WYTRZYMAŁOŚĆ CIAŁ.

BADANIA ANALITYCZNE

DOTYCZĄCE

CIĘŻARÓW PRZYPADKOWYCH UŻYWANYCH PRZY OBLICZANIU MOSTÓW

PRZEZ

K. BRANDTA

Przedstawione na posiedzeniu Towarzystwa dnia 7 Listopada 1872 roku.

TREŚĆ:

Część I. — Uwagi ogólne. — Przedmiot niniejszej pracy. — Systemat sił nieruchomy. — Pierwsze twierdzenie pomocnicze.. — Drugie twierdzenie pomocnicze. — Trzecie twierdzenie pomocnicze. — Wartości analityczne w punktach przyczepienia sił momentów zgięcia wywartych przez jakikolwiek systemat sił, stale położony na danej belce. — Uwagi. — Sposób graficzny wykreślenia granicy obwodu momentów zgięcia.

CZĘŚĆ II — Systemat sił ruchomy. — Uwagi ogólne. — Czwarte twierdzenie pomocnicze. — Piąte twierdzenie pomocnicze. — Oznaczenie wartości momentów zgięcia wywartych w danej belce przez systemat sił ruchomy. — Wniosek. — Uwagi. — Sposób graficzny otrzymania granicy obwodu wszystkich momentów zgięcia, wywartych w belce przez systemat sił ruchomy. — Przykład. — Wyniki. — Tablica ciężarów jednostajnie rozłożonych na metr bieżący pojedynczej kolei wywierających też same największe momenta zgięcia co pociąg lokomotyw systemu Engert'ha lub Petiet, całkowicie obładowanych.

CZĘŚĆ III. — Zastosowania. — Uwagi ogólne. — Oznaczenie współczynnika poprawki. — Wartość największego momentu zgięcia wywartego w danej belce, kiedy ciężary stały i przypadkowy działają jednocześnie. — Wyniki. — Koniec.

BADANIA ANALITYCZNE

DOTYCZĄCE CIĘŻARÓW PRZYPADKOWYCH UŻYWANYCH PRZY OBLICZANIU MOSTÓW METALICZNYCH.

Uwagi ogólne. — Ciężary przypadkowe dla mostów metalicznych, służących do przeprowadzenia kolei żelaznej, są nadzwyczajnie wielkie w porównaniu z ciężarem stałym, wynikającym z wagi samej budowli. Stosunek ciężaru przypadkowego do ciężaru stałego, może stać się równym stosunkowi 9 do 1 dla mostów, których otwór jest mniejszym od trzech metrów, o czem przekonamy się w dalszym ciągu niniejszej pracy.

Dokładna znajomość wartości tych ciężarów przypadkowych, dla belek znacznej długości i oznaczenie punktu, w którym każdy z nich tworzy największy moment zgięcia, jest rzeczą niezbędną, bez której nie podobnem byłoby, nadać stosownych wymiarów częściom składowym danego do zbudowania mostu.

Wyższa administracya francuzka robót publicznych dla zapobieżenia dotąd nierozwiązanemu zadaniu, oznaczyła 5,000 kilogramów na metr bieżący pojedynczej kolei, dla wszystkich mostów mających otwór pomiędzy przyczułkami, mniejszy od dwudziestu metrów; dla wszystkich zaś mostów których otwór pomiędzy przyczułkami (culées) pzzewