O TRZECH KLASYFIKACJACH
funkcji przedstawialnych analitycznie.

Napisał

Stefan Kempisty (Wilno).

Funkcję zmiennej rzeczywistej zbudowaną w całym obszarze zmienności według jednego prawa przy pomocy dodawania, mnożenia i przejścia do granicy nazywa Lebesgue przedstawialną analitycznie i dowodzi, że jedynie do takich funkcji daje się stosować klasyfikacja Baire'a [1]).

Na wzór tej klasyfikacji utworzone zostały dwie inne przez pp. Younga i Sierpińskiego, przyczem punktami wyjścia stały się dwie różne co do formy definicje klas Baire'a.

W monografji Baire'a p. t. „Leçons sur les fonctions discontinues" [2]) znajdujemy następujące określenie:

1° funkcje ciągłe tworzą klasę zerową,

2° funkcja należy do klasy α jeśli jest granicą ciągu funkcji należących do klas $< \alpha$, o ile sama nie należy do jednej z tych klas.

Otóż możemy zamiast o „granicy ciągu" mówić o „sumie szeregu", gdyż suma skończonej ilości funkcji klasy α jest również funkcją klasy α. Zastępując dalej słowo „szereg" przez „szereg bezwzględnie zbieżny", dochodzimy do klasyfikacji Sierpińskiego, w której klasa pierwsza składa się z różnic funkcji na-

---

1) H. Lebesgue: Sur les fonctions représentables analytiquement. *Journal de Math.* 1905, str. 152—3.

2) R. Baire, Paris 1905, str. 126.

wpółciągłych górnie [1]). W celu wyróżnienia nowych klas nazywać je będziemy klasami bezwzględnemi.

Young, wychodząc z pierwotnej definicji Baire'a, tworzy nową klasyfikację przy pomocy ciągów monotonicznych, skąd powstaje konieczność rozróżniania typów odpowiadających ciągom nierosnącym i niemalejącym. Granice ciągów nierosnących funkcji ciągłych nazywa funkcjami typu u, gdyż są to funkcje nawpółciągłe górnie (upper semi-continuous functions) zaś granice ciągów niemalejących — funkcjami typu l (lower semi-continuous functions). Granice ciągów nierosnących, których wyrazami są funkcje typu l oznacza Young przez ul i t. d., stawiając zawsze na początku literę odpowiadającą ostatniemu ciągowi [2]). Symbolika taka jest dla Younga wystarczającą, gdyż rozpatruje on tylko funkcje otrzymane przy pomocy skończonej ilości przejść do granicy.

Ogólną definicję klasyfikacji Younga podałem w tomie II czas. *Fundamenta Mathematicae* [3]) można ją jednak uprościć. usuwając wymaganie, aby wyrazy ciągu były jednego typu, gdyż zawsze znajdzie się w ciągu nieskończenie wiele wyrazów jednego typu. Podobne określenia znajdujemy właśnie w niedawno wydanem dziele H. Hahna p. t. „Theorie d. reellen Funktionen“), gdzie funkcje Younga klasy α nazwane są *funkcjami rzędu* α (α — ter Ordnung).

Określenie. Funkcje ciągłe są rzędu zero. Granice ciągów monotonicznych funkcji rzędu $<\alpha$ są rzędu α, o ile same nie są niższego rzędu. Funkcje rzędu α bywają dwóch typów: u i l, zależnie od tego, czy są granicami ciągów nierosnących, czy też niemalejących.

Nowe klasyfikacje nie doprowadzają nas oczywiście do funkcji nie objętych klasyfikacją Baire'a, obejmują jednak ze swej strony wszystkie funkcje przedstawialne analitycznie, jak to wynika z następujących własności:

1. Wszelka funkcja klasy α jest conajwyżej rzędu $\alpha+1$ i to obu typów.

---

[1]) W. Sierpiński: Sur les fonctions dévéloppables... *Fund. Math.* II. (1920) str. 18.

