856	116	151	161	89	517	—	+18	—	—
1857	115	148	261	48	572	—	—	—	-63
1858	125	133	333	115	705	—	—	—	—
1859	184	165	164	174	687	+85	+28	—	—
1860	179	143	222	114	658	—	—	—	—
1861	88	119	212	92	511	—	—	—	—
1862	102	100	123	43	368	—	—	-44	-66
1863	85	147	86	116	434	—	—	-60	—
1864	135	115	166	220	636	—	—	—	+72
1865	113	115	360	94	682	—	—	—	—
1866	102	151	123	65	441	—	—	—	-50
1867	98	104	149	168	519	—	—	—	—
1868	185	137	219	191	732	+85	—	—	—
1869	138	95	239	177	649	—	—	—	—
1870	91	94	264	211	660	—	—	—	—
1871	71	92	384	146	693	-29	—	+77	—
1872	39	158	228	162	587	-61	—	—	—
1873	47	178	168	147	541	-53	—	—	—
1874	78	121	148	94	441	—	-38	—	-27
1875	139	80	206	164	589	—	—	—	—
1876	75	142	173	161	551	—	—	-20	—
1877	139	142	120	131	531	—	—	—	—
1878	72	112	271	53	508	-27	—	—	-59
1879	128	104	260	117	609	—	—	+20	—
1880	65	74	171	166	476	-35	-42	—	—
1881	95	63	211	122	492	—	-51	—	—
1882	38	114	385	123	660	-62	—	—	—
1883	63	120	292	119	594	-37	—	+34	—
1884	86	82	126	111	405	—	-36	—	—

	Sumy opadów w mm Sommes de précipitations en mm					Odchylenia od średn. w % Ecartés en %			
	Pory roku Saisons				12 mies. 12 mois XII; 1-XI	Pory roku Saisons			
	XII, I, II	III, IV, V	VI, VII, VIII	IX, X, XI		XII, I, II	III, IV, V	VI, VII, VIII	IX, X, XI
	mm	mm	mm	mm	mm	%	%	%	%
1885	75	94	231	125	525	—	-34	—	—
1886	74	85	110	100	369	—	—	-49	—
1887	79	175	193	156	603	—	—	—	—
1888	90	163	288	108	649	—	—	+33	-16
1889	76	161	271	176	684	-24	—	—	+38
1890	37	113	147	183	480	-63	—	-32	—
1891	87	107	289	77	560	—	-16	—	—
1892	79	78	106	132	395	-21	-38	-51	—
1893	102	126	179	113	520	—	—	—	-12
1894	72	137	148	150	507	—	—	—	—
1895	91	99	143	75	408	—	—	—	—
1896	70	122	171	123	486	-29	—	—	—
1897	66	202	225	74	567	-34	+59	—	-42
1898	119	143	202	125	589	—	—	—	—
1899	101	184	262	143	690	—	—	—	—
1900	99	78	215	140	532	—	—	—	—
+ { Śred. { Max	Średnie Moy. 1851 — 1900					58 (6)	40 (5)	40 (6)	55 (2)
	99.7	128.3	217.8	127.7	573.5	85	63	77	72
- { Śred. { Max.						40 (12)	36 (7)	43 (6)	42 (8)
						63	51	60	61

puszczenie, że opady we wszystkich tych miesiącach będą powyżej normy.

Nadmienimy wreszcie, że po „suchej“ porze roku częściej następuje również „sucha“ pora, niż odwrotnie. Stosuje się to zwłaszcza do jesieni, najmniej zaś do zimy.

8. Okresy „suche“ i „mokre“ w Warszawie, według A. Pietkiewicza).

W pracy swej „O opadach w Warszawie“ (Pam. Fiz. t. VII), zajął się A. Pietkiewicz pytaniem, jaki był przebieg sum opadów w stolicy Polski w okresie 1813—1887. W tym celu zbadał on przedewszystkiem, jakie były odchylenia opadów w ciągu pór roku w pomienionym okresie 75-letnim.



W pracy Pietkiewicza podany jest znak odchyień dla pór roku lat kolejnych w Warszawie; (+) oznacza, że dana pora roku miała wysokość opadu, poniżej średniej, a (—) powyżej tej ostatniej. Dla opadu rocznego rozróżniane były natomiast trzy kategorie: lata umiarkowane (znak 0) wahają się koło średniej w granicach  $\pm 100$  mm, gdy dopiero wahania większe nadają im charakter „suchy“ (znak —) lub „mokry“ (znak +).

Rozglądając się, jak miesiące „mokre“ i „suche“ wpływają na charakter całego roku, okazuje się znowu, że miesiące „mokre“ obfitością opadu nie tylko pokrywają brak jego przez czas dłuższy, lecz że często nadmiar spadłej wody jest tak duży, że dla całego roku wypada przez to więcej, niż średnia wysokość opadu.

Z tabel, podanych przez Pietkiewicza, wynika, że w okresie 1813—1887 rozróżnić można trzy epoki:

I. Epoka „sucha“ 1813—1829.

Na lat 17 był tylko jeden rok (+), 5 lat (—), a lat „umiarkowanych“ było 11 (65%). Opad przeciętny roczny dla tej epoki wynosi 529 mm.

II. Epoka „mokra“ 1830—1871.

W ciągu lat 42 było 14 lat (+), 11 (—) i 17 lat umiarkowanych (41%). Opad przeciętny roczny 605 mm.

III. Epoka „sucha“ od r. 1871.

W ciągu lat 16 (do r. 1887) nie było ani jednego roku (+), 3 (—) i 13 lat umiarkowanych (81%). Opad przeciętny roczny 529 mm.

Wogóle zaś w ciągu rozważanych 74 lat było 41 (56%) lat umiarkowanych, 18 (24%) lat (—) i 15 (20%) lat (+). Ogólna przeciętna roczna wynosi za 74 lata 571 mm.

Z trzech epok powyższych tylko druga jest pełną; dla pierwszej bowiem nie znamy początku, dla drugiej nie było końca do r. 1887, rozważanego przez A. Pietkiewicza.

W epoce „mokrej“ (1830—1871) na lat 42 mamy 14 „mokrych“; epoka ta posiada nadto cechę stopniowania i wykazuje trzy fazy: wzrastania, górowania i malenia opadu pod względem obfitości i częstotliwości.

Dla wspomnianych 14 lat „mokrych“ podane są w poniższej tabeli przewyżki opadów w mm nad wartość średnią.

Faza wzrastania odpowiada okresowi 1830 — 1844, faza górowania okresowi 1850 — 1855, a faza malenia okresowi

Tabela VII.

*Lata szczególnie „mokre“ w Warszawie do r. 1887.*

*Années particulièrement „humides“ à Varsovie (1813—1887).*

	Przewyżki opadów nad średnią Écart des précipitations en mm				
	XII, I, II mm	III, IV, V mm	VI, VII, VIII mm	IX, X, XI mm	Rok XII, I—XI mm
1830	42	133	—76	6	105
1833	34	112	250	85	481
1840	30	—15	4	90	109
1844	—31	—36	169	35	139
1850	2	—1	—23	321	299
1851	76	86	107	21	290
1853	35	44	160	—11	228
1854	27	61	56	—28	116
1855	66	73	103	40	282
1858	31	9	111	—16	135
1859	90	41	—59	43	115
1865	19	—9	138	—37	111
1868	91	14	—3	59	161
1871	—23	—31	162	14	122
Średnio moy. (w % en	35 (18)	34 (18)	78 (41)	44 (23)	192 —

1858—1871. Średnie przewyżki za rok wynoszą odpowiednio: 208, 243 i 129 mm.

Z Tab. VII okazuje się nadto, że w latach „mokrych“ opad bywa najobfitszy przeważnie w miesiącach letnich; zima zaś i wiosna wpływają najmniej.



9. *Lata suche i mokre w Warszawie w ciągu 108 lat (1803—1910).*

Gdy poprzedni autorzy, jak Pietkiewicz i Hellmann rozpatrywali dane tylko do r. 1887 względnie r. 1900, w poniższej tabeli (Tab. VIII) przedstawione są rezultaty za 108 lat od r. 1803 do r. 1910. Nadto okresy roczne brane były, ze względu na zastosowania rolnicze, nie za rok kalendarzowy (od stycznia do grudnia), lecz za t. zw. okres wegetacyjny od października danego roku kalendarzowego do września roku następnego. Oprócz roku podane są dane dla półroczia zimowego (od października do marca) i letniego (od kwietnia do września).

Oprócz sum opadu w milimetrach podane są także, w Tab. VIII, odchylenia od odnośnych wysokości „normalnych“ w Warszawie, za które przyjęto:

- 210 mm dla półroczia: X, XI, XII, I, II, III;
- 355 mm dla półroczia: IV, V, VI, VII, VIII, IX;
- 565 mm dla okresu 12-miesięcznego.

Te wartości odchyień (przeliczone na procenty sum odnośnych za półroczia lub 12 miesięcy) nie są podane osobno; dla ułatwienia orientacji w Tab. VIII zaznaczony jest tylko charakter odchyień przy pomocy znaków +, — lub 0. Znaczenie tych znaków jest następujące:

- 0 oznacza pochylenia w granicach  $\pm 10\%$ .
- + „ „ od  $11\%$  do  $30\%$ .
- ++ „ „ równe lub wyższe od  $31\%$ .
- „ „ od  $-11\%$  do  $-30\%$ .
- „ „ równe lub niższe od  $-31\%$ .

Obliczając ile razy powtarzają się sumy opadów o jednako-  
wym charakterze odchyień i sprowadzając odnośne liczby do  
okresu stuletniego, otrzymujemy z Tab. VIII:

Półroczia.	{	charakter odchyień . . . =	—	0	+	++	
		X—III . . . . .	12	39	19	17	13
		IV—IX . . . . .	9	27	35	19	10
		X—XII . . . . .	4	32	39	21	4
		I—IX. . . . .					

*Wysokość i charakter odchylenia sum opadu w Warszawie, w okresie 1802/3—1909/10 (108 lat).*  
*Précipitations en mm et le caractère des écarts à Varsovie pendant la période de 108 ans: 1802/3—1909/10.*

	Sumy w mm Sommes en mm			Charakter Caractère			Sumy Sommes (mm)			Charakter Caractère		
	X—XII, I—III		Ogółem Total	X—III	IV	X—IX	X—XII, I—III	IV	IX	X—III	IV	X—IX
1802—1803	—	268	—	—	—	—	222	424	646	0	+	+
1803—1804	—	395	—	0	—	0	318	344	662	+	0	+
1804—1805	—	412	—	0	—	0	340	325	665	+	0	+
1805—1806	—	395	—	0	—	0	230	337	567	0	0	0
1806—1807	—	368	—	0	—	0	162	222	384	—	—	—
1807—1808	—	294	—	0	—	0	174	226	400	—	—	—
1808—1809	—	361	—	0	—	0	213	396	609	0	+	0
1809—1810	—	279	—	—	—	—	241	456	697	+	—	+
1810—1811	—	247	—	—	—	—	247	232	479	+	—	—
1811—1812	—	363	—	0	—	0	163	263	426	—	—	—
1812—1813	147	558	—	+	—	0	335	380	715	+	0	+
1813—1814	182	305	487	—	—	—	328	348	676	+	0	+
1814—1815	151	286	437	—	—	—	236	425	661	+	+	+
1815—1816	186	494	680	+	+	0	210	526	736	0	+	+
1816—1817	237	370	607	0	0	0	163	437	600	—	+	0
1817—1818	218	368	586	0	+	0	141	390	531	—	0	0
1818—1819	111	495	606	—	0	0	180	283	463	—	—	—
1819—1820	197	369	566	0	—	—	212	292	504	0	—	—
1820—1821	172	507	679	+	+	+	260	404	664	+	+	+
1821—1822	160	304	464	—	—	—	186	322	508	0	0	0
1822—1823	106	314	420	—	—	—	172	339	511	—	0	0
1823—1824	113	313	426	—	—	—	191	362	553	0	0	0
1824—1825	164	367	531	0	—	0	175	259	434	0	0	—
1825—1826	141	255	396	—	—	—	175	259	434	—	—	—
1826—1827	186	265	451	—	—	—	175	259	434	—	—	—



1827-1828	133	358	491	-	0	-	0	1880-1881	229	316	545	0	-	0
1828-1829	147	411	558	-	+	0	+	1881-1882	131	501	632	-	+	+
1829-1830	384	374	758	+	0	+	+	1882-1883	164	447	611	-	+	0
1830-1831	141	266	407	-	0	-	-	1883-1884	170	213	383	-	-	-
1831-1832	96	386	482	-	0	-	-	1884-1885	185	374	559	-	0	0
1832-1833	277	769	1046	-	+	+	+	1885-1886	160	187	347	-	-	-
1833-1834	298	290	588	+	0	+	0	1886-1887	193	404	597	0	+	0
1834-1835	(195)	262	(457)	0	-	-	-	1887-1888	246	426	672	+	+	+
1835-1836	193	241	434	0	-	-	-	1888-1889	168	458	626	+	+	+
1836-1837	251	361	612	+	0	0	0	1889-1890	174	289	463	-	-	-
1837-1838	185	309	494	-	+	+	-	1890-1891	253	400	653	+	+	+
1838-1839	196	474	670	0	+	0	0	1891-1892	158	239	397	-	-	-
1839-1840	190	406	596	0	+	+	+	1892-1893	168	819	487	-	0	-
1840-1841	219	239	458	0	-	-	-	1893-1894	172	342	514	0	0	0
1841-1842	173	278	451	-	-	-	-	1894-1895	200	212	412	0	-	-
1842-1843	166	299	465	-	-	-	-	1895-1896	178	328	501	-	0	-
1843-1844	200	515	715	0	+	+	+	1896-1897	180	404	584	-	+	0
1844-1845	185	304	489	0	-	-	-	1897-1898	182	347	529	-	0	0
1845-1846	268	222	490	+	-	-	-	1898-1899	213	496	709	0	+	+
1846-1847	93	438	531	-	0	0	0	1899-1900	213	266	479	0	-	-
1847-1848	152	312	464	+	0	0	0	1900-1901	270	348	618	+	0	0
1848-1849	266	323	589	+	+	+	+	1901-1902	289	327	616	+	+	0
1849-1850	277	338	615	+	0	0	0	1902-1903	135	475	610	-	+	0
1850-1851	642	486	1128	+	+	+	+	1903-1904	180	175	355	+	+	-
1851-1852	245	274	519	+	+	+	+	1904-1905	283	400	683	+	+	+
1852-1853	259	537	796	+	+	+	+	1905-1906	233	323	556	+	0	0
1853-1854	255	434	689	+	+	+	+	1906-1907	179	379	558	+	0	0
1854-1855	330	454	784	+	+	+	+	1907-1908	243	350	593	+	0	0
1855-1856	293	307	600	+	+	0	0	1908-1909	142	289	431	-	-	-
1856-1857	213	392	605	0	0	0	0	1909-1910	161	421	582	-	+	0

U w a g a. Odchylenia do  $\pm 10\%$  mają charakter „0” (umiarkowany); od 11 do 30% charakter „+ lub -” zależnie od znaku; odchylenia od 31% oznaczone są podwójnie: „++ lub --”.  
 Notice. Caractère des périodes de 6 mois (X-III et IV-IX) et 12 mois (X-XII, I-IX) est indiqué comme il suit: „0” indique le caractère modéré; écarts dans les limites ( $-10\%$ , ...,  $+10\%$ ).  
 — et + indique que les écarts atteignent les limites  $-11\%$ , ...,  $-30\%$ , resp.  $+11\%$ , ...,  $+30\%$ ; — et ++ signifie que les écarts dépassent 30%.

Odchyień o charakterze ujemnym <sup>1)</sup> jest znacznie więcej, niż dodatnim, zgodnie z rezultatami Pietkiewicza.

Interesujące jest także zestawienie okresów trzydziestoletnich, skąd wypada, że w ciągu lat 1851—1880 przeważały jednak znaki +, gdy okresy: 1821—1850 i 1881—1910 wykazują znaczną przewagę znaków —.

	Charakter odchyień . . . =	—	0	+	++	
X—XII, I—IX	1821—1850. . . . .	0	17	8	3	2
	1851—1880. . . . .	1	6	10	10	3
	1881—1910. . . . .	3	7	14	6	0

Wreszcie, w celu przekonania się, o ile charakter odchyień według wysokości opadów zgadza się z charakterem odchyień liczb dni z opadem, obliczona została Tab. IX.

Z Tab. IX wynika, że wogóle charakter odchyień, skonstatowany według wysokości opadu (rubryka „*mm*“), zgadza się ze znakiem odchyień i dla liczb dni z opadem.

#### D. O okresach w przebiegu opadów.

##### 10. O okresie Brückner'a dla opadów.

Jeszcze Bacon w wieku XVI, a następnie Brückner w końcu ubiegłego wieku wyrazili przypuszczenie, że w przebiegu zjawisk meteorologicznych daje się wydzielić okres obejmujący około 35 lat. Zobaczmy, o ile coś podobnego daje się wykryć w stosunku do opadów w Warszawie.

Biorąc 570 *mm* jako wieloletnią wysokość roczną opadu w Warszawie, otrzymujemy następujące odchylenia dla poszczególnych średnich pięcioletnich (Tabl. X).

Dla porównania podano prócz Warszawy także i parę innych miejscowości na obszarze ziem polskich lub na ich pograniczu; nadto, jako reprezentant zachodnich części Europy podany jest Strassburg, który posiada wyjątkowo długą seryę spostrzeżeń.

<sup>1)</sup> Warto zaznaczyć, że chodzi tu nie o odchylenia ujemne wogóle, lecz o odchylenia (dodatnie lub ujemne) powyżej 10%. Gdyby brać odchylenia od średnich arytmetycznych i obliczać liczby takowych bez względu na ich wielkość, rezultaty otrzymałyby się inne.



Tabela IX.

*Liczby dni z opadem w Warszawie i charakter odchylen  
odnośnych 1880/1—1909/10.*

*Nombres de jours de précipitations et le caractère des écarts respectifs  
à Varsovie pendant la période 1880/1—1909/10.*

	Liczby dni z opadem. Nombres des jours de précipitations									Charakter Caractère			
	≧ 0.1 mm			> 0.2 mm			≧ 1.0 mm			X—XII, I—IX			
	XII	IX	XII	XII	IX	XII	XII	IX	XII	mm	0.1 ≧	0.2 ∧	1.0 ≧
	—	—	—	—	—	—	—	—	—				
1880—1881	92	71	163	75	57	132	—	—	—	0	0	0	—
1881—1882	75	83	158	62	71	133	—	—	—	+	0	0	—
1882—1883	81	95	176	71	83	154	—	—	—	0	0	0	—
1883—1884	72	78	150	59	59	118	—	—	—	—	0	0	—
1884—1885	86	81	167	74	78	152	—	—	—	0	0	0	—
1885—1886	70	56	126	53	48	101	—	42	—	—	—	—	—
1886—1887	74	79	153	59	77	136	44	64	108	0	0	0	0
1887—1888	98	89	187	77	69	146	50	55	105	+	+	0	0
1888—1889	99	85	184	81	77	158	46	62	108	+	+	+	0
1889—1890	61	70	131	54	68	122	28	49	77	—	—	—	—
1890—1891	93	75	168	76	66	142	55	54	109	+	0	0	0
1891—1892	71	64	135	58	60	118	41	38	79	—	—	—	—
1892—1893	79	80	159	70	68	138	44	55	99	—	0	0	0
1893—1894	83	79	162	74	71	145	52	60	112	0	0	0	0
1894—1895	92	51	143	76	43	119	46	34	80	—	—	—	—
1895—1896	75	91	166	68	84	152	48	60	108	—	0	0	0
1896—1897	84	73	157	79	68	147	54	56	110	0	0	0	0
1897—1898	75	82	157	65	73	138	45	55	100	0	0	0	0
1898—1899	86	94	180	75	88	163	50	66	116	+	+	+	+
1899—1900	89	58	147	82	54	136	59	42	101	—	0	0	0
1900—1901	80	80	160	60	73	133	46	53	99	0	0	0	0
1901—1902	110	94	204	93	86	179	66	62	128	0	+	+	+
1902—1903	72	104	176	57	94	151	35	76	111	0	0	0	0
1903—1904	82	59	141	71	56	127	47	33	80	—	—	—	—
1904—1905	93	94	187	86	92	178	61	72	133	+	+	+	+
1905—1906	104	77	181	93	69	162	60	52	112	0	+	+	0
1906—1907	90	74	164	80	70	150	44	53	97	0	0	0	0
1907—1908	94	86	180	83	76	159	53	56	109	0	+	+	0
1908—1909	83	78	161	67	74	141	36	54	90	—	0	0	—
1909—1910	82	85	167	63	77	140	45	63	108	0	0	0	0

U w a g a. Charakter odchylen „0” oznacza, że liczby dni z opadem w danym okresie 6- lub 12-miesięcznym nie różniły się więcej nad 10% od wartości normalnych; znaki + lub — oznaczają odchylenia ponad 10%.

Notice. Caractère des écarts „0“ signifie que les nombres de jours de précipitations n'étaient pas, pendant la période considérée de 6 ou 12 mois, plus élevées ou diminuées que de 10% des valeurs normales. Les signes + ou - indiquent les écarts au-dessus de 10%.

Tabela X.

*Wysokości pięcioletnie opadów, wyrażone w procentach średniej wieloletniej.*

*Moyennes de cinq ans des sommes de précipitations déduites en % des valeurs nomales.*

Pięciolecia Périodes de cinq ans	Warszawa	Kraków	Poznań	Frankfurt	Królewiec	Średnie z 24 stacyj Moy. de 24 stations	Strassburg	Charakter odchyień Caractère des écarts	
	Varsovie	Cracovie	Posen	n/o	Königsberg		(Als.)	Strassburg	Warsz. Varso- vie
1816—1820	106	—	—	—	—	99	99	0	+
1821—1825	87	—	—	—	111	99	105	+	—
1826—1830	93	—	—	—	—	94*	97	0	—
1831—1835	109?	—	—	—	—	94	90	—	—
1836—1840	99	—	—	—	—	102	88	—	0
1841—1845	90	—	—	—	—	103	?	?	—
1846—1850	104	—	—	—	—	99	90	—	0
1851—1855	128	111	109	114	108	<b>108</b>	111	+	+
1856—1860	109	79	93	102	74	93	104	0	+
1861—1865	91	97	96	91	90	91*	89	—	—
1866—1870	105	90	116	107	97	103	98	0	+
1871—1875	99	104	93	85	92	94	103	0	0
1876—1880	95	104	97	100	111	<b>109</b>	116	++	0
1881—1885	91	102	97	102	108	103	91	—	—
1886—1890	97	99	106	98	107	101	98	0	0
1891—1895	84	103	100	107	105	98	92	—	—
1896—1900	100	113	92	96	108	102	98	0	0
1901—1905	101	—	—	—	—	—	—	—	0
1906—1910	93	—	—	—	—	—	—	—	—

U w a g a. Znak (+) oznacza charakter „mokry“ (od 105% włącznie), znak (—) charakter „suchy“ (poniżej 95% danego pięcioletnia; znak (0) oznacza pięcioletnie umiarkowane pod względem ilości opadów (95—104%).

Znaki podwójne (++) lub (--) oznaczają silniejsze odchylenia.

Notice. Le signe (+) indique le caractère „humide“ (> 105%) de la période en question, tandis que (—) signifie le caractère „sec“ (< 95%).

Widzimy (z tab. X), że charakter odchyień bywa niekiedy różny dla miejscowości nawet dość blisko położonych. Niektóre



jednak pięciolecia, jak np. 1851—1855 były wyjątkowo obfite w opady w całej Europie środkowej i zachodniej.

Co do okresów t. zw. 35-letnich, to z pewną dowolnością można wydzielić trzy epoki:

- I. Epokę bardziej „suchą“ 1816—1850;
- II. Epokę bardziej „mokną“ 1851—1880.
- III. Epokę bardziej „suchą“ od r. 1880.

Podział ten jednak jest dość wymuszony i niezupełnie pewny. Posiłkowanie się tymi okresami do wyprowadzania przewidywań charakteru przyszłych pięcioleci nie miałyby dotąd podstaw racjonalnych.

W Tab. X podane są nadto średnie z 24 stacyi wybranych przez G. Hellmanna w obrębie Niemiec („Die Niederschläge in den Norddeutschen Stromgebieten“. Bd. I). W średnich tych występują wybitnie minima koło r. 1830 i 1860, również jak maxima koło r. 1850 i 1880. Hellmann zaznacza, że maximum z pięciolecia 1851/55 nastąpiło tylko o 25 lat przed 1876/80. Jednakowoż zauważyć można, że i pięciolecie 1841/45 miało dość obfite opady.

Kremser był zdania (w „Oderstromwerk“ oraz w „Elbstromwerk“), że w dorzeczu Odry i Elby nie uwydatniają się żadne okresy zbliżone do 35-letnich. Pogląd ten stara się zbić Brückner w swej rozprawie „Schwankungen des Niederschlages im Deutschen Reich 1816—1900“, w t. I. Zeitschrift für Gletscherkunde und Klimaänderungen.

#### 11. *O okresach jedenastoletnich dla wysokości opadu w Warszawie.*

W celu przekonania, się czy w przebiegu wieloletnim opadów w Warszawie nie występują bardziej wyraźne prawidłowości o okresie kilkoletnim, zwróćmy się do odchyień procentowych, o których była mowa powyżej przy dyskusowaniu Tab. VIII i wyznaczaniu charakteru poszczególnych półroczy oraz okresów dwunastomiesięcznych (od października do września).

Przeglądając jednak bieg tych odchyień trudno byłoby zorientować się bezpośrednio co do okresowości zjawiska. W tym celu uciec się wypada do specjalnych metod w tym celu stosowanych; w danym przypadku najczęściej stosowano metodę wy-





dla r. 1858 i maximum koło r. 1880 w okresie pięćdziesięcioletnim 1851—1900.

Ta metoda całkowania, która dla przypadku opadów prowadzi do sumowania odchyień, została zastosowana dla Warszawy.

Sumowanie to wypełniono osobno dla obu półroczy i dla okresu 12-miesięcznego.

Oprócz metody powyższej użyto nadto metody sum pośrednich, zastosowanej przez A. Magelssen'a z Chrystianii („Über elfjährige Temperaturperioden“ Meteorologische Zeitschrift, Bd. 28, 1911, Heft 9 Beilage). Według tej metody tworzy się sumy odchyień według następującego schematu:

odchylenia:  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots, \delta_n,$

sumy podwójne  $\delta_2 + \delta_1, \delta_3 + \delta_2, \delta_4 + \delta_3, \dots, \delta_n + \delta_{n-1},$

sumy pośrednie z 3 odchyień:  $\delta_3 + 2\delta_2 + \delta_1, \delta_4 + 2\delta_3 + \delta_2, \dots,$   
 $\dots, \delta_n + 2\delta_{n-1} + \delta_{n-2},$

sumy pośrednie z 7 odchyień:  $\delta_7 + 2 \sum_2^6 \delta_i + \delta_1,$

$\delta_8 + 2 \sum_3^7 \delta_i + \delta_2, \dots, \delta_n + 2 \sum_{n-5}^9 \delta_i + \delta_{n-6}.$

Takie „sumy pośrednie z 7“ zaleca A. Magelssen w swej pracy, powyżej zacytowanej.

Wogóle zaś dla sumy pośredniej z  $k$  odchyień otrzymuje się:

$$\delta_n + 2 \sum_{n-(k-2)}^{n-1} \delta_i + \delta_{n-(k-1)} \dots \dots \dots (3)$$

Zauważymy wreszcie, że odchylenia obliczono osobno dla okresów sześciomiesięcznych (X—III) i (IV—IX) i osobno dla okresu dwunastomiesięcznego (X—XII, I—IX). Odchylenia w ‰ brano według danych Tab. VIII, przyjmując za wartość średnią opadów rocznych w Warszawie 565 mm (dla półroczy 210 mm i 355 mm). Są to wartości średnie nieco zaokrąglone; z tego względu, jak również wobec braku danych za półroczka zimowe, od 1802 do 1811 r. w Warszawie, sumy wszystkich odchyień, które dla całego

okresu powinnyby razem znieść się, różnią się nieco od zera. Ponieważ podanie dla Warszawy odchyień procentowych dla każdego z 108 lat obserwacyjnych wraz z „odchyleniami sumowanymi“ i „sumami pośrednimi z 7 odchyień“ (według A. Magelssen'a) nie może być, dla braku miejsca, uskutecznione, ograniczamy się do przedstawienia graficznego rezultatów. Przedewszystkiem jednak zauważymy wogóle, że z rozpatrzenia tabel z wszystkimi temi odchyleniami wynika, że w przebiegu odchyień sumowanych i sum pośrednich z 7 odchyień, akcentują się pewne okresy, szczególnie silnie wybijające się zwłaszcza dla półrocza letniego (od kwietnia do września włącznie).

Poniżej zestawione są dla Warszawy daty kolejnych maximów i minimów w okresie 1803—1910 dla półrocza letniego (IV—IX) od kwietnia do września.

Metoda „sum pośrednich z 7 odchyień“.		Metoda „sumowania odchyień“.	
Max.	Min.	Max.	Min.
—	—	1807	—
1822	1815	1821	1815
1834	1828	1833	1827
1845	1839	1844	1838
1856	1846	1860	1848
1866	1851	1865	1863
1874	1867	1872	1867
1884	1880	1883	1881
1892	1889	1891	1886
1903	1896	1903	1898

Odstęp czasu między kolejnymi maximami i minimami wynosi przeciętnie z górą lat 10; obiedwie metody dają dość podobne rezultaty, jakkolwiek wydaje się, że metoda sum pośrednich z 7 wyrazów jest jakoby skuteczniejszym środkiem do wydzielenia ukrytych okresów.

Zauważymy, że podobne rezultaty, jak i przedstawione powyżej dla półrocza letniego, wyprowadzić się dają, choć z nieco większą trudnością, dla okresu rocznego oraz dla półrocza zimowego.

