Гришинъ Очеркъ теоріи соединеній

47

ОЧЕРКЪ
ТЕОРІИ СОЕДИНЕНІЙ

(ВЪ ОБЪЕМѢ ПРОГРАММЫ РЕАЛЬНЫХЪ УЧИЛИЩЪ).

СОСТАВИЛЪ

Ѳ. Н. Гришинъ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія М. М. Стасюлевича, В. О. 2 л. 7.
1875

ТИПОГРАФІЯ
М. СТАСЮЛЕВИЧА
В. О. 2 Л. 7
(161)

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 30-го іюля 1875 г.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ программу дополнительнаго класса реальныхъ училищъ входитъ ученіе о соединеніяхъ съ повтореніями. Насколько намъ извѣстно, эту статью, на русскомъ языкѣ, можно найти только въ *Начальныхъ основаніяхъ алгебры*, Н. Т. Щеголева (2-е изд. Спб. 1867), и притомъ въ изложеніи, хотя достаточно подробномъ, но, тѣмъ не менѣе, недоступномъ для учениковъ реальныхъ училищъ: почтенный авторъ упомянутаго сочиненія, придерживаясь исключительно синтетическаго метода, ссылается, при выводѣ формулы сочетаній съ повтореніями (combinaisons à répétion), на *суммованіе рядовъ фигурныхъ чиселъ*, не вошедшее въ программы среднихъ учебныхъ заведеній министерства народнаго просвѣщенія. Въ превосходномъ учебникѣ профессора I. И. Сомова (*Начальная алгебра.* Спб. 1875), наиболѣе распространенномъ изъ руководствъ по алгебрѣ, помѣщена краткая замѣтка объ одномъ только родѣ соединеній съ повтореніями — *перестановкахъ*. Вотъ причина, позволяющая надѣяться, что нашъ *Очеркъ тео-*

ріи соединеній, составленной въ объемѣ программы реальныхъ училищъ, не окажется излишнимъ въ учебной русской литературѣ. Опытъ и бо́льшая или ме́ньшая степень развитія учащихся укажутъ гг. преподавателямъ математики что́ и какъ слѣдуетъ взять изъ предлагаемой брошюры, въ которой крупнымъ шрифтомъ отмѣченъ матеріалъ, представляющій, по нашему личному убѣжденію, минимумъ знаній, обязательныхъ для учениковъ реальныхъ училищъ.

Ф. Гришинъ.

§ 1. Нерѣдко встрѣчается надобность разставлять различные предметы рядомъ, одинъ возлѣ другого, и притомъ подъ извѣстными опредѣленными условіями. Напр., положимъ, требуется перечислить *всѣ* четырехзначныя цѣлыя числа, которыя могутъ быть написаны посредствомъ цифръ 1, 2, 3 и 4; или,— еще примѣръ,—составить *всѣ* различныя произведенія изъ множителей 1, 2, 3 и 4, взятыхъ по два. Принято называть данные для подобныхъ операцій предметы *элементами* и означать ихъ, ради наглядности и техническихъ удобствъ, буквами латинскаго алфавита или цифрами, не придавая, впрочемъ, ни тѣмъ, ни другимъ значенія величинъ или чиселъ. Отдѣльныя группы элементовъ называютъ вообще, въ узкомъ смыслѣ, *соединеніями*. Такъ группы

abcd, acbd, abd, bcd, ad, dc

суть отдѣльныя и различныя *формы* соединеній элементовъ a, b, c, d, взятыхъ по 4, по 3 и по 2. Изслѣдованіе законовъ, по которымъ составляются такія формы, подъ различными условіями, и опредѣленіе числа соединеній извѣстнаго вида составляетъ предметъ *ученія о соединеніяхъ*, или такъ-называемую *синтактику*.

Соединенія раздѣляютъ на классы—*первый*, *второй*, *третій*,... *n*-ый, смотря по числу 1, 2, 3,...n входящихъ въ отдѣльныя формы элементовъ. Соединенія 1-го класса, состоящія изъ одного элемента, иногда называютъ *уніонами*, 2-го класса — *биніонами*, 3-го — *терніонами*, 4-го — *кватерніонами*, и т. д.

Соединенія могутъ быть *безъ повтореній*, если въ отдѣльныхъ формахъ этихъ соединеній всякій элементъ встрѣчается не болѣе одного раза; въ противномъ случаѣ, они называются *соединеніями съ повтореніемъ*. Такъ

acf, abcdf и 1325, 135

суть соединенія *безъ* повтореній; а

bbc, aabccc и 1335, 1353

—соединенія *съ* повтореніями.

Смотря по способу образованія, различаютъ три главныхъ вида соединеній: *перестановки, размѣщенія* и *сочетанія* *).

Что касается способовъ составленія отдѣльныхъ формъ соединеній какого-либо рода, замѣтимъ пока предварительно слѣдующее:

При совершеніи всякаго рода комбинаторскихъ операцій, необходимо употреблять такіе пріемы, которые не оставляютъ сомнѣнія, что, при сведеніи счета соединеній, въ послѣднія не вкрались ни повторенія однѣхъ и тѣхъ же формъ, ни пропуски: является необходимость закона образованія отдѣльныхъ формъ соединеній. При этомъ, очевидно, необходимо и достаточно рѣшить только два вопроса: какую изъ формъ ставить первой и какимъ образомъ составить всякую иную форму изъ непосредственно ей предшествующей?

---

*) Въ иностранныхъ литературахъ издавна и прочно установились научные термины. Такъ, во французской литературѣ разъ-навсегда удержаны термины *permutations* (перестановки), *arrangements* (размѣщенія) и *combinaisons* (сочетанія). Къ сожалѣнію, въ русской литературѣ, въ этомъ отношеніи, господствуетъ полнѣйшій произволъ. Въ нашемъ очеркѣ удержана терминологія академика І. И. Сомова (см. его „Нач. алгебра“. Спб. 1875).

A. Перестановки.

§ 2. Если изъ m данныхъ элементовъ составляются такія соединенія, которыя различаются другъ отъ друга только порядкомъ элементовъ, то такая операція называется *перестановленіемъ*, а отдѣльныя группы соединеній — *формами* перестановленія, или, короче, *перестановками*. Послѣднія называются еще *перестановками безъ повтореній*, когда всякій элементъ встрѣчается въ отдѣльныхъ формахъ не болѣе одного раза. *Число* такихъ перестановокъ условимся означать символомъ P_m. Если же въ перестановкахъ нѣкоторые элементы повторяются, такъ, наприм., элементъ a повторяется α разъ, β разъ элементъ b и γ разъ c, подъ условіемъ $\alpha+\beta+\gamma=m$, то соединенія такого вида называютъ *перестановками съ повтореніемъ*, и для означенія числа ихъ удержимъ знакъ $PP_m\,(a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma)$.

Перестановки безъ повтореній.