[2]) W. H. Young: On functions and their associated sets of points. *Proc. Sond. Math.* 12 (1914) str. 260.

[3]) S. Kempisty: Sur les séries itérées... str. 68.

[4]) Berlin 1921 (v. J. Springer). Kap. 5, § 3, str. 328.

2. Wszelka funkcja rzędu α jest conajwyżej klasy bezwzględnej α [1]).

Pierwsze z tych twierdzeń daje się odwrócić przy pomocy zbiorów Borela [2]). Otrzymamy również owo odwrotne twierdzenie na innej drodze, jako wynik dalszych rozważań.

Przedmiotem niniejszej rozprawy jest ustalenie nowych zależności między klasami Baire'a z jednej strony a klasami bezwzględnemi i rzędami z drugiej.

Zależności te wynikają z uogólnienia następujących twierdzeń:

3. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby funkcja była rozwijalną na szereg bezwzględnie zbieżny funkcji ciągłych, jest, aby była różnicą funkcji nawpółciągłych górnie [3]).

4. Jeśli $g(x)$ jest funkcją dolnie nawpółciągłą zaś $h(x)$ — górnie nawpółciągłą, przyczem

$$g(x) \geqslant h(x),$$

wówczas istnieje funkcja ciągła $f(x)$ spełniająca warunek

$$g(x) \geqslant f(x) \geqslant h(x) \text{ [4])}.$$

5. Funkcja klasy pierwszej Baire'a daje się przybliżyć jednostajnie zapomocą różnicy funkcji nawpółciągłych górnie [5]).

Będziemy opierać się na lematach, których dowody znajdzie czytelnik we wspomnianym dziele Hahna [6]).

Lemat 1. Jeśli $f(x)$ jest funkcją typu u rzędu α, wówczas funkcja

$$\left\{ f(x) \right\} = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$$

jest conajwyżej rzędu α tegoż typu, co $f(x)$.

---

[1]) S. Kempisty, loc. cit tw. VI i V str. 71—2.

[2]) W. H. Young, loc. cit. str. 286 (dla α skończonych) oraz H. Hahn, loc. cit. tw. I str. 346.

[3]) W. Sierpiński, loc. cit. p. 18, warunek konieczny podany został przez p. S. Glassa.

[4]) H. Hahn: Über halbstetige u. unstetige Funktionen. Sitzungsberichte k. Akad. in Wien. Abt. IIa B. 126 (1917) str. 103.

[5]) S. Mazurkiewicz: Sur les fonctions de classe 1, Fund. Math. II (1920) str. 732, uogólnienie na funkcje nieograniczone — S. Kempisty str. 131.

[6]) Kap. V. § 3 twierdzenia: VI—IX i XI.

Lemat 2. Granica ciągu nierosnącego (niemalejącego) funkcji typu u (l) rzędu $\leqslant \alpha$ jest funkcją rzędu $\leqslant \alpha$, tegoż typu co wyrazy ciągu.

Lemat 3. Funkcja typu u (l) rzędu α jest granicą nierosnącego (niemalejącego) ciągu funkcji typu l (u) rzędu $< \alpha$.

Lemat 4. Suma funkcji typu u (l) rzędu $\leqslant \alpha$ jest funkcją rzędu $\leqslant \alpha$ typu $u(l)$.

Lemat 5. Jeśli $f(x)$ jest funkcją typu u (l) rzędu α, wówczas $-f(x)$ jest typu l (u) tegoż rzędu.

Twierdzenie I. Funkcja klasy bezwzględnej α jest różnicą funkcji typu u rzędu $\leqslant \alpha$.

Dowód. Funkcja $f(x)$ klasy bezwzględnej α jest sumą szeszeregu bezwzględnie zbieżnego funkcji $f_n(x)$ należących do klas bezwzględnych $< \alpha$.