Na tablicy graficznej poniżej podanej, wykreślone zostały krzywe odchyień bezpośrednich w ‰ (krzywe punktowane) oraz sumy odchyień, otrzymane według metody „sum pośrednich



z 7<sup>o</sup> odchyień; zostały natomiast opuszczone krzywe, wyprowadzone według metody sumowań kolejnych, ponieważ dają one przebieg podobny, jakkolwiek mniej charakterystyczny, jak i odnośne wykresy według metody Magelssen'a, który sumował 7 kolejnych odchyień według schematu:

$$\delta_n + 2(\delta_{n-1} + \delta_{n-2} + \delta_{n-3} + \delta_{n-4} + \delta_{n-5}) + \delta_{n-6}.$$

#### Objaśnienie do tabeli graficznej (str. 482).

Krzywa *S* oznacza krzywą częstości plam słonecznych; krzywe IV—IX i (X—III) podają przebieg odchyień dla sum opadów w ciągu półroczy letniego i zimowego, a krzywa (X—XII, I—IX) tenże przebieg w ciągu okresu dwunastomiesięcznego. Krzywe punktowane (.....) przedstawiają przebieg odchyień bezpośrednio w ‰, gdy krzywe pełne (——) oznaczają przebieg odchyień sumowanych, według metody „sum pośrednich z 7<sup>o</sup>”.

#### Légende de la table graphique (p. 482).

La courbe *S* représente la fréquence des taches solaires; les courbes (IV—IX) et (X—III) donnent la marche des écarts des sommes de précipitations à Varsovie pendant les périodes de 6 mois: avril-septembre et octobre-mars. Enfin la courbe inférieure (X—XII, I—IX) donne la même marche des écarts pendant 12 mois: octobre-septembre.

Les courbes pointillées (.....) représentent la marche des écarts des sommes de précipitations à Varsovie, réellement observés (en ‰ par rapport aux valeurs normales), tandis que trois autres courbes respectives (——) donnent la marche des écarts accumulés, obtenus d'après la méthode des „sommes de 7<sup>o</sup>” (Meteor. Zeitschrift, Bd. 28, 1911, Heft 9, Beilage). Ces écarts accumulés se calculent d'après la formule:

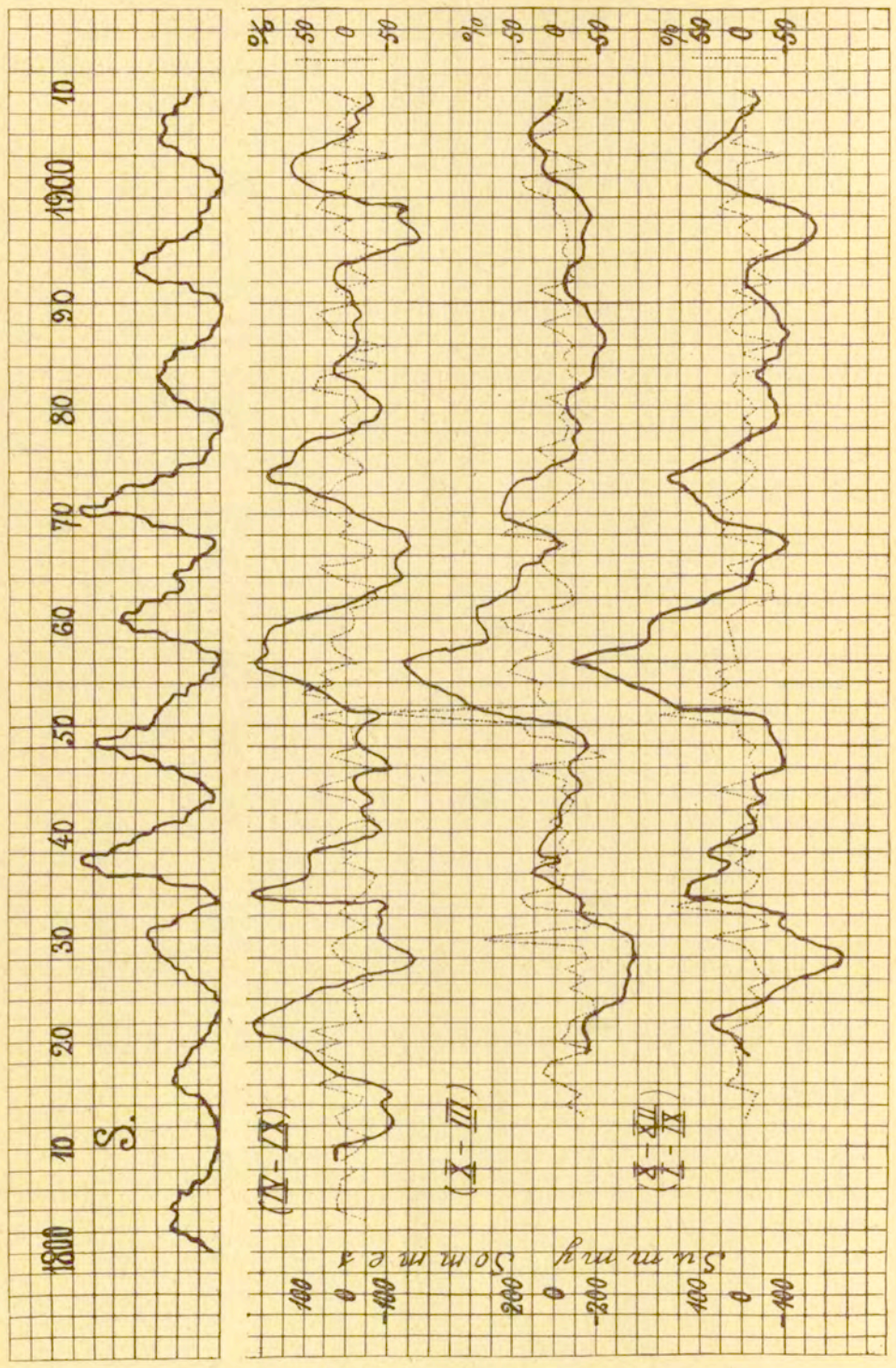
$$\delta_n + 2(\delta_{n-1} + \delta_{n-2} + \delta_{n-3} + \delta_{n-4} + \delta_{n-5}) + \delta_{n-6}.$$

Jak widać z tabeli graficznej, krzywa plam słonecznych w okresie 1800—1910 przedstawia godne uwagi koincydencye zwłaszcza z krzywą opadów dla półrocza letniego. Między r. 1810 i r. 1860, a także od r. 1890 maxima plam odpowiadają jakoby minimum opadów w Warszawie; w czasie między r. 1860 i r. 1890 bieg krzywych jest jakgdyby równoległy. Wreszcie opady w Warszawie wykazują między r. 1840 i 1850 jakąś szczególną perturbacyę, która być może związana jest z jakimiś zmianami w sposobach obserwacji lub ustawieniu przyrządów.



Skala odchyień sumowanych dla opadu.

Częstość plam słonecznych. Echelle des écarts accumulés des précipitations.



Fréquence des taches solaires.

Skala odchyień bezpośrednich dla sum opadów, w %.  
Echelle des écarts directs des sommes de précipitations en %.

Krzywe przebiegu opadów w Warszawie. Courbes représentant la marche des sommes de précipitations à Varsovie. (Objaśnienie por. na str. 481 Voir légende, p. 481).



Jakkolwiek okresowość w przebiegu opadów w Warszawie daje się skonstatować zapomocą dwóch niezależnych metod, to jednak zastrzedz się należy, że fakt znalezienia tej okresowości opadów niema, przynajmniej na razie, bezpośredniego znaczenia dla przewidywania przyszłych opadów. Wynika to przede wszystkim stąd, że okres ten nie uwydatnia się w przebiegu samych sum opadowych, lecz jest zamaskowany silnymi odchyleniami, pochodzącymi z innych przyczyn tak, że do wykrycia jego potrzeba specjalnej metody zestawienia rezultatów. Po drugie zaś ujawniająca się okresowość nie następuje w stałych odstępach czasu, lecz opóźnia się lub przyśpiesza, w przybliżeniu tylko stosując się do okresu jedenastoletniego plam słonecznych.

Nie możemy zakończyć pracy niniejszej, nie wspomniawszy, że rezultat powyższy co do okresów w przebiegu opadów w Warszawie zdaje się stwierdzać dla przypadku szczególnego teoryę wpływu zmiennej działalności słońca na czynniki meteorologiczne, którą z taką wytrwałością stara się w szeregu swych prac uzasadnić p. Romuald Merecki.

Warszawa, w listopadzie 1911 roku.  
Biuro Meteorologiczne Sieci Warszawskiej.

RÉSUMÉ.

M-r Władysław Gorczyński:

**Sur la variabilité des précipitations  
d'après les observations faites à Varsovie depuis 1803.**

Communication annoncée 5. XI. 1911.

Le mémoire en question constitue la suite du travail sur les „Précipitations à Varsovie“, dont la première partie fut publiée dans les Comptes Rendus (T. IV, Fasc. 8) de la Société Scientifique de Varsovie. La partie présente, concernant la question de la variabilité des précipitations, est divisée en quatre chapitres.

Le chapitre A (Sur la variabilité en général) contient la table numérique suivante:

Tab. I. Variabilité absolue et relative des précipitations à Varsovie. Moyennes de 50 ans: 1851—1900.

En outre on y trouve exposé la variabilité des nombres de jours de précipitations, ainsi que les écarts extrêmes des sommes en *mm* et des nombres de jours de précipitations à Varsovie.

Le chapitre *B* (sur les écarts des précipitations et sur la probabilité des changements) traite la question des écarts positifs et négatifs et la probabilité des changements dans les sommes des précipitations, d'après MM. Pietkiewicz et Hellmann.

On trouve, dans le chapitre *B*, les tables suivantes:

Tab. II. Valeurs moyennes et probables des précipitations à Varsovie (1813—1887), d'après M-r Pietkiewicz.

Tab. III. Fréquence des diverses sommes des précipitations pendant les saisons, à Varsovie.

Tab. IV. Probabilité (en %) des mois „secs“ et „humides“ à Varsovie. Période de 78 ans (jusqu'à 1900).

Tab. V. Combien de fois on a observé à Varsovie (pendant 50 ans 1851—1900) 1, 2, 3. . . périodes mensuelles ou annuelles successives avec les sommes de précipitations au-dessus (>), au-dessous (<) ou égales aux valeurs normales.

Le chapitre *C* (Sur les périodes secs et humides à Varsovie) contient les tables suivantes:

Tab. VI. Saisons spécialement secs et humides à Varsovie, pendant la période 1851—1900, (d'après G. Hellmann).

Tab. VII. Années particulièrement humides à Varsovie (1813—1887).

Tab. VIII. Précipitations en *mm* et le caractère des écarts à Varsovie, pendant la période de 108 ans: 1802/3—1909/10.

Tab. IX. Nombres de jours de précipitation et le caractère des écarts respectifs à Varsovie pendant la période 1880/1—1909/10.

Enfin le chapitre *D* traite la question importante des „périodes dans la marche des précipitations“. Il se compose de deux parties, dont la première s'occupe de l'existence de la période dite de Brückner et la seconde de la période de onze ans en correspondance avec la fréquence des taches solaires. Il y a, dans ce chapitre, une table numérique:

Tab. X. Moyennes de cinq ans de sommes de précipitations, déduites en % des valeurs normales.

Et une table graphique (voir p. 482) avec des courbes représentant la marche des sommes de précipitation à Varsovie et la



fréquence des taches solaires pendant la période 1800—1910. La marche des précipitations y est représentée séparément pour l'année (comptée d'octobre à septembre) et pour deux périodes de 6 mois (avril-septembre, octobre-mars). Les lignes pointillées (-----) représentent la marche des écarts des sommes de précipitations réellement observés (en  $\frac{0}{10}$  des valeurs normales respectives), tandis que trois autres courbes (—) donnent la même marche, mais d'après les valeurs relatives des écarts, spécialement obtenues avec la méthode de sommes des écarts (sommes de 7 écarts successifs, proposées par M-r Magelssen: „Meteorologische Zeitschrift“ T. 28, 1911).

En consultant les courbes de précipitations à Varsovie avec la fréquence des taches solaires (courbe supérieure *S* dans la même table graphique) on voit qu'il y a une remarquable corrélation entre ces deux phénomènes. Cette corrélation se dégage surtout pour les précipitations de l'été (6 mois: avril-septembre); les courbes respectives (*S* et IV — IX) sont tantôt opposées, comme en 1810—1860 et 1890—1910, tantôt presque parallèles comme en 1860—1890.

Il y a lieu à remarquer que les valeurs relatives des écarts, obtenues d'après les sommes successives (méthode de W. Schmidt, discutée dans la „Meteorologische Zeitschrift“ T. XXVIII) conduisent à des résultats analogues. Ces „sommes successives“ des écarts ne sont pas reproduites graphiquement.

La corrélation entre la fréquence des taches solaires et les sommes des précipitations à Varsovie, contrôlée d'après deux méthodes indépendantes, semble donc pouvoir être dégagée; il ne faut pas cependant exagérer l'importance pratique de ce fait étant donné que la corrélation en question se dégage seulement dans les valeurs spécialement „rectifiées“, tandis que les écarts réels ont un caractère accidentel et très compliqué.

Varsovie, en novembre 1911.

Bureau Météorologique du Musée de l'Industrie  
et de l'Agriculture.

En outre on y trouve exposé la variabilité des nombres de jours de précipitations, ainsi que les écarts extrêmes des sommes en *mm* et des nombres de jours de précipitations à Varsovie.

Le chapitre *B* (sur les écarts des précipitations et sur la probabilité des changements) traite la question des écarts positifs et négatifs et la probabilité des changements dans les sommes des précipitations, d'après MM. Pietkiewicz et Hellmann.

On trouve, dans le chapitre *B*, les tables suivantes:

Tab. II. Valeurs moyennes et probables des précipitations à Varsovie (1813—1887), d'après M-r Pietkiewicz.

Tab. III. Fréquence des diverses sommes des précipitations pendant les saisons, à Varsovie.

Tab. IV. Probabilité (en %) des mois „secs“ et „humides“ à Varsovie. Période de 78 ans (jusqu'à 1900).

Tab. V. Combien de fois on a observé à Varsovie (pendant 50 ans 1851—1900) 1, 2, 3. . . périodes mensuelles ou annuelles successives avec les sommes de précipitations au-dessus (>), au-dessous (<) ou égales aux valeurs normales.

Le chapitre *C* (Sur les périodes secs et humides à Varsovie) contient les tables suivantes:

Tab. VI. Saisons spécialement secs et humides à Varsovie, pendant la période 1851—1900, (d'après G. Hellmann).

Tab. VII. Années particulièrement humides à Varsovie (1813—1887).

Tab. VIII. Précipitations en *mm* et le caractère des écarts à Varsovie, pendant la période de 108 ans: 1802/3—1909/10.

Tab. IX. Nombres de jours de précipitation et le caractère des écarts respectifs à Varsovie pendant la période 1880/1—1909/10.

Enfin le chapitre *D* traite la question importante des „périodes dans la marche des précipitations“. Il se compose de deux parties, dont la première s'occupe de l'existence de la période dite de Brückner et la seconde de la période de onze ans en correspondance avec la fréquence des taches solaires. Il y a, dans ce chapitre, une table numérique:

Tab. X. Moyennes de cinq ans de sommes de précipitations, déduites en % des valeurs normales.

Et une table graphique (voir p. 482) avec des courbes représentant la marche des sommes de précipitation à Varsovie et la



fréquence des taches solaires pendant la période 1800—1910. La marche des précipitations y est représentée séparément pour l'année (comptée d'octobre à septembre) et pour deux périodes de 6 mois (avril-septembre, octobre-mars). Les lignes pointillées (-----) représentent la marche des écarts des sommes de précipitations réellement observés (en  $\frac{\%}{0}$  des valeurs normales respectives), tandis que trois autres courbes (—) donnent la même marche, mais d'après les valeurs relatives des écarts, spécialement obtenues avec la méthode de sommes des écarts (sommes de 7 écarts successifs, proposées par M-r Magelssen: „Meteorologische Zeitschrift“ T. 28, 1911).

En consultant les courbes de précipitations à Varsovie avec la fréquence des taches solaires (courbe supérieure *S* dans la même table graphique) on voit qu'il y a une remarquable corrélation entre ces deux phénomènes. Cette corrélation se dégage surtout pour les précipitations de l'été (6 mois: avril-septembre); les courbes respectives (*S* et IV — IX) sont tantôt opposées, comme en 1810—1860 et 1890—1910, tantôt presque parallèles comme en 1860—1890.

Il y a lieu à remarquer que les valeurs relatives des écarts, obtenues d'après les sommes successives (méthode de W. Schmidt, discutée dans la „Meteorologische Zeitschrift“ T. XXVIII) conduisent à des résultats analogues. Ces „sommes successives“ des écarts ne sont pas reproduites graphiquement.

La corrélation entre la fréquence des taches solaires et les sommes des précipitations à Varsovie, contrôlée d'après deux méthodes indépendantes, semble donc pouvoir être dégagée; il ne faut pas cependant exagérer l'importance pratique de ce fait étant donné que la corrélation en question se dégage seulement dans les valeurs spécialement „rectifiées“, tandis que les écarts réels ont un caractère accidentel et très compliqué.

Varsovie, en novembre 1911.

Bureau Météorologique du Musée de l'Industrie  
et de l'Agriculture.

6. Pan Z. Weyberg:

### Przyczynek do składu chemicznego apatyków.

(Doniesienie tymczasowe).

Komunikat zgłoszony dn. 9 Października 1911 r.

Autor, w formie doniesienia tymczasowego, zwrócił uwagę na to, że dotychczasowe syntezy apatyków sztucznych zawsze dokonywane były z fosforanu i chlorku jednego kationu. W celu zbadania, czy w apatykach możliwe jest wprowadzenie w większej ilości metalu jednowartościowego, autor stapiał fosforan barowy lub fosforan amonowo-magnezowy z wielkim nadmiarem chlorku potasowego lub chlorku sodowego. Po ostudzeniu stopu i wylugowaniu nadmiaru topnika autor otrzymywał trudno rozpuszczalne w wodzie proszki składające się z heksagonalnych igiełkowatych kryształków, których skład chemiczny poda w czasie najbliższym.

7. Pan Ryszard Błędowski:

### O autotomii u *Arenicola marina* L.

Komunikat zgłoszony dn. 10 Listopada 1911 r.

Przedstawił p. J. Tur.

#### I. Obserwacje makroskopowe.

W lecie roku bieżącego miałem możność na stacyi zoologicznej na Helgolandzie—obserwowania w większej ilości wieloszczeta osiadłego (*Sedentaria*) *Arenicola marina* L. Materiał obserwowany pochodził bądź to z pobliskiej wydmy (odmiana jasno-różowa), bądź też z zachodniej części samej wyspy (osobniki większe i ciemniejsze).

Rozpatrując właściwości osobnikowe każdego zwierzęcia, spostrzegłem wkrótce, że tylna, bezskrzelowa okolica ciała *Arenicola* (t. zw. ogon), kształtuje się odmiennie u każdego osobnika, odróżniając się barwą, długością, charakterem powierzchni. Często spotykałem też osobniki zupełnie pozbawione ogona, lub też posiadające jego szczątki tylko, w postaci 2—3 segmentów. Przypuszczałem niekiedy, że mam w takich razach do czynienia z ga-



tunkiem *Arenicola ecaudata* John., jednakże przypuszczenia te w następstwie nie sprawdziły się.

Różnice w budowie „ogona“ skłoniły mnie do myślenia o zdolności regeneracyjnej u *Arenicola*. Istotnie, już u Staniusa (1840) czytać mogłem słowa następujące:

„Fischer, welche dieses Wurmes als Köder beständig sich bedienen und ihn oft längere Zeit in feuchten Sande lebend erhalten versicherten mir, dass sein Reproduktionsvermögen ausserordentlich stark sei. Nicht nur sollen Verletzungen seines Körpers, welche beim Ausgraben des Wurmes so leicht entstehen rasch verheilen, sondern es soll auch das ganze Schwanzende des Tieres auch nachdem es abgeschnitten wurde sehr bald sich wieder erzeugen“.

Aby, ze względów natury mikrotechnicznej, nie zanieczyszczać przewodu pokarmowego, przetrzymywałem badane egzemplarze *Arenicola* w basenie szklanym z ustawicznie przepływającą wodą, przyczem dno basenu poprzednio zupełnie oczyściłem z piasku.

Już w ciągu dwu pierwszych dni obserwacji dostrzegłem osobniki, które ustawicznie zmieniały kształt swego ogona; chwilami był on nadmiernie wydłużony i cienki, to znów stawał się zupełnie krótki. Cały zaś „habitus“ zwierzęcia zdradzał, że w organizmie następują pewne specjalne przemiany. Częstokroć zwierzę poruszało się szybko i raźnie, poczem, gdy ruchy ustawały, opadało bezwładnie na dno, a wiotkość worka skórno-mięśniowego zdawała się wskazywać zupełne wyczerpanie sił.

Wkrótce jednak ruch „ogona“ rozpoczynał się nanowo, a po pewnym czasie (częstokroć w ciągu jednego dnia) można już było spostrzedz daleko sięgające zmiany w tym organie. Odcinki ogona, występowały z coraz to większą wyrazistością (Tab. fotogr. 2). Bruzdy bowiem między oddzielnymi segmentami pogłębiały się, segmenty same przybierały kształt zaokrąglony i całość stawała się po pewnym czasie podobna do jądra *Stentora* (Fot. 1).

Przypuszczenie co do autotomii stawało się coraz bliższe. Istotnie, po kilku godzinach, segmenty zaokrąglaly się zupełnie, pękały na granicach, a białe połączenia między nimi już na pierwszy rzut oka przypominały swym wyglądem jelito.

Jako fazę ostateczną zjawiska stwierdziłem zupełne odrywanie się tak zmienionych segmentów, przyczem część przerwanego jelita zwisała w postaci poszarpanych kosmków.

Zrzadka tylko cała część ogonowa autotomizowała się w całości odrazu; znacznie częściej odpadało od ogona po kilka segmentów naraz. Głębsza bruzda powstawała niekiedy z początku między ostatnim a przedostatnim segmentem i wówczas spadał narazie tylko odcinek ostatni. Wyżej położone segmenty sąsiednie przez czas pewien zachowywały się normalnie, lecz z chwilą oderwania się pierwszego i one powoli wciągane zostały w identyczny proces autotomii (Fot. 3).

Jak wskazują załączone tu fotografie mogłem również zanotować przypadki, gdzie cała ogonowa część ciała autotomizowała stopniowo wszystkie swoje segmenty. Wówczas ostateczne oderwanie się zależało poniekąd od przypadku. Rzadziej się zdarzało, że odcinki odpadały po jednym, częściej odrywały się połączone po 3—6, a notowałem też przypadki gdy spadał cały „ogon“ odrazu, jakkolwiek jeden lub dwa tylko zbliżone ku przodowi segmenty były do autotomii przygotowane. W pozostałej części końcowej ujawniały się tylko bardzo nieznaczne zmiany poprzedzające autotomię. Podrażniona alkoholem, część taka nawet już po odłączeniu się od całości, ujawniała charakterystyczne wcięcia międzyodcinkowe i niekiedy rozpadała się jeszcze na kawałki mniejsze, po kilka segmentów w każdym.

Zdarza się niekiedy, że proces autotomii poprzedza powolną śmierć zwierzęcia, nie jest on jednak nigdy bezpośrednią jej przyczyną i nie zachodzi nawet w takich razach do okolicy skrzelowej ciała. Najczęściej *Arenicola* traci kilka tylko (2—8) odcinków ogona, a przeniesiona z powrotem do warunków normalnych, żyje pomyślnie nawet wówczas, gdy autotomia obejmie całą okolicę ogonową.

Jakkolwiek nie wszystkie *Arenicolae*, które hodowałem w basenie, autotomizowały swój ogon, skłonny jestem jednak do przypuszczenia, że przyczyną tego zjawiska były poniekąd nienaturalne warunki egzystencji zwierzęcia (częściowo, być może, brak piasku). Raz jeden tylko, wśród dostarczonych mi zwierząt spotkałem osobnika, który, nieprzebywając jeszcze ani chwili w akwarium wykazywał początki autotomii swoich dwu ostatnich segmentów ogonowych.



Pośrednią, nieznaną mi przyczynę, która powodowała opisane zjawisko autotomii, próbowałem zastąpić przez czynniki bezpośrednie, doświadczalne. Dało się to skutecznie zarówno w drodze podrażnienia mechanicznego jak chemicznego. Mogłem więc wywoływać drogą podrażnienia mechanicznego (przewiązywanie, drażnienie szczypczykami, igłą i t. p.) cały przebieg autotomii od początku na osobniku zupełnie zdrowym; w drodze podrażnień natury chemicznej (alkohol, kokaina, dwuchromian potasowy), udawało mi się przebieg autotomii przyspieszyć (fot. 4); nie badałem jednak, czy można go w ten sposób *ab initio* wywołać. Gdy cała autotomizowana część ogonowa po oddzieleniu się od zwierzęcia poddawana została działaniu silniejszej narkozy, to częstokroć w dalszym ciągu rozpadała się ona na kawałki mniejsze do jednego segmentu włącznie. Zbyt silna narkoza *Arenicoli* powodowała niekiedy pęknięcie worka skórno-mięśniowego w okolicy skrzelowej i wyrzucenie wnętrzości (podobnie jak u strzykw), co jednak w tym przypadku powodowało szybką śmierć zwierzęcia.

Na skutki podrażnienia mechanicznego trzeba czekać znacznie dłużej, niż na skutki podniety chemicznej, którą zresztą stosowałem zazwyczaj na zwierzętach już poprzednio zdradzających skłonność do autotomii.

Po każdorazowym podrażnieniu mechanicznem „ogona“, zwierzę wykonywało dość gwałtowne ruchy, poczem następował okres względnego spokoju, podczas którego zaczynały się ukazywać głębsze bruzdy międzyodcinkowe. Jeżeli podnieta przez czas dłuższy nie została ponowiona, wówczas *Arenicola*, jakkolwiek powoli, powracała do stanu i wyglądu normalnego i o autotomii nie było już mowy—bruzdy powoli znikały. Gdy jednak podnieta została następnie kilkakrotnie ponowiona, bruzdy głębsze na powierzchni „ogona“ nagle znikały, aby jednak za chwilę wystąpić jeszcze wyraźniej, najwidoczniej się pogłębiając. Dalszy proces był wówczas nieunikniony.

Nowa, każdorazowa podnieta była powodem chwilowego zaniku zupełnie już wyraźnych objawów autotomii, o ile tylko ta ostatnia nie posunęła się aż do stanu, w którym hypoderma już pęka, a tkanka łączna podskórna występuje wyraźnie nazewnątrż. O ile się to stało, to następne podrażnienie nie powoduje już żadnych zmian i proces autotomii odbywa się dalej samorzutnie.

## II. Badania histologiczne.

Pod względem histologicznym przebieg autotomii u *Arenicola marina* polega głównie na zmianach w układzie mięśniowym. Ilość narządów i kompleksów tkankowych, znajdująca się w części ogonowej u *Arenicola marina* jest bardzo nieznaczna.

Wór skórno-mięśniowy zdrowej *Arenicoli* posiada budowę bardzo zbliżoną do schematu pierścienic: oskórek, hypoderma, warstwa mięśni okrężnych i podłużnych, otrzewna.

Jelito (w danym przypadku tylne) nie posiada również żadnych cech swoistych. To samo stosuje się do naczyń, układu nerwowego i przegródek (*dissepimenta*).

W procesie autotomii tkanka mięśniowa odgrywa rolę główną. Inne tkanki zmieniają swój kształt w związku z zachowaniem się włókien mięśniowych. Po worze skórno-mięśniowym najważniejsze zmiany dotyczą jelita.

Zmiany o jakich chcę mówić, można zaobserwować dokładnie tylko tam, gdzie elementy mięśniowe odznaczają się względną wielkością. Tam zaś gdzie włókna mięśniowe są małe i cienkie (jak np. w jelicie), o zmianach jakie w nich zachodzą rozumować możemy tylko na podstawie zjawisk wtórnych przez zmiany te wywołanych.

W warstwie mięśni okrężnych worka skórno-mięśniowego włókna są dość znacznej wielkości. Warstwa tych mięśni staje się coraz słabsza w miarę zbliżenia się do miejsca, w którym odcinek ma się oderwać. Słabość jej polega nie na tem, że staje się ona coraz cieńsza (jest to bowiem normalne w tych miejscach, gdzie segmenty przylegają do siebie i gdzie ich średnica nieco się zmniejsza), lecz na tem, że zmienia się charakter oddzielnego włókna. Intensywność zabarwienia włókna jest w środku jego większa, niż na krańcach. Przytem w części intensywniej zabarwionej możemy dokładnie odróżnić włókienka kurczliwe (*fibrillae*), podczas gdy na końcach włókien widać mniejszą jakby ilość fibrill'ów, skutkiem czego obraz przypomina bardziej tkanę łączną, niż mięśniową. Pochodzi to stąd, że włókna mięśniowe w worze skórno-mięśniowym otoczone są zazwyczaj pochewką z tkanki łącznej i pogrążone są w masę łączno-tkankową. Podczas silnych skurczów kolejnych w czasie autotomii, substancja kurczliwa włókna mięśniowego (*fibrillae*) zbiega się ku środkowi



włókna, na końcach zaś pozostanie widoczna pochewka włókna, której obraz mało się różni od otaczającej tkanki łącznej. Dzieje się to naturalnie tylko podczas bardzo silnego skurczu, poprzedzającego autotomię. Przez taki rozkład nierównomierny substancji kurczliwej tłómaczy się też nierównomierne zabarwienie włókna.

Kształt autotomizującego się ogona, podobny do sznurka nanizanych koralii (mikrofot. 4) jest spowodowany przez skurcz warstwy mięśni podłużnych. Włókna, przebiegające w tej warstwie wzdłuż odcinka, gromadzą swoją substancję kurczliwą ku środkowi, przez co przy nadmiernym skurczu pociągają — rzecz prosta — za sobą wszystkie kompleksy tkanek, związane z ową warstwą mięśni podłużnych. Hypoderma i warstwa mięśni okrażonych przybiera dzięki temu kształt łuku, którego cięciwa staje się coraz mniejsza. W miarę takiego kurczenia się cięciwy (warstwy mięśni podłużnych) krzywizna łuku się zwiększa i kształty oddzielnego odcinka zaokrąglają się coraz bardziej (fig. 5). Trzeba dodać, że miejsca przyczepu mięśni podłużnych przypadają na granicy oddzielnych segmentów, w pobliżu przegródek (*dissepimenta*). Podczas silnych skurczów masy skurczliwej te ostatnie zostają oczywiście rozerwane.