§ 3. Начнемъ съ опредѣленія *числа* перестановокъ изъ m различныхъ элементовъ — P_m. Представимъ себѣ, что изъ $(m-1)$ элементовъ, напр. b, c, d,... i, k, l, уже сдѣланы *всѣ* перестановки, въ числѣ, пока намъ неизвѣстномъ, P_{m-1}. Выдѣлимъ мысленно какую-либо одну изъ формъ этихъ перестановокъ. Нѣкоторый, вновь поступающій элементъ, напр., a, можетъ быть поставленъ въ ней или на первомъ мѣстѣ, или на второмъ (между первымъ и вторымъ элементами), или на третьемъ, и т. д., образуя всякій разъ *новую* перестановку уже изъ m элементовъ; а такъ какъ всѣхъ мѣстъ въ избранной формѣ m, то отъ нея одной можетъ произойти m различныхъ перестановокъ съ m элементами въ каждой. Поэтому очевидно, что, если тотъ же пріемъ приложить ко всякой другой изъ остальныхъ формъ числа P_{m-1}, всѣхъ возможныхъ перестановокъ изъ m элементовъ a, b, c, d,... i, k, l получится

$$P_m = m.\ P_{m-1}.$$

Эта основная въ нашемъ разсужденіи формула, въ которой m есть число произвольное, влечетъ за собой равенства

$$P_{m-1} = (m-1)\ P_{m-2},$$
$$P_{m-2} = (m-2)\ P_{m-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_3 = 3P_2$$
$$P_2 = 2P_1,$$

къ которымъ присоединимъ еще тожество

$$P_1 = 1.$$

Перемноживъ эти равенства, включая и основное, получимъ, по сокращеніи общихъ множителей, окончательную формулу для *перестановокъ безъ повтореній*

(1) $$P_m = 1.2.3...(m-2)(m-1)m.$$

Что касается образованія перестановокъ такого рода на самомъ дѣлѣ, то условимся, прежде всего, считать алфавитный порядокъ элементовъ (если это будутъ буквы) за восходящій, придавая названіе *высшаго* всякому элементу, относительно своихъ предшествующихъ. Если элементами будутъ избраны цифры, то за восходящій порядокъ примемъ обыкновенный — по возрастающему значенію цифръ. Затѣмъ, въ отвѣтъ на поставленные въ концѣ § 1 вопросы, поступаемъ такъ:

Пишемъ всѣ данные элементы одинъ возлѣ другого въ восходящемъ порядкѣ. Это и будетъ первою изъ формъ перестановокъ. Для перехода къ какой-либо формѣ отъ непосредственно ей предшествующей, отступаемъ въ этой послѣдней, справа на лѣво, до того элемента, который могъ бы быть замѣненъ ближайшимъ къ нему высшимъ, но не встрѣчающимся съ лѣвой отъ измѣняемаго элемента стороны (иначе, произошло бы повторенiе элемента въ этой формѣ). Сдѣлавъ указанную замѣну одного элемента другимъ, слѣва отъ послѣдняго удерживаемъ всѣ элементы въ томъ видѣ, какъ они находятся въ формѣ, отъ которой исходимъ, а справа приписываемъ остальные элементы въ восходящемъ порядкѣ. Понятно, что, при такомъ способѣ образованiя, въ послѣдней формѣ элементы явятся непремѣнно въ обратномъ порядкѣ сравнительно съ первой формой. Такъ, перестановки элементовъ a, b, c, d будутъ:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba,

въ числѣ $24 = P_4 = 1.2.3.4$. Вглядываясь въ эту таблицу, замѣчаемъ: первыя двѣ формы суть результаты перестановокъ элементовъ c и d (поэтому такихъ формъ только двѣ (1.2)); первыя шесть формъ, включая и упомянутыя, суть результаты перестановокъ изъ элементовъ b, c, d (такихъ только и могло быть 6 (1.2.3)); затѣмъ, a замѣнился элементомъ b, при всѣхъ отдѣльныхъ формахъ перестановокъ изъ элементовъ a, c, d; слѣдующiя 6 формъ начинаются элементомъ c, при перестановкахъ элементовъ a, b, d, и такъ далѣе.

Примѣры. 1. Если всѣ формы перестановокъ изъ цифръ 3, 5, 7 и 8 написать одну подъ другой, по указанной методѣ, и сложить, то какая сумма получится во всякомъ вертикальномъ столбцѣ?

Отв. $6.23 = 138$.

2. Въ какомъ видѣ представится 400-я перестановка изъ элементовъ 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Рѣшеніе. Всѣхъ перестановокъ должно получиться 1.2.3.4.5.6 = 720. Изъ нихъ первыя 120 (= 1.2.3.4.5) начинаются 1-цей, слѣдующія 120—двойкой, еще 120—тройкой; слѣдовательно, 361-я перестановка и слѣдующія за ней 120 начнутся цифрой 4. Искомая перестановка есть 40-вая изъ послѣдней группы. Поэтому, поставивъ 4 первымъ элементомъ, ищемъ перестановки изъ 1, 2, 3, 5 и 6. Изъ этихъ послѣднихъ, первыя 24 (=1.2.3.4) перестановки начнутся 1-цей, слѣдовательно, 25-я начнется цифрой 2. Поэтому, ставимъ около упомянутой 4 элементъ 2 и составляемъ перестановки изъ остальныхъ 1, 3, 5 и 6. Первыя шесть (1.2.3) формъ начнутся 1-цей, слѣдующія за ними шесть—3; затѣмъ (360 + 24 + 12 + 1)-я форма, т.-е. 397-я, будетъ 425136, 398-я—425163, 399-я—425316 и, наконецъ, искомая 425361.

Перестановки съ повтореніями.

§ 4. Формула (1) выведена въ предположеніи, что въ отдѣльныхъ формахъ перестановокъ *не* повторяется ни одинъ элементъ. Не будь этого условія, она, конечно, потерпитъ измѣненіе, изслѣдованіемъ котораго мы и займемся. Положимъ, что требуется составить перестановки *m*-аго класса изъ (m—1) элементовъ a, c, d,... i, k, l, съ условіемъ, чтобы *a* повторялся *два* раза. Понятно, что этой цѣли легко достигнуть, взявъ *всѣ* перестановки безъ повтореній изъ *m* элементовъ a, *b*, c,... i, k, l и замѣнивъ *b* въ каждой формѣ элементомъ *a*. Но тогда всѣ тѣ пары формъ, которыя различаются единственно мѣстами элементовъ a и *b*, напр. формы

cd**ab**....kl и cd**ba**....kl,

acd**b**....kl и **b**cd**a**....kl, и т. под.