Niech

$$\varphi_n(x) = \frac{f(x) - |f_n(x)|}{2} \qquad \psi_n(x) = \frac{-f_n(x) - |f_n(x)|}{2}$$

wówczas

$$f_n(x) = \varphi_n(x) - \psi_n(x)$$

oraz

$$\varphi_n(x), \quad \psi_n(x) \leq 0.$$

Ponieważ zaś

$$|\varphi_n(x)|, \quad |\psi_n(x)| < |f_n(x)|,$$

więc z bezwzględnej zbieżności szeregu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

wynika, że istnieją sumy:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \tag{1}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x), \tag{2}$$

przyczem

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

Funkcje $f_n(x)$, jako należące do klas bezwzględnych $< \alpha$, należą oczywiście i do klas Baire'a $< \alpha$ a zatem $\varphi_n(x)$ oraz $\psi_n(x)$ będą na mocy określenia również klasy Baire'a $< \alpha$.

Otóż zgodnie z tw. 1, przytoczonem wyżej, wszelka funkcja klasy $\beta < \alpha$ jest rzędu $\beta + 1 \leqslant \alpha$ obu typów, a więc funkcje $\varphi_n(x)$ $\psi_n(x)$ są w szczególności typu u rzędów $\leqslant \alpha$.

Suma skończonej ilości wyrazów w każdym z szeregów (1) (2) jest na mocy lematu 4 funkcją typu u tegoż rzędu, co i wyrazy. Ponieważ zaś owe wyrazy są niewiększe od zera, więc sumy kolejne tworzą ciągi nierosnące a więc zmierzające, według lematu 2, do granic $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ typu u rzędu $\leqslant \alpha$.

Twierdzenie II. Różnica funkcji typu u (l) rzędu α jest funkcją klasy bezwzględnej $\leqslant \alpha$.

Dowód. Różnica funkcji typu u jest również różnicą funkcji typu l, mamy bowiem

$$\varphi(x) - \psi(x) = [-\psi(x)] - [-\varphi(x)],$$

gdy zaś $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są typu u, wówczas na mocy lematu 5 funkcje $-\psi(x)$ i $-\varphi(x)$ są typu l. Mamy więc właściwie tylko jeden wypadek do rozpatrzenia.

Twierdzenie jest oczywiście prawdziwe, gdy $\alpha = 1$, jest to bowiem część przytoczonego twierdzenia 1. Aby można było zastosować zasadę indukcji pozaskończonej, pozostaje udowodnić, że jeśli nasze twierdzenie jest prawdziwe dla $\alpha < \beta$, wówczas zachodzi również przy $\alpha = \beta$.

Niech

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_n, \ldots,$$
$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \ldots, \psi_n, \ldots$$

będą ciągami nierosnącemi funkcji klas monotonicznych $\alpha < \beta$ typu l a zmierzającemi do danych funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ rzędu β typu u (por. lemat 3).

Utwórzmy ciąg

$$\varphi_1 - \psi_1, \varphi_2 - \psi_1, \varphi_2 - \psi_2, \varphi_3 - \psi_2, \ldots, \varphi_n - \psi_n, \varphi_{n+1} - \psi_{(n)} \ldots$$

zmierzający do różnicy $\varphi(x) - \psi(x)$. Wyrazy tego ciągu są kolejnemi sumami skończonej ilości wyrazów szeregu

(3)
$$\varphi_1 - \psi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) - (\psi_2 - \psi_1) + \ldots + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) - (\psi_{n+1} - \psi_n) + \ldots$$

znakozmiennego, gdyż na mocy założenia

$$\varphi_{n+1}-\varphi_n \geqslant 0 \qquad \psi_{n+1}-\psi_n \geqslant 0 .$$

Szereg wyrazów dodatnich

$$\frac{\varphi_1-\psi_1+|\varphi_1-\psi_1|}{2}-(\psi_2-\psi_1)-(\psi_3-\psi_2)+\ldots-(\psi_{n+1}-\psi_n)+\ldots$$