Odcinki łączą się ze sobą przy pomocy cienkiej wiązki mięśni podłużnych, przebiegającej bezpośrednio prawie pod hypodermą, a połączonej z obu końców z właściwą muskulaturą podłużną każdego z segmentów sąsiednich (Fig. 5). Silny skurcz tej ostatniej pociąga za sobą ową ciekłą wiązkę, co powoduje pęknięcie hypodermy. Niekiedy, gdy skurcz nastąpi w dwóch miejscach jednego i tego samego odcinka, możliwe jest pęknięcie segmentu w jego połowie, dzięki dwu samodzielnym ośrodkom skurczu. Zdarza się to jednak rzadziej, a na przekroju obraz jest zupełnie podobny do obrazu na fig. 5, z tą różnicą, że brak tu naturalnie owej małej wiązki włókien podłużnych.

Opleciony przez tkankę mięśni podłużnych pień nerwowy, z chwilą skurczu mięśni, ulega również przerwaniu. Przez pęknięcie pnia nerwowego objaśnić się daje to zjawisko, że autotomizującą część ogona posiada swój ruch niezależny, o tyle, o ile segmenty nie zaokrągliły się jeszcze zupełnie, to znaczy, o ile autotomia worka skórno-mięśniowego nie została jeszcze ukończona. Z chwilą jej ukończenia, zautotomizowana część ogona rusza się o tyle, o ile jest poruszana przez segmenty bliżej

głowy położone, jeszcze nierozzerwane. Jak widać z powyższego (ilustruje to fig. 5) ściany odcinków na granicy swej zaginają się w kierunku jamy ciała, a segmenty wiszą jeszcze przez czas pewien na przebiegającym wzdłuż całego ogona jelicie.

Ostateczne oddzielenie się odcinków możliwe jest dopiero po całym szeregu zmian w przewodzie pokarmowym. Zmiany te polegają na takich samych skurczach w układzie mięśniowym jelita jak to widzieliśmy w worku skórno-mięśniowym. Jakkolwiek obrazy tych zmian w mięśniach są z natury samych elementów w tym miejscu znacznie mniej wyraźne, to jednak ostateczne ich skutki (fig. 6) są tak uderzające, że przyczyna autotomii jelita w żadnym razie nie może ulegać wątpliwości.

Rysunek (fig. 6) wskazuje jak brzegi jelita (na przekroju poprzecznym) zawijają się symetrycznie na wzór liry. Symetria tego zjawiska i związek nabłonka jelitowego z warstwą mięśni jelitowych w miejscu pęknięcia jest tak swoisty, że nie widząc nawet charakterystycznego skurczu włókien mięśniowych, zmuszeni jesteśmy do przyjęcia takich samych przyczyn, jak te, które powodują autotomię innych organów.

Gdy w miarę siły skurczu brzeg worka skórno-mięśniowego zagina się coraz bardziej ku środkowi, wywiera on pewien ucisk na jelito, które uciskane w granicach segmentu, zostaje wypchnięte do przestrzeni międzyodcinkowych, tworząc tu owe charakterystyczne dla całego zjawiska białe pęcherzyki (fig. 4) pomiędzy segmentami.

Pęknięcie przewodu pokarmowego następuje dopiero wówczas, gdy zostanie on obnażony w przestrzeniach międzyodcinkowych, dzięki poprzednio zaznaczonej autotomii worka skórno-mięśniowego.

Pęknięte w jednym miejscu jelito staje się tak słabe, że każdy ruch zwierzęcia, czy to czynny czy bierny, powoduje dalsze odrywanie się jego tkanki i już wkrótce po pierwszym pęknięciu zautotomizowana część ogona odpada. Przebieg autotomii zostaje wówczas ostatecznie zakończony.

### III. Uwagi i wnioski.

Opisany przebieg autotomii u *Arenicola marina* nie stoi w żadnym związku ze znanymi zjawiskami autotomii u innych zwierząt.



Zwyczajo się wprawdzie mówi, że zjawisko autotomii w świecie zwierzęcym jest objawem pospolitym i znanym; pogląd ten dotyczy jednak głównie tylko stawonogów w szeregu których autotomia była przedmiotem wielokrotnych, wyczerpujących badań (Frédéricq, Andrews, Bordage, Friedrich i in.). Z całej literatury dotyczącej autotomii u stawonogów wynika, że chodzi tu najczęściej o swoiste urządzenia mechaniczne, że wszystkie owe wyrostki chitynowe, pierścienie, specjalne mięśnie („Brechmuskel“) i t. p. jedno najczęściej mają na celu: szybkie wyrwanie się z rąk atakującego przeciwnika („autotomia obronna“).

Po rozważeniu opisanego przez nas zjawiska, łatwo spostrzedz, że przypadek autotomii u *Arenicola marina* pod tę kategorię nie podpada.

Przedmiotem mniej częstych i mniej wyczerpujących badań nad autotomią były pierwotniaki i polipy hydroidalne. Odległość jednak stanowisk systematycznych pozwala mi na nie szukanie tu porównań z *Arenicola*.

Wśród pierścienie można wprawdzie wyliczyć szereg przedstawicieli, gdzie autotomia jest zjawiskiem niejako zwykłym. Przyczyna poglądu jednakże, że jest to zjawisko w całym tym rzędzie zwierząt pospolite, polega zdaje się bardziej na uznanej wielokrotnie zdolności regeneracyjnej tych zwierząt i na dość często spotykanej tu schizogonii, niż na stwierdzonych i opracowanych przypadkach autotomii istotnej.

Opisy „rzeczywistej“ autotomii w grupie robaków są nieliczne, a większość notowanych przypadków nosi cechy autotomii obronnej, polega bowiem na nagłym rozłamaniu się na dwoje w miejscu zaatakowanym. Taki jest charakter tego zjawiska u niektórych skąposzczetów wodnych (*Oligochaeta limicola*), u *Eunicidae*, *Spionidae* i in.

Odrzucanie wąsików (*cirrho*) i okryw (*elytrae*) daje się również łatwiej podciągnąć pod zjawisko regeneracji u pierścienic, stanowi bowiem przypadki analogiczne z wypadaniem włosów i odpadaniem nabłonków u kręgowców, które to zjawiska stoją w związku bezpośrednim ze zdolnością do regeneracji tych drobnych części ustroju; nikt nie będzie chyba mówił o autotomii włosów, paznogi, kopyta i t. p.

Jeszcze bardziej oddalonych przypadków i form autotomii (jak np. ramiona głowonogów, dodatki ciała mięczaków i t. p.) poruszać nie będą.

Pod względem morfologicznym—jak z powyższego wynika—żaden z tych przypadków nie da się porównać z autotomią u *A. marina*. Co do przebiegu zjawiska, nie znajduję również nic analogicznego w świecie zwierzęcym.

Zastanawiając się nad przyczynami tego zjawiska myślałem pierwotnie o t. zw. „autotomie parasitaire“ Giard'a. Istotnie, w jamie ciała kilku osobników udało mi się znaleźć nieznanne mi *Sporozoa*. Następujące jednak przyczyny nie pozwalają mi nazwać opisanego zjawiska, autotomią „pasorzytniczą“:

- 1) wśród autotomizujących *Arenicol* większość nie posiadała pasorzytów;
- 2) autotomia daje się wywołać przez sztuczną podniecię.

W stanie obecnym zagadnienia o autotomii wogóle napróżno doszukiwalibyśmy się przyczyn lub celu tego zjawiska.

Nie mogę jednak pominąć rozpatrzenia niektórych stosunków, jakie zachodzą pomiędzy mojami obserwacjami, a poglądami niektórych autorów, którzy zastanawiali się nad ogólną stroną zagadnienia.

Frédéricq (1891) w artykule swoim skierowanym przeciwko Frenzlowi i zatytułowanym „Ueber Autotomie“, rozpatrując podstawy zjawiska autotomii twierdzi, że brak tu nawet śladu rozmyślnego i dowolnego działania („...„dass hier jede Spur einer willkürlichen oder vernünftigen Absicht fehlt“) i że mamy tu do czynienia raczej z mechanizmem ślepym, nerwowym, preformowanym, podobnym do centrów refleksyjnych u zwierząt wyższych (dass es sich „vielmehr um die Wirkung eines präformierten, blinden, nervösen Mechanismus, den Reflexcentren der höheren Tiere sehr ähnlich“ handelt).

Jakkolwiek zdanie to wypowiedziane było w sensie ogólnym, te jednak widoczne jest, że myśl autora oparła się głównie o dobrze znane mu przypadki z zakresu autotomii u stawonogów i gadów. Wyrażony bowiem w sposób powyższy pogląd z trudnością daje się uogólnić, a zastosowany do przypadku u *Arenicola* prowadzi do wyraźnych sprzeczności. Nie mamy bowiem żadnej podstawy, aby w przypadku danym mówić o „mechanizmie“.



Uwzględniając przebieg tego zjawiska, różnorodne wpływy, które je mogą wywołać, moglibyśmy z największą ostrożnością i tylko dla poszczególnych momentów użyć porównania z mechanizmem autotomizującym, z góry istniejącym. Tem więcej, że rola układu nerwowego zarówno ośrodkowego jak i obwodowego jest nam w tym szczególnym przypadku bardzo mało znana. Również trudno myśleć tu o preformacji, skoro nie da się ustalić żadna prawidłowość w przebiegu autotomii w tym przypadku, a przebieg procesu może być różny u każdego osobnika.

Wszystko to powinno by skłaniać nas do gruntownej rewizji poglądów wypowiedzianych w sprawie autotomii wogóle, szczególnie jeśli zważymy że Frenzel (91) np. chętnie przyjmuje dla wyjaśnienia zjawiska takie czynniki jak wola i instynkt zwierzęcia.

„Wola“ *Arenicoli* jest jednak czemś niedość jasnym, a wprowadzenie jej jako czynnika w opisanym przypadku jest co najmniej ryzykowne...

Charakter autotomii, zarówno jak i jej przyczyny, z pewnością nie są jednakowe w całym świecie zwierzęcym. Być może, że autotomia „stopniowa“ u *Arenicola marina* dałaby się objaśnić niektórymi procesami samoregulacyjnymi w organizmie. Taki punkt widzenia trzeba by jednak oprzeć na nowym, specjalnym szeregu doświadczeń.

Możność wykonania pracy niniejszej zawdzięczam łaskawej pomocy Kasy im. Miąnowskiego, której Komitetowi składam na tem miejscu szczere podziękowanie.

Poczuwam się również do miłego obowiązku wyrażenia podziękowania personelowi pracowni zoologicznej na Helgolandzie, którego uprzejmości zawdzięczałem zawsze dostatek materiału do badań, oraz Dr. J. Turowi, za łaskawe wykonanie fotogramów.

#### L i t e r a t u r a .

1. Ashworth I. H. Memoir on *Arenicola*. Proceeding and transaction of the Liverpool Biological Society. Vol. XVIII. 1903—04.
2. Ashworth I. H. Die *Arenicoliden*-Sammlung im Königlichen Zoolog. Muzeum in Berlin. Mitteilungen aus d. zool. Muz. Berlin. Bd. 4. 1910.

3. Ashworth I. H. La collection des Arénicoliens du Muséum d'histoire naturelle de Paris. Annales des Sciences natur. IX, Serie.
4. Frédéricq L.: Sur l'autotomie ou mutilation par voie reflexe, comme moyen de defense chez les animaux.  
Arch. de Zool. exper. et gener. T. I. 1883.
5. Frédéricq L.: Ueber Autotomie. Archiv für gesammte Physiologie T. 50. 1891.
6. Frenzel: Ueber die Selbstverstümmelung (Autotomie) der Tiere Arch. f. d. gesammte Physiologie. T. 50. 1891.
7. Giard A.: Sur l'autotomie parasitaire et ses raports avec l'autotomie gonophorique et la schizogonie,  
Comptes Rendus Soc. Biolog. T. 49. 1897.
8. Korschelt E.: Regeneration und Transplantation. Jena 1907.
9. Marenzeller E.: Polychaeten der Angra Pequena-Bucht. Zoolog. Jahrbücher. Abt. f. System. Bd. 3. 1888.
10. Marshall W.: Autotomie bei Tieren. Sitzungsber. der Naturforsch. Gesellschaft in Leipzig. 1890.
11. Morgan—Moszkowski: Regeneration. Leipzig 1907.
12. Piéron H.: Le problème de l'autotomie. Bulletin scientif. T. 42. 1909.
13. Riggensbach: Beobachtungen über Selbstverstümmelungen. Zool. Anzeiger. Bd. 24. 1901.
14. Stanius H. Bemerkungen zur Anatomie u. Physiologie der Arenicola pisc. J. Müllers Archiv f. Anat. u. Physiologie. 1840.
15. Vogt et Young: Anatomie comparée pratique.

#### Objaśnienie fotogramów i rysunków.

Wszystkie figury odnoszą się do *Arenicola marina*.

- Fig. 1. Autotomia. Segmenty 3 końcowe w stadium poprzedzającym ostateczne oderwanie się ogona, powyżej trzeciego odcinka.  $\times 1,5$
- Fig. 2. Część ogonowa z wyraźną tendencją do autotomii  $\times 1,5$ .
- Fig. 3. Po oderwaniu się kilku segmentów, dalsza część ogona przygotowywa się do autotomii. U dołu widać pęcherzyk, utworzony w miejscu przerwanego jelita  $\times 1,5$ .
- Fig. 4. Autotomia doprowadzona do stadium ostatecznego pod wpływem działania alkoholu  $\times 1,5$ .
- Fig. 5. Przekrój podłużny poprzez dwa segmenty przygotowane do autotomii. Skurcz mięśni podłużnych. Ze strony prawej jelito. Muskulatura i hypoderma z tej strony opuszczone. Rysunek schematyczny  $\times 10$ .





1.



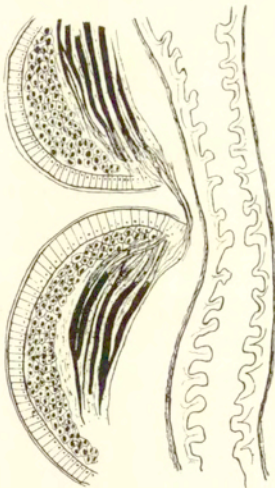
2.



3.



4.



5.



6.





Fig. 6. Przekrój poprzeczny przez jelito przerwane skutkiem skurczu mięśni. U dołu — mesenterium. Camera lucida Zeiss'a.  $\times 60$ .

Fotogramy (Fig. 1—4) zdjęte przy pomocy kamery stereoskopowej Zeiss'a.

ZUSAMMENFASSUNG.

Herr Ryszard Błędowski:

Ueber **Autotomie bei Arenicola marina.**

Angemeldet am 10. XI. 1911.

Vorgelegt von Jan Tur.

I. Der Verlauf der Autotomie.

Auf Helgoland im Sommer 1911 beobachtete ich öfters in grosser Zahl *Arenicola marina* L. Das gefischte Material stammte entweder von der benachbarten Düne (die Tiere besaßen eine hell-rosa Farbe) oder von der westlichen Küste der Insel (die grösseren und dunkleren Exemplare). Jedesmal setzte ich die Tiere in ein Beobachtungsaquarium und untersuchte gründlich jedes Individuum, weil schon die ersten Tiere meine grösste Aufmerksamkeit auf sich lenkten.

Die Arenicolen nach ihren individuellen Merkmalen ordnend, beobachtete ich dass der hintere kiemenlose Körperteil (der sog. „Schwanz“) sich nur sehr selten in Bezug auf die Länge, Hautskulptur und Farbe bei jedem Individuum gleich gestaltet.

Oefters fand ich Arenicolen, bei denen der letztgenannte Körperteil fast ganz fehlte und schien nur einen rudimentären Fortsatz zu bilden. Ich glaubte sogar eine *A. ecaudata* vor sich zu haben, jedoch haben sich meine Vermutungen nach eingehender Untersuchung nicht bestätigt. Eine grosse Regenerationskraft dieses Körperabschnittes schien immerhin sehr wahrscheinlich zu sein und, tatsächlich, ich konnte schon bei Stanius (1840) folgende Worte lesen: „Fischer, welche dieses Wurmes als Köder beständig sich bedienen und ihn oft längere Zeit in feuchten Sande lebend erhalten versicherten mir, dass sein Reproduktionsvermögen ausserordentlich stark sei. Nicht nur sollen Verletzungen seines Körpers, welche beim Ausgraben des Wurmes leicht entstehen, rasch verheilen, son-

dern es soll auch das ganze Schwanzende des Tieres auch nachdem es abgechnitten wurde, sehr bald sich wieder erzeugen“.

Um den Darmkanal (aus mikrotechnischen Gründen) rein erhalten zu können, züchtete ich die Arenicolen in einem Glass Becken mit reinem, durchfliessenden Wasser, ohne den Boden des Beckens mit Sand zu bestreuen. Im Laufe von zwei Tagen, konnte ich schon Individuen beobachten, die die Gestalt ihres Schwanzabschnittes oft veränderten, indem derletzte sich ein Mal kurz und dick, anderes Mal lang und dünn gestaltete. Aus dem ganzen Habitus des Tieres liess sich schon schliessen, dass im Organismus einige unbekannte Veränderungen vor sich gehen. Die Bewegungen waren oft lebhaft und munter, nachdem sie aber ausblieben, fiel das Tier, wie müde, zu Boden und es liess sich einige Schlafheit des Körpers beobachten. Bald aber fing der „Schwanz“ sich wieder langsam zu bewegen und nach einiger Zeit (oft im Laufe eines Tages) liessen sich an ihm weitgehende Veränderungen nachweisen. Die Segmente des „Schwanzes“, die man gewöhnlich, mit blossem Auge, nur schwer voneinander unterscheiden konnte, traten jetzt allmählig immer frappanter zu Tage. Die Furchen zwischen den benachbarten Segmenten vertieften sich, die Segmente rundeten sich ab, das Ganze erinnerte oft etwa an einen Stentorkern (Fig. 4).

Der Gedanke von der Automie war mir nahe.

Tatsächlich, ich fand nach ein Paar Stunden die Segmente vollständig abgerundet, und zwischen ihnen konnte ich ein weisses Zwischenstück sehen, welches schon auf ersten Blick das Bild des Darmkanals erinnerte.

Der Endeffekt war — wie es leicht zu Voraussehen war — natürlich der, dass die im Spiel sich befridenden Segmente sich ablösten, und es blieben nur die Darmzotten an der Ablösungsstelle hängen.

Nur selten löste sich das Schwanzende auf einmal ab. Oefters geschah dies teilweise. Der Einschnitt konnte sich zuerst nur zwischen zwei letzten Segmenten vertiefen, und dann fiel nur der letzte Ring ab. Die benachbarten, weiter nach oben liegenden Segmente verhielten sich noch einige Zeit lang ganz normal, um später jedoch öfters den Process der Autotomie vortzusetzen. Wie die beistehenden Photogramen zeigen, habe ich auch solche Fälle verzeichnen können, wo sich die Autotomie fast gleichzeitig auf dem



ganzen hinteren Körperabschnitte verbreitete. Die endgültige Abschnürung schien vom Zufal abzuhängen: oft löste sich ein Segment ab, öfters waren sie zu 2—4 vereinigt. Seltener, auch bei totaler, deutlicher Durchringelung des ganzen Schwanzes, erfolgte das Ablösen nur ein Mal, und zwar an dem ganz kopfwärts gelegenen Segmente.

Es kommt auch vor, dass der Autotomie, das allmälige Absterben des Tieres nachfolgt; ich konnte jedoch nicht sehen, damit sich der beschriebene Process auf die kiementragenden Segmente verbreitet.

Der öfteste Fall war der, dass *Arenicola* ein Paar (2 — 7) Segmente des „Schwanzes“ verloren hat, lebte aber auch dann ziemlich gesund, wen der ganze hintere Körperabschnitt autotomiert wurde.

Abwohl nicht alle *Arenicolen*, die ich im Becken längere Zeit aufhielt, die Schwanzgegend autotomierten, bin ich geneigt zu glauben, dass die Ursache dieser Erscheinung gewisser Maassen in den ziemlich unnatürlichen Lebensbedingungen (vielleicht der Mangel des Sandbodens?) zu suchen ist.

Nur ein einziges Mal habe ich eine *Arenicola* erhalten können, die in statu naturae, ohne noch im Aquarium zu verbleiben, die zwei letzten Segmente zu autotomieren suchte.

Den indirekten Reiz, der die beschriebene Autotomie zur Folge hatte, suchte ich auch durch einen direkten, experimentelen zu vertreten. Das ist mir sogut auf mechanischem, wie auch auf chemischem Wege gelungen. Und zwar durch mechanische Reize (Durchbinden, Reizen mittels einer Nadel, Pinzette etc.) konnte ich die Autotomie vom Anfang an, am ganz gesunden Körper hervorrufen, durch chemische (Alkohol, Cocain, Kalium bichromaticum) dagegen, habe ich die Tiere mit einer ganz schwach ausgesprochenen Neigung, zur sehr raschen Durchringelung und zur fast momentanen Autotomie bringen können. Der Process wird dadurch ganz gewiss beschleunigt, obwohl ich nicht versucht habe die gesunden Tiere mittels einer dauerhaften, ganz allmäligen chemischen Reizung zur Autotomie zu bringen. Ich meine hier selbstverständlich die oben geschilderte Form der Autotomie, nich aber das Holoturienähnliche Herauswerfen der Eingeweide, was mir oft bei allzustarker Narkose passiert ist. Der letztgenannte Fall hat den raschen Tod zur Folge. Der mechanische Reiz, an

gesundem Tiere angestellt, lässt auf seine Wirkung viel länger warten als der chemische, den ich zwar gewöhnlich schon an prädisponierten Tieren versuchte.

Nach dem jemaligen mechanischen Reizen des Schwanzes, führte das Tier ziemlich rege Bewegungen aus, darauf aber folgte eine Zeitfrist der relativen Ruhe, während der sich die intersegmentalen Furchen vertieft haben. Falls sich der Reiz längere Zeit nicht wiederholte, kam das Tier, obwohl langsam, zu seiner früheren Gestalt und es war dann nur selten von der Autotomie die Rede.

Nachdem aber der Schwanz noch ein Paar Mal gereizt wurde, verschwanden zwar die nach dem ersten Reiz entstandenen Furchen, der Schwanz zog sich auf kurze Zeit zusammen, später aber, nach einer Pauze traten die Furchen viel deutlicher auf, die Einschnitte zwischen den Segmenten sind tiefer geworden.

Ein neu ausgelöster Reiz war immer imstande die zur Autotomie führenden Effekte auf kurze Zeit abzuschaffen, unter der einen Bedingung, dass der Hautmuskelschlauch noch nicht geplatzt war und der Darmkanal nicht durchschimmerte. Nachdem aber das schon geschehen, war der nächste daraufkommende Reiz schon ganz erfolglos, denn der Process der Autotomie setzte sich weiter von selbst fort.

## II. Histologische Untersuchung.

In histologischer Hinsicht ist der Verlauf der Autotomie auf die Veränderungen in der Muskulatur hauptsächlich gestützt. Die Zahl der Organe und Gewebekomplexe, die sich im „Schwanz“ des *Arenicola*-Körpers befinden, ist sehr beschränkt.

Der Hautmuskelschlauch besitzt im Gesundheitszustande des Tieres eine Struktur, die sich auf das Schema des Anneliden-Baues zurückführen lässt: Cuticula, Hypodermis, Rings- und Längsmuskulatur, Peritoneum.

Im Darne (hier Enddarme) lassen sich gewöhnlich auch keine spezifischen Merkmale beobachten. Dasselbe bezieht sich auf die Blutgefäße, den Nervenstrang, die Dissepimente. Andere Organkomplexe fehlen in diesem Körperabschnitt.

Im Prozesse der Autotomie spielt die Muskulatur die Hauptrolle. Andere Gewebe verändern ihre Gestalt je nach dem Zustande der mit ihnen zusammenhängenden Muskelfasern. Nach



dem Hautmuskelschlauche kommt hier hauptsächlich der Darmkanal in Betracht.

Die Veränderungen, von welchen ich hier sprechen will, liessen sich nur in diesen Körperregionen optisch wahrnehmen, wo die Muskelfasern sich durch ihre relative Grösse auszeichnen. Da, wo sie ganz klein sind (z. B. im Darne) konnte ich nur auf den Endeffekt (fig. 6) gestützt, etwaige Schlüsse ziehen.

Die Muskelfasern waren im Hautmuskelschlauche gross genug, um an ihnen die Unterschiede wahrnehmen zu können. Ich beobachtete, dass an denjenigen Stellen, wo die Ablösungstendenz sich am stärksten äusserte die einzelnen Fasern ziemlich frappant verändert erschienen. Und zwar liess der mittlere, intensiver gefärbte Faserteil die zusammengezogenen Fibrillen deutlich unterscheiden. Gegen das Ende der Faser dagegen waren die Fibrillen viel sparsamer und das Bild erinnerte an das umhüllende Bindegewebe (Fig. 5). Die Struktur dieser Schicht erklärt die Ursache dieses Bildes. Jede Muskelfaser ist hier von einer Bindegewebsseide umhüllt und ist in die bindegewebige Masse eingebettet. In dieser Masse sind hier und da zerstreute Kerne zu sehen.

Während der starken Kontraktion sammeln sich die Fibrillen gegen die Mitte der Faser, an deren Ende nur die Bindegewebsseide noch zu sehen ist. Durch diese ungleichmässige Verteilung der kontraktiven Substanz, lässt sich auch die spezifische Färbbarkeit der Faser erklären.

Die Perlenschnur-ähnliche Gestalt des autotomierenden Schwanzes (fig. 1) ist eben durch derartige Kontraktionen der Längsmuskelschicht verursacht. Die längsverlaufenden stark kontrahierten Fasern lassen sich mit einer Sehne vergleichen, wobei die nach Aussen liegenden Teile (Cuticula, Hypoderm, Ringfasern) den Bogen darstellen. Durch das allmähliche Aufspannen der Sehne (der Längsmuskulatur) vergrössert sich die Krümmung des Bogens. Allmählig kommt dadurch die runde Gestalt des Segmentes zu Stande. Man muss hinzufügen, dass die Ansatzstellen der Längsmuskelfasern sich an den Grenzpunkten der Segmente befinden, in der Nähe von Dissepimenten. Während der starken Kontraktion der Längsfasern werden die Dissepimente—selbstverständlich—zerrissen.

Das Schicksal des Nervenstranges ist ähnlich. In das Gewebe der Längsmuskelschicht eingebettet, wird er mitgezogen und platzt. Mit den Gefäßen wird wohl ganz was ähnliches geschehen; es ist jedoch zu bemerken, dass sogut während, wie auch nach der Autotomie, absolut keine Blutung zu beobachten ist.

Wie aus dem oben gesagten klar ersichtlich ist (das zeigt auch Fig. 5) wird an seiner Grenze die Wand jedes Segmentes gegen die Leibeshöhle hineingebogen, und die Segmente hängen noch einige Zeit lang auf dem durch den Schwanz verlaufenden Darne.

Die endgültige Abtrennung der Segmente ist erst dann möglich, wenn die Autotomieerscheinungen sich auch auf den Darmkanal verbreitet haben. Diese beruhen hier auf gleichen Kontraktionen in der Darmmuskulatur, wie das oben für den Hautmuskelschlauch geschildert wurde. Obgleich der Bau und die Strukturveränderung in der einzelligen Faser nicht klar zu sehen sind, ist der Endeffekt der Veränderungen so frappant, dass über die Ursache der Autotomie des Darmes kaum ein Zweifel bestehen kann.

Fig. 6 zeigt, wie sich die Ränder des geplatzten Darmes (auf dem Querschnitte) lyrenförmig, symetrisch umbiegen. Die Symetrie dieser Erscheinung, der Zusammenhang und das Verhältniss des Darmepithels zur Muskelfaserschicht an der Stelle des Platzens ist so eigenartig, dass sogar ohne die Veränderung der einzelligen Elemente zu sehen, ist man gezwungen die gleiche Ursache der Autotomie, wie für die schon beschriebenen Organe, anzunehmen.

Wenn, während der Umbiegung der Hautmuskelschlauchwand diese auf den Darmkanal zu drücken beginnt, wird derletzte aus den Grenzen des Segmentes teilweise herausgepresst und bildet in den intersegmentalen Räumen die für die ganze Erscheinung charakteristischen, weisslichen Blasen (Fig. 4).

Das Zerreißen der Darmwand erfolgt erst dann, wenn der Darm nach dem Platzen der Segmentwände teilweise entblösst wird. An einer Stelle geplatzt (Fig. 6) wird er bald so abgeschwächt, dass er den normalen Bewegungen des Tieres schon keinen Widerstand zu leisten imstande ist. Bald darauf zerreißt sein Gewebe ringsum, ein Teil des Schwanzabschnittes fällt ab, und der Process der Autotomie ist beendet.



### III. Bemerkungen und Schlüsse.

Der besprochene Fall der Autotomie bei *Arenicola marina* scheint mit keiner der bekannten Autotomieerscheinungen in der Tierwelt in irgendwelcher Beziehung zu stehen.

Zwar ist—wie man es zu sagen pflegt—die Autotomie eine recht bekannte Erscheinung in der Tierwelt, jedoch betrifft dieser Satz hauptsächlich die Reihe der Arthropoden bei denen sie öfters Gegenstand eingehender Untersuchung gewesen ist (Frédéricq, Andrews, Bordage, Giard, Friedrich).

Aus der ganzen Literatur über die Autotomie bei den Arthropoden ist ersichtlich, dass es sich hier am öftestem um spezielle mechanische Vorrichtungen handelt, dass all die Chitinvorsätze, Ringe, Brechmuskel u. a. das eine bezwecken: die rasche Befreiung aus den Händen des Angreifenden (defensive Autotomie).

Der *Arenicola*-Fall lässt sich gewiss an diese Reihe nicht anknüpfen.

Eine andere Reihe der untersuchten Autotomieerscheinungen, die aber nicht so erschöpfend und oft beschrieben wurden bilden die Protozoen und Hydroidpolypen.