сдѣлаются тожественны, и, слѣдовательно, число различныхъ формъ уменьшится, сравнительно съ P_m, вдвое (1.2), т.-е.

$$PP_m(a^2cd...kl) = \frac{1.2.3.4...(m-1)m}{1.2} = \frac{P_m}{P_2}.$$

Взявъ опять перестановки *безъ* повтореній изъ тѣхъ же *m* элементовъ, и замѣнивъ *b* и *c* въ нихъ элементомъ *a*, мы получимъ *m*-ый классъ перестановокъ изъ (m—2) элементовъ a, d, e,... i, k, l, *съ повтореніемъ a трижды* въ каждой формѣ. Но тогда отъ каждой изъ перестановокъ такихъ, какъ **a**d**bc**...kl, d**abc**...kl и т. под., получится по 6 одинакихъ формъ вида **a**d**aa**...kl, d**aaa**...kl и т. под. Въ самомъ дѣлѣ, различныя формы перестановокъ

ad**bc**...kl, **a**d**cb**...kl, **b**d**ac**...kl, **b**d**ca**...kl, **c**d**ab**...kl и **c**d**ba**..kl

(ихъ только и можетъ быть 6=1.2.3), при $b = c = a$, обратятся въ тожества вида adaa...kl; шесть формъ

d**abc**...kl, d**acb**...kl, d**bac**...kl, d**bca**...kl, d**cab**...kl, и d**cba**..kl

сдѣлаются, при томъ же условіи, тоже одинаковы, и т. д. Иными словами, перестановки *безъ* повтореній изъ *m* элементовъ a, b, c... k, l, отъ замѣны въ нихъ *b* и *c* элементомъ *a*, сдѣлаются перестановками *съ повтореніемъ a* трижды; но число послѣднихъ будетъ менѣе P_m въ 1.2.3 разъ, т.-е.

$$PP_m(a^3dc...kl) = \frac{1.2.3...(m-1)m}{1.2.3} = \frac{P_m}{P_3}.$$

Такимъ образомъ убѣждаемся, что, если въ перестановкахъ *безъ* повтореній изъ элементовъ a, b, c,... k, l замѣнить $(\alpha - 1)$ элементовъ—b, c, d... элементомъ *a*, получится *m*-ый классъ *перестановокъ съ повтореніемъ* одного элемента (именно *a*) α разъ, каковыхъ будетъ въ $1.2.3...\alpha$ разъ менѣе числа P_m, т.-е.

$$PP_m(a^\alpha...ikl)=\frac{1.2.3...(m-1)m}{1.2.3...(\alpha-1)\alpha}=(\alpha+1)(\alpha+2)...(m-1)m$$

$$=\frac{P_m}{P_\alpha}.$$

Если бы, и въ этихъ послѣднихъ перестановкахъ съ повтореніемъ a, замѣнить еще β какихъ-либо иныхъ элементовъ, напр., элементомъ b, то получатся перестановки m-аго класса съ повтореніемъ α разъ элемента a и β разъ b; но число таковыхъ будетъ меньше найденнаго въ $1.2.3...(\beta-1)\beta$ разъ, т.-е.

$$PP_m(a^\alpha b^\beta...ikl)=\frac{1.2.3.4....(m-1)m}{1.2.3...(\alpha-1)\alpha.1.2.3...(\beta-1)\beta}=\frac{P_m}{P_\alpha P_\beta}.$$

Отсюда понятно, что, если дано m элементовъ, между которыми α равныхъ a, β равныхъ b, γ равныхъ c, число всѣхъ перестановокъ *съ повтореніемъ* a, b и c будетъ

(2) $$PP_m(a^\alpha b^\beta c^\gamma...kl)$$

$$=\frac{1.2.3.4....(m-1)m}{1.2.3...(\alpha-1)\alpha.1.2.3...(\beta-1)\beta.1.2.3...(\gamma-1)\gamma}=\frac{P_m}{P_\alpha.P_\beta.P_\gamma}.$$

Такъ, перестановки 5-го кл. изъ элементовъ a, b, c, *съ* повтореніемъ a дважды и b дважды, составленныя по методѣ, указанной въ предыдущемъ §, будутъ:

aabbc	acbab	bbcaa
aabcb	acbba	bcaab
aacbb	baabc	bcaba
ababc	baacb	bcbaa
abacb	babac	caabb
abbac	babca	cabab
abbca	bacab	cabba
abcab	bacba	cbaab
abcba	bbaac	cbaba
acabb	bbaca	cbbaa,

$$\text{въ числѣ } PP_5\,(a^2b^2c) = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2} = 30\text{-ти}.$$

Замѣтимъ, что въ этой таблицѣ по 12-ти формъ, начинающихся элементами a и b, ибо $PP_4\,(ab^2c) = 12$; формъ же, начинающихся элементомъ c, только 6, потому что $PP_4(a^2b^2) = 6$.

Примѣры. 1. Цифрами 3 и 5, изъ которыхъ первая повторяется 2 раза, а вторая 3 раза, можно написать только 10 пятизначныхъ чиселъ $\left[PP_5\,(3^2 5^3) = \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2.3}\right]$:

33555	53535
35355	53553
35535	55335
35553	55353
53355	и 55533

2. Сколько существуетъ шестизначныхъ цѣлыхъ чиселъ, въ которыхъ цифра 4 повторяется дважды, 9—трижды и 5 одинъ разъ?—Отвѣтъ 60.

3. Сколько можетъ быть *различныхъ* сдачъ (игръ) въ пикетной игрѣ?

Рѣшеніе. Извѣстно, что въ пикетѣ, изъ 32 картъ, дается каждому изъ двухъ игроковъ по 12-ти картъ; остальныя 8 картъ откладываются въ двѣ прикупки: 3 карты для сдающаго и 5—для его противника. Вся колода (изъ 32 картъ) допускаетъ столько различныхъ перетасовокъ, сколько можно сдѣлать перестановокъ изъ 32 элементовъ; но не всякая перестановка даетъ новую игру, потому что въ пикетѣ карты распадаются на 4 группы, частныя перестановки которыхъ не имѣютъ никакого значенія. Поэтому, число различныхъ игръ выразится числомъ перестановокъ изъ 12-ти элементовъ a, 12-ти b, 5-ти c и 3-хъ элементовъ d, т.-е. будетъ равно

$$\frac{1.2.3.... \qquad ....30.31.32}{1.2.3...11.12\,.\,1.2.3...11.12\,.\,1.2.3.4.5\,.\,1.2.3}$$

$$= 15928149470688 00.$$

Б. Размѣщенія.

§ 5. Если данные элементы ставятся одинъ возлѣ другого не всѣ вмѣстѣ, а группами по одному, по 2, по 3, .. вообще по n, и притомъ такъ, что образующіяся такимъ образомъ формы различаются между собою не только подборомъ элементовъ, но и порядкомъ послѣднихъ, то такія соединенія называются *размѣщеніями*. Число элементовъ, вошедшихъ въ отдѣльныя формы, опредѣляетъ собой *классъ* размѣщеній, и выражается *класснымъ показателемъ* (экспонентомъ). Такъ элементы a, b, c,... i, k, l, взятые по одиночкѣ, представляютъ размѣщенія 1-го класса (уніоны); ab, ba, ac, ca, bc, cb—суть размѣщенія 2-го класса элементовъ a, b, c (такихъ формъ можетъ быть только шесть, какъ увидимъ ниже).

Смотря по тому, повторяются, или нѣтъ, элементы въ отдѣльныхъ формахъ размѣщеній, послѣднія раздѣляются на *размѣщенія съ повтореніями и безъ повтореній*, допускающія въ свою очередь, какъ увидимъ, еще подраздѣленія.

Для означенія числа всѣхъ размѣщеній изъ m элементовъ n-го класса *безъ повтореній и съ повтореніями*, удержимъ соотвѣтственно символы A_n^m и AA_n^m.

Размѣщенія безъ повтореній.