jest zbieżny, gdyż posiada sumę

$$\frac{\varphi_1-\psi_1+|\varphi_1-\psi_1|}{2}-\psi+\psi_1,$$

podobnież zbieżnym jest szereg wyrazów ujemnych

$$\frac{\varphi_1-\psi_1-|\varphi_1-\psi_1|}{2}+(\varphi_2-\varphi_1)+(\varphi_3-\varphi_2)+\ldots+(\varphi_{n+1}-\varphi_n)+\ldots,$$

którego sumą jest

$$\frac{\varphi_1-\psi_1-|\varphi_1-\psi_1|}{2}+\varphi-\varphi_1 .$$

Zatem szereg (3) jest bezwzględnie zbieżny.

Ponieważ założyliśmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla rzędów $\alpha<\beta$, więc różnice:

$$\varphi_{n+1}-\varphi_n , \qquad \psi_n-\psi_{n+1}$$

są funkcjami klas bezwzględnych $\alpha<\beta$.

Suma szeregu (3), jako szeregu bezwzględnie zbieżnego takich różnic, jest więc klasy bezwzględnej β.

Wniosek 1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby funkcja należała do klasy bezwzględnej $\leqslant\alpha$, jest, aby była różnicą funkcji rzędu $\leqslant\alpha$ jednego typu.

Twierdzenie III. Jeśli między funkcjami $g(x)$ i $h(x)$ rzędu $\alpha+1$ a należącemi odpowiednio do typów l i u zachodzi stosunek

$$g(x)>h(x),$$

wówczas istnieje funkcja $f(x)$, która jest różnicą funkcji jednego typu rzędu $\leqslant\alpha$ i spełnia warunek

$$g(x)\geqslant f(x)\geqslant h(x).$$

Dowód. Funkcja $g(x)$, na zasadzie lematu 3, jest granicą ciągu niemalejącego

(4) $$g_1, g_2, g_3 \dots, g_n, \dots$$

funkcji typu u rzędu $\leqslant \alpha$. Podobnie funkcja $h(x)$ jest granicą nierosnącego ciągu

(5) $$h_1, h_2, h_3, \dots, h_n, \dots$$

funkcji typu l rzędu $\leqslant \alpha$.

Utwórzmy szereg

(6)

$$g_1 + \{h_1 - g_1\} - \{h_1 - g_2\} + \{h_2 - g_2\} - \{h_2 - g_3\} + \dots \{h_n - g_n\} - \{h_n - g_{n+1}\} + \dots$$

stosowany przez Hausdorffa [1]) przy dowodzie twierdzenia Hahna (tw. 2), zakładając wraz z Hausdorffem

$$\{h_n - g_m\} = \frac{h_n - g_m + |h_n - g_m|}{2},$$

t. j. większej z liczb: zero i $h_n - g_m$.

Jeśli

$$g(x) > h(x)\ ^{2)},$$

wówczas może istnieć w danym punkcie x tylko skończona ilość wyrazów ciągu (5) lub (4) spełniających nierówność

$$h_n(x) \geqslant g_n(x),$$

zatem szereg (6) posiada w każdym punkcie skończoną ilość wyrazów i jest niewątpliwie bezwzględnie zbieżny. Sumę tego szeregu możemy więc przedstawić w postaci różnicy sum dwóch szeregów:

$$\varphi = \{h_1 - g_1\} + \{h_2 - g_2\} + \dots \qquad + \{h_n - g_n\} + \dots,$$

$$\psi = -g_1 + \{h_1 - g_2\} + \{h_2 - g_3\} + \dots \quad + \{h_n - g_{n+1}\} + \dots$$

Wyrazy obu szeregów są, na zasadzie określenia oraz lematów 5, 4 i 1, funkcjami typu l rzędu $\leqslant \alpha$. Ponieważ wyrazy te, prócz $-g_1$, muszą być na mocy tegoż określenia nie mniejsze od zera, więc ciągi sum skończonych będą niemalejące i jako niemalejące

---

[1]) F. Hausdorff: Über halbstetige Funktionen. *Math. Zeit.* 5 (1910) str. 295.