Die entfernte morphologische und systematische Stellung dieser Tiere erlaubt mir den Vergleich mit *Arenicola* hier nicht zu suchen.

Zwischen den Anneliden lassen sich zwar einige Vertreter aufzählen, bei welchen die Autotomie beobachtet wurde. Die Meinung jedoch, dass dies in der ganzen Klasse eine gemeine Erscheinung ist, scheint ihren Grund eher im grossen Regenerationsvermögen vieler Ringelwürmer und in der hier oft vorkommenden Schizogonie zu haben, als in der tatsächlich beobachteten Autotomie. Eine regelrechte Autotomie finden wir in der Literatur der Würmer nur in vereinzeltten Fällen vor, und zwar hauptsächlich als ein spontanes Inzweibrechen an der angegriffenen Stelle. Die Fälle bei einigen limicolen *Oligochaeten*, *Euniciden*, *Spioniden* u. a. besitzen immer den erwähnten Charakter.

Das Abwerfen von Cirrhen und Elytren scheint sich auch eher mit der Regenerationsfähigkeit der Anneliden verknüpfen zu lassen, da es ein Analogon des Haaraustalles und Epithelabfalles bei Wirbeltieren vorstellt, welche ja beide Erscheinungen mit der Regeneration dieser Teile im unmittelbaren Verhältniss stehen; es

wird wohl nie von der Autotomie der Haare, Nagel und Hufe die Rede sein.

Von noch weiter stehenden Fällen, welche die Merkmale der Autotomie besitzen (wie z. B. die Arme der Cephalopoden, Anhänge des Molluskenleibes) darf ich hier auch wohl absehen. In morphologischer Hinsicht hat mit allen diesen Fällen—wie gesagt, und wie aus dem Beschriebenen hervorgeht die Erscheinung der Autotomie bei *Arenicola marina* keine Beziehung.

Die Art und der Verlauf des ganzen Processes findet kein Analogon in der Tierwelt.

Anfänglich dachte ich an die „autotomie parasitaire“ (Giard) und es ist mir auch gelungen in Paar Individuen, in ihrer Leibeshöhle, mir unbekannte Sporozoen zu finden. Von der „autotomie parasitaire“ darf ich jedoch aus folgenden Gründen nicht sprechen:

- 1) zwischen den autotomierenden Arenicolen besaßen die meisten gar keinen Parasiten;
- 2) an solchen liess sich die Autotomie durch künstlichen Reiz hervorrufen.

Nach Ursache und Zweck dieser Erscheinung würde man bei jetzigen Stande der Frage vergeblich suchen.

Ich kann aber die Beziehungen zwischen meiner Beobachtung und den Meinungen einiger Autoren die diese Frage im Allgemeinen betrachtet haben nicht unberücksichtigt lassen.

Frédéricq äusserte sich in seinen Aufsatz den er gegen Frenzel richtete und „Ueber Autotomie“ betitelt, dass „hier jede Spur einer willkürlichen oder vernünftigen Absicht“ fehlt, und dass es sich „vielmehr um die Wirkung eines präformirten, blinden nervösen Mechanismus, den Reflexcentren der höheren Tiere sehr ähnlich“ handelt.

Obwohl der Satz ganz allgemein ausgesprochen war, so ist es jedoch ersichtlich, dass der Gedanke hauptsächlich auf die, dem Verfasser gut bekannte Reptilien—und Arthropoden-Fälle gestützt war.

In solcher Weise ausgedrückt liesse er sich kaum verallgemeinern, und an den *Arenicola*-Fall herangezogen, würde er fast zu lauten Widersprüchen führen.

Wir besitzen in diesem Falle keinen Grund, um von einem „Mechanismus“ sprechen zu können. Der geschilderte Verlauf des Processes, die manigfaltigen Wirkungen, durch welche er



sich hervorrufen lässt, gestatten den Vergleich mit einem Mechanismus mit grösster Vorsicht und nur für einige Momente.

Ueber die Rolle des Nervensystems, des peripheren wie auch des centralen, sind wir hier weit noch nicht im Klaren. Auch wäre die „Präformierung“ nur dann verständlich, wenn wir eine gewisse Regelmässigkeit des Verlaufes feststellen könnten, und falls sich dieser Verlauf bei jedem Individuum gleich gestalten sollte. Das Entgegengesetzte ist aber der Fall.

Alles das sollte uns zwingen zur gründlichen Revision der Regeln und Meinungen, die man über die Autotomieerscheinungen ausgesprochen hat, und zwar wenn Frenzel (1891) die Ursache der Erscheinung in der Verquickung von Wille und Instinkt zu suchen geneigt ist.

Der „Wille“ einer *Arenicola* scheint mir innerhin noch wenig klar zu sein, und an den sich in Rede befindeten Fall angewandt, trägt er gewiss einen etwas unklaren Charakter.

Die Autotomie scheint keinem Einheitlichen Charakter in der Tierwelt zu haben. Die „partielle“ Autotomie bei *Arenicola* würde sich vielleicht durch einige selbstregulatorische Prozesse im Organismus erörtern lassen.

Dieser Standpunkt braucht aber auf eine neue, eigenartige Versuchsserie gestützt zu sein.

Dem Committee der Stiftung Mianowski's gebürt mein herzlichster Dank für die Hilfe, die mir die Ausführung dieser Arbeit wesentlich erleichtert hat.

Der Liebenswürdigkeit und Höflichkeit der Herren Direktoren der K. Zoologischen Anstalt auf Helgoland, Herrn Geheimen Rat, Prof. Dr. F. Heincke und Prof. Dr. C. Hartlaub, verdanke ich den Arbeitsplatz im Laboratorium und das stettige Entgegenkommen allen, die Arbeit betreffenden Wünschen.

#### Erklärung der Tafel.

Alle Figuren beziehen sich auf *Arenicola marina*.

- Fig. 1. Autotomie. Drei Endsegmente die zum Abfallen schon bereit sind.  $\times 1,5$ .
- Fig. 2. Die Schwanzgegend mit ausgesprochener Tendenz zur Autotomie.  $\times 1,5$ .

Fig. 3. Nach der Abtrennung einiger Segmente, der nächstliegende Teil des „Schwanzes“ bereitet sich zur weiteren Autotomie vor. Unten ist die Blase zu sehen, die an der Stelle des durchrissenen Darmes entstanden ist.  $\times 1,5$ .

Fig. 4. Das letzte Stadium der Autotomie, die unter dem Einfluss des alkoholischen Reizes entstanden ist.  $\times 1,5$ .

Fig. 5. Zwei Segmente zur Autotomie bereitet im Längsschnitte. Kontraktion der Längsmuskulatur. Rechts — der Darm. Die Muskulatur und Hypoderm der rechten Seite ausgelassen. Schematische Zeichnung.  $\times 10$ .

Fig. 6. Querschnitt durch den an einer Stelle geplatzten Darm. Unten — Mesenterium. Zeichenapparat von Zeiss.  $\times 60$ .

Die Photogrammen (Fig. 1—4) wurden mittels der stereoskopischen Kammer von Zeiss aufgenommen.

## 8. Pan Ludwik Silberstein:

### Kwaternionowa postać teorii względności.

Komunikat zgłoszony dn. 28 Listopada 1911 r.

Przed sześćdziesięciu niemal laty spostrzegł Cayley<sup>1)</sup>, że obrót w przestrzeni czterowymiarowej daje się osiągnąć przez parę kwaternionów zastosowanych, w roli poprzednika i następnika, do danego kwaternionu  $q$ , którego składowemi są cztery spólrzędne punktu takiej przestrzeni, powiedzmy

$$q' = aqb \dots \dots \dots (1)$$

Jeżeli chodzi o obrót czysty (bez wydłużenia i wogóle bez odkształceń),  $a$ ,  $b$  muszą oczywiście być kwaternionami *jednostkowemi*, lub przynajmniej takimi, że iloczyn ich tensorów równa się jedności.

Z drugiej strony wiadomo powszechnie, że tak zwane przekształcenie Lorentzowskie przestrzeni  $(x, y, z)$  połączonej z czasem  $(t)$ , stanowiące podstawę nowoczesnej teorii względności, odpowiada właśnie obrotowi (hyperbolicznemu) czterowymiarowego „świata“ Minkowskiego  $(x, y, z, t)$ .

<sup>1)</sup> A. Cayley, Phil. Mag. VII, 1854; Journal f. reine u. angew. Math., 50, 1855; przedruk w *Papers*, T. II. Co do późniejszej literatury patrz artykuł E. Study w *Encycl. d. Sc. Math.*, T. I, vol. 1, zes. 3, str. 452, Paryż i Lipsk, 1908.



Nasuwa się tedy sama przez się myśl wyrażenia przekształcenia Lorentza w powyższej postaci (1), do której też uciekłem się ostatecznie po długich a bezowocnych próbach zastosowania innych form kwaternionowych.

Pierwotnie chodziło mi o przyobleczenie w tę szatę kwaternionową jedynie najbardziej zasadniczych wzorów relatywizmu. Niebawem jednak spostrzegłem, że rachunek kwaternionów <sup>1)</sup> daje wyniki ponad wszelkie oczekiwanie proste i przejrzyste również w zastosowaniu do wielu szczególnych a subtelných zagadnień teorii względności. Wzory zasadnicze są w toku publikacyi w innym miejscu <sup>2)</sup>, pozostałe zaś komunikuję tu po raz pierwszy. Dla ułatwienia wykładu dobrze będzie atoli podać tu również część zasadniczą całego przedmiotu.

§ 1. Przekształcenie kwaternionu kojarzącego czas z przestrzenią.—Napiszmy przedewszystkiem przekształcenie Lorentza, t. j. znane powszechnie wzory Einsteina, w postaci wektorowej. Oznaczając przez

$$\mathbf{v} = v \mathbf{u},$$

gdzie  $\mathbf{u}$  jest wektorem jednostkowym, prędkość jednostajną układu  $S'$  ( $x', y', z', t'$ ) względem układu  $S$  ( $x, y, z, t$ ), przez  $\mathbf{r} (= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$  wektor w  $S$  biegnący od punktu początkowego  $O$  do dowolnego punktu  $P$ , przez  $\mathbf{r}'$  odpowiednik wektora tego w układzie  $S'$ , dalej pisząc dla skrótowania

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$$

oraz kładąc

$$l = ict, \quad l' = ict', \quad i = \sqrt{-1},$$

gdzie  $c$  jest prędkością światła, mamy wzory Einsteina w postaci wektorowej, niezależnej od wszelkiego układu spólrzędnych przestrzennych:

<sup>1)</sup> Nie bacząc na to, iż Minkowski sam pogardził nim, uznawszy, iż jest dla celów jego „zu eng und schwerfällig“. Porówn. *Götting. Nachr.*, 1908, uw. u dołu str. 27.

<sup>2)</sup> L. Silberstein: Quaternionic form of Relativity; rękopis zakomunikowany redakcyi *Phil. Mag.* przez G. F. C. Searle'a z Cambridge, dn. 18 grudnia 1911.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + (\gamma - 1)(\mathbf{r}\mathbf{u})\mathbf{u} + i\gamma\beta l\mathbf{u} \\ l' &= \gamma[l - i\beta(\mathbf{r}\mathbf{u})] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

W tych i we wszystkich następnych wzorach  $(\mathbf{r}\mathbf{u})$ , w ogóle  $(\mathbf{A}\mathbf{B})$  oznacza zwykły iloczyn skalarny wektorów  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , t. j.  $AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ ;  $(\mathbf{A}\mathbf{B})$  jest więc *ujemną* częścią skalarną zupełnego iloczynu Hamiltonowskiego  $\mathbf{A}\mathbf{B}$ . Zwykły iloczyn wektorowy  $\mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{B}$  jest natomiast identyczny z częścią wektorową iloczynu zupełnego, t. j. z Hamiltonowskim  $\mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{B}$ . Posługując się symbolami jego  $S, V$ , mamy tedy <sup>1)</sup>:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = S\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{B} = -(\mathbf{A}\mathbf{B}) + \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{B} \dots \dots (a)$$

Pomimo, że wektory, jak np.  $\mathbf{r}$ , są tylko szczególnym przypadkiem kwaternionów, a mianowicie kwaternionami bezskalarnymi, dogodnie będzie (w początkowej tej rozprawie przynajmniej) oznaczać je czcionkami tłustymi, zachowując zwykły kursyw dla kwaternionów pełnych oraz dla niektórych skalarów. Z czasem można będzie uwolnić się od tej różnicy zewnętrznej tworów, które w istocie, oczywiście z kwaternionowego punktu widzenia, nie różnią się od siebie.

Po tem wyjaśnieniu wróćmy do rzeczy. Aby otrzymać żądaną postać (1) przekształcenia (2), wprowadźmy kwaternion

$$q = l + \mathbf{r} = ict + \mathbf{r} \dots \dots \dots (3)$$

i podobnie, dla układu  $S'$ ,

$$q' = l' + \mathbf{r}' \dots \dots \dots (3')$$

Proste zadanie nasze polega na wyznaczeniu pary kwaternionów  $a, b$  takim, aby było  $l' + \mathbf{r}' = a(l + \mathbf{r})b$ . Otóż, rozwijając prawą stronę tego równania według zasadniczych prawideł rachunku kwaternionowego i zestawiając wynik z wzorami (2), przekonałem się niebawem, że  $a, b$  mogą różnić się wzajemnie tylko o zwykły czynnik skalarny. Ponieważ zaś tensory  $a, b$  wchodzą w skład powyższego równania tylko przez ich iloczyn, możemy ów czynnik skalarny rzucić w jednakowej mierze na  $a, b$ , czyli wziąć z góry  $a=b$ , powiedzmy  $=Q$ . Jednem słowem, postać (1) jest dla celów naszych zbyt ogólna i możemy zgóry żądać

<sup>1)</sup> Por. np. K. Hertza: *Pierwsze zasady kwaternionów Hamiltona*. Warszawa 1887.



$$q' = QqQ \dots \dots \dots (1^a)$$

jako równoważnika kwaternionowego przekształcenia (2). Oznaczając przez  $s$ ,  $w$  nieznaną skalar i wektor kwaternionu  $Q$ , t. j. pisząc

$$Q = s + w, \dots \dots \dots (4)$$

mamy, po rozwinięciu prawej strony (1a):

$$q' = (w^2 + s^2)r - 2(rw)w + 2slw + (s^2 - w^2)l - 2s(rw),$$

t. j. przez rozszczepienie na części wektorową i skalarną, oraz według (3')

$$\left. \begin{aligned} r' &= (w^2 + s^2)r - 2(rw)w + 2slw \\ l' &= (s^2 - w^2)l - 2s(rw) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Przez porównanie z (2) wynikają stąd natychmiast warunki dla  $s$ ,  $w$ :

$$\left. \begin{aligned} s^2 + w^2 &= 1; \quad s^2 - w^2 = \gamma \\ 2sw &= i\beta\gamma; \quad w = wu \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Pierwszy wyraża, iż  $Q$  jest kwaternionem *jednostkowym*, jak zgóry można było oczekiwać. Z pierwszego i drugiego mamy  $w = \pm V(1 - \gamma)/2$ ,  $s = \pm V(1 + \gamma)/2$ , gdzie dla spełnienia trzeciego warunku należy *obadwa* pierwiastki wziąć bądź to ze znakiem górnym, bądź też dolnym. Czwarty wreszcie określa kierunek wektora  $w$ . Mamy więc

$$Q = \pm (V(1 + \gamma) + uV(1 - \gamma))/V2;$$

ponieważ zaś kwaternion  $Q$  występuje w (1a) dwukrotnie, wybór znaku  $\pm$  staje się sprawą zupełnie obojętną.

*Mamy tedy ostatecznie żadaną postać kwaternionową przekształcenia relatywistycznego:*

$$q' = QqQ \left. \begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}} + u \sqrt{\frac{1 - \gamma}{2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

gdzie  $u$  jest wektorem jednostkowym w kierunku ruchu układu  $S'$  względem  $S$ .

Zauważmy, że  $\gamma > 1$ , tak iż wektor kwaternionu  $Q$  jest urojony, podczas gdy skalar jego jest rzeczywisty.

Tensor tego kwaternionu równa się jedności,  $TQ=1$ ; oznaczając więc *kąt* jego (czyli „argument“) przez  $\alpha$ , t. j. pisząc

$$Q = \cos \alpha + u \sin \alpha = e^{\alpha u} \dots \dots \dots (7)$$

mamy, według (I),  $\sin 2\alpha = i\beta\gamma = i\beta/\sqrt{1-\beta^2}$ , czyli:

$$2\alpha = \text{arctg}(i\beta) \dots \dots \dots (8)$$

Lecz to właśnie jest (urojony) kąt obrotu w płaszczyźnie *t, x* czterowymiarowego świata Minkowskiego, obrotu odpowiadającego przekształceniu Lorentza (2)<sup>1)</sup>, jeżeli mianowicie weźmiemy *u* za oś *x*-ów.

*Q jest więc kwaternionem jednostkowym, którego oś zlewa się z kierunkiem ruchu S' względem S i którego kąt równa się połowie kąta obrotu Minkowskiego.*

Ostatnie własności rzucają szczególnie światło na każdy z powyższych czynników *Q*, wzięty z osobna.

W pierwszym rzędzie jednak obchodzi nas tu ich połączenie, które jako *operator* napisać możemy

$$\omega = Q[]Q, \dots \dots \dots (I^a)$$

pozostawiając miejsce wolne dla wielkości przekształcanej.

Aby otrzymać operator odwrotny  $\omega^{-1}$ , t. j. ten, który przekształca *q'* na *q*, dość jest zastosować do każdej strony (I) kwaternion  $Q^{-1}$  w roli poprzednika i następnika (prefactor, postfactor). Ponieważ  $Q^{-1}Q=QQ^{-1}=1$ , otrzymamy wprost  $q=Q^{-1}q'Q^{-1}$ , czyli

$$\omega^{-1} = Q^{-1}[]Q^{-1}.$$

Ponieważ zaś  $TQ=1$ , odwrotność *Q* równa się jego kwaternionowi *sprzężonemu* (conjugate), który—zamiast Hamiltona  $KQ$ —dogodniej będzie oznaczyć przez  $Q_c$ . Będzie więc

$$\omega^{-1} = Q_c[]Q_c, \dots \dots \dots (I^b)$$

gdzie  $Q_c = \cos \alpha - u \sin \alpha = e^{-\alpha u}$ . Operator odwrotny otrzymuje się tedy z pierwotnego przez zmianę znaku kąta  $\alpha$  lub też przez odwrócenie kierunku osi, jak być powinno.

§ 2. **Kwaterniony fizyczne.**—Widzieliśmy przed chwilą, że prosty bardzo operator (Ia) przeistacza kwaternion  $q=r+ict$  na

<sup>1)</sup> Szczegółowszą nieco interpretację tej własności znajdzie czytelnik we wspomnianej rozprawie autora przeznaczony dla *Phil. Mag.*



jego odpowiednik relatywistyczny  $q'$ . Nasze  $q$  jest równoważne Minkowskiego „wektorowi I rodzaju“ czyli Sommerfelda „wektorowi czwórkowemu“ (Vierervektor). Nazywają oni w ten sposób takie i tylko takie kompleksy czterech skalarów (trzy rzeczywiste, czwarty urojony), które przekształcają się tak samo jak  $x, y, z, l$ , dodając częstokroć epitet „światowy“ (Weltvektor)<sup>1)</sup>. Odpowiednio należałoby nazwać powyższe  $q$ , lub jakikolwiek kwaternion o takiej samej *budowie* t. j. o skalarze urojonym i wektorze rzeczywistym) i przekształcający się w ten sam sposób, kwaternionem światowym. Zamiast tego pozwolę sobie jednak wprowadzić, w drodze próby, termin skromniejszy, a niemniej dobitny: *kwaternion fizyczny*<sup>2)</sup>.

Tak więc  $\omega = Q[]Q$ , przy określeniu (I) lub (7), (8), byłby, że tak powiem, transformatorem relatywistycznym wszelkiego kwaternionu fizycznego.

Ze względu na ciąg dalszy dogodnie będzie wprowadzić tu następujące krótkie symbole. Przez

$$X \sim q$$

rozumieć będę, że dowolny kwaternion  $X$  *przekształca się tak samo jak  $q$* , t. j. że  $X' = QXQ$ , bez względu jednak na budowę kwaternionu  $X$ . Innemi słowy, symbol  $\sim$  wyrażać będzie jedynie współzmienniczość (kowaryancyę), czyli wspólność transformatora. Jeżeli zaś  $X$  posiadać będzie oprócz tego *taką samą budowę jak  $q$* , t. j. urojony skalar i rzeczywisty wektor, napiszemy

$$X \simeq q.$$

Orzeczenie, że  $a$  np. jest kwaternionem fizycznym, wyrazi się tedy krótko przez  $a \simeq q$ .

Ponieważ mnożenie kwaternionów jest *rozdzielnościowe*, własność ta przysługiwać też będzie transformatorem  $\omega$ , t. j.

$$Q[a + b]Q = QaQ + QbQ; \quad \dots \quad (9)$$

<sup>1)</sup> H. Minkowski, loc. cit. — A. Sommerfeld, Ann. der Physik, T. 32, str. 749, T. 33, str. 649; 1910.

<sup>2)</sup> Zobaczymy w toku dalszych wywodów, że wyszczególnienie „rodzaju“ nie jest w warunkach naszych niezbędne. Oprócz *kwaternionów fizycznych* (jak  $q$ ) mieć będziemy jedynie (o ile wiedzieć mogą dotychczas) *bivektory fizyczne*.

wynika stąd np., że suma lub różnica kwaternionów fizycznych jest również kwaternionem fizycznym. Dzięki tejże własności mamy, rozumiejąc przez  $\partial$  jakkolwiek operator różniczkowy o charakterze skalarnym:

$$Q[\partial a]Q = \partial QaQ = \partial a',$$

albowiem same  $Q$ , jako stałe w czasie i przestrzeni, nie podlegają działaniu  $\partial$ . Rachunek Hamiltona czerpie atoli potęgę swą w pierwszym rzędzie z własności *łącznościowej* (asocjacyjnej) iloczynów kwaternionowych, która przysługuje mu w całej pełni. Mamy więc np.

$$a \cdot QbQ = aQ \cdot bQ$$

i tak dalej, gdzie kropka odgrywa rolę separatora. Najzaciętsi nawet przeciwnicy tego rachunku „ortodoksyjnego“, jak np. Oliver Heaviside, przyznają, że „co do łącznościowości jest on niezrównany“. W dalszym ciągu zobaczymy, na każdym niemal kroku, że ta mianowicie własność, szózęólniej w związku z tożsamością

$$QQ_c = Q_cQ = 1,$$

czyni z rachunku Hamiltona narzędzie nader dogodne, powiedziałbym niemal, jakby stworzone umyślnie dla spraw relatywizmu.

Dotychczas mieliśmy jedynie  $q$  jako przykład, a raczej jako pierwowzór wszelkich kwaternionów fizycznych. Zanim przejdziemy do dalszych wywodów, dobrze będzie podać tu, dla późniejszych zastosowań, odpowiedniki kwaternionowe matryc Minkowskiego: „prędkości“ i „prądu“, czyli Sommerfelda „prędkości czwórkowej“ i „prądu czwórkowego“<sup>1)</sup>.

Oczywiście, przyrost nieskończonostkowy  $dq = dl + dr$  jest, podobnie jak samo  $q$ , kwaternionem fizycznym; tensor więc tego przyrostu, który oznaczymy przez  $id\tau$ ,

$$id\tau = Tdq, \dots \dots \dots (10)$$

jest *niezmiennikiem* (podobnie jak  $Tq$ , a to dzięki temu, że  $TQ=1$ ). Iloraz różniczkowy  $dq/id\tau$  będzie przeto również  $\sim q$ , a skoro po-

<sup>1)</sup> „Vierergeschwindigkeit“, „Viererstrom“. Ostatnią nazwą posługuje się M. Laue, w znakomitej swej książce: *Das Relativitätsprinzip*, Brunświk, 1911; Sommerfeld, loc. cit., używe natomiast terminu „Viererdichte“.



mnożymy go jeszcze przez liczbę  $i$ , stanie się też  $\simeq q$ . Mamy więc kwaternion fizyczny

$$Y = \frac{dq}{d\tau}, \dots \dots \dots (11)$$

który nazwać możemy *prędkością kwaternionową* lub też krótko *prędkością*. Jednocześnie widzimy też wprost z (10), że tensor tego kwaternionu jest

$$TY = i \dots \dots \dots (12)$$

Mając już zresztą prostą tę postać  $Y$  możemy ją łatwo rozwinąć i okazać jej równoważność ze zwykłą. Istotnie, oznaczając przez  $\mathbf{p} = d\mathbf{r}/dt$  zwyczajną prędkość wektorową punktu końcowego wektora  $\mathbf{r}$ , względem układu  $S$ , mamy według (10):

$$d\tau = dt \sqrt{c^2 - p^2}, \dots \dots \dots (10^a)$$

tak iż  $d\tau$  jest proporcjonalne do elementu „czasu własnego“ Minkowskiego. Ponieważ, według przyjętego raz na zawsze założenia,  $p^2 < c^2$ , wielkość  $d\tau$  jest skalarem rzeczywistym (w tym też celu wprowadziliśmy w odpowiednim miejscu czynnik  $i$ ), tak iż istotnie  $Y \simeq q$ . Korzystając z (10a), mamy zamiast (11) żadaną postać rozwiniętą:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{c^2 - p^2}} \frac{dq}{dt} = \frac{i + \mathbf{p}/c}{\sqrt{1 - p^2/c^2}} \dots \dots \dots (11^a)$$

Według jednego z zasadniczych postulatów ładunki elektryczne odpowiednich dziedzin przestrzennych w  $S$  i  $S'$  są sobie równe; innymi słowy, ładunek jest niezmiennikiem relatywistycznym. Jeżeli więc  $\rho$  jest jego gęstością przestrzenną,  $\rho$  razy objętość, a tem samem  $\rho \sqrt{1 - p^2/c^2}$  również jest niezmiennikiem. Mnożąc tedy  $Y$  przez ten niezmiennik, mamy znowu kwaternion fizyczny, a mianowicie *prąd kwaternionowy* lub krótko *prąd*:

$$C = \frac{1}{c} \rho \frac{dq}{dt} = \rho \left( i + \frac{1}{c} \mathbf{p} \right) \dots \dots \dots (13)$$

Rozważmy tu wreszcie odpowiednik kwaternionowy matrycy Minkowskiego „lor“ (nazwanej tak dla uczczenia Lorentza), t. j. operator różniczkowy łączący w sobie  $\partial/\partial l$  z Hamiltonianem  $\nabla$ , który oznaczać będą stale przez  $D$ :

$$D = \frac{\partial}{\partial l} + \nabla \dots \dots \dots (14)$$

Pisząc go w postaci bardziej rozwiniętej  $\partial/\partial t + i\partial/\partial x + j\partial/\partial y + k\partial/\partial z$  i porównyując z kwaternionem  $q = l + ix + jy + kz$ , widzimy bezpośrednio, że przekształca się on zupełnie jak  $q$ , t.j. że

$$D' = QDQ \dots \dots \dots (15)$$

Ponieważ zaś  $D$  posiada również budowę  $q$ , możemy powiedzieć że jest to operator o charakterze kwaternionu fizycznego, lub też napisać  $D \simeq q$ . Nie bacząc na własności różniczkowe zachowuje się on wobec przekształcenia z  $S$  na  $S'$  jak zwykły kwaternion fizyczny.

§ 3. Kwaterniony sprzężone. — Powyżej, dla otrzymania postaci kwaternionowej przekształcenia Lorentza wprowadziliśmy kwaternion  $q = l + r$ . W tym celu mogliśmy oczywiście również dobrze skorzystać z kwaternionu sprzężonego

$$q_c = l - r \dots \dots \dots (3^a)$$

i z odpowiedniego  $q'_c = l' - r'^1$ ). Uczyńmy to teraz, a przekonamy się we wszystkich następnych paragrafach, że kwaterniony sprzężone, w skojarzeniu z pierwotnymi stanowią szczególnie dogodne narzędzie.

Wracając do (2) widzimy natychmiast, że obadwa te wzory nie zmieniają się w niczem, skoro, zmieniwszy znaki  $r, r'$ , zmieniamy znak  $u$ . Wynika stąd, że  $q_c$  przekształca się na

$$q'_c = Q_c q_c Q_c, \dots \dots \dots (1^c)$$

gdzie  $Q_c = \cos \alpha - u \sin \alpha = e^{-\alpha u}$ , jak wyżej.

Otoż,  $q_c$  spełnia niewątpliwie te same funkcyje co  $q$ , innemi słowy: (I) i (I<sub>c</sub>) wyrażają, w różny nieco sposób, jedną i tę samą treść, a mianowicie przekształcenie Lorentza. Tak więc  $q_c$  i każdy inny kwaternion  $\simeq q_c$  jest kwaternionem fizycznym z tegoż samego tytułu co  $q$  i te, którym  $q$  za wzór służy. Innemi słowy, *kwaternion sprzężony względem danego kwaternionu fizycznego znów będzie kwaternionem fizycznym*. Jeżeli pierwotny był  $\simeq q$ , sprzężony będzie  $\simeq q_c$ , i odwrotnie.

<sup>1)</sup> Nietrudno dowieść, że  $(q_c)' = (q')_c$ ; bądź jedno, bądź drugie można więc napisać poprostu  $q'_c$ .

Zauważmy tu, że niezmienniczość tensora  $q, Tq' = Tq$ , można również wyrazić przez  $q'q'_c = qq_c$ .



Dzięki rozszerzeniu temu (formalnemu tylko) pierwotnego naszego określenia mogą tedy dwa kwaterniony fizyczne być współzmiennicze albo też nie; w drugim przypadku nazywać je będę (pro wizorycznie chociażby) *różnoimiennymi*<sup>1)</sup>, podobnie jak się mówi o ładunkach elektrycznych i nie bez pewnej zresztą, jak zobaczymy, analogii. (W takiej parze kwaternionów jeden będzie oczywiście  $\simeq q$ , drugi  $\simeq q_c$ ). Wobec tego użyję też gdzieś nazwy kwaternionów *jednoimiennych* zamiast współzmienniczych.

W następujących wywodach rozumieć będę przez  $a, b, e$  i t. d. (bez żadnego wskaźnika) kwaterniony  $\simeq q$ ; tem samem zaś  $a_c, b_c, e_c$  i t. d. będą  $\simeq q_c$ . W wyjątkowych zresztą przypadkach dodam odpowiedni symbol objaśniający.

Zauważmy tu wreszcie, że *odwrotność* kwaternionu fizycznego jest również kwaternionem fizycznym. Mamy bowiem

$$a^{-1} = a_c (Ta)^{-2},$$

zaś  $Ta$ , jak wiemy już, jest niezmiennikiem. Jednocześnie widzimy, że  $a$  i  $a^{-1}$  są *różnoimiennie*.

§ 4. **Iloczyn kwaternionów fizycznych.** — Niechaj  $a, b$  będzie parą takich kwaternionów. Pomińmy iloczyn czynników jednoimiennych  $ab$  który przekształca się w sposób zgoła nieprzydatny

$$a'b' = QaQ^2bQ$$

(o tyle, że iloczyn  $ab$  jest rozerwany, jak gdyby czynniki jednoimiennie odpychały się wzajemnie), i przejdźmy odrazu do iloczynu czynników różnoimiennych, który możnaby nazwać *iloczynem różnolitym*; weźmy nasamprzód

$$L = a_c b. \dots \dots \dots (16)$$

Otrzymamy wówczas  $L' = Q_c a_c Q_c \cdot Q b Q$ ; stąd zaś, dzięki prawu łącznościowemu i pamiętając, że  $Q_c Q = 1$ :

$$L' = Q_c L Q, \dots \dots \dots (16')$$

zupełnie jak gdyby czynniki różnoimiennie przyciągały się wzajemnie, dążąc do pierwotnego zetknięcia. Kwaternion  $L$ , prze-

<sup>1)</sup> We wspomnianym komunikacie angielskim użyłem, również w drodze próby tylko, terminu „antivariant“, w przeciwstawieniu do „co-variant“.

kształcający się w tak prosty sposób, zasługuje z wielu względów na bliższą nieco uwagę. Rozważmy tedy kwaternion względem niego sprzężony,  $L_c$ . Według jednego z podstawowych twierdzeń rachunku Hamiltona, sprzężony iloczynu równa się iloczynowi sprzężonych wziętych w porządku odwrotnym; w naszym więc przypadku jest

$$L_c = b_c a. \quad (17)$$

Otóż, przekształcając *ten* iloczyn, mamy zupełnie jak powyżej:

$$L_c' = Q_c L_c Q. \quad (17')$$

Widzimy tedy, że

$$Q_c [ ] Q. \quad (11)$$

jest transformatorem relatywistycznym zarówno kwaternionu  $L = a_c b$ , jak i kwaternionu sprzężonego  $L_c$ . Podobnie też

$$Q [ ] Q_c. \quad (11'')$$

będzie transformatorem kwaternionu  $R = ab_c$  oraz sprzężonego  $R_c$ . Obadwa kwaterniony,  $L, R$ , różnią się pod tym względem charakterystycznie od  $q$  lub  $q_c$ . Kwaterniony przekształcające się w ten sposób nazywać będą poprostu *kwaternionem*  $L$  i *kwaternionem*  $R$ , czasami zaś *lewym*, względnie *prawym*, ze względu na położenie wskaźnika  $c$  w tworzących je iloczynach<sup>1)</sup>.

Ponieważ  $Q_c [ ] Q$  jest transformatorem dla  $L$  i jednocześnie dla  $L_c$ , jest też nim dla ich sumy oraz różnicy, tem samem zaś dla części skalarnej i części wektorowej  $L$  wziętych z osobna, t. j. dla  $SL$  i dla  $VL$ , które oznaczymy, na chwilę, przez  $s, A$ . Lecz, skoro  $s$  jest skalarzem, mamy

$$s' = Q_c s Q = s Q_c Q = s,$$

t. j.  $s$  jest niezmiennikiem. Następnie  $A' = Q_c A Q$ ; ponieważ zaś  $Q, Q_c$  są kwaternionami jednostkowemi,  $TA$  jest drugim niezmiennikiem. Mamy więc następujące twierdzenie:

*Część skalarzna dowolnego kwaternionu  $L$  i tensor jego części wektorowej są niezmiennikami, podczas gdy sam wektor przekształca się na*

$$VL' = Q_c [VL] Q. \quad (III)$$

<sup>1)</sup>  $L$  (left) — lewy;  $R$  (right) — prawy.



Napiszmy zresztą  $L = \sigma(\cos \varepsilon + \mathbf{a} \sin \varepsilon)$ , gdzie  $\mathbf{a}$  jest wektorem jednostkowym. Wówczas  $\sigma \cos \varepsilon$  oraz  $\sigma \sin \varepsilon$ , a więc też  $\sigma$  i  $\varepsilon$  będą niezmiennikami. Otrzymamy przeto, jako odmienną nieco postać powyższego twierdzenia:

*Tensor i kąt kwaternionu  $L$  są niezmiennikami, oś zaś jego przekształca się przez  $Q_c[ ]Q$ .*

Podobnie też  $SR$  jest niezmiennikiem, zaś

$$VR' = Q[VR]Q_c \dots \dots \dots (III^a)$$

czyli, innymi słowy:

*Tensor i kąt kwaternionu  $R$  są niezmiennikami, oś zaś przekształca się przez  $Q[ ]Q_c$ .*

Jeżeli chodzi zresztą o uwydatnienie pierwotnych czynników tworzących,  $a_c$  i t. d., możemy napisać powyższe własności w postaci:

$$S a_c' b' = S a_c b; \quad V a_c' b' = Q_c[V a_c b] Q \dots \dots (18)$$

$$S a' b_c' = S a b_c; \quad V a' b_c' = Q[V a b_c] Q_c \dots \dots (18^a)$$

Weźmy teraz iloczyn dowolnie wielu kwaternionów lewych, powiedzmy  $L_1 L_2 L_3 \dots$ ; wszystkie czynniki stykają się tu, że tak powiem, stronami różnoimiennymi, tak iż przy przekształceniu, według (II), wszystkie wewnętrzne  $Q, Q_c$  wypadną, jakby neutralizując się wzajemnie, i pozostanie tylko  $Q_c$  na początku oraz  $Q$  na końcu całego łańcucha:  $L'_1 L'_2 L'_3 \dots = Q_c L_1 L_2 L_3 \dots Q$ . Innymi słowy:

*Iloczyn dowolnie wielu  $L$  jest znowu kwaternionem  $L$ . Podobnie, iloczyn dowolnie wielu  $R$  jest znowu  $R$ .*

W ten sam sposób przekonamy się natychmiast, że jeżeli  $k$  jest dowolnym kwaternionem fizycznym, lub przynajmniej  $k \infty q$ , iloczyny  $kL$  i  $Rk$  znowu przekształcają się jak pierwotne nasze kwaterniony fizyczne, t. j.:

$$kL \infty q; \quad Rk \infty q \dots \dots \dots (IV)$$

i podobnie

$$Lk_c \infty q_c; \quad k_c R \infty q_c \dots \dots \dots (IV^a)$$

Zauważmy zresztą, że co do „budowy“  $kL$  i t. d. nie będą właściwymi kwaternionami fizycznymi, lecz w ogóle *bikwaternionami*. (Por. § 8.)

Tak więc, iloczyn *różnolity* dowolnie wielu kwaternionów fizycznych daje nam zawsze tylko kwaternion  $L$  lub  $R$  albo też

znowu (co do własności transformacyjnych przynajmniej) *pierwotny kwaternion fizyczny*<sup>1)</sup>.

Następujące jeszcze krótkie uwagi nie będą dla dalszych wywodów bez korzyści.

Przypuśćmy, iż dano nam równanie

$$bX = a,$$

w którym  $a, b \in Q$ . Jak przekształca się  $X$ ? Pisząc  $X = b^{-1}a$  i pamiętając, że  $b^{-1} \in Q_c \in Q_c$ , widzimy, że  $X$  przekształca się jak  $b_c a$ , t. j. przez  $Q_c[ ]Q$ . Innymi słowy,  $X$  będzie kwaternionem lewym:

$$X = b^{-1}a \in L \dots \dots \dots (19)$$

Otrzymamy ten sam oczywiście wynik, zastępując  $b$  przez wyższy operator różniczkowy  $D$ , t. j.:

$$\text{jeżeli } DX = a, \text{ natenczas } X \in L, \dots \dots \dots (V)$$

czyli  $X' = Q_c X Q$ . Podobnie też, wprowadzając operator sprzężony względem  $D$ , t. j. według (14):

$$D_c = \frac{\partial}{\partial l} - \nabla, \dots \dots \dots (14^a)$$

twierdzić możemy, że

$$\text{jeżeli } D_c Z = a_c, \text{ natenczas } Z \in R, \dots \dots \dots (V^a)$$

czyli  $Z' = Q Z Q_c$ .

Zauważmy, że  $X$ , lub  $Z$ , mogą lecz bynajmniej nie muszą być kwaternionami pełnymi; mogą one np. być wektorami czystymi, bądź to zwykłymi czyli rzeczywistymi, bądź też zespolonemi, czyli (w terminologii Hamiltona) *biwektorami*. Na własności transformacyjne, przy powyższym ich sposobie wyrażenia, nie ma to żadnego oczywiście wpływu.

<sup>1)</sup> Tyle co do iloczynów *różnolitych*. Co się zaś tyczy iloczynów złożonych z czynników jednoimiennych, jak  $ab$ , nie sądzę, aby nadawały się do zastosowań fizycznych (przypuszczam też, że nie dałyby żadnych korzyści nawet matematykowi czystemu); dla tego też zupełnie ich tu rozważać nie będę. Pragnąłbym natomiast położyć nacisk na *alternację* czyli *roznolitość* jako na maksimum przy kwaternionowej obróbce relatywizmu, a poniekąd nawet jako na zasadę heurystyczną. Uwagę tę lepiej będzie można ocenić w ciągu dalszym. (Termin „różnolity“ zawdzięczam uprzejmości p. S. Dicksteina.)



§ 5. **Równania elektromagnetyczne „dla próżni“.**—Nazwa ta przyjęła się w ostatnich czasach dla zasadniczych równań różniczkowych elektroniki:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \rho \mathbf{p} &= c. \text{curl } \mathbf{M}; \text{div } \mathbf{E} = \rho \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} &= -c. \text{curl } \mathbf{E}; \text{div } \mathbf{M} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

do których przejdziemy obecnie, aby przyoblec je w szatę kwaternionową. (Użyte w równaniach tych symbole nie wymagają chyba żadnych objaśnień;  $\rho$ ,  $\mathbf{p}$  oraz  $c$  mieliśmy już zresztą powyżej.)

Tworząc przedewszystkiem z wektorów magnetycznego i elektrycznego wektor zespolony czyli *biwektor elektromagnetyczny*

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} - i\mathbf{E} \dots \dots \dots (21)$$

i pisząc znowu  $l = ict$ , mamy zamiast czterech równań wektorowych (20) dwa równania *biwektorowe*<sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial l} + \text{curl } \mathbf{F} = \frac{1}{c} \rho \mathbf{p}; \text{div } \mathbf{F} = -i\rho,$$

czyli, w symbolach rachunku Hamiltona:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial l} + \mathbf{V} \nabla \mathbf{F} = \frac{1}{c} \rho \mathbf{p}; \mathbf{S} \nabla \mathbf{F} = i\rho.$$

Lecz  $\mathbf{V} \nabla \mathbf{F} + \mathbf{S} \nabla \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F}$ ; powyższe więc dwa równania stapiają się w sposób niewymuszony w jedyne równanie

$$D\mathbf{F} = C, \dots \dots \dots (VI)$$

w którym  $C$  jest określonym przez (13) prądem kwaternionowym.

Cały więc układ czterech równań zasadniczych elektroniki, (20), wyraża się przez *jedno* równanie kwaternionowe (VI). Kondensacya ta jest nawet zupełniejszą, niż w postaci matrycowej Minkowskiego, w której mamy dwa równania:  $lor f = -s$ ,  $lor f^* = 0$  (loc. cit., § 12), po jednym dla każdej pary równań (20). Toż samo dotyczy równoważnej zupełnie postaci wektorowej czterowymiarowej Sommerfelda. Wróćmy jednak do (VI).

<sup>1)</sup> Równania te wraz z odpowiednią postacią biwektorową gęstości i prądu energii ogłosiłem już w r. 1907: *Annal. der Physik*, T. 22. O możliwości ich stosowalności do niniejszych zagadnień nie wiedziałem wówczas.

Ponieważ  $C$  jest kwaternionem fizycznym, mianowicie  $\simeq q$ , widzimy z równania tego wprost, według (V), że biwektor  $F$  jest (bezskałarnym) kwaternionem  $L$ , t. j., że w układzie  $S'$ , dla którego relatywizm wymaga tejże postaci równania:  $D'F' = C'$ , mamy jako odpowiednik  $F$ :

$$F' = Q_c F Q. \quad \dots \quad (VII)$$

Biwektory przekształcające się w ten sposób nazywać będziemy odtąd *biwektorami fizycznymi*. Moglibyśmy zresztą postawić na czele pełny kwaternion  $L$ , nazywając go chociażby *kwaternionem fizycznym (lewym) II rodzaju*, i uważając  $F$  oraz każdy inny biwektor  $\simeq F$  za część wektorową  $L$  (zauważmy, że uzupełnienie skalarne,  $Sa_c b$ , jako niezmiennicze, nie sprawiłoby nam przy tem żadnych trudności). Krótką nazwą *kwat. fiz.* moglibyśmy się pomimo to nadal posługiwać, zamiast *kwat. fiz. I rodzaju*. Mniejsza jednak o nomenklaturę.

Wróćmy do (VII). Aby sprawdzić krótki ten wzór<sup>1)</sup>, podstawmy w nim  $Q, Q_c$  według (I). Otrzymamy wówczas

$$F' = (1 - \gamma)(Fu)u + \gamma F + i\beta\gamma V Fu \quad \dots \quad (22)$$

czyli, przez rozszczepienie na części rzeczywistą i urojoną:

$$M' = (1 - \gamma)(Mu)u + \gamma M - \beta\gamma VuE$$

$$E' = (1 - \gamma)(Eu)u + \gamma E + \beta\gamma VuM.$$

Otóż, biorąc składowe w kierunku  $u$  (kier. ruchu) i w dwu innych kierunkach, wzajemnie i do  $u$  prostopadłych (układ prawoskrętny), mamy stąd natychmiast znane wzory Einsteina:

$$E_1' = E_1; E_2' = \gamma(E_2 - \beta M_3); E_3' = \gamma(E_3 + \beta M_2)$$

$$M_1' = M_1; M_2' = \gamma(M_2 + \beta E_3); M_3' = \gamma(M_3 - \beta E_2).$$

<sup>1)</sup> Wzór nasz (VII) przypomina zupełnie Minkowskiego  $f' = A^{-1} f A$ , gdzie  $A$  jest macierzą z  $4 \times 4$  złożoną elementów; *loc. cit.*, § 11. Analogia ta płynie stąd, że zarówno iloczynom macryc jak kwaternionów przysługuje własność *asocjacyjna*. Bądź co bądź jednak, mnożenie przez kwaternion, jak  $Q$  lub  $Q_c$ , jest aktualnie znacznie prostsze niż zastosowanie macrycy 16-elementowej. Zauważmy zresztą, że analogia powyższa nie rozciąga się do przekształcenia Minkowskiego wektorów I rodzaju i naszych kwaternionów fizycznych; istotnie, w tym przypadku postać matrycowa jest

$$s' = s A, \text{ gdzie } s = |s_1, s_2, s_3, s_4|,$$

zaś kwaternionowa:

$$q' = Q q Q.$$



Postać kwaternionowa (VII) jest więc sprawdzona. Jednocześnie widzimy jej dogodność.

Z tegoż wzoru (VII) widzimy (o czym już wspomniałem), że tensor biwektora  $\mathbf{F}$  jest *niezmiennikiem*:

$$\mathbf{T}\mathbf{F}' = \mathbf{T}\mathbf{F} \dots \dots \dots \text{(VIII)}$$

Pamiętając, że  $\mathbf{F}$  jest kwaternionem bezskalarnym, tak iż  $\mathbf{F}_c$  równa się poprostu  $-\mathbf{F}$ , możemy też napisać

$$\mathbf{F}'\mathbf{F}' = \mathbf{F}\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}^2.$$

Lecz  $\mathbf{F}^2 = E^2 - M^2 + 2i(\mathbf{E}\mathbf{M})$ ; widzimy tedy, że (VIII) zawiera *obadwa* niezmienniki Minkowskiego

$$M^2 - E^2 \text{ oraz } (\mathbf{E}\mathbf{M}) \dots \dots \dots \text{(23)}$$

Zauważmy wreszcie, że t. zw. fala elektromagnetyczna *czysta* jest określona przez  $E^2 = M^2$ ,  $(\mathbf{E}\mathbf{M}) = 0$ . Posługując się więc powyższą postacią możemy falę taką scharakteryzować krótko przez

$$\mathbf{T}\mathbf{F} = 0, \text{ lub też } \mathbf{F}^2 = 0.$$

(Porówn. zresztą cytowaną rozprawę autora z r. 1907.) Fala więc czysta dla układu  $S$  pozostaje czystą dla  $S'$ , według (VIII). Lecz to tylko mimochodem.

§ 6. **Biwektor dopełniający.**—Zamiast powyższego  $\mathbf{F}$  możemy wziąć

$$\mathbf{G} = \mathbf{M} + i\mathbf{E}, \dots \dots \dots \text{(21}^a\text{)}$$

nazywając połączenie to biwektorem elektromagnetycznym *dopełniającym*<sup>1)</sup>, lub *dopełnieniem*  $\mathbf{F}$ .

Wówczas otrzymamy, jako równoważnik kwaternionowy równań (20), zamiast (VI) i w ten sam zupełnie sposób:

$$D_c\mathbf{G} = C_c \dots \dots \dots \text{(VI}^a\text{)}$$

Tym razem widzimy, według (V<sup>a</sup>), że  $\mathbf{G}$  jest (bezskalarnym) kwaternionem  $R$ , t. j. że

$$\mathbf{G}' = Q\mathbf{G}Q_c \dots \dots \dots \text{(VII}^a\text{)}$$

<sup>1)</sup>  $\mathbf{G}$  jest wektorem zespolonym „sprzężonym” względem  $\mathbf{F}$  w znaczeniu słowa używanem w teorii funkcyj. Aby jednak nie wywołać pomieszania z pojęciem kwaternionowem sprzężoności, nie nazywam go tak i nie oznaczam przez  $\mathbf{F}_c$ . Pamiętajmy, że kwaternionowe  $\mathbf{F}_c$  równa się  $-\mathbf{F}$ .

$\mathbf{G}$  jest oczywiście *biwektorem fizycznym*, z tegoż samego tytułu co  $\mathbf{F}$ . Możemy zresztą zapatrywać się na  $\mathbf{G}$  jako na część wektorową kwaternionu prawego,  $VR$ .

Zauważmy, że, dotychczas przynajmniej,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  nie są nam potrzebne jednocześnie: wystarczy jeden *lub* drugi. (W dalszych dopiero wywodach dogodnie będzie korzystać z obu.)

§ 7. **Potencjał kwaternionowy.** — Wróćmy do pierwszej postaci równania kwaternionowego dla próżni, t. j. do

$$D\mathbf{F} = C. \quad \dots \quad (VI)$$

Zważmy, że operator *niezmienniczy*  $(TD)^2 = DD_c = \partial^2/\partial x^2 + \dots + \partial^2/\partial l^2$  jest Laplacjanem czterowymiarowym, czyli Cauchy'ego  $\square$ ,

$$DD_c = \square \quad \dots \quad (IX)$$

Rozumiejąc więc przez  $\Phi$  kwaternion pomocniczy i kładąc  $\mathbf{F} = -VD_c\Phi$  (skoro  $\mathbf{F}$  ma być *bezskałarne*), czyli prościej jeszcze, pisząc

$$\mathbf{F} = -D_c\Phi \quad \dots \quad (X)$$

i wymagając jednocześnie, aby było

$$SD_c\Phi = 0, \quad \dots \quad (XI)$$

mamy bezpośrednio z (VI):

$$\square\Phi = -C, \quad \dots \quad (XII)$$

t. j. znane dobrze równanie, którem posługuje się Sommerfeld dla „potencjału czwórkowego“, a które podał wcześniej nieco M. Born<sup>1)</sup>. Pozwolę sobie jednak zauważyć, że tu wypływa ono z (VI) w sposób bezpośredniejszy niż przy pomocy czterowymiarowych *div* i *curl*'ów czyli „Rotacyj“.

Powyższe  $\Phi$ , które nazwać można *potencjałem kwaternionowym*, jest rzetelnym kwaternionem fizycznym, mianowicie  $\propto q$ . Aby się o tem przekonać, wystarczy rzut oka na (XII). Istotnie skoro  $\square = (TD)^2$  jest niezmiennikiem, mamy  $\Phi \propto C \propto q$ . Co do *budowy*  $\Phi$  zresztą, nietrudno jest okazać, że według (X) skalar jego musi być urojony, zaś wektor rzeczywisty, tak iż  $\Phi \simeq q$ .

Pisząc tedy

$$\Phi = i\varphi + \mathbf{A}, \quad \dots \quad (24)$$

1) Porówn. u Sommerfelda, loc. cit.



gdzie  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  są rzeczywiste, mamy według (X)

$$\mathbf{F} = \nabla \nabla \mathbf{A} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + i \nabla \varphi,$$

czyli  $\mathbf{M} = \text{curl } \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \partial \mathbf{A}/c \partial t$ ; jest więc  $\varphi$  zwykłym „potencjałem skalarnym“, zaś  $\mathbf{A}$  zwykłym „potencjałem wektorowym“. Rozwijając zaś (XI) mamy zwykłą postać związku między  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$ :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Zauważmy wreszcie, że tak zwane „równanie ciągłości“, t. j.  $\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{p}) = 0$ , przybiera postać kwaternionową

$$SD_c C = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(XIII)}$$

lub też

$$SDC_c = 0 \quad \dots \dots \dots \text{(XIII}^a)$$

Skalar operatora  $D_c$  odgrywa rolę czterowymiarowego *Div* Somm erfeldowskiego.

§ 8. **Siła ponderomotoryczna.**—Ponieważ biwektor elektromagnetyczny  $\mathbf{F}$  jest  $\sim L$ , przeto mnożąc go po lewej stronie przez kwaternion fizyczny  $C$ , otrzymamy kwaternion, który według (IV)

będzie  $\sim q$ :

$$P = C\mathbf{F} \sim q \quad \dots \dots \dots \text{(25)}$$

t. j.  $P' = QPQ$ . Wykonywając mnożenie, mamy według (13) i (21):

$$P = P_e + iP_m, \dots \dots \dots \text{(26)}$$

gdzie  $P_e$ ,  $P_m$  są kwaternionami

$$P_e = \rho \left\{ \frac{i}{c} (\mathbf{pE}) + \mathbf{E} + \frac{1}{c} \nabla \mathbf{pM} \right\} \equiv \frac{i}{c} (\delta \mathbf{p}) + \delta \quad \dots \text{(26}^e)$$

$$P_m = \rho \left\{ \frac{i}{c} (\mathbf{pM}) + \mathbf{M} - \frac{1}{c} \nabla \mathbf{pE} \right\} \dots \dots \dots \text{(26}^m)$$

Wektor kwaternionu  $P_e$  jest znaną dobrze *siłą ponderomotoryczną*, na jednostkę objętości, zaś skalar  $P_e$  jest pomnożoną przez  $i/c$  *sprawnością* tejże siły:

$$\nabla P_e = \delta; \quad SP_e = \frac{i}{c} (\delta \mathbf{p}),$$

podczas gdy  $P_m$  jest analogią magnetyczną  $P_e$ , *nie* odgrywającą zresztą podobnej roli fizycznej.

Zauważmy, że całe  $P$  w (26) jest wprawdzie  $\infty q$ , lecz nie posiada budowy  $q$ ; jest bowiem pełnym *bikwaternionem*<sup>1)</sup>. Jak zaś przekształcają się z osobna jego składniki  $P_e, P_m$ , które posiadają budowę  $q$ , nie wiemy dotychczas.

Lecz oto biwektor dopełniający  $\mathbf{G}$  jest  $\infty R$ ; pomnożmy go więc przez prąd  $C$  po *prawej* stronie. Wówczas, według tegoż (IV), będzie znowu  $\mathbf{GC} \infty q$ , t. j.  $\mathbf{GC}$  będzie przekształcać się przez  $Q||Q$ . Rozwijając iloczyn ten według (13) i (21<sup>a</sup>), mamy:

$$\mathbf{GC} = - P_e + iP_m, . . . . . (27)$$

co znowu jest pełnym bikwaternionem.

Otóż,  $Q||Q$  jest transformatorem obydwu bikwaternionów,  $P = CF$  oraz  $\mathbf{GC}$ , a więc też ich sumy i różnicy, t. j. według (26), (27), transformatorem  $P_e$  oraz  $P_m$ . Widzimy tedy, że nie tylko  $P$ , lecz również składniki jego  $P_e, P_m$  wzięte z osobna są  $\infty q$ ; ponieważ zaś każdy z nich posiada również budowę  $q$  (mianowicie urojony skalar i rzeczywisty wektor), przeto *obadwa są kwaternionami fizycznymi*:  $P_e, P_m \simeq q$ .

Dla kwaternionów tych mamy, według (25) i (26), (27):

$$P_e = \frac{1}{2} \{CF - \mathbf{GC}\}, . . . . . (28)$$

$$P_m = -\frac{i}{2} \{CF + \mathbf{GC}\}, . . . . . (28^m)$$

Bezpośrednie znaczenie fizyczne (przynajmniej na tle podstawowych wzorów elektroniki) posiada wprawdzie samo tylko  $P_e$ , nie zaś  $P_m$ . Nie sądzę jednak, aby miało to przemawiać na niekorzyść metody kwaternionowej. Wobec szczupłej dotychczas garstki kwaternionów fizycznych, lepiej jest mieć jeszcze jeden; zresztą można go nie używać bez potrzeby. Biorąc zamiast prądu  $C$  prędkość kwaternionową  $Y$ , mamy oczywiście jeszcze jedną parę kwaternionów fizycznych, mianowicie

$$YF - \mathbf{GY} \simeq q; YF + \mathbf{GY} \simeq iq.$$

Odpowiedniki matrycowe tych kwaternionów, przy innym nieco znaczeniu fizycznym biwektorów, znalazły zastosowanie w elektrodynamice Minkowskiego dla ciał lub ośrodków ważkich.

<sup>1)</sup> Oczywiście w Hamiltona, nie Clifforda, znaczeniu słowa.



Powyzszy kwaternion  $P_0$ , który jest odpowiednikiem „siły czwórkowej“<sup>1)</sup>, możemy nazwać *siłą kwaternionową*, zawsze na jednostkę objętości. Posiada on, jak widzieliśmy, wektor dynamiczny i skalar energetyczny.  $P_m$  może, z wyłuszczonej względów, obejść się bez imienia. *Cale* natomiast  $P = CF$ , które może okazać się formalnie dogodnym, zasługiwałoby na nazwę *bikwaternionu dynamicznego*. W razie potrzeby możnaby w  $P$  upatrywać wzór *bikwaternionów fizycznych*, podobnie jak  $q$ ,  $F$  były pierwowzorami dla kwaternionów i biwektorów fizycznych. Możemy też zapatrywać się na  $F$  (+ skalar niezmienniczy, a więc nieistotny) i  $P$  jako na iloczyn różnolite dwóch, względnie trzech kwaternionów fizycznych pierwotnych. Z tego punktu widzenia  $q$ ,  $F$ ,  $P$  i im podobne byłyby tworam kwaternionowemi I-go, względnie II-go i III-go stopnia.

Pozostawiając jednak na uboczu sprawę klasyfikacji i nomenklatury, wróćmy do urwanego wątku.

Korzystając z równania różniczkowego kwaternionowego (VI), mamy dla bikwaternionu dynamicznego:

$$P = DF.F, \dots \dots \dots (XIV)$$

gdzie kropka ma być tamą dla mocy różniczkującej operatora  $D$ . Podobnie też mamy dla *siły kwaternionowej*  $P_0$ , według (28):

$$2P_0 = DF.F - G.DF \dots \dots \dots (XV)$$

Odpowiedni wzór dla  $P_m$  pomijam.

W (XV) siła ponderomotoryczna (i jej sprawność) jest wyrażona przez sam tylko biwektor elektromagnetyczny i jego dopełnienie. Wzór ten powinienby tedy nadawać się bezpośrednio do okazania własności wysiłu Maxwellowskiego (stress), impulsu elektromagnetycznego oraz gęstości i prądu energii, na podobieństwo wzorów Minkowskiego opartych na 16-elementowej macierzy, czyli na „tensorze światowym“. Istotnie, zobaczymy poniżej, że (XV), po osobliwej wprawdzie, lecz nieznacznej przeróbce, daje wszystko to w sposób nieoczekiwanie prosty.

§ 9. **Inna postać siły kwaternionowej.** — Chcąc, po prawej stronie (XV), upodobnić pierwszy wyraz drugiemu i powodując się

1) „Viererkraft“; por. np. u Laue'go, loc. cit., § 15.

zawsze zasadą różnolitości, uciekłem się po kilku próbach do tworu  $\mathbf{G}[D]\mathbf{F}$ , w którym  $D$  ma działać zarówno naprzód jak wstecz, który określam więc wyraźnie przez

$$\mathbf{G}[D]\mathbf{F} = \mathbf{G}D \cdot \mathbf{F} + \mathbf{G} \cdot D\mathbf{F} \dots \dots \dots (29)$$

Określenie to będzie zupełnem, skoro objaśnię tylko, co rozumiem przez  $\mathbf{G}D$ . Napisanie, wbrew zwykłej konwencji, operatora (różniczkowego) *za* operandem nie powinno nas odstraszać<sup>1)</sup>. Znaczenie  $\mathbf{G}D$  narzuca się samo przez się; gdyby  $D$  było zwykłym kwaternionem o skalarze  $s$  i wektorze  $\mathbf{w}$ , mielibyśmy

$$\mathbf{G}s + \mathbf{G}\mathbf{w} = \mathbf{G}s + V\mathbf{G}\mathbf{w} - (\mathbf{G}\mathbf{w}) = s\mathbf{G} - V\mathbf{w}\mathbf{G} - (\mathbf{w}\mathbf{G});$$

zastąpmy  $s$  przez  $\partial/\partial l$  oraz  $\mathbf{w}$  przez  $\nabla$ , a otrzymamy:

$$\mathbf{G}D = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial l} - \text{curl } \mathbf{G} - \text{div } \mathbf{G} \dots \dots \dots (30)$$

$\mathbf{G}D$  różni się więc od  $D\mathbf{G}$  jedynie tylko co do znaku *curl*  $\mathbf{G}$ ; lecz dzięki temu właśnie nie zachodzi między całami temi kwaternionami żaden wogóle związek prosty;  $D\mathbf{G}$  nie dałoby się zresztą użyć zgoła, albowiem rozerwałoby się przy przekształceniu relatywistycznym (pamiętajmy, że  $\mathbf{G} \infty R$ ). Tyle co do usprawiedliwienia powyższej licencji; zobaczymy teraz, jakie daje ona korzyści.

Wróćmy do (XV). Zestawmy zawarte tamże  $D\mathbf{F}$  z powyższem  $\mathbf{G}D$ . Mamy  $D\mathbf{F} = \partial\mathbf{F}/\partial l + \text{curl } \mathbf{F} - \text{div } \mathbf{F}$ , a więc, według (30):

$$\begin{aligned} \mathbf{G}D + D\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial l} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) - \text{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) + \text{curl}(\mathbf{F} - \mathbf{G}) \\ &= -2 \text{div } \mathbf{M} - 2i \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \text{curl } \mathbf{E} \right); \end{aligned}$$

suma ta znika tedy dzięki drugiej parze równań elektromagnetycznych (20), tak iż

$$D\mathbf{F} = -\mathbf{G}D \dots \dots \dots (31)$$

Zamiast (XV) mamy przeto dla *sily kwaternionowej* krótki wzór

<sup>1)</sup> Oliver Heaviside w podobnych okolicznościach mówi poprostu rubasznie: „A cart may be pulled or pushed“; por. *Electromagn. Theory*, T. II, str. 218. Zresztą od czasów J. W. Gibbsa nauczyliśmy się pisać operator wektorowy liniowy czyli dyadę bądź to przed, bądź za operandem; on to ukuł w tym celu terminy: „prefactor“ i „postfactor“.



$$P_e = - \frac{1}{2} \mathbf{G}[D]\mathbf{F} \dots \dots \dots (XVI)$$

Oto jest zapowiedziana pod koniec § 8-go przeróbka.

Gdyby chodziło o samo tylko  $P_e$ , wzór ten, acz symetryczniejszy, nie byłby może prostszym od (XV), skoro i tak należy uciec się do znaczenia (29) naszego symbolu. Mieliliśmy jednak na widoku sprawę wysiłu i t. p. Otóż, wobec tego, że  $\mathbf{G}[\ ]\mathbf{F}$  w zastosowaniu do  $D$ , a raczej wystawione na obustronne działania  $D$ , dało siłę kwaternionową, nie trudno mi było odgadnąć, że tenże operator  $\mathbf{G}[\ ]\mathbf{F}$  w zastosowaniu do *wektora*, np. jednostkowego, da odpowiedni wysiłek i skojarzoną z nim relatywistycznie składową prądu energii<sup>1)</sup>. Przypuszczenie to sprawdziło się też w istocie, a ten właśnie wzgląd zniewolił mnie do ostatecznego wyboru postaci (XVI). Już po otrzymaniu tych prostych wzorów dla wysiłu i t. d. starałem się powiązać je organicznie z powyższą postacią siły kwaternionowej, czyli „wyprowadzić“ je z (XVI). Tą też drogą pójdę w paragrafie następnym, gwoli systematyczności wykładu. (Krótkie zwierzenia powyższe o zakulisowym, chronologicznym porządku rzeczy uważałem pomimo to za stosowne w tem miejscu.)

§ 10. **Własności operatora  $\mathbf{G}[\ ]\mathbf{F}$ . Wysiłek, impuls elektromagnetyczny, prąd i gęstość energii.**—Rozwińmy prawą stronę (XVI), biorąc dla udogodnienia pisowni z osobna jej część skalar-ną i wektorową, t. j. według (26\*):

$$\frac{i}{c} (\delta\mathbf{p}) = SP_e = - \frac{1}{2} S\mathbf{G}[D]\mathbf{F} \dots \dots \dots (32)$$

$$\delta = VP_e = - \frac{1}{2} V\mathbf{G}[D]\mathbf{F} \dots \dots \dots (33)$$

Dla pierwszej otrzymujemy bez żadnych trudności, pamiętając zawsze o określeniu (29) i korzystając z (30):

$$\frac{i}{c} (\delta\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{G}\mathbf{F}) - \frac{1}{2} \text{div } V\mathbf{G}\mathbf{F},$$

<sup>1)</sup> Dawniej już zresztą spostrzegłem, że  $\mathbf{G}[\ ]\mathbf{F}$  w zastosowaniu do *skalara*, czyli po prostu samo  $\mathbf{G}\mathbf{F}$  daje cały prąd energii oraz gęstość energii; *Ann. d. Physik*, T. 22; 1907.

stąd zaś:

$$(\delta \mathbf{p}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{GF}) + \frac{ic}{2} \operatorname{div} \mathbf{VGF} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \mathfrak{P},$$

gdzie skalar  $u$  i wektor  $\mathfrak{P}$  mają wartości

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} (\mathbf{GF}) = \frac{1}{2} (E^2 + M^2) \\ \mathfrak{P} &= -\frac{ic}{2} \mathbf{VGF} \equiv c \mathbf{VEM} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

Skalarna więc część wzoru (XVI) wyraża zachowanie energii, dając jednocześnie prąd energii, czyli wektor Poyntinga  $\mathfrak{P}$ , oraz gęstość energii elektromagnetycznej  $u$ . Łącząc zaś dwa wzory (34) w jeden kwaternionowy, mamy, jako pierwszą z zapowiedzianych w nagłówku własności:

$$\frac{1}{2} \mathbf{GF} = -u + \frac{i}{c} \mathfrak{P}^1) \dots \dots \dots (\text{XVII}^a).$$

Aby otrzymać drugą własność  $\mathbf{G}[\nabla] \mathbf{F}$ , rozwińmy wektorową część wzoru (XVI), t. j. (33). Przedewszystkiem mamy

$$\delta = -\frac{1}{2} \mathbf{VG} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \right] \mathbf{F} - \frac{1}{2} \mathbf{VG} [\nabla] \mathbf{F};$$

co do pierwszego wyrazu, widzimy natychmiast, że na mocy (29) nie jest on niczem innym jak  $-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{VGF}$ , czyli  $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}$ ; pozostaje przeto do rozwinięcia drugi tylko wyraz, który (jako siłę ponderomot. Maxwellowską) oznaczymy przez  $\delta_{\text{Mxw}}$ . Będzie więc

$$\delta = \delta_{\text{Mxw}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}, \dots \dots \dots (35)$$

gdzie w  $\mathfrak{P}/c^2$  rozpoznajemy już gęstość impulsu elektromagnetycznego i gdzie

$$\delta_{\text{Mxw}} = -\frac{1}{2} \mathbf{VG} [\nabla] \mathbf{F} \dots \dots \dots (36)$$

---

<sup>1)</sup> Nie mam chyba potrzeby ostrzegać czytelnika, że kwaternion ten *nie* jest kwaternionem fizycznym.



Otóż, dla części wektorowej iloczynu trzech dowolnych wektorów<sup>1)</sup> (czyli bezskalnych kwaternionów) **A**, **B**, **C** mamy łatwy do dowiedzenia wzór

$$\begin{aligned} \nabla ABC &= B(CA) - C(BA) - (CB)A \\ &= B(CA) - (AB)C - A(BC) \end{aligned} \quad (b)$$

który celowo napisałem w dwojaki sposób. Biorąc **G**, **F** zamiast **A**, **C** oraz operator wektorowy (różniczkowy)  $\nabla$  zamiast wektora **B** i korzystając z należytej ostrożnością z pierwszej, względnie drugiej postaci powyższego wzoru, mamy:

$$\nabla G \nabla \cdot F = \nabla (G \cdot F) - F \cdot \text{div } G - (F \cdot \nabla) G,$$

$$\nabla G \cdot \nabla F = \nabla (F \cdot G) - G \cdot \text{div } F - (G \cdot \nabla) F,$$

gdzie żadna z kropek nie jest zbyteczną; w pierwszym równaniu **G** jedynie jest poddane działaniom różniczkowym, jak gdyby **F** było stałe,—w drugim odwrotnie. Biorąc ich sumę, mamy z połączenia pierwszych dwóch wyrazów prawych stron *pełny* już gradient iloczynu (**G****F**), t. j.  $\nabla(\mathbf{GF})$  bez kropki, a więc:

$$\begin{aligned} \nabla G[\nabla]F &= \nabla(\mathbf{GF}) - F \cdot \text{div } G - G \cdot \text{div } F - (F \cdot \nabla)G - (G \cdot \nabla)F \\ &= i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{GF}) - \text{div} (FG_1 + GF_1) \right\} + j \{ \dots \} + k \{ \dots \} \\ &= i \text{div} \{ (\mathbf{GF}) i - F(Gi) - G(Fi) \} + \dots \end{aligned}$$

Wzór (36) przybiera tedy postać

$$\delta_{Mxw} = -i \text{div } f_1 - j \text{div } f_2 - k \text{div } f_3, \dots \quad (36^a)$$

gdzie wektory **f**<sub>1</sub> i t. d., stanowiące *wysił* (samosprężony), są określone przez **f**<sub>1</sub> czyli  $f\mathbf{i} = \frac{1}{2} \{ (\mathbf{GF})\mathbf{i} - \mathbf{F}(G\mathbf{i}) - \mathbf{G}(F\mathbf{i}) \}$  i t. d., czyli dla dowolnego wektora jednostkowego **n**:

$$f_n = f\mathbf{n} = \frac{1}{2} (\mathbf{GF})\mathbf{n} - \frac{1}{2} \mathbf{F}(G\mathbf{n}) - \frac{1}{2} \mathbf{G}(F\mathbf{n}) \dots \quad (37)$$

lub też w kształcie dyady:

$$f = \frac{1}{2} (\mathbf{GF}) - \frac{1}{2} \mathbf{F}(G - \frac{1}{2} \mathbf{G}(F) \dots \dots \dots (37^a)$$

Wysił ten, reprezentowany przez operator wektorowy liniowy *f*, jest oczywiście znanym dobrze *wysiłem Maxwellowskim*<sup>2)</sup> (ciśnienia dodatnie uważamy tu za ciśnienia właściwe, ujemne za napięcia).

<sup>1)</sup> Zwykłych zresztą lub biwektorów.

<sup>2)</sup> Istotnie, rozwijając (37) na **E**, **M**, mamy znany wzór:

$$f\mathbf{n} = u\mathbf{n} - \mathbf{E}(\mathbf{E}\mathbf{n}) - \mathbf{M}(\mathbf{M}\mathbf{n}), \quad u = \frac{1}{2} (E^2 + M^2).$$

Porówn. zresztą (34).

Chodziło nam tu atoli w pierwszym rzędzie o inną postać tegoż wysiłu, świadczącą mianowicie o pożyteczności operatora  $\mathbf{G}[\ ]\mathbf{F}$ . Otóż, uciekając się znowu do wzoru (b), mamy zamiast (37) pożądaną postać:

$$f\mathbf{n} = \frac{1}{2} \mathbf{V}\mathbf{G}\mathbf{n}\mathbf{F} . . . . . (38)$$

Dla skalara tegoż iloczynu mamy zresztą

$$\mathbf{S}\mathbf{G}\mathbf{n}\mathbf{F} = \mathbf{S}\mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{n}\mathbf{F} = -(\mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{n}\mathbf{F}) = (\mathbf{n}\mathbf{V}\mathbf{G}\mathbf{F}),$$

t. j. według (34) lub (XVII<sup>a</sup>):

$$\frac{1}{2} \mathbf{S}\mathbf{G}\mathbf{n}\mathbf{F} = \frac{i}{c} (\Psi\mathbf{n}).$$

Cały przeto iloczyn kwaternionowy będzie ostatecznie:

$$\frac{1}{2} \mathbf{G}\mathbf{n}\mathbf{F} = \frac{i}{c} (\Psi\mathbf{n}) + f\mathbf{n} . . . . . (\text{XVII}^b)$$

Oto jest druga z zapowiedzianych własności naszego operatora.

Możemy zresztą obie własności połączyć w jedną, dodając do (XVII<sup>b</sup>) wzór (XVII<sup>a</sup>) pomnożony przez dowolny zupełnie skalar  $s$ . Wówczas otrzymamy  $\mathbf{G}[\ ]\mathbf{F}$  w zastosowaniu do pełnego kwaternionu  $s + \mathbf{n}$ . Weźmy w tym celu np.  $s = i\sigma$  czysto urojone, a więc wprowadźmy specjalny kwaternion fizyczny  $q$ :

$$k = i\sigma + \mathbf{n} . . . . . (39)$$

Będziemy wówczas mieli wzór dogodny dla późniejszych wywodów:

$$\frac{1}{2} \mathbf{G}k\mathbf{F} = \frac{i}{c} \{(\Psi\mathbf{n}) - c\sigma u\} + f\mathbf{n} - \frac{\sigma}{c} \Psi . . . (\text{XVII})$$

Wyraz ten jest też oczywiście *kwaternionem fizycznym*, mianowicie  $\simeq q$ .

Co do  $\mathbf{n}$ , przypominam że jest to wektor jednostkowy o *dowolnym* zupełnie kierunku;  $\sigma$  oznacza *dowolny* skalar rzeczywisty.

Zbierając wyniki niniejszego i poprzedniego paragrafu, możemy teraz powiedzieć krótko, że jeden i ten sam operator  $\mathbf{G}[\ ]\mathbf{F}$  daje siłę kwaternionową, odpowiedni wysił, prąd i gęstość energii, jeżeli miejsce wolne  $[\ ]$  wypełnimy przez  $D$ , względnie przez zwykły wektor lub skalar. (Wzory XVI, XVII<sup>b</sup>, XVII<sup>a</sup> lub ich połączenie XVII.)



Operator ten zastępuje więc zupełnie matrycę  $4 \times 4$  elementową Minkowskiego  $S^1$ ) czyli „tensor światowy“ Sommerfelda i Lauego. Procedura atoli jest w naszym przypadku znacznie prostsza; szczególnie zaś prostą jest budowa naszego operatora w porównaniu z „tensorem światowym“; podczas bowiem gdy w  $\mathbf{G}[\mathbf{F}]$  obadwa biwektory są poprostu czynnikami kwaternionowymi, „tensor“ Sommerfelda (loc. cit., str. 768), t. j. w pisowni Lauego

$$T = [ [\mathfrak{M} \mathfrak{M} ] ],$$

tworzy się z wektora szóstkowego  $\mathfrak{M}$  w sposób bardzo zawiły; istotnie, właściwe określenie tego symbolu jest zawarte we wzorze (80) Lauego (loc. cit., str. 74), który dla jednego tylko elementu „tensora“,  $T_{jk}$ , obejmuje 16 iloczynów; elementów zaś takich, czyli składowych „tensor“ symetryczny zawiera dziesięć. Co do dalszych szczegółów tego porównania odesłać muszę czytelnika do wspomnianych prac.

Podobnie do powyższego wartoby też zresztą zbadać własności operatora  $\mathbf{F}[\mathbf{G}]$ , a mianowicie (zawsze według zasady różnoliwości) w zastosowaniu do  $k_c, D_c$ .

### § 11. Przekształcenie wysiłu, prądu energii i jej gęstości.

Wiadomo, że przy użyciu „tensora światowego“ składowe wysiłu i t. d., które stanowią jego dziesięć elementów, przekształcają się jak kwadraty i iloczyny spólrzędnych punktu „świata“ czterowymiarowego, t. j.  $f_{11}$  jak  $x^2$ ,  $f_{12}$  jak  $xy$  i t. d. Odpowiednie wzory są dość zawiłe i nieprzejrzyste<sup>2)</sup>. Otrzymane tym sposobem wzory transformacyjne dla składowych łączy się następnie dopiero we wzory wektorowe.

Otóż metoda kwaternionowa i pod tym również względem wydaje mi się dogodniejszą i przejrzystszą. Istotnie, wiemy już, dzięki (XVII), że wyraz

$$Z = \frac{i}{c} \{ (\mathfrak{P}\mathbf{u}) - c\sigma u \} + f\mathbf{u} - \frac{\sigma}{c} \mathfrak{P}. \dots \dots (40)$$

jest kwaternionem fizycznym, mianowicie  $\simeq q$ . Mamy więc, według tegoż wzoru (XVII):

<sup>1)</sup> Która jest „iloczynem“ dwóch matryc „alternujących“  $4 \times 4$  elementowych; loc. cit., § 13. Dla „próżni“ matryca  $S$  staje się symetryczną.

<sup>2)</sup> Por. np. (78) u Lauego, str. 74.

$$QZQ = \frac{1}{2} \mathbf{G}'k'\mathbf{F}', \dots \dots \dots (41)$$

gdzie  $k' = QkQ$  jest określone przez (39); pisząc mianowicie

$$k' = i\sigma' + \mathbf{N}' = i\sigma' + \mathbf{N}'\mathbf{n}',$$

otrzymamy łatwo

$$\sigma' = \gamma[\sigma - \beta(\mathbf{n}\mathbf{i})]; \mathbf{N}' = \mathbf{n} + [(\gamma - 1)(\mathbf{n}\mathbf{i}) - \sigma\beta\gamma]\mathbf{i}; \dots (42)$$

jeżeli chodzi o wektor jednostkowy  $\mathbf{n}'$ , dość jest podzielić  $\mathbf{N}'$  przez wartość bezwzględną  $N' = \sqrt{1 - \sigma^2 + \sigma'^2}$ ; nie będzie nam to zresztą potrzebne. Napisałem tu  $\mathbf{i}$  zamiast poprzedniego  $\mathbf{u}$ , tak iż przędkość układu  $S'$  względem  $S$  będzie odłąd:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{i} = c\beta\mathbf{i}.$$

Według (41) mamy obecnie

$$QZQ = \frac{i\sigma'}{2} \mathbf{G}'\mathbf{F}' + \frac{N'}{2} \mathbf{G}'\mathbf{n}'\mathbf{F}';$$

otóż, prawa strona tego równania jest według wzorów (XVII<sup>a</sup>) i (XVII<sup>b</sup>), które zachodzą dla układu  $S'$  zarówno jak dla  $S$ :

$$i \left\{ \frac{1}{c} (\mathcal{Y}'\mathbf{N}') - \sigma'u' \right\} + f'\mathbf{N}' - \frac{\sigma'}{c} \mathcal{Y}'^1),$$

lewa zaś strona tegoż równania rozwija się według (40) na

$$i\gamma \left\{ \frac{1}{c} \mathcal{Y}_n - \sigma u - \beta \left( f_{n1} - \frac{\sigma}{c} \mathcal{Y}_1 \right) \right\} + f\mathbf{n} - \frac{\sigma}{c} \mathcal{Y} + \mathbf{i} \left\{ (\gamma - 1) \left( f_{n1} - \frac{\sigma}{c} \mathcal{Y}_1 \right) - \beta\gamma \left( \frac{\mathcal{Y}_n}{c} - \sigma u \right) \right\}.$$

Przyrównywając więc części skalarne i wektorowe, mamy dwa związki

$$\left. \begin{aligned} \gamma \left( \frac{1}{c} \mathcal{Y}_n - \sigma u \right) - \beta\gamma \left( f_{n1} - \frac{\sigma}{c} \mathcal{Y}_1 \right) &= \frac{1}{c} (\mathcal{Y}'\mathbf{N}') - \sigma'u', \\ f\mathbf{n} - \frac{\sigma}{c} \mathcal{Y} + \mathbf{i} \left\{ (\gamma - 1) \left( f_{n1} - \frac{\sigma}{c} \mathcal{Y}_1 \right) - \beta\gamma \left( \frac{\mathcal{Y}_n}{c} - \sigma u \right) \right\} &= \\ &= f'\mathbf{N}' - \frac{\sigma'}{c} \mathcal{Y}', \end{aligned} \right\} (43)$$

<sup>1)</sup> Przypominam, że  $f'$ , podobnie jak  $f$ , jest operatorem liniowym określającym wysił, tak iż  $f'\mathbf{N}' = \mathbf{N}'f'\mathbf{n}' = \mathbf{N}'f_{n'}$ .



które zachodzą dla *wszelkich*  $\sigma$  (i dla wszelkich kierunków  $\mathbf{n}$ ).  
Weźmy tedy raz  $\sigma = 0$ , drugi raz  $\sigma = 1$  i zważmy, że według (42) jest:

$$\sigma'_0 = -\beta\gamma(\mathbf{in}); \sigma'_1 - \sigma'_0 = \gamma; N'_1 - N'_0 = \beta\gamma\mathbf{i};$$

$$N'_0 = \mathbf{n} + (\gamma - 1)\mathbf{i}(\mathbf{in}) = \gamma \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{n},$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza *operator*, który wydłuża  $\gamma$  razy wszelkie wektory normalne do kierunku ruchu, pozostawia zaś bez zmiany wektory do tegoż kierunku równoległe, t. j. dyadę:

$$\varepsilon = \mathbf{i}(\mathbf{i} + \gamma\mathbf{j}(\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}(\mathbf{k} \dots \dots \dots)) \quad (44)$$

Wówczas otrzymamy z (43) cztery związki, z których jeden (zawierający  $\mathfrak{P}_n - c\beta f_{n1}$ ) jest wynikiem trzech pozostałych (z których jedno zawiera wypadkowe  $\mathfrak{P}$ ); te trzy, po łatwej zupełnie przeróbce i bez żadnych rozszczepień, dają pożądane *wzory transformacyjne dla gęstości i prądu energii oraz dla wysiłu* w godnej uwagi postaci:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\gamma^2} u &= u' + \frac{2}{c^2} (\mathfrak{P}'\mathbf{v}) + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}f'\mathbf{v}) \\ \frac{1}{\gamma^2} \varepsilon\mathfrak{P} &= \mathfrak{P}' + \left[ \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\mathfrak{P}') + u' + f' \right] \mathbf{v} \\ \frac{1}{\gamma^2} \varepsilon f &= f' \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{c^2} [\mathfrak{P}' + u'\mathbf{v}] (\mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{P}' \right) \end{aligned} \right\} \quad (XVIII)$$

gdzie  $\varepsilon$  jest operatorem objaśnionym przez (44).

Trzy te wzory, skalarny, wektorowy i dyadowy, zastępują zupełnie  $1 + 3 + 6 =$  *dziesięć* wzorów transformacyjnych (102) Lauego (loc. cit., str. 87).

Istotnie, pamiętając, że  $f'\mathbf{v} = vf'\mathbf{i} = \mathbf{v}f'_1$ , mamy dla  $u$  wprost wzór Lauego

$$(1 - \beta^2)u = u' + \frac{2v}{c^2} \mathfrak{P}'_1 + \beta^2 f'_{11}.$$

Następnie z drugiego naszego wzoru wynika również bezpośrednio

$$\mathfrak{P}_1 = \gamma^2 \{ (1 + \beta^2) \mathfrak{P}'_1 + (u' + f'_{11}) v \}; \quad \mathfrak{P}_2 = \gamma (\mathfrak{P}'_2 + v f'_{12})$$

i podobnie  $\mathfrak{P}_3$ , jak u Lauego. Trzeci wreszcie wzór (XVIII), w którym opuściliśmy oczywiście wspólny operand  $\mathbf{n}$ , daje dla  $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ , względnie  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ :<sup>1)</sup>

$$\frac{1}{\gamma^2} \varepsilon \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}'_1 + \frac{v}{c^2} [\mathfrak{P}' + u' \mathbf{v}] + \frac{1}{c^2} \mathfrak{P}'_1 \mathbf{v}$$

$$\varepsilon \mathbf{f}_2 = \gamma [\mathbf{f}'_2 + \frac{1}{c^2} \mathfrak{P}'_2 \mathbf{v}]; \quad \varepsilon \mathbf{f}_3 = \gamma [\mathbf{f}'_3 + \frac{1}{c^2} \mathfrak{P}'_3 \mathbf{v}],$$

a więc dla zwykłych sześciu składowych wysiłu:

$$f_{11} = \gamma^2 (f'_{11} + 2 \frac{v}{c^2} \mathfrak{P}'_1 + \beta^2 u'); \quad f_{22} = f'_{22}; \quad f_{33} = f'_{33}$$

$$f_{23} = f'_{23}; \quad f_{31} = \gamma (f'_{31} + \frac{v}{c^2} \mathfrak{P}'_3); \quad f_{12} = \gamma (f'_{12} + \frac{v}{c^2} \mathfrak{P}'_2),$$

jak być powinno. Tem samem krótkie nasze wzory (XVIII) sprawdziliśmy całkowicie. W tym też jedynie celu rozszczepiliśmy je na składowe.

Aby wyrazić  $u'$  i t. d. przez  $u$  i t. d., dość jest napisać w (XVIII) —  $\mathbf{v}$  zamiast  $\mathbf{v}$  i pozostawiając bez zmiany  $\gamma$ , a więc też  $\varepsilon$ , zastąpić symbole akcentowane przez nieakcentowane i odwrotnie.

Godnym uwagi, zwłaszcza ze względu na zastosowania do dynamiki relatywistycznej, jest przypadek szczególny, w którym *prąd energii*<sup>2)</sup> dla jednego z porównywanych układów *znika*, powiedzmy  $\mathfrak{P}' = 0$ . Wówczas mamy z punktu widzenia drugiego układu,  $S$ , według (XVIII):

1) Zważmy, że  $f \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{i} = f' \mathbf{i}$ ,  $f' \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{j} = \frac{1}{\gamma} f' \mathbf{j}$  i podobnie dla  $\mathbf{k}$  dalej  $(\mathbf{v} \mathbf{i}) = v$ ,  $(\mathbf{v} \mathbf{j}) = 0$ , wreszcie

$$\left( \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{P}' \cdot \mathbf{n} \right) = \left( \mathfrak{P}' \cdot \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{n} \right),$$

albowiem  $\frac{1}{\varepsilon}$ , podobnie jak  $\varepsilon$ , jest operatorem *symetrycznym*; skalarny ten iloczyn przybiera więc poprostu, dla  $\mathbf{n} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  wartości  $\mathfrak{P}'_1, \frac{1}{\gamma} \mathfrak{P}'_2, \frac{1}{\gamma} \mathfrak{P}'_3$ .

2) A więc też odpowiedni *impuls*,  $\mathfrak{P}'/c^2$ , na jednostkę objętości.



$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\gamma^2} u &= u' + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}f'\mathbf{v}) \\ \frac{1}{\gamma^2} \varepsilon \mathfrak{J} &= u'\mathbf{v} + f'\mathbf{v} \\ \frac{1}{\gamma^2} \varepsilon f &= f' \frac{1}{\varepsilon} + \frac{u'}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

Wzory te zastępują dziesięć skalarynych związków Lauego (158), z których autor ten, jak wiadomo, wysnuł mnóstwo ciekawych wniosków. Pamiętając zresztą, iż  $\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v} = \mathbf{v}$ , możemy zamiast drugiego wzoru (45) napisać nieco dogodniej:

$$\mathfrak{J} = \gamma^2 [u'\mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} f'\mathbf{v}]; \dots \dots \dots (45^a)$$

podobnie też można napisać wzór trzeci, chociaż operator  $\varepsilon$ , o prostej bardzo budowie, nie sprawia żadnych trudności. Zjawienie się jego we wzorach naszych nie jest też bynajmniej sztuczne; operator ten odpowiada bowiem istocie przekształcenia, zasadniczego dla całej teorii względności. —

Dalsze zastosowania powyższej metody kwaternionowej, które dotyczyć będą elektromagnetycznych i innych zagadnień relatywizmu, odłożyć muszę do późniejszych komunikatów.

ZUSAMMENFASSUNG.

Herr L. Silberstein:

**Quaternionenform der Relativitätstheorie.**

Angemeldet am 28 November 1911.

Indem der Verf. für die Lorentztransformation die Cayley'sche<sup>1)</sup> Quaternionenform  $q' = aqb$  sucht, erhält er folgende Formeln und Lehrsätze, welche die hauptsächlichsten relativistischen Beziehungen in Quaternionensprache wiedergeben.

§ 1. **Transformation der Raum—Zeit—Quaternion.**—Führt man für die zu vergleichenden Systeme  $S, S'$  die Quaternionen

$$q = l + \mathbf{r} \equiv ict + \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$$

<sup>1)</sup> Literaturnachweis in *Phil. Mag.* 1912.

und  $q' = l' + r'$  ein, so ergibt sich als Quaternionengestalt der fundamentalen Transformation:

$$q' = Q q Q, \quad \left. \begin{aligned} Q = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} + \mathbf{u} \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

Hier ist  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ,  $\beta = v/c$ ,  $\mathbf{v} = v \mathbf{u}$  die Vektorgeschwindigkeit des Systems  $S'$  in Bezug auf  $S$ .

Die, einander gleichen, transformierenden Einheitsquaternionen  $Q$  schreiben sich dann auch

$$Q = \cos \alpha + \mathbf{u} \sin \alpha = e^{\alpha \mathbf{u}}, \dots \dots \dots (7)$$

wo

$$2 \alpha = \text{arctg} (i \beta) \dots \dots \dots (8)$$

*Q ist also eine Einheitsquaternion, deren Axe in die Bewegungsrichtung von S' relativ zu S fällt, und deren Winkel (od. Argument) gleich dem halben Minkowski'schen Drehungswinkel ist.*

Schreibt man den obigen Transformator:

$$\omega = Q [ ] Q, \dots \dots \dots (I^a)$$

so wird der inverse Transformator  $\omega^{-1} = Q^{-1} [ ] Q^{-1}$  oder, wegen  $TQ = 1$ :

$$\omega^{-1} = Q_c [ ] Q_c = \omega_c, \dots \dots \dots (I^b)$$

wo  $Q_c = e^{-\alpha \mathbf{u}}$  die conjugierte von  $Q$  ist.

§§ 2, 3. **Physische Quaternionen. Conjugierte Quaternionen.**—Für die quaternionenmässige Darstellung der obigen Transformation kann anstatt  $q$  ebensogut die conjugierte Quaternion  $q_c = l - r$  benützt werden. Alsdann folgt:

$$q' = Q_c q_c Q_c \dots \dots \dots (I^c)$$

Man bemerke, das  $(q_c)' = (q')_c$ , sodass Beides mit  $q'_c$  bezeichnet werden kann. Offenbar leistet  $q_c$  dieselben Dienste wie  $q$ ; (I) und (Ic) drücken ein und dieselbe Transformation von  $l, r$  in  $l', r'$  aus.

$q$  entspricht dem Minkowski'schen „Raum—Zeit—Vektor I Art“ od. dem Sommerfeld'schen „Vierervektor, Weltvektor“. Dasselbe gilt von  $q_c$ . Demgemäss könnte man  $q, q_c$  Weltquaternionen nennen; der Verf. wählt aber den schlichteren, aber nicht weniger bezeichnenden Namen: *physische* Quaternionen (I Art od. kurz: phys. Quat.).



Dem entsprechend nennt er *physische Quaternion eine jede Quaternion  $X$ , welche mit  $q$  oder mit  $q_c$  covariant ist und dieselbe Struktur hat*, d. h. ein jedes  $X$ , welches sich durch  $Q[ ]Q$  oder  $Q_c[ ]Q_c$  transformiert und welches einen *rein imaginären Skalar— und reellen Vektor—Teil hat*.

Die Covarianz *allein* wird durch das Symbol  $\infty$  angedeutet; tritt dazu noch die *gleiche Struktur*, so wird  $\simeq$  geschrieben.  $X \simeq q$  heisst also:  $X$  ist eine phys. Quaternion, covariant  $q$ . Ist dies der Fall, so ist zugleich  $X_c \simeq q_c$ . *Die conjugierte einer physischen Quaternion ist wiederum eine physische Quaternion*. Und da  $a^{-1} = a_c(Ta)^{-2}$ , so ist *das Reziproke einer physischen Quaternion wiederum eine physische Quaternion* (denn  $Ta$  ist invariant).

Im Folgenden werden physische Quaternionen, die  $\simeq q$  sind, mit  $a, b, e \dots$ , (ohne Index) bezeichnet. Zugleich sind dann  $a_c, b_c, e_c, \dots \simeq q_c$ .

$a, b_c$  werden ungleichnamig (od. antivariant);  $a, b$  *gleichnamig* (od. covariant) genannt. Diese an die Elektrizität erinnernden Namen finden ihre Berechtigung in den Transformationseigenschaften der Produkte von physischen Quaternionen.) Es ist also z. B.  $a, a^{-1}$  ein ungleichnamiges Paar, da ja  $a^{-1} \simeq a_c$ .

Da  $\omega, \omega_c$  *distributiv* sind, so ist die *Summe* (gleichnamiger) physischer Quaternionen wiederum eine physische Quaternion.

In diesen §§ werden auch als Beispiele physischer Quaternionen die Aequivalente der „Vierergeschwindigkeit“ und des „Viererstromes“ angeführt. Setzt man für den (invarianten) Tensor von  $dq$

$$Tdq = i d\tau, \dots \dots \dots (10)$$

so schreibt sich die *Geschwindigkeitsquaternion* einfach

$$Y = \frac{dq}{d\tau}; \dots \dots \dots (11)$$

zugleich ist unmittelbar nach (10)

$$TY = i. \dots \dots \dots (12)$$

$\tau$  ist Minkowski's „Eigenzeit“ proportional. Denn ist  $\mathbf{p} = d\mathbf{r}/dt$  die gewöhnliche Vektorgeschwindigkeit, so hat man

$$Y = (i + \mathbf{p}/c) (1 - p^2/c^2)^{-1/2}.$$

Die *Stromquaternion* wird

$$C = \frac{\rho}{c} \frac{dq}{dt}$$

oder  $\rho(i + \mathbf{p}/c)$ , wo  $\rho$  die Raumdichte der elektrischen Ladung bedeutet. Aus der Bildungsweise von  $Y, C$  erhellt ohne Weiteres, dass beide  $\simeq q$  sind.

Als Quaternionenersatz für Minkowski's „lor“ erscheint der aus  $\partial/\partial l$  und dem Hamilton'schen  $\nabla$  gebildete *Differentialoperator*:

$$D = \frac{\partial}{\partial l} + \nabla \dots \dots \dots (14)$$

Der conjugierte Operator ist

$$D_c = \frac{\partial}{\partial l} - \nabla \dots \dots \dots (14^a)$$

Offenbar ist  $D \simeq q, D_c \simeq q_c$ , das heisst

$$D' = QDQ, \dots \dots \dots (15)$$

u. s. w. Das vollständige  $\nabla$  ist selbstverständlich:

$$\nabla = S \nabla + V \nabla = - \operatorname{div} + \operatorname{curl}.$$

§ 4. **Produkte physischer Quaternionen.**—Produkte gleichnamiger Faktoren, wie etwa  $a b$ , transformieren sich in der unbrauchbaren Weise

$$a'b' = QaQ^2bQ^1).$$

Deshalb werden in der Folge nur *abwechselnde Produkte* (d. h. von abwechselnd ungleichnamigen Faktoren) behandelt.

Das einfachste, binäre, Produkt dieser Art

$$L = a_c b. \dots \dots \dots (16)$$

transformiert sich, wegen der *assoziativen* Eigenschaft der Quaternionenmultiplikation und wegen  $QQ_c = Q_c Q = 1$ , in

$$L' = Q_c L Q \dots \dots \dots (16')$$

Die ungleichnamigen  $a_c, b$  ziehen sich gleichsam an.

1) Die Faktoren  $a, b$  werden durch die Transformation auseinander gerissen; sie stossen sich gleichsam ab. Man könnte wohl sagen, dass solche Produkte überhaupt keine relativistischen Entitäten bilden.



Nach einem Fundamentalsatz des Hamilton'schen Calculs ist nun

$$L_c = b_c a; \dots \dots \dots (17)$$

folglich

$$L'_c = Q_c L_c Q \dots \dots \dots (17')$$

Es ist also

$$Q_c [ ] Q \dots \dots \dots (II)$$

der relativistische Transformator sowohl der Quaternion  $L$ , als auch der conjugierten  $L_c$ . Ebenso ist

$$Q [ ] Q_c \dots \dots \dots (II^a)$$

der Transformator von  $R = ab_c$  und zugleich von  $R_c$ .

Fortan wird eine jede Quaternion, die sich durch (II) oder (IIa) transformiert, eine  $L$  — resp.  $R$  — Quaternion, zuweilen auch eine linke, resp. rechte Quaternion genannt. Erstere hat den Index  $c$  an ihrem linken, letztere an ihrem rechten Faktor.

Aus dem Obigen fließen die Theoreme:

*Der Skalar einer jeden  $L$  — Quaternion und der Tensor oder Betrag ihres Vektors sind Invarianten, während sich der Vektor selbst in*

$$VL' = Q_c [VL] Q \dots \dots \dots (III)$$

*transformiert. Oder: der Tensor einer  $L$  — Quaternion und ihr Winkel sind Invarianten, während ihre Axe durch  $Q_c [ ] Q$  transformiert wird.*

Ebenso ist  $SR' = SR$  und  $VR' = Q [VR] Q_c$ , oder: *der Tensor und der Winkel einer rechten Quaternion sind invariant, während ihre Axe durch  $Q [ ] Q_c$  transformiert wird.*

*Das Produkt beliebig vieler  $L$  ist wiederum eine  $L$  — Quaternion. Das Produkt beliebig vieler  $R$  ergibt wieder eine  $R$  — Quaternion.*

Ferner ist, für ein beliebiges  $k \sim q$ :

$$kL \sim q; Rk \sim q \dots \dots \dots (IV)$$

$$Lk_c \sim q_c; k_c R \sim q_c \dots \dots \dots (IV^a)$$

Dies betrifft natürlich nur die Transformationseigenschaften und nicht die Struktur;  $kL$  u. s. w. werden, allgemein zu reden, *Biquaternionen* sein (im Hamilton'schen, nicht Clifford'schen Sinne des Wortes). Vgl. § 8.

Man ersieht hieraus, dass das *abwechselnde* Produkt beliebig vieler physischer Quaternionen *immer nur eine L—oder R—Quaternion oder aber wiederum* (wenigstens bezgl. der Transformationseigenschaften) *die ursprüngliche physische Quaternion liefert*.

Hier werden noch die folgenden für weitere Anwendungen nützlichen Bemerkungen gemacht.

Genügt  $X$  einer Gleichung  $bX = a$ , wo  $a, b \sim q$ , so hat man

$$X = b^{-1}a \sim L \quad \dots \quad (19)$$

Ebenso gilt Folgendes:

$$\text{hat man } DX = a, \text{ so ist } X \sim L, \quad \dots \quad (V)$$

d. h.  $X' = Q_c X Q$ , und

$$\text{hat man } D_c Z = a_c, \text{ so ist } Z \sim R, \quad \dots \quad (V^a)$$

d. h.  $Z' = Q Z Q_c$ . Uebrigens brauchen  $X, Z$  keine vollen Quaternionen zu sein; sie können z. B. reine Vektoren, und zwar reelle oder complexe, d. d. gewöhnliche Vektoren oder Bivektoren sein. Vgl. §5.

*Anmerkung.* Soviel in Bezug auf die abwechselnden Produkte. Was die Produkte gleichnamiger Faktoren anbelangt, werden sie aus obigem Grunde ganz ausser Acht gelassen. Hingegen wird ein besonderer Nachdruck gelegt auf die „*Abwechslung*“, als eine Art Maxime oder heuristisches Prinzip bei quaternionenmässiger Bearbeitung relativistischer Gegenstände.

§ 5. **Elektromagnetische Differentialgleichungen „für das Vacuum“.**—Die in letzter Zeit so genannten vier Gleichungen der Elektronentheorie

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \rho \mathbf{p} &= c \cdot \text{curl } \mathbf{M}; \quad \text{div } \mathbf{E} = \rho \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} &= -c \cdot \text{curl } \mathbf{E}; \quad \text{div } \mathbf{M} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \quad (20)$$

ziehen sich bei Einführung des *elektromagnetischen Bivektors*

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} - i \mathbf{E} \quad \dots \quad (21)$$

in  $\partial \mathbf{F} / \partial t + \nabla \nabla \mathbf{F} = \rho \mathbf{p} / c$ ,  $S \nabla \mathbf{F} = i \rho$  zusammen<sup>1)</sup>, und diese beiden Gleichungen vereinigen sich, nach (13), (14), ungezwungen in die *einzige Quaternionengleichung*:

$$D \mathbf{F} = C \quad \dots \quad (VI)$$

<sup>1)</sup> Vgl. L. Silberstein, Annalen der Physik, Bd. 22; 1907.



Hieraus folgt nach (V):

$$\mathbf{F}' = Q_c \mathbf{F} Q. \dots \dots \dots (VII)$$

Fortan werden Bivektoren, welche sich in dieser Weise transformieren, als *physische Bivektoren* bezeichnet. Sie können auch als Vektorteile von *L*-Quaternionen betrachtet werden.

Hierauf folgt in der Originalmitteilung ein Vergleich mit den Minkowski'schen Matrizenformen.

Um (VII) zu verifizieren, setze man *Q, Q<sub>c</sub>* nach (I) ein; es ergibt sich dann<sup>1)</sup>

$$\mathbf{F}' = (1 - \gamma) (\mathbf{F}\mathbf{u})\mathbf{u} + \gamma \mathbf{F} + i\beta\gamma \mathbf{V} \mathbf{F} \mathbf{u} \dots \dots \dots (22)$$

oder

$$\mathbf{F}' = \varepsilon - i\beta\gamma \mathbf{V} \mathbf{u} \{ \mathbf{F}, \dots \dots \dots (22^a)$$

wo  $\varepsilon$  der lineare Vektoroperator oder die Dyade

$$\varepsilon = \mathbf{u}(\mathbf{u} + \gamma \mathbf{s}(\mathbf{s}$$

(für jeden *Einheitsvektor s*  $\perp$  *u*) ist, — woraus unmittelbar die bekannten Transformationsformeln  $E'_1 = E_1, E_2 = \gamma(E_2 - \beta M_3)$  u. s. w. folgen. Es bildet also (VII) einen bequemen Ersatz für diese sechs Formeln.

Aus (VII) folgt die Invarianz des Tensors von **F**:

$$\mathbf{T} \mathbf{F}' = \mathbf{T} \mathbf{F} \dots \dots \dots (VIII)$$

oder, da **F** eine skalarlose Quaternion ist:

$$\mathbf{F}' \mathbf{F}' = \mathbf{F} \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}^2.$$

Nach (21) enthält also **TF** die beiden Minkowski'schen Invarianten:

$$M^2 - E^2 \text{ und } (\mathbf{E} \mathbf{M}) \dots \dots \dots (23)$$

Sogenannte *reine* elektromagnetische Wellen ( $E^2 = M^2, \mathbf{E} \perp \mathbf{M}$ ) lassen sich demgemäss kurz durch  $\mathbf{T} \mathbf{F} = 0$  oder durch  $\mathbf{F}^2 = 0$  charakterisieren (vgl. Ann. der Phys., Bd. 22; 1907). Eine in *S* reine Welle bleibt auch in *S'* rein.

§ 6. **Der complementäre Bivektor.**—Anstatt des obigen **F** kann man auch den *complementären elektromagnetischen Bivektor*

$$\mathbf{G} = \mathbf{M} + i \mathbf{E} \dots \dots \dots (21^a)$$

<sup>1)</sup> Hier und in allen späteren Formeln bedeutet (**AB**) das skalare, **VAB** das Vektorprodukt der Vektoren (oder auch Bivektoren) **A, B**; ihr vollständiges, Hamilton'sches Produkt ist also

$$\mathbf{AB} = S \mathbf{AB} + \mathbf{V} \mathbf{AB} = -(\mathbf{AB}) + \mathbf{V} \mathbf{AB}.$$

Deshalb wurde auch  $\nabla = -div + curl$  geschrieben.

nehmen. Alsdann lautet der Ersatz der vier Differentialgleichungen (20):

$$D_c \mathbf{G} = C_c \dots \dots \dots (VI^a)$$

Folglich ist  $\mathbf{G}$  eine (skalarlose)  $R$ -Quaternion, d. h.

$$\mathbf{G}' = Q \mathbf{G} Q_c \dots \dots \dots (VII^a)$$

$\mathbf{G}$  verdient offenbar, ebensogut wie  $\mathbf{F}$ , den Namen und die Rechte eines *physischen Bivektors*. Man kann  $\mathbf{G}$  als ein  $VR$  betrachten. (Demgemäss wird man zwischen *rechten* und *linken* physischen Bivektoren unterscheiden.)

Man beachte, dass (bisjetzt wenigstens)  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  nicht gleichzeitig benötigt werden; es genügt  $\mathbf{F}$  allein oder  $\mathbf{G}$  allein.

§ 7. **Das Quaternionenpotential.**—Der *invariante* Operator  $(TD)^2 = DD_c$  ist identisch mit dem vierdimensionalen Laplace'schen Operator  $\partial^2/\partial x^2 + \dots + \partial^2/\partial l^2$  oder, in Cauchy's Schreibweise:

$$DD_c = \square \dots \dots \dots (IX)$$

Setzt man also  $\mathbf{F} = -VD_c\Phi$  oder, einfacher, schreibt man

$$\mathbf{F} = -D_c\Phi, \dots \dots \dots (X)$$

verlangt aber zugleich, dass

$$SD_c\Phi = 0 \dots \dots \dots (XI)$$

sei, so hat man unmittelbar aus (VI):

$$\square\Phi = -C, \dots \dots \dots (XII)$$

d. h. die wohlbekannte Gleichung für das „Viererpotential“. Dass  $\Phi \sim q$ , folgt unmittelbar aus (XII), und was die Struktur anbelangt, so ergibt sich aus (X), dass  $S\Phi$  imaginär und  $V\Phi$  reell sein muss. Demnach ist  $\Phi$  eine physische Quaternion,  $\simeq q$ .

Schreibt man

$$\Phi = i\varphi + \mathbf{A}, \dots \dots \dots (24)$$

so wird nach (X):  $\mathbf{F} = V\nabla\mathbf{A} - \partial\mathbf{A}/\partial t + i\nabla\varphi$ , oder  $\mathbf{M} = \text{curl } \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/c \partial t$ , die bekannten Gleichungen, aus welchen man  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  als das gewöhnliche skalare, — resp. Vektorpotential erkennt; (XI) ist die gewöhnliche Beziehung  $\frac{\partial\varphi}{\partial t} + c \text{div } \mathbf{A} = 0$  zwischen beiden.

Zugleich schreibt sich die Continuitätsgleichung

$$SD_cC = 0 \dots \dots \dots (XIII)$$



oder auch  $SDC_e = 0$ . (Man sieht, dass  $SD_e$  ganz dem Sommerfeld'schen *Div* entspricht.)

§§ 8, 9. **Ponderomotorische Kraft.**—Da  $F \sim L$ , so folgt aus (IV)

$$P = CF \infty q, \dots \dots \dots (25)$$

d. h.  $P' = QPQ$ . Durch Entwicklung ergibt sich

$$P = P_e + iP_m, \dots \dots \dots (26)$$

$$P_e = \rho \left\{ \frac{i}{c} (\mathbf{pE}) + \mathbf{E} + \frac{1}{c} V \mathbf{pM} \right\} \equiv \frac{i}{c} (\delta \mathbf{p}) + \delta, \dots \dots (26^e)$$

$$P_m = \rho \left\{ \frac{i}{c} (\mathbf{pM}) + \mathbf{M} - \frac{1}{c} V \mathbf{pE} \right\}, \dots \dots \dots (26^m)$$

wo  $\delta$  die gewöhnliche *ponderomotorische Kraft* (pro Volumeinheit) bedeutet;  $VP_e = \delta$ ,  $SP_e = \frac{i}{c} (\delta \mathbf{p})$ .

$P_m$  ist das magnetische Analogon von  $P_e$ , dem keine solche Rolle zu kommt. Beide Bestandteile,  $P_e, P_m$ , der vollen *Biquaternion*  $P$  haben die Struktur von  $q$ .

Nun ist auch  $GC \sim q$ , und da

$$GC = -P_e + iP_m, \dots \dots \dots (27)$$

so ist ein jeder der beiden Bestandteile von  $P$  eine physische Quaternion:

$$P_e = \frac{1}{2} \{CF - GC\} \simeq q \dots \dots \dots (28)$$

$$P_m = -\frac{i}{2} \{CF + GC\} \simeq q \dots \dots \dots (28^m)$$

$P_e$  entspricht der „Viererkraft“ und wird als *Kraftquaternion* (oder kurz *Kraft*) bezeichnet.

$P_m$  braucht, aus obigem Grunde, keinen Namen. Hingegen könnte man in der vollen *dynamischen Biquaternion*  $P = CF$ , falls sich dies als nötig herausstellen sollte, das Vorbild *physischer Biquaternionen* erblicken, ebenso wie  $q, \mathbf{F}$  die Prototypen physischer Quaternionen, resp. Bivektoren waren. Man kann übrigens  $\mathbf{F}$  (durch einen invarianten, und folglich unwesentlichen, Skalar ergänzt) und  $P$  als binäres, resp. ternäres (abwechselndes) Produkt ursprünglicher physischer Quaternionen betrachten. Von diesem, genetischen, Standpunkt aus, würden

$$q, \mathbf{F}, P$$

als quaternionenartige Gebilde vom I, resp. II und III *Grade* erscheinen. [Es wird aber auf Klassifikations—und Nomenklaturfragen nicht weiter eingegangen.]

Nach (VI) hat man für die dynamische Biquaternion:

$$P = DF \cdot F \dots \dots \dots (XIV)$$

und für die *Kraftquaternion*  $P_0$ , (28):

$$2P_0 = DF \cdot F - G \cdot DF, \dots \dots \dots (XV)$$

wo die Punkte als Separatoren fungieren.

Um hieraus zu dem entsprechenden Zwang, u. s. w. zu gelangen, wird für letzteren Ausdruck die (durch das Abwechslungsprinzip nahegelegte) Form  $G[D]F$  angestrebt, wo der Operator  $D$  sowohl nach vorn wie nach hinten wirksam sein soll<sup>1)</sup>, indem dies neue Symbol durch

$$G[D]F = GD \cdot F + G \cdot DF \dots \dots \dots (29)$$

und  $GD$ , nach dem Vorbild gewöhnlicher Quaternionenprodukte, durch

$$GD = \frac{\partial G}{\partial l} - \text{curl } G - \text{div } G \dots \dots \dots (30)$$

erklärt wird. (Man beachte, dass  $DG$  gar nicht zu brauchen wäre, da ja  $G$  rechtshändig ist, und  $D_0G$  würde in (XV) ein fremdartiges Element einführen.) Es hat nun  $GD$  die merkwürdige Eigenschaft, dass, nach dem zweiten Gleichungspaare (20),

$$DF = -GD \dots \dots \dots (31)$$

ist. Folglich bekommt die *Kraft-Quaternion* die bequemere Form:

$$P_0 = -\frac{1}{2} G[D]F \dots \dots \dots (XVI)$$

Nunmehr war es leicht zu errathen, dass der Operator  $G[]F$ , auf einen gewöhnlichen *Vektor* angewandt, den entsprechenden Zwang und die mit ihm relativistisch verknüpfte Energiestromcomponente liefern würde. (Zumal der Verf. früher schon, Ann. d. Phys., Bd. 22, bemerkt hatte, dass  $G[]F$  auf einen *Skalar* angewandt, oder einfach  $GF$ , den ganzen Energiestrom und die Energiedichte ergibt.) Diese Vermutung bestätigte sich vollends, und dies war es eben, was für die endgültige Wahl der obigen Form (XVI) sprach. Nachträglich konnten

<sup>1)</sup> Der Leser lasse sich dadurch nicht abschrecken. In ähnlicher Situation sagt Oliver Heaviside einfach: „A cart may be pulled or pushed“: *Electromagnetic Theory*, Bd. II, p. 218. Uebrigens hat uns J. W. Gibbs gelehrt, lineare Vektoroperatoren (wenn auch nicht Differentialoperatoren) als *Pre-* und *Postfaktoren* zu verwenden.



dann auch diese merkwürdigen Eigenschaften des in Rede stehenden Operators aus (XVI) regelrecht „abgeleitet“ werden.

§ 10. **Eigenschaften des Operators  $G || F$ . Zwang (stress), elektromagnetischer Impuls, Energie — Strom und — Dichte.** — Der skalare Teil von (XVI) ergibt ohne Weiteres

$$(\delta p) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{GF}) + \frac{ic}{2} \operatorname{div} \mathbf{VGF} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \mathfrak{P},$$

wo

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} (\mathbf{GF}) = \frac{1}{2} (E^2 + M^2) \\ \mathfrak{P} &= -\frac{ic}{2} \mathbf{VGF} = c \mathbf{VEM} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

oder, in eine einzige Quaternionenformel zusammengezogen:

$$\frac{1}{2} \mathbf{GF} = -u + \frac{i}{c} \mathfrak{P}, \dots \dots \dots (XVII^a)$$

d. h. die Energiedichte  $u$  und den Poynting-Vektor  $\mathfrak{P}$ . Dies ist die erste Eigenschaft.

Der Vektorteil von (XVI) ergibt (bei Benützung der üblichen  $i, j, k$ ):

$$\delta = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} - \mathbf{i} \operatorname{div} \mathbf{f}_1 - \mathbf{j} \operatorname{div} \mathbf{f}_2 - \mathbf{k} \operatorname{div} \mathbf{f}_3, \quad (35), (36^a)$$

wo die *Druckvektoren*  $\mathbf{f}_1$  u. s. w., die einen (selbstconjugierten) Zwang bilden, durch  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f} \mathbf{i} = \frac{1}{2} \{(\mathbf{GF}) \mathbf{i} - \mathbf{F}(\mathbf{G} \mathbf{i}) - \mathbf{G}(\mathbf{F} \mathbf{i})\}$ , u. s. w. bestimmt sind, d. h. für irgend einen Einheitsvektor  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{f} \mathbf{n} = \frac{1}{2} (\mathbf{GF}) \mathbf{n} - \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{G} \mathbf{n}) - \frac{1}{2} \mathbf{G}(\mathbf{F} \mathbf{n})^1 \dots \dots (37)$$

oder in Dyadenform:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} (\mathbf{GF}) - \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{G} - \frac{1}{2} \mathbf{G}) \mathbf{F} \dots \dots \dots (37^a)$$

Dies ist der bekannte *Maxwell'sche Zwang*, nämlich  $\mathbf{f} = u - \mathbf{E}(\mathbf{E} - \mathbf{M}(\mathbf{M}$ . Nun kann aber (37) ohne Weiteres als der Vektorteil eines ternären Produktes, nämlich

$$\mathbf{f} \mathbf{n} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{G} \mathbf{n} \mathbf{F} \dots \dots \dots (38)$$

1)  $\mathbf{f}$  (cursiv) ist ein linearer *Vektoroperator*, der *Zwang* — Operator, welcher, auf ein beliebiges  $\mathbf{n}$  angewandt, den entsprechenden *Druckvektor*  $\mathbf{f}_n$  liefert.

geschrieben werden, und da überdies, nach (34) und (XVIIa),  $\frac{1}{2} S \mathbf{GnF} = i (\mathfrak{Pn})/c$ , so hat man für das volle Produkt:

$$\frac{1}{2} \mathbf{GnF} = \frac{i}{c} (\mathfrak{Pn}) + f \mathbf{n} \dots \dots \dots \text{(XVII}^b\text{)}$$

Dies ist die zweite Eigenschaft von  $\mathbf{G}[\ ]\mathbf{F}$ .

Beide Eigenschaften, (XVIIa, b) können übrigens in einer einzigen Gleichung wiedergegeben werden. Führt man nämlich die spezielle  $q$ -Quaternion ein:

$$k = i\sigma + \mathbf{n}, \dots \dots \dots \text{(39)}$$

wobei der Skalar  $\sigma$  reell sein soll, so hat man die für das Folgende bequeme Gleichung:

$$\frac{1}{2} \mathbf{GkF} = \frac{i}{c} \{ (\mathfrak{Pn}) - \sigma.cu \} + f \mathbf{n} - \frac{\sigma}{c} \mathfrak{P}, \dots \text{(XVII)}$$

die für beliebige Werte von  $\sigma$  und beliebige Richtungen von  $\mathbf{n}$  gilt. Da, nach der obigen Festsetzung,  $k \simeq q$ , so ist auch dieser Ausdruck eine physische Quaternion, nämlich  $\simeq q$ .

Es liefert also ein und derselbe Operator  $\mathbf{G}[\ ]\mathbf{F}$  die Kraft-Quaternion, den entsprechenden Zwang, den Energiestrom und die Energiedichte, je nach dem man den freien Platz  $[\ ]$  durch  $D$ , beziehungsweise durch einen Vektor oder Skalar ausfüllt.

[Hier folgt ein Bequemlichkeits-Vergleich des obigen Operators mit der Minkowski'schen Matrix  $S$ , im symmetrischen Falle, und dem „Weltensor“ von Sommerfeld und Laue.—Die Behandlung des Gegenstückes,  $\mathbf{F}[\ ]\mathbf{G}$ , nämlich in Anwendung auf  $k_e$  und  $D_e$ , wird dem Leser überlassen.]

§ 11. Relativistische Transformation des Zwanges u. s. w.

Bezeichnet man die rechte Seite von (XVII) mit  $Z$ , so geht  $Z$  im System  $S'$  in  $QZQ$  über. Schreibt man noch für  $k' = QkQ$

$$k' = i\sigma' + \mathbf{N}' = i\sigma' + N' \mathbf{n}',$$

wobei sich  $\mathbf{N}'$ ,  $\sigma'$  leicht durch  $\sigma$ ,  $\mathbf{n}$  ausdrücken, so hat man

$$QZQ = \frac{i\sigma'}{2} \mathbf{G}'\mathbf{F}' + \frac{1}{2} N' \mathbf{G}'\mathbf{n}'\mathbf{F}'.$$

Entwickelt man nun die linke Seite und wendet man auf die beiden Ausdrücke der rechten Seite die Gleichungen (XVIIa, b) an, die ja auch für  $S'$  gelten, so erhält man ohne Weiteres die gewünschten Transformationsformeln in der bemerkenswerten Form:



$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\gamma^2} u &= u' + \frac{2}{c^2} (\mathfrak{P}' \mathbf{v}) + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} f' \mathbf{v}) \\ \frac{1}{\gamma^2} \varepsilon \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}' + \left[ \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \mathfrak{P}') + u' + f' \right] \mathbf{v} \\ \frac{1}{\gamma^2} \varepsilon f &= f' \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{c^2} [\mathfrak{P}' + u' \mathbf{v}] (\mathbf{v} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{P}' \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{(XVIII)}$$

wo  $\varepsilon$  den (bereits in § 5 eingeführten) *symmetrischen* Vektoroperator

$$\varepsilon = \mathbf{u}(\mathbf{u} + \gamma \mathbf{s}(\mathbf{s} \dots \dots \dots)) \quad (44)$$

bedeutet ( $\mathbf{s}$  irgend ein zur Bewegungsrichtung *normaler* Einheitsvektor). Legt man etwa  $\mathbf{i}$  in die Bewegungsrichtung, so kann man auch  $\varepsilon = \mathbf{i}(\mathbf{i} + \gamma \mathbf{j}(\mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}(\mathbf{k} \dots \dots \dots))$  schreiben.

Diese drei Formeln, eine skalare, eine vektorielle und eine dyadische, bilden den vollständigen Ersatz für die  $1 + 3 + 6 = 10$  üblichen Transformationsformeln. [Vgl. L a u e's „*Relativitätsprinzip*“, (102), p. 87.]

In dem Spezialfall  $\mathfrak{P}' = 0$ , der namentlich, wie Herr L a u e (loc. cit.) gezeigt hat, für die relativistische *Dynamik* von ganz besonderer Tragweite ist, reduziert sich das obige Formelsystem (XVIII) auf:

$$\left. \begin{aligned} \gamma^{-2} u &= u' + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} f' \mathbf{v}) \\ \gamma^{-2} \varepsilon \mathfrak{P} &= u' \mathbf{v} + f' \mathbf{v} \\ \gamma^{-2} \varepsilon f &= f' \frac{1}{\varepsilon} + \frac{u'}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

Wegen  $\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v} = \mathbf{v}$  kann man auch

$$\mathfrak{P} = \gamma^2 [u' \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} f' \mathbf{v}], \text{ u. s. w.} \dots \dots \dots (45a)$$

schreiben. Uebrigens ist das Vorkommen des ohnehin einfachen Operators  $\varepsilon$  in diesen Formeln durchaus nicht künstlich, da er \*ja dem Wesen der für die ganze Relativitätstheorie fundamentalen Transformation unmittelbar entspricht.

Zum Schluss werden weitere Anwendungen des Quaternionencalculs, elektromagnetische und andere Relativitätsfragen betreffend, für künftige Mitteilungen in Aussicht gestellt.

9. Pan Sławomir Miklaszewski:

### Gleby w gubernii Kowieńskiej.

Komunikat zgłoszony dn. 4 Listopada 1911 r.

(Z Pracowni Gleboznawczej C. T. R. w Warszawie).

Notatka niniejsza ma na celu ustalenie typów gleb występujących w gub. Kowieńskiej. Jest ona rezultatem dwudziestokilkudniowych badań polnych oraz opracowań laboratoryjnych materiału pobranego podczas badań pomienionych.

Dla tem lepszego scharakteryzowania gleb w gubernii Kowieńskiej spotykanych i porównania ich z takimiż glebami Królestwa Polskiego rozważę w kilku słowach położenie topograficzne gubernii wspomnianej, jej oro-hydrografię i niektóre dane klimatyczne.

Gubernia Kowieńska ma kształt nieprawidłowego czworokąta wydłużonego z zachodu na wschód prawie od zatoki Kurońskiej do Dynaburga (a nawet pewne części powiatu Jezioroskiego ciągną się aż na wschód od Dynaburga).

Cały ten teren nie jest jednakowo wyniesiony nad poziom morza i pod tym względem cały jego obszar da się podzielić na pasy trzy. Pas wchodni leży w dorzeczu Windawy (część północna) i w dorzeczu Niemna (część południowa) i stanowi płasko-wzgórze Żmujdzkie wyniesione nad poziom morza Bałtyckiego od metrów 70 do 254. Jest to t. zw. pojezierze Żmujdzkie. Pas środkowy leży w dorzeczu rzeki Aa [Musza] (część północna) i Niemna [Dubisa, Niewiaża, Święta] (część południowa) nisko nad poziomem morza bo od 41—100 metrów. Wreszcie część wschodnia jest to dorzecze Dźwiny (część północna) oraz część dorzecza Niemna [Wilia] (część południowa) i stanowi t. zw. pojezierze litewskie wyniesione nad poziom morza od metrów 100 do 293.

Jak widać z powyższego, główny dział wodny przechodzi przez całą długość gubernii Kowieńskiej przez wszystkie trzy pasy skrajne dość wysokie i środkowy niski. Linia kolejowa Kałkuny - Libawa biegnie mniej więcej wzdłuż tego wododziału.

Średnie wyniesienie nad poziom morza wynosi około 150 metrów i pod tym względem gubernia Kowieńska bardzo przypomina Królestwo Polskie leżące średnio także mniej więcej na tym samym poziomie.



Przeciętne opady atmosferyczne są dla gubernii Kowieńskiej nieco większe od przeciętnych wyprowadzonych dla Królestwa Polskiego. Na rozkład opadów wpływa mniej bliskość lub oddalenie od morza, więcej natomiast wysokość nad poziomem morza. A więc pasy skrajne wyższe powyżej wymienione otrzymują opadów atmosferycznych więcej aniżeli pas środkowy nizki. Bardzo wązki pas leżący nad samą zatoką Kurońską otrzymuje opadów atmosferycznych rocznych przeciętnie nieco mniej od 700 *mm*; potem na wschód następuje dość szeroki pas z opadami powyżej 700 a w okolicach Telsz nawet powyżej 800 *mm*; potem idzie pas tej samej prawie szerokości z opadami powyżej 600 *mm*; pas (pow. część Rosieńskiego, Szawelski, Poniewieski i część Kowieńskiego) z opadami od 550—600 *mm* oraz najdalej na wschód wysunięty pas, mniej więcej pów. Jezioroski i Wiłkomierski, z opadami powyżej 600 *mm*.

Jeśli przeciętne roczne opady atmosferyczne w Królestwie Polskiem wynoszą 560 *mm*, to dla gubernii Kowieńskiej należy przyjąć ilość nieco większą a mianowicie 600 *mm*. Wobec niższej średniej rocznej temperatury gub. Kowieńskiej w porównaniu z Królestwem Polskiem różnica ta w skutkach jest o wiele większa.

Pod względem geologicznym gubernia Kowieńska, na tak mały obszar, przedstawia różnorodność dość znaczną. Można tam spotkać liczne wychodnie skał należących do formacji starszych a i materiał lodowcowy obfituje w gładziki ze skał pomienionych pochodzące. W granicach gubernii opisywanej występuje dewon (jako wapień lub gips), np. na brzegach rz. Muszy, koło Kupiszek i Szadowa; dyas — pod postacią t. zw. cechsztajnu nad brzegiem rz. Szwentupis; jura — w okolicach Popielan nad brzegami rz. Wenty; formacja kredowa w okolicach Rosień i pod Kownem; oligocen pod Wiłkomierzem i wreszcie utwory lodowcowe i aluwialne. Prócz obnażeń i wychodni formacji starszych, na przestrzeni gub. Kowieńskiej spotykamy często duże gniazda wapieni (działalność lodowca) narzutowych należących do formacji starszych np. górnosylurskich w okolicach Poniewieża, Szawel i Subocza. Z tych wapieni narzutowych bardzo czystych palą wapno. Wapienie dewońskie i cechsztajn spotykane w wychodniach odznaczają się czystością, o ile sądzić mogą z pobranych próbek, których rozbiory podaję poniżej:

№ №	1002	1003	1005	1007
Miejscowość	Naruny warstwa № 1	Naruny warstwa № 2	Pomusz- Raden	Sablówki (Dobiki- nia)
	%	%	%	%
CaCO <sub>2</sub> . . . . .	93,2	96,9	96,6	95,9
Części rozpuszcz. w HCl. . .	94,6	98,2	98,0	97,8
Części nierozpuszcz. w HCl. .	5,4	1,8	2,0	2,2
Ogółem . . . . .	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%

Królestwo Polskie jest pozbawione takich gniazd wapieni narzutowych, spotykają się one jedynie w granicach gub. Suwalskiej ale na o wiele mniejszą skalę. Bądź jak bądź gub. Kowieńska odznacza się wielką różnorodnością formacji i jest wielce różnorodna pod względem geologicznym.

Z punktu widzenia gleboznawczego teren pomieniony jest w stosunku do Królestwa Polskiego mało urozmaicony. Liczne formacje, tylko co wspomniane, znajdujemy jeno w odsłonięciach naturalnych, na powierzchnię one nie wychodzą lub prawie, że nie wychodzą, są natomiast przykryte utworami lodowcowymi grubości wielometrowej. To też jedyne gleby, mogące mieć dla rolnictwa wartość praktyczną, są te, które powstały z utworów formacji lodowcowej. Jest to jedyna formacja glebotwórcza w granicach gubernii opisywanej. Piasków teren powyższy ma niewiele, głównie zaś występuje glina zwałowa i daje początek glebom różnym. Jak zwykle w formacji lodowcowej utworem najbardziej rozpowszechnionym i jednolitym jest dobrze nam znana (z Królestwa Polskiego, Prus Wschodnich i Zachodnich i innych miejscowości zajętych przez utwory lodowcowe) chuda piaszczysta glina czerwona o barwie o wiele intensywniejszej aniżeli taka sama glina spotykana w granicach Królestwa Polskiego, ale o tym samym składzie mechanicznym i o tych samych własnościach. Glina ta tak samo wietrzeje i daje początek tym samym typom gleb, a że się bielucuje łatwo, więc głównie bielicom rozmaitego rodzaju.

Jest ona tego samego rodzaju zarówno tam, gdzie leży bezpośrednio na wapieniu dewońskim, np. nad brzegiem Muszy w Johaniszkielach (№ 973), jak i w miejscowościach wyniesionych



o wiele wyżej nad poziom morza, zarówno w pojezierzach litewskim i żmudzkiem, a także i w pasie nizinym (№№ 947, 948, 949; 951a, 952, 954; 957; 963; 965, 966; 968, 969; 973; 975, 976; 978, 979; 983; 985, 986; 995; 998; 1001).

Z tej chudej piaszczystej gliny czerwonej, jak wszędzie, tak i w gub. Kowieńskiej powstają cztery typy gleb: *glina czerwona*, *bielica podlaska*, *bielica pojezierska* i *bielica nadrzeczna*. Bielica podlaska leży głównie w pasie nizinym, bielica pojezierska cechuje pasy wyżej wyniesione, bielica nadrzeczna w przeciwieństwie do Królestwa Polskiego jest wyrażona słabo i mało typowa. Zjawisko to stanie się dla nas zrozumiałe, jeśli sobie przypomnimy, że utwory międzylodowcowe są słabo rozwinięte w gub. Kowieńskiej.

Prócz gliny powyżej wymienionej widzimy inną glinę lodowcową o wiele cięższą. Wietrzeje ona o wiele trudniej i bardzo słabo się bielicuje, dając w rezultacie gliny niezbyt trudne do uprawy ale cięższe i mniej przepuszczalne. W pewnych położeniach gliny te, mające nieraz barwę intensywnie czerwoną, zsycają się jak żelazo. Występuje to głównie w pojezierzach np. w Gaczanach, w Ponieumuńku i t. p. W położeniach płaskich glina ta nie zsyca się tak silnie, bo jej powierzchnia jest już spiaszczona przez wietrzenie i uchroni samą ciężką glinę od szybkiego wysychania. Pozornie *glina ciężka* zawiera części  $< 0,01$  niewiele więcej od chudej lekkiej gliny czerwonej a jednak w istocie cementuje się o wiele silniej niżby na to analiza mechaniczna szablonowo pojęta wskazywać mogła. Zwróćmy jednak uwagę na obfitość w tym utworze zarówno części żwirowych, jak i gliny koloidalnej, czyli produktów skrajnych, a natomiast na bardzo małe ilości części pyłowych pośrednich. Takie gleby cementują się zawsze bardzo silnie<sup>1)</sup>. Glina wspomniana bądź występuje na powierzchnię tworząc gleby całkowite (№№ 987, 988, 989), bądź jako warstwa — wkładka pośród utworów innych (№ 953; 956). Występuje ona na różnych poziomach i na różnych głębokościach np. w Bejnarowie (№ 1006) wydobyto ją przy kopaniu studni z głębokości 10,6 metra.

Prócz ciężkiej gliny typu opisanego mamy jeszcze dwa rodzaje utworów gliniastych. Jeden z nich jest to *il* bardzo drobny

<sup>1)</sup> Ob. Sławomir Miklaszewski: Gleba. Warszawa, r. 1909. str. 44.

łatwiejszy do uprawy od wspomnianej gliny ciężkiej pomimo, że zawiera części  $< 0,01$  przeszło 70%. Niema w nim za to części żwirowych a piaszkowych ilości bardzo nikłe — do 5% (№№ 972; 960). II ten glazów nie zawiera i jest utworem osadowym. Leży na znanej nam chudej piaszczystej glinie czerwonej (№ 973) na nim zaś spoczywa *mocna glina* typu odmiennego aniżeli wszystkie tylko co opisane. Mam wrażenie, że jest to ta sama chuda piaszczysta zwałowa glina czerwona, do której lodowiec domieszał tego ilu, pod nią leżącego. Gliny zwałowe tego rodzaju i tego składu mechanicznego wogóle nie często się spotykają.

Jeśli do gleb powyżej wymienionych dodam *piasek* typu *szczerku lekkiego* (№№ 1008, 1009, 1010), to zarazem wyczerpię wszystkie zasadnicze typy główne spotykane w granicach gubernii Kowieńskiej. Wszystkie one są pochodzenia lodowcowego i albo są bielcami albo też mają charakter mniej lub więcej bielcowaty. Typy te charakteryzują następujące próbki (ob. tablicę).

*Piasek — szczerk lekki*: Aleksandrya (pod Szawłami) №№ 1008, 1009, 1010.

*Bielica pojezierska*:

Naruny (pole doświadczalne) №№ 961, 962, 963.

Podlaś (typ lżejszy, wyżej położony) №№ 964, 965, 966.

Kontejki (Dobikinia) №№ 981, 982, 983.

*Bielica nadrzeczna*:

Kurmen<sup>1)</sup> (Kurlandya) № 958, 959, 960 (typowo równoziarnista).

Rakisзки pole doświadczalne №№ 950, 951, 952 (gruba później spiaszczona).

Bejsagoła. Stacya doświadczalna №№ 974, 975, 976 (gruba).

Opitołoki (pole Tyskuńskie) №№ 999, 1000, 1001.

*Bielica podlaska*:

Podlaś (typ niższy cięższy) №№ 967, 968, 969.

Pogurduwie (Lauda) №№ 977, 978, 979.

Klisze (Dobikinia) №№ 984, 985, 986.

Opitołoki. (Koło dworu) №№ 996, 997, 998.

Gubernia (pod Szawłami) №№ 993, 994, 995.

<sup>1)</sup> Jedyna bardzo typowa, inne nie czyste i mało typowe.



Ginkuny (pod Szawłami) №№ 990, 991, 992 (naturalnie zdrenowana).

*Glina czerwona:*

Rakisзки (Wialniakalnis) №№ 947, 948, 949.

Poniemunek №№ 952, 953, 954 (№ 953 glina ciężka).

*Glina czerwona osobliwa:*

Podbirże (№№ 955, 956, 957. Leży na gipsie, który na powierzchnię jednak nie wychodzi i do składu profilu dwumetrowego gleby nie wchodzi. Jednak glebę pomienioną drenuje. Sucha, czynna, bardzo dobra.

*Glina ciężka:*

Bejnarów (z głębokości 10,6 metra) № 1006.

Medemrode №№ 987, 988, 989.

*Ilo-glina mocna* (nazwa miejscowa „gleje“).

Johaniszkiele (Gostany) №№ 970, 971, 972, 973.

Prócz typów powyższych widziałem jeszcze liczne torfy zarówno nizinne jak i wyżynne ale ich nie badałem.

Tyle razy opisywałem już typy wyliczone, że charakteryzować ich bliżej nie będę, zwrócę jeno uwagę na ich cechy nieco odbiegające od typu przeciętnego, względnie od typu spotykanego w Królestwie Polskiem.

Cechą bardzo charakterystyczną dla glin Kowieńskich jest większa zawartość w nich grubych kawałków wapieni bardzo twardych. Szczególnie dużo takich głazików zawierają gliny lodowcowe leżące nisko nad poziomem morza. Stąd też ogólna ilość węglanu wapniowego w tych glinach jest znaczniejsza aniżeli w glinach Królestwa Polskiego, które głazików wapiennych zazwyczaj nie zawierają lub też bardzo małe ich ilości. O ile wskazują ilości węglanu wapnia podane w załączonej tablicy ten ostatni nie jest tak głęboko wyługowany, jak w takich samych typach gleb Królestwa.

A jednak wniosek wyprowadzony z danych powyższych o większej wapienności gleb Kowieńskich byłby fałszywy. Gleby te zawierają dość znaczne ilości węglanu wapniowego (ob. tablicę), ale on jest nieczynny i wobec tego ogół gleb Kowieńskich jest to środowisko kwaśne i mało czynne. Cechą charakterystyczną wszystkich tych gleb jest bardzo słabo wykształcone podglebie. Tu się dopiero dokładnie rozumie dlaczego w wielu krajach niema prostopu wyrażenia odpowiedniego na podglebie albo też wyraz

podglebie używa się w znaczeniu podłoża. Otóż gleby kowieńskie są tego podglebia prawie że pozbawione. Gleba leży prawie bezpośrednio na podłożu. Oczywiście jest tam pewne przejście między glebą i podglebiem w miejscu zetknięcia ale trudną jest rzeczą wynaleźć w tej warstwie czyste podglebie bez żadnej domieszki gleby lub podłoża. Dowodzi to małej czynności gleb Kowieńskich i słabego ich zwietrzenia wgłęb. Na surowość gleb pomienionych wskazują zarazem spostrzeżenia praktyków i ich doświadczenia nawozowe. Łubin po przyoraniu może czasem leżeć 15 miesięcy bez żadnych widocznych śladów rozkładu, nawóz głęboko przyorany wyoruje się nierozłożony często po kilku latach a wskutek małego rozkładu nawozy okopowe na oborniku dają często plon o wiele gorszy aniżeli na nawozach fosforowych i potasowych, których głównie glebom tym tak jak i glebom Królestwa brakuje. Jednak w Królestwie obornik działa lepiej na okopowe, bo tam on się łatwiej rozkłada wobec większej czynności gleb. Jednym słowem, jako środowisko, gleby Kowieńskie są mało czynne. Przyczyny tej nieczynności leżą: 1<sup>o</sup> w klimacie, 2<sup>o</sup> w budowie gleb; 3<sup>o</sup> w położeniu gleb, 4<sup>o</sup> w sposobie ich uprawy.

Niektóre dane klimatyczne zmienić się nie dadzą, a więc przedewszystkiem średnia roczna temperatura niższa nieco od przeciętnej dla Królestwa Polskiego. Oczywiście okres wegetacyjny wobec niższej temperatury jest krótszy a więc i krótsze oddziaływanie biosfery na litosferę. Ale nie jest to przyczyna jedyna zimności gleb Kowieńskich. W tym samym kierunku działają i opady atmosferyczne nieco większe, aniżeli w Królestwie Polskiem i trudniej parujące wobec niższej temperatury. Gleby ogrzewają się tem trudniej im więcej wody zawierają. Wszystko to skraca okres wegetacyjny, który jest skrócony o wiele więcej aniżeli tego sam klimat wymaga. Najwięcej szkody w tym względzie robi budowa gleb Kowieńskich, a mianowicie brak w nich dobrze wykształconego podglebia. Woda łatwo krąży w warstwie powierzchniowej gleb Kowieńskich, bowiem warstwa ta jest naogół dość lekka. Ale to swobodne krążenie odbywa się tylko w warstewce bardzo płytkiej. Już w podłożu woda krąży o wiele trudniej i inaczej. Niema tu żadnego normalnego przejścia tylko stykają się z sobą dwa środowiska o różnych sposobach krążenia wody. Wobec tego woda ta, czemu sprzyja naogół płaskie i równe położenie gleb Kowieńskich, stagnuje w warstwie po-



wierzchownej, słabo przesiąka wgląd i między glebą a podłożem wytwarza warstwę podglebia cięższą (ze względu na budowę mechaniczną) od podłoża, bo wzbogaconą w części gliniaste, częściej żelaziste łatwo wypłukane z gleby (ob. № 948; № 956; № 978 i t. p.). Taka warstewka żelazista trudno przepuszcza wodę i nadaje cechę nieprzepuszczalności tym glebom w zasadzie jako typy przepuszczalnym. Ponieważ warstwa ta leży płytko, więc też płytko wietrzeje gleba i płytko jeno przesiąka woda a gleba się trudno przewietrza. Wobec tego gleby Kowieńskie, przemarznięte przez zimę, długo na wiosnę są środowiskiem zimnem, bo gleba wobec jej nieprzepuszczalności (ale nie koniecznej) prędko ogrzać się nie może. Najłatwiej ogrzewa glebę ciepły deszcz głęboko przenikający. Wobec płytkości gleby i braku podglebia przesiąkanie to jest bardzo małe w podłożu i to jest główna przyczyna, dla której gleby kowieńskie są zimne i ich okres wegetacyjny jest krótki. Wytworzenie podglebia odrazu gleby te ociepli. Można te gleby zmienić jako środowisko przez drenowanie i pogłębianie uprawy, która w Kowieńskim jest prawie dwa razy płytsza aniżeli w Królestwie Polskiem. Następnie gleby te należy wapnować, pomimo ich pozornej jakiej takiej wapienności, aby je zrobić środowiskiem mniej kwaśnem. O ile gleby te staną się czynniejsze, to ilości węgla wapnia silnie się w nich zmniejszą, a jednak będą one wtedy mniej kwaśnem środowiskiem. Że tak jest, świadczy w tem jedna z gleb kowieńskich, która znajduje się w tych samych co inne warunkach klimatycznych i oro-hydrograficznych a jednak jest o wiele cieplejsza i czynniejsza. Występuje ona w okolicy Birz i jest uważana (niesłusznie) za glebę gipsową. Nie jest to rędzina gipsowa na podobieństwo spotykanych w Królestwie i nie powstała ze zwiertzenia gipsu. Ona tylko leży na gipsie, który w niektórych miejscach znajduje się pod nią na głębokości kilku sążni. Jest to glina lodowcowa zbliżona do gliny czerwonej piaszczystej i gipsu nie zawiera prócz bardzo rzadko spotykanych kawałków gipsu, jako glazów narzutowych.

Gleba zawiera gipsu —  $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  — 0,041% ( $\text{SO}_3$  — 0,019%); podglebie —  $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  — 0,034% ( $\text{SO}_3$  — 0,016%); podłoże —  $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$  — 0,082% ( $\text{SO}_3$  — 0,038%). Oczywiście nie gips nadaje tej glebie przepuszczalność i czynność i nie dla gipsu jest ona ciepła, a właściwie powodem tego wszystkiego jest gips ale nie ten w glebie zawarty, tylko ten, który leży głęboko pod gle-

bą. On reguluje ruchy i sposób krążenia wody i on nadaje jej cechy gleby cieplej z dłuższym okresem wegetacji i jak gdyby zmienia klimat, któremu rolnicy kowieńscy małowczynność gleb swoich przypisują. Świadczy to o potrzebie drenowania, które może klimat kowieński skutecznie „zdrenować“. Jest to sprawa bardzo doniosła teoretycznie, wskazuje bowiem, jak często mylnie pewnemu czynnikowi przypisujemy funkcje przezeń niespełniane. Tylko zbadanie rozmaitych typów gleb i dokładne zorientowanie się w sposobie wytwarzania środowiska przez wszystkie czynniki glebotwórcze da nam możliwość należytego zapoznania się z tem, czem jest gleba. W tym kierunku dąży gleboznawstwo dzisiejsze i tylko tak pojęte da nam teoretyczne podstawy badań a następnie wyciągnię i wnioski praktyczne.

Gleba w okolicach Birż ma podłoże bardzo przepuszczalne. W polach jest dużo zakłęśnień, kotlin i zapadlisk owalnych, w których jednak woda nigdy nie stoi, pomimo, że skład mechaniczny tej gliny nie różni się od składu innych glin czerwonych, na których woda stałaby w tych samych warunkach. Owe zapadliska przypominają spotykane w Królestwie Polskim w rędzinach gipsowych. I tu i tam przyczyny są te same. Wypłukanie gipsu, wytworzenie groty podziemnej, na której warstwy wyżej leżące utrzymać się nie mogą. Tylko warstwy zapadające się są pod Birżami pochodzenia lodowcowego, a więc nie są rędzinami gipsowymi tak jak rędziny gipsowe Królestwa.

Po za temi cechami wszystkie inne cechy bielic kowieńskich są te same co takich samych typów w Królestwie Polskiem. Od lat czterech stale notuję barwy gleb, a właściwie nie tyle barwy ile ich ton zimny czy ciepły, który rzuca nam dużo światła na procesy fizyczne, chemiczne i biologiczne w glebie zachodzące. Wobec wielkiej różnaitości barw i tonów w glebach Królestwa Polskiego, dawno myślałem o tem, aby wynaleźć sposób ścisłego wyrażania barw. Wyrazy służące do oznaczania barw są do tego celu więcej niż niedostateczne. Ileż bowiem odcieni mamy choćby w barwach czerwonej i żółtej występujących tak często w glebach, a i innych barw a raczej tonów i odcieni. Obecnie po raz pierwszy zastosowałem do oznaczania barwy gleb metody o wiele ściślej-szej, chociaż jeszcze w warunkach niezupełnie mię zadowalających. Mianowicie posługuję się skalą barw wydaną dla malarzy przez firmę „Arcus“ (wyrabia ona farby malarskie). Każda z barw



ma swój numer i specjalną nazwę malarską. Chcąc oznaczyć barwę danej gleby, uskuteczniam to bezpośrednio przed rozpoczęciem gotowania gleby jako przygotowania do analizy mechanicznej. 50 gramów ziemi wysypuję do parownicy porcelanowej, zalewam wodą, rozmaćcam i barwę tej rozmaćconej gleby porównywaną ze skalą barw firmy „Arcus“. Numer najpodobniejszej barwy notuję w tablicy pod glebą badaną. *NB.* Gleby suchej badać na barwę nie można, o czym każdy, kto tej metody spróbuje, wnet sam się przekona. Barwy gleby mokrej są bardziej charakterystyczne i intensywne a zarazem łatwiejsze do oznaczenia. Po gotowaniu, barwy gleby określać nie można, bo gleby odtlenione mają po gotowaniu barwę zupełnie inną. Dokładność zależy od skali barw. Skala firmy „Arcus“ ma zamało tonów, aby wszystkie różnice w glebach dostatecznie wyrazić. Bądź jak bądź jest to w porównaniu ze sposobami dawnymi ogromny krok naprzód. W granicach skali dokładność oznaczenia może być bardzo znaczna, oczywiście pod warunkiem, że badacz dobrze barwy i odcienie odróżniać umie i nie cierpi na daltonizm choćby częściowy. Umyslnie dla kontroli dałem kiedyś jednemu z kolegów moich do określenia barwy gleb dawniej już przezemnie oznaczonych, a i sam siebie po pewnym czasie kontrolowałem w ten sam sposób. Jak dotąd wszystkie określenia barwy i jej numery były zawsze jedne i te same, wobec czego metodę uważam za wystarczającą dokładną.

O ile w danym razie rozszerza się nasze pojęcie o barwie gleby, sądzić można chociażby z ilości barw wyodrębnionych w tak nielicznych typach gleb kowieńskich. Na pięćdziesiąt trzy próbki gleb przypada aż 25 barw, których nazwy podane kolejno według numerów brzmią w skali barw firmy „Arcus“, jak niżej. (Ob. №№ barw w tablicy).

- 1) № 4. Ocre jaune 1.
- 2) № 5. Ocre jaune 2.
- 3) № 6. Ocre d'or.
- 4) № 7. Ocre foncée.
- 5) № 8. Ocre de rue.
- 6) № 9. Terre de Sienne naturelle.
- 7) № 34. Laque jaune foncée.
- 8) № 64. Rouge indien clair.
- 9) № 67. Rouge de Mars.

- 10) № 89. Brun Van Dyck.
- 11) № 90. Brun de Mars.
- 12) № 92. Brun de Prusse.
- 13) № 93. Brun de Caledonie.
- 14) № 94. Brun de bitume Syr.
- 15) № 95. Momie d'Egypte verte.
- 16) № 96. Terre d'ombre naturelle.
- 17) № 97. Terre d'ombre br.
- 18) № 99. Terre verte brulée.
- 19) № 100. Terre de Cologne.
- 20) № 101. Terre de Cassel.
- 21) № 103. Ocre foncée.
- 22) № 104. Stil de grain brun.
- 23) № 106. Sépia.
- 24) № 107. Laque brune.
- 25) № 165. Noir d'os.

Teraz badam wszystkie gleby w sposób powyższy. Zebrany materiał poparty doświadczeniami da nam zapewne możność po tych cechach zewnętrznych w sposób szybki i doraźny sądzić o procesach odbywających się w glebach. Na razie muszę się ograniczyć na podaniu tego materiału bez wniosków.

Pobrałem też w wyjąłowane próbówki próbki gleb w celu dokonania badań bakteryologicznych. Ogłoszę je dopiero po zgromadzeniu liczniejszego materiału danej kwestyi dotyczącego.

Wobec zamierzonych dalszych badań gleb gub. Kowieńskiej kończę notatkę niniejszą, obiecując sobie opisać je dokładniej już na podstawie większego materiału.

W zakończeniu niech mi wolno będzie spełnić miły obowiązek złożenia serdecznego i uprzejmego podziękowania wszystkim, którzy swą cenną pomocą badania moje ułatwili.



M-r Sławomir Miklaszewski:

## Les types des sols dans le gouvernement de Kowno.

Communication annoncée 4. XI. 1911.

(Du Laboratoire Pédologique de la Société Agricole Centrale du Royaume de Pologne).

Cette note préliminaire a pour but établir les types des sols dans le gouvernement de Kowno. On y trouve les types bien connus et étudiés par l'auteur dans le Royaume de Pologne où ils sont beaucoup plus nombreux. J'ai trouvé dans le gouvernement nommé:

*Le sable* dit „szczerk lekki“ — №№ 1008, 1009, 1010 (voir la table).

*La „bielica“ des pentes* — №№ 961, 962, 963, 964, 965, 966; 981, 982, 983.

*La „bielica“ des plateaux* — №№ 958, 959, 960; 950, 951, 952; 974, 975, 976; 999, 1000, 1001.

*La „bielica“ de Podlachie* — №№ 977, 978, 979; 984, 985, 986; 996, 997, 998; 993, 994, 995; 990, 991, 992.

*L'argile rouge* — №№ 947; 948, 949; 952, 953, 954.

*L'argile rouge sur le gypse* — №№ 955, 956, 957.

*L'argile forte* — №№ 1006; 987, 988, 989.

*L'argilo-glaise* — №№ 990, 971, 972, 973.

J'ai employé ici pour la première fois une méthode nouvelle pour désigner la couleur des tous les sols décrits, à l'aide d'une table aux couleurs publiée à l'usage des peintres par la maison „Arcus“. On compare le sol bien mouillé avant de le mettre dans l'appareil pour l'analyse mécanique avec des couleurs peintes sur cette table et on note le numero correspondant. Cette méthode est bien simple et tout à fait pratique.

J'ai distingué 25 couleurs différentes (voir page 557—558) sur 53 échantillons. Les couleurs des sols dépendent de l'ensemble des procès sus chimiques et physiques, comme nous le prouveront probablement les recherches ultérieures.