§ 6. Опредѣленіе числа такихъ размѣщеній n-го класса основано на слѣдующихъ соображеніяхъ. Допустимъ, что уже составленъ (n—1)-й классъ размѣщеній изъ данныхъ элементовъ, вмѣщающій въ себѣ, пока неизвѣстное число, A_{n-1}^m формъ.

Если, мысленно выдѣливъ одну изъ послѣднихъ, состоящую изъ $m-1$ элементовъ, станемъ приставлять къ ней, на *опредѣленномъ* мѣстѣ, напр., слѣва, по одному изъ невошедшихъ въ эту форму $m-(n-1)$ элементовъ, то получимъ $m-(n-1)$ новыхъ формъ, относящихся уже къ n-му классу. А такъ какъ подобная операція приложима къ каждой изъ формъ $(n-1)$-го класса, то понятно, что искомое число размѣщеній выразится формулою

$$A_n^m = [m-(n-1)]\, A_{n-1}^m.$$

Понижая здѣсь n послѣдовательно на 1, 2, 3,...$(n-2)$ единицъ, получимъ равенства

$$A_{n-1}^m = [m-(n-2)]\, A_{n-2}^m,$$
$$A_{n-2}^m = [m-(n-3)]\, A_{n-3}^m,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$A_3^m = (m-2)\, A_2^m,$$
$$A_2^m = (m-1)\, A_1^m,$$

къ которымъ присоединимъ тожество

$$A_1^m = m.$$

Произведеніе этихъ равенствъ, со включеніемъ начальнаго, по сокращеніи общихъ множителей, дастъ, въ окончательномъ выводѣ, формулу

$$(3)\quad A_n^m = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-2)]\,[m-(n-1)].$$

Число классовъ размѣщеній *безъ* повторенія, очевидно, ограничивается числомъ данныхъ элементовъ.

Замѣтимъ еще, что классъ A_m^m представляетъ собой нечто иное, какъ перестановки P_m.

Для полученія размѣщеній на самомъ дѣлѣ, первую форму составимъ изъ n первыхъ элементовъ въ восходящемъ порядкѣ; а затѣмъ поступаемъ по правилу § 3, не упуская изъ виду величины класснаго показателя. Такъ размѣщенія 4-го класса *безъ* повтореній элементовъ a, b, c, d, f будутъ

abcd	acbd	adbc	afbc	bacd	bcad
abcf	acbf	adbf	afbd	bacf	bcaf
abdc	acdb	adcb	afcb	badc	bcda
abdf	acdf	adcf	afcd	badf	bcdf
abfc	acfb	adfb	afdb	bafc	и т. д.
abfd	acfd	adfc	afdc	bafd	

Всѣхъ такихъ формъ $A_4^5 = 5.4.3.2 = 120$.

Примѣры. 1. Посредствомъ цифръ 1,2,3,... 8,9 можно написать такихъ четырехзначныхъ цѣлыхъ чиселъ, въ которыхъ ни одинъ знакъ не повторяется, всего

$$A_4^9 = 9.8.7.6 = 3024.$$

2. Сколько пятизначныхъ соединеній можно составить изъ 10-ти буквъ?

Отв. $A_5^{10} = 10.9.8.7.6 = 30240.$

Размѣщенія съ повтореніями.

§ 7. Не трудно найти число такихъ размѣщеній, т.-е. опредѣлить числовое значеніе символа AA_n^m. Такъ какъ всякій изъ *m* данныхъ элементовъ можетъ быть приставленъ къ самому себѣ и ко всѣмъ остальнымъ, то понятно, что размѣщеній 2-го класса съ повтореніями только и возможно составить *m.m*, т.-е. $AA_2^m = m^2$. Если къ *каждой* изъ этихъ формъ двойныхъ размѣщеній опять приставлять по одному изъ данныхъ элементовъ, на опредѣленномъ мѣстѣ, напр., слѣва, то получатся уже тройныя размѣщенія съ повтореніями, число которыхъ, поэтому, будетъ $AA_3^m = m.m^2 = m^3$. Продолжая разсуждать такимъ же образомъ, дойдемъ до общей формулы размѣщеній *n*-го класса съ повтореніями

$$AA_n^m = m^n. \tag{4}$$

При составленіи такихъ размѣщеній, первая форма образуется изъ перваго элемента, повтореннаго *n* разъ. Чтобы вывести какую либо иную форму изъ непосредственно ей предшествующей, слѣдуетъ держаться правила § 3, съ тѣмъ лишь отъ него отступленіемъ, что всѣ мѣста съ правой стороны отъ измѣненнаго элемента должны быть замѣщаемы всегда первымъ элементомъ. Такъ, размѣщеніе 4-го класса съ повтореніями элементовъ 1, 2 и 3 явятся въ слѣдующемъ видѣ:

1111	2111	3111
1112	2112	3112
1113	2113	3113
1121	2121	3121
1122	2122	3122
1123	2123	3123
1131	2131	3131
1132	2132	3132
1133	2133	3133
1211	2211	3211
1212	2212	3212
1213	2213	3213
1221	2221	3221
1222	2222	3222
1223	2223	3223
1231	2231	3231
1232	2232	3232
1233	2233	3233
1311	2311	3311
1312	2312	3312
1313	2313	3313
1321	2321	3321
1322	2322	3322
1323	2323	3323
1331	2331	3331
1332	2332	3332
1333	2333	3333.

Таких форм здѣсь, как и должно быть, $AA_4^3 = 3^4 = 81$.

Примѣчаніе. Очевидно, число классов размѣщеній с повтореніями неограниченно.

Примѣры. 1. Посредством цифр 1, 2, 3,... 8, 9, можно написать всѣх трехзначных цѣлых чисел $AA_3^9 = 9^3 = 729$.

Примѣчаніе. Ряд натуральных чисел есть нечто иное, как подбор размѣщеній всѣх классов с повтореніями элементов 0, 1, 2, 3,... 8 и 9.

2. Насколько способов могут вскрыться *три* игральныя кости (костяные кубики с нумерованными гранями)?

Отв. На $AA_3^6 = 6^3 = 216$.

Размѣщенія с ограниченіем повтореній.

§ 8. Под таким названіем разумѣются соединенія, в которых всякій из данных элементов может быть повторен не болѣе извѣстнаго числа раз. Размѣщенія с ограниченіем повтореній составляются по указанному выше правилу, причем, конечно, пропускаются формы, не удовлетворяющія данному условію. Положим, например, требуется написать трехзначныя числа, в которых 1 встрѣчалась бы не болѣе 2 раз, 2 не болѣе одного раза и 3 до трех раз. Такія числа суть:

112	133	312	и 333.
113	211	313	
121	213	321	
123	231	323	
131	233	331	
132	311	332	

Отброшены, как неудовлетворяющія данному условію, формы:

111	222
122	223
212	232
221	322

Размѣщенія с опредѣленной суммой элементов.

§ 9. Понятно, что элементами в этом случаѣ могут быть только числа или цифры. Для образованія размѣщеній требуемаго вида, предварительно составляются такія формы соединеній (сочетанія), в которых сумма входящихъ элементовъ равна данной; затѣмъ каждое соединеніе берется во всѣхъ возможныхъ перестановкахъ.

Напримѣръ, чтобы составить, изъ элементовъ 1, 2, 3,... 8, 9, размѣщенія 3-го класса, *безъ* повтореній, съ суммою цифръ, равною 9-ти, беремъ соединенія

126, 135 и 234

во всѣхъ возможныхъ перестановкахъ:

126	135	234
162	153	243
216	315	324
261	351	342
612	513	423
621	531	432.

Для составленія размѣщеній 3-го класса *съ* повтореніями и суммою цифръ 6, беремъ соединенія

114, 123 и 222

въ перестановкахъ:

114	123	и	222
141	132		
411	213		
	231		
	312		
	321		

Примѣчанія. Отдѣльные классы размѣщеній, о которыхъ говорилось въ §§ 8 и 9, не могутъ быть подведены подъ общія формулы.

Примѣръ. Насколько способовъ могутъ вскрыться три игральныя кости такъ, чтобы сумма очковъ была 14?

Рѣшеніе. Элементы 1, 2, 3, 4. 5 и 6 даютъ четыре соединенія *съ* повтореніями и суммой цифръ 14:

266, 356, 446 и 455,

изъ которыхъ первое, послѣ перестановокъ, даетъ 3 формы, второе — 6, третье и четвертое—по 3 формы. Итого, всѣхъ вскрытій костей, подъ даннымъ условіемъ, возможно только 3+6+3+3=15.

B. Сочетанія.

§ 10. Такъ называются соединенія по два, по три,... по n данныхъ элементовъ, различающіяся между собою *только подборомъ*, а не порядкомъ послѣднихъ. Такъ напр.

ab, ac, ad, bc и cd

суть сочетанія по два,

$$\mathfrak{abc},\ \mathfrak{abd},\ \mathfrak{acd}\ \text{и}\ \mathfrak{bcd}$$

— сочетанія по три изъ элементовъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.

Число элементовъ, входящихъ въ отдѣльныя формы соединеній, опредѣляетъ *классъ* сочетаній и выражается *класснымъ* показателемъ.

Подобно перестановкамъ и размѣщеніямъ, сочетанія бываютъ *безъ* повтореній и *съ* повтореніями элементовъ. Для означенія числа тѣхъ и другихъ n-го класса, удержимъ соотвѣтственно символы

$$C_n^m \text{ и } CC_n^m.$$

Сочетанія безъ повтореній.

§ 11. Числовое значеніе символа C_n^m получается путемъ слѣдующаго соображенія. Допустимъ, что изъ m данныхъ элементовъ составленъ n-ый классъ *сочетаній*. Если всякую форму этого класса подвергнуть всѣмъ возможнымъ перестановкамъ, то сочетанія, очевидно, превратятся въ *размѣщенія* того же класса, причемъ число формъ увеличится въ P_n разъ, т. е.

$$C_n^m . P_n = A_n^m.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$(5)\qquad C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1.2.3\ldots\qquad(n-1)n}.$$

Удобнѣйшій способъ образованія сочетаній n-го класса слѣдующій: n первыхъ элементовъ, поставленныхъ въ восходящемъ порядкѣ, даютъ первую форму. Для образованія же всякой иной формы, поступаемъ согласно правилу § 3, не упуская, конечно, изъ виду класснаго показателя и притомъ еще съ той разницей, что, въ данномъ случаѣ, справа отъ измѣненнаго элемента, слѣдуетъ ставить непосредственно высшіе, относительно послѣдняго, элементы въ восходящемъ порядкѣ. Такъ, элементы 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 даютъ слѣдующія $C_4^7 = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} = 35$ сочетаній 4-го класса:

1234	1345	2345	3456
1235	1346	2346	3457
1236	1347	2347	3467
1237	1356	2356	3567
1245	1357	2357	4567
1246	1367	2367	
1247	1456	2456	
1256	1457	2457	
1257	1467	2467	
1267	1567	2567	

Понятно, что число классовъ сочетаній *безъ* повторенія ограничивается числомъ данныхъ элементовъ.

Примѣры. Сколько можно произвести совершенно различныхъ тиражей, вынимая за-разъ по 5 нумеровъ изъ данныхъ 20-ти?

$$\text{Отв. } C_5^{20} = \frac{20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5} = 15504.$$

2. Если изъ 32 картъ дается, въ одну сдачу, игрокамъ *A* и *B* по 6 картъ, то
сколько различныхъ игръ можетъ получить A?
и сколько можетъ образоваться различныхъ игръ у A и B въ совокупности?

Рѣшеніе. Игрокъ A можетъ получить столько различныхъ сдачъ, какъ велико число сочетаній изъ 32 элементовъ по 6, т.-е.

$$C_6^{32} = 906192.$$

Въ то время, когда игроку A даются все однѣ и тѣ же 6 картъ, у B можетъ перебывать столько различныхъ игръ, какъ велико число сочетаній по 6 изъ остальныхъ 26 картъ, т.-е. $\frac{26.25.24.23.22.21}{1.2.3.4.5.6} = 230230$.

Иными словами, А можетъ имѣть однѣ и тѣ же карты 230230 разъ въ то время, какъ у В будутъ все различныя сдачи. Но такъ какъ у А могутъ быть 906192 различныя сдачи, то всего различныхъ игръ, въ совокупности, будетъ 906192.230230 = 208632584160.

§ 12. Сочетанія имѣютъ свойства, на которыя слѣдуетъ обратить вниманіе. Такъ, при обозрѣніи таблицы сочетаній 4-го класса, приведенной въ предыдущемъ параграфѣ, не трудно замѣтить, что формы ея распадаются на два отдѣла, относительно всякаго элемента, напр. 1: въ формы одного отдѣла 1 входитъ, въ формы другого—нѣтъ. Первый отдѣлъ представляетъ собой не что иное, какъ сочетанія 3-го класса изъ 6-ти элементовъ — 2, 3, 4, 5, 6, 7, съ приставкою слѣва ко всякой формѣ 1; во второмъ отдѣлѣ заключаются сочетанія изъ тѣхъ же 6-ти элементовъ, но 4-го класса и безъ приставки. Такимъ образомъ оказывается, что число сочетаній 4-го класса изъ 7-ми элементовъ

$$C_4^7 = C_3^6 + C_4^6.$$

Подобнымъ образомъ не трудно убѣдиться, что сочетанія n-го класса изъ m элементовъ состоятъ изъ отдѣла съ формами (n—1)-го класса и отдѣла съ формами n-го класса изъ (m —1) элементовъ, т.-е.

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_n^{m-1}.$$

Смыслъ этой формулы тотъ, что *число сочетаній n-го класса изъ m элементовъ равняется суммѣ чиселъ сочетаній (n—1)-го и n-го классовъ изъ (m—1) элементовъ.*

Далѣе. Если въ формулѣ (5) подставить $m + n$ вмѣсто m, то она приметъ видъ:

$$C_n^{m+n} = \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+2)(m+1)}{1.2.3\ldots\qquad(n-1)\,n},$$

или, по умноженіи числителя и знаменателя дроби на произведеніе $m(m-1)\ldots 3.2.1$,

$$C_n^{m+n} = \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+1)m(m-1)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(n-1)\,n\,.\,1.2.3\ldots(m-1)\,m}.$$

Правая сторона этого равенства, очевидно, не измѣнится, если въ ней, вмѣсто *m*, поставить *n*, и наоборотъ; отсюда заключаемъ, что и значеніе лѣвой стороны того же равенства не измѣнится отъ замѣщенія классного показателя *n* показателемъ *m*, т.-е.

$$C_m^{m+n} = \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(n+1)\,n\,(n-1)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots(m-1)m.1.2.3\ldots(n-1)\,n}.$$

А потому

(6) $$C_n^{m+n} = C_m^{m+n},$$

т.-е. *числа сочетаній изъ (m + n) элементовъ m-го и n-го классовъ—одинаковы.*

Впрочемъ, не трудно уяснить себѣ это явленіе инымъ путемъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что $(m+n)$ нумерованныхъ шаровъ сложены въ урну. Если изъ послѣдней выбирать по *m* шаровъ, для составленія сочетаній *m*-го класса, то, понятно, что остающіеся, всякій разъ, *n* шаровъ будутъ собой представлять различныя формы сочетаній *n*-го класса изъ тѣхъ же $(m+n)$ элементовъ; такъ что всякой формѣ изъ *m* найдется соотвѣтственная форма изъ *n* шаровъ. Иными словами, желая получить *m*-ый классъ сочетаній изъ данныхъ $(m+n)$ элементовъ, мы, въ то же время, по необходимости, составляемъ *n*-ый классъ сочетаній изъ тѣхъ же элементовъ.

Замѣтимъ, въ заключеніе, что, при $n = o$, равенство (6) принимаетъ видъ

$$C_0^m = C_m^m = 1,$$

имѣющій ту особенность, что символъ C_0^m представляется, на первый взглядъ, парадоксомъ.

Примѣры. 1. Насколько различныхъ способовъ можно разложить 16 нумерованныхъ шаровъ въ двѣ кучи, отдѣляя въ одну 6, въ другую 10 шаровъ?

$$\text{Отвѣтъ. } C_6^{16} = C_{10}^{16} = 8008.$$

2. Насколько различныхъ способовъ можно разложить 20 ядеръ, какъ нибудь отмѣченныхъ, на три кучи такъ, чтобы въ одной кучѣ было 5, въ другой 7, и въ третьей 8 ядеръ?

Рѣшеніе. Для разложенія 20-ти ядеръ въ 2 кучи, по 5 и 15 ядеръ, представляется C_5^{20} способовъ; но 15 ядеръ разлагаются еще на 2 кучи, въ 7 и 8 ядеръ, C_7^{15} способами. Слѣдовательно, всѣхъ способовъ разложенія 20-ти ядеръ, при данномъ условіи, будетъ

$$C_5^{20} \,.\, C_7^{15} = 99768240.$$

Сочетанія съ повтореніями.

§ 13. При составленіи такихъ сочетаній, за начальное соединеніе принимается первый элементъ восходящаго ряда, повторенный *n* разъ. Чтобы получить какую-либо форму изъ предыдущей, слѣдуетъ поступать по правилу § 11, съ тѣмъ лишь изъятіемъ, что мѣста справа отъ заступившаго измѣненный элементъ занимаются имъ же самимъ. Такъ, сочетанія 4-го класса съ повтореніями элементовъ a, b, c будутъ:

aaaa	aacc	bbbb
aaab	abbb	bbbc
aaac	abbc	bbcc
aabb	abcc	bccc
aabc	accc	cccc.

Такихъ формъ здѣсь 15. Вообще же

Число сочетаній съ повтореніями изъ m элементовъ, CC_n^m, *равновелико съ числомъ сочетаній того же класса безъ повтореній изъ (m+n—1) элементовъ*, т.-е.

$$CC_n^m = C_n^{m+n-1}.$$

Взявъ элементами цифры, ради бóльшей наглядности, для *доказательства* сказаннаго достаточно только уяснить себѣ, что сочетанія *n*-го класса изъ *m* элементовъ *съ* повторен., отъ прибавленія къ элементамъ каждой изъ формъ соотвѣтственно 0, 1, 2... (n—2), (n—1), превращаются въ сочетанія *безъ* повтор. того же класса изъ (m+n—1) элементовъ. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что, путемъ указаннаго пріема, во-1-хъ, ни *классъ* сочетаній, ни *число* формъ не измѣнятся, во-2-хъ— формы первая и послѣдняя *съ* повтореніями произведутъ соотвѣтственныя формы сочетаній *безъ* повтореній. Затѣмъ, остается еще убѣдиться, что всякія двѣ *послѣдовательныя* формы сочетаній *съ* повтор. произведутъ послѣдовательныя же формы сочетаній *безъ* повтор., *подходящія*, притомъ, *по своему образованію*, *подъ правило* § 11. Въ самомъ дѣлѣ, провѣримъ сказанное на переходѣ отъ сочетаній 5-го кл. изъ элементовъ 1, 2, 3 *съ* повтор. къ сочетаніямъ того же класса *безъ* повтор. изъ элементовъ 1, 2, 3... 6, 7, сопоставивъ формы обоихъ видовъ въ два смежные вертикальные столбца:

1) Если послѣдовательныя формы начинаются одинаковыми цифрами (напр. **112**22, **112**23) то, отъ прибавленія къ элементамъ этихъ формъ соотвѣтственно 0, 1, 2, 3, 4, соотвѣтствующія формы другого столбца тоже начнутся одинаковыми цифрами (**124**56, **124**57).

2) Если въ формахъ лѣваго столбца какой нибудь элементъ возрастаетъ на единицу (наприм.

01234	
11111	12345
11112	12346
11113	12347
11122	12356
11123	12357
11133	12367
11222	12456
11223	12457
11233	12467
11333	12567
12222	13456
12223	13457
12233	13467
12333	13567
13333	14567
22222	23456
22223	23457
22233	23467
22333	23567
23333	24567
33333	34567

12333, 13333), то то же самое наблюдается и въ соотвѣтствующихъ формахъ праваго столбца (13567, 14567); мѣняющійся элементъ, слѣдовательно, сохраняетъ свое мѣсто тамъ и тутъ.

3) Элементы, повторяющіеся за измѣненнымъ въ лѣвомъ столбцѣ, влекутъ за собой, въ правомъ, возрастающій порядокъ элементовъ (напримѣръ, 22**333**, 2**3333**—слѣва и 23**567**, 2**4567**—справа).

Такимъ образомъ оказывается, что образованіе формъ праваго столбца, добытое указаннымъ путемъ изъ формъ лѣваго, вполнѣ соотвѣтствуетъ правилу, изложенному въ § 11. Понятна и причина, по которой данное число m элементовъ возросло до числа $m+n-1$, или, на нашемъ примѣрѣ, отъ 3 до 7.