[2]) Przy $g(x) = h(x)$ nie jesteśmy pewni bezwzględnej zbieżności szeregu (6).

ciągi sum funkcji typu l rzędów $\leqslant \alpha$, będą zmierzały do granic $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ typu l rzędu $\leqslant \alpha$ (lematy 4 i 2). A więc suma szeregu (6) jest różnicą $\varphi - \psi$ funkcji typu l klasy $\leqslant \alpha$.

Ponieważ, jak zaznaczyliśmy wyżej, szereg (6) posiada w każdym punkcie skończoną ilość wyrazów, więc suma jego przybiera wartości $g_n(x)$ lub $h_n(x)$ zależnie od tego czy pierwszym wyrazem mniejszym od zera w ciągu

$$h_1 - g, h_1 - g_2, h_2 - g_2, h_2 - g_3, \ldots \quad , h_n - g_n, h_n - g_{n+1}, \ldots$$

jest $h_n - g_n$ czy też $h_n - g_{n+1}$. W pierwszym wypadku mamy

$$g(x) \geqslant g_n(x) > h_n(x) \geqslant h(x),$$

w drugim

$$g(x) \geqslant g_{n+1}(x) > h_n(x) \geqslant h(x)$$

a więc w obu razach

$$g(x) \geqslant \varphi(x) - \psi(x) \geqslant h(x).$$

Zatem wymienioną w twierdzeniu funkcją $f(x)$ będzie różnica $\varphi(x) - \psi(x)$.

Wniosek 2. Jeśli $F(x)$ jest funkcją obu typów rzędu $\alpha + 1$ zaś ε liczbą dodatnią, wówczas istnieje funkcja $f(x)$, która jest różnicą funkcji rzędu $\leqslant \alpha$ jednego typu i spełnia warunek

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(Wystarczy założyć $g(x) = F(x) + \varepsilon$ zaś $h(x) = F(x) - \varepsilon$).

Wniosek 3. Jeśli $F(x)$ jest funkcją obu typów rzędu $\alpha + 1$ zaś ε liczbą dodatnią, wówczas istnieje funkcja $f(x)$ klasy bezwzględnej $\leqslant \alpha$, spełniająca nierówność

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(na mocy tw. II).

Wniosek 4. Funkcja obu typów rzędu $\alpha + 1$ jest granicą ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji klas bezwzględnych $\leqslant \alpha$.

(Obieramy malejący ciąg liczb dodatnich

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

zmierzający do zera. Odpowiednie przybliżenia

$$f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x), \ldots$$

tworzą ciąg jednostajnie zbieżny o granicy $F(x)$).

Wniosek 5. Funkcja obu typów rzędu $\alpha+1$ jest conajwyżej klasy α Baire'a.

(Ponieważ funkcje $f_n(x)$ są na mocy Wn. 4 klasy bezwzględnej $\leq\alpha$, a więc a fortiori klasy $\leq\alpha$ Baire'a, korzystamy z twierdzenia Lebesgue'a[1]), według którego granica ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji klasy $\leq\alpha$ należy do klasy $\leq\alpha$.

Wniosek 6. Jeśli $F(x)$ jest funkcją klasy α Baire'a zaś ε liczbą dodatnią, wówczas istnieje funkcja $f(x)$ klasy bezwzględnej $\leqslant\alpha$, spełniająca nierówność

$$|F(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

(Opieramy się na przytoczonym twierdzeniu Younga — tw. 1).

Wniosek 7. Funkcja klasy α Baire'a jest granicą ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji klas bezwzględnych $\leqslant\alpha$.

Wniosek 8. Warunkiem koniecznym i wystarczającym należenia funkcji do klasy $\leq\alpha$ Baire'a jest, aby była granicą ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji klas bezwzględnych $\leqslant\alpha$.

---

[1]) H. Lebesgue loc. cit. th. III.