Если въ формулѣ $CC_n^m = C_n^{m+n-1}$ замѣнить символъ второй части числовымъ его значеніемъ, то получится:

$$CC_n^m = \frac{(m+n-1)(m+n-2)\ldots[m+n-1-(n-1)]}{1.2.3\ldots(n-1)n}$$

$$= \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)(m+n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)n}. \quad (7)$$

Примѣчанія. 1. Понятно, что число классовъ сочетаній *съ* повтореніями неограниченно.

2. Предлагаемъ читателямъ провѣрить, пользуясь формулой (7), справедливость равенства

$$CC_n^m = CC_n^{m-1} + CC_{n-1}^m.$$

Примѣры. 1. Насколько способовъ могутъ вскрыться двѣ игральныя кости?

Рѣшеніе. Вопросъ сводится на то, сколько возможно сдѣлать сочетаній 2-го класса *съ* повтореніемъ изъ элементовъ 1, 2, 3, 4, 5, 6?—Полагая въ формулѣ (7) $m=6$, $n=2$, получимъ $CC_2^6 = \frac{6.7}{1.2} = 21$.

2. Три кости могутъ вскрыться $CC_3^6 = \frac{6.7.8}{1.2.3} = 56$-ью способами.

Сочетанія съ ограниченіемъ повтореній.

§ 14. Такія сочетанія составляются по правилу предыдущаго параграфа, съ исключеніемъ изъ нихъ лишь тѣхъ соединеній, которыя не подходятъ подъ данное условіе. Такъ, тройныя сочетанія изъ элементовъ 1, 2, 3, изъ которыхъ 1 должна повторяться не болѣе двухъ разъ, 2—до трехъ разъ и 3—не болѣе одного раза, будутъ:

$$CC_3\,(1^2 2^3 3^1) = \begin{matrix} 112 & 123 \\ 113 & 222 \\ 122 & 223 \end{matrix}$$

Отброшены формы, какъ неудовлетворяющія данному условію:

111, 133, 233 и 333.

Сочетанія съ опредѣленной суммой элементовъ.

§ 15. Такія сочетанія могутъ быть различныхъ родовъ, а именно: сочетанія съ опредѣленной суммой элементовъ во *всѣхъ* возможныхъ классахъ или только въ *опредѣленномъ* классѣ, притомъ въ обоихъ случаяхъ или *безъ* повтореній, или *съ* повтореніями, или *съ ограниченіемъ* повтореній элементовъ. Обыкновенно, при этомъ, подразумѣвается необходимое условіе — числовые результаты (не элементы) въ формахъ должны быть располагаемы въ возростающемъ порядкѣ.

Если требуется составить сочетанія *безъ* повтореній и съ опредѣленной суммой элементовъ во всѣхъ возможныхъ классахъ, то, прежде всего, пишется элементъ, соотвѣтствующій этой суммѣ и представляющій собой 1-й классъ. Если, при этомъ, сумма выражается многозначнымъ числомъ, то послѣднее отмѣчается какимъ-нибудь знакомъ, напримѣръ, чертой сверху для сохраненія вида класса. Затѣмъ, всякій слѣдующій классъ получается изъ предыдущаго посредствомъ приставки, съ лѣвой стороны, къ соединеніямъ низшаго класса элементовъ въ ихъ естественномъ порядкѣ; на послѣднемъ мѣстѣ ставится разность отъ вычитанія приставленнаго элемента, изъ послѣдняго элемента соотвѣтственной формы изъ предыдущаго класса. Оперируя такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока ни прекратится восходящій порядокъ элементовъ, получимъ всѣ сочетанія, подходящія подъ данное условіе. — Число классовъ сочетаній такого вида обусловливается данной суммой и, слѣдовательно, ограничено.

Напримѣръ, сочетанія изъ элементовъ 1, 2, 3,... 8, 9 *безъ* повтореній и съ суммою, равной 9, могутъ быть только 3-хъ классовъ:

1 кл.	2 кл.	3 кл.
9.	18	126
	27	135
	36	234
	45	

Здѣсь, для образованія формъ 2-го кл., вычтены изъ 9 (I кл.) послѣдовательно 1, 2, 3 и 4, помѣщенные слѣва отъ разностей.

Сочетанія изъ тѣхъ же элементовъ 1, 2, 3... 8, 9, но съ суммою 13, будутъ:

1 кл.	2 кл.	3 кл.	4 кл.
13	112	1210	1237
	211	139	1246
	310	148	1345
	49	157	
	58	238	
	67	247	
		256	
		346	

Подобнымъ же образомъ составляются сочетанія *съ* повтореніемъ и опредѣленной суммой элементовъ. Напр., сочетанія изъ элементовъ 1, 2,... 8, 9 съ суммой 10:

1 кл.	2 кл.	3 кл.	4 кл.	5 кл.	6 кл.
10	19	118	1117	11116	111115
	28	127	1126	11125	111124
	37	136	1135	11134	и т. д.
	46	145	1144	11224	
	55	226	1225	11233	
		235	1234	12223	
		244	2224	22222	
		334	2233		

§ 16. Отдѣльные классы сочетаній, о которыхъ говорилось въ послѣднихъ двухъ параграфахъ, не могутъ быть подведены подъ общія формулы; но не трудно учесть *всѣ* формы сочетаній всѣхъ классовъ съ ограниченіемъ повторенія элементовъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что сочетаются a^α, b^β, c^γ,... l^λ, гдѣ α, β, γ,... λ означаютъ предѣльныя числа повтореній соотвѣтственныхъ элементовъ. Если перемножить конечные ряды:

$$1 + a + a^2 + a^3 + .. + a^\alpha,$$
$$1 + b + b^2 + b^3 + .. + b^\beta,$$
$$1 + c + c^2 + c^3 + .. + c^\gamma,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$1 + l + l^2 + l^3 + .. + l^\lambda,$$

то произведеніе, какъ извѣстно, будетъ состоять изъ $(\alpha+1)$ $(\beta+1)$ $(\gamma+1)\ldots$ $(\lambda+1)$ членовъ, изъ которыхъ каждый, за исключеніемъ 1, представляетъ собой какую либо форму сочетаній съ повтореніемъ. Отсюда заключаемъ, что всѣхъ формъ такихъ сочетаній, во всѣхъ классахъ, будетъ $(\alpha+1)$ $(\beta+1)$ $(\gamma+1)\ldots$ $(\lambda+1)-1$.

§ 17. Въ заключеніе, рѣшимъ нѣсколько общихъ задачъ, для приложенія вышеизложеннаго къ болѣе сложнымъ вопросамъ.

Пусть изъ m, сочетающихся по n, элементовъ, m' отмѣчены какимъ-либо знакомъ. Спрашивается, сколько въ этомъ классѣ формъ, содержащихъ по n' отмѣченныхъ элементовъ?

Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, представимъ себѣ всѣ сочетанія изъ m' отмѣченныхъ элементовъ n'-го класса, въ числѣ, какъ извѣстно, $C^{m'}_{n'}$. Понятно, что каждая изъ этихъ формъ можетъ повториться столько разъ, какъ велико число сочетаній изъ остальныхъ $(m-m')$ элементовъ, взятыхъ по $(n-n')$, т.-е. $C^{m-m'}_{n-n'}$. Слѣдовательно, число искомыхъ формъ есть $C^{m'}_{n'}.\ C^{m-m'}_{n-n'}$.

Примѣры. 1. Положимъ, что въ числѣ семи элементовъ, сочетающихся по четыре, находятся 1 и 2. Спрашивается, въ какомъ числѣ сочетаній встрѣчаются:

а) одна только 2

и б) 1 и 2 одновременно?

Рѣш. Для а) $C^1_1.\ C^6_3=1.\frac{6.5.4}{1.2.3}=20$.

Для б) $C^2_2.\ C^5_2=1.\frac{5.4}{1.2}=10$. (См. таб. § 11).

2. Если игрокамъ А и В дается по 6 картъ изъ колоды въ 32 карты, то тотъ или другой могутъ получить всѣхъ различныхъ сдачъ 906192 (§ 11, прим. 2). Спрашивается, сколько изъ послѣдняго числа можетъ быть такихъ сдачъ, въ которыхъ

а) всѣ 6 картъ пики,

б) только 2 пики

и в) нѣтъ ни одной пики?

Для полученіе отвѣта на первый вопросъ, полагаемъ въ выведенной формулѣ $m=32$, $n=6$, $m'=8$ и $n'=6$. Оказывается, что пиковыхъ игръ можетъ быть $C^8_6.\ C^{24}_0=28$.

Для отвѣта на второй вопросъ,

$$m=32,\ n=6,\ m'=8 \text{ и } n'=2,$$

и потому игръ съ двумя пиками будетъ $C^8_2.\ C^{24}_4=297528$.

Отвѣтъ на третій вопросъ получится чрезъ положеніе

$$m=32,\ n=6,\ m'=8 \text{ и } n'=0;$$

по этому игръ безъ пикъ можетъ случиться

$$C^8_0.\ C^{24}_6=134596$$

§ 18. Пусть изъ *m* элементовъ, образующихъ всѣ возможныя размѣщенія *n*-го класса, m′ отмѣчены какимъ-нибудь образомъ Спрашивается, сколько въ этомъ классѣ формъ, въ которыхъ *n′* элементовъ изъ отмѣченныхъ занимаютъ первыя мѣста?

Представимъ себѣ всѣ возможныя размѣщенія изъ *m′* элементовъ n′-го класса, въ числѣ $A_{n'}^{m'}$. Каждая изъ этихъ формъ можетъ быть поставлена на первомъ мѣстѣ столько разъ, сколько возможно сдѣлать размѣщеній изъ остальныхъ m—m′ элементовъ, взятыхъ по n—n′, т.-е. $A_{n-n'}^{m-m'}$. Слѣдовательно, число искомыхъ формъ выразится произведеніемъ $A_{n'}^{m'}. A_{n-n'}^{m-m'}$.

Примѣръ. Изъ 5 элементовъ, въ числѣ которыхъ находятся a, b и c, сдѣлано 120 размѣщеній 4-го кл. безъ повтореній (таб. § 6). Сколько формъ начинается.

а) однимъ

и б) двумя изъ трехъ данныхъ a, b, c?

На первый вопросъ отвѣтъ получится чрезъ положеніе въ послѣдней формулѣ

$$m = 5,\ n = 4,\ m' = 1,\ n' = 1,$$

и будетъ $A_1^1. A_3^4 = 24$.

На второй, чрезъ положеніе

$$m = 5,\ n = 4,\ m' = n' = 2;$$

тогда $A_2^2. A_2^3 = 2.\ 1.\ 3.\ 2 = 12$.

§ 19. Возвратимся опять къ *n*-му классу размѣщеній изъ *m* элементовъ, между которыми находятся *m′* отмѣченныхъ. Сколько между формами этого класса такихъ, въ которыхъ *n′* изъ отмѣченныхъ стоятъ подъ—рядъ? Изъ предъидущаго § извѣстно, что всѣхъ формъ, въ которыхъ отмѣченные *n′* элементовъ занимаютъ первыя мѣста, счетомъ $A_{n'}^{m'}. A_{n-n'}^{m-m'}$. Если всю группу n′ отмѣченныхъ элементовъ, какъ нераздѣльное цѣлое, перемѣщать вправо, въ каждой формѣ, послѣдовательно среди прочихъ элементовъ до послѣдняго, (n—n′)-го, мѣста, то получатся всѣ требуемыя размѣщенія, число которыхъ выразится суммою $A_{n'}^{m'}. A_{n-n'}^{m-m'}$ формъ со вновь образовавшимися А такъ-какъ послѣднихъ счетомъ (n—n′) $A_{n'}^{m'}. A_{n-n'}^{m-m'}$, то, слѣдовательно, число искомыхъ формъ будетъ

$$A_{n'}^{m'}. A_{n-n'}^{m-m'} + (n-n')\ A_{n'}^{m'}\ A_{n-n'}^{m-m'}$$

или, короче, $A_{n'}^{m'}\ A_{n-n'}^{m-m'}\ (n-n'+1)$.

Примѣры. 1. Изъ 5 элементовъ, между которыми находятся *a* и *b*, составлены размѣщенія 4-го класса. Въ какомъ числѣ формъ встрѣчаются

а) одно *a*

и б) *a* и *b* рядомъ?

Отв. на а) $A_1^1\ A_3^4\ (4-1+1) = 1.\ (4.\ 3.)\ 4 = 48$,

$$\text{па б) } A_2^2 . A_2^3 (4 - 2 + 1) = 2. 1. 3. 2. 3 = 36,$$

въ чемъ легко убѣдиться, продоляивъ таблицу размѣщеній § 6.

2. Сколько разъ элементы 1, 3, 5 встрѣчаются рядомъ во всѣхъ пятизначныхъ числахъ, изображенныхъ посредствомъ цифръ 1, 2, 3,... 8, 9?

$$\textit{Отв. } A_3^3 A_2^6 (5 - 3 + 1) = 540.$$

§ 20. Обратимся, наконецъ, еще разъ къ n-му классу размѣщеній изъ m элементовъ, въ числѣ которыхъ m' отмѣченныхъ. Сколько между формами этого класса такихъ, въ которыхъ находится по n' элементовъ изъ числа отмѣченныхъ?

Нетрудно сообразить, что требуемое число получится, если предварительно составить изъ m элементовъ такія *сочетанія* n-го класса, которыя содержатъ по n' элементовъ изъ отмѣченныхъ, и потомъ каждую форму подвергнуть всѣмъ возможнымъ перестановкамъ. По § 17, число упомянутыхъ сочетаній есть $C_{n'}^{m'} C_{n-n'}^{m-m'}$. Но такъ-какъ всякая изъ этихъ формъ можетъ дать 1. 2. 3... n перестановокъ, то искомое число размѣщеній выразится произведеніемъ $C_{n'}^{m'} . C_{n-n'}^{m-m'} . P_n$.

Примѣръ. Изъ 5 элементовъ, между которыми находятся a и b, составлены всѣ возможныя размѣщенія 3-го класса. Сколько формъ содержатъ одновременно a и b?

Сдѣлавъ въ выведенной формулѣ

$$m = 5,\ n = 3,\ m' = n' = 2,$$

$$\text{получимъ } C_2^2 C_1^3 P_3 = 18.$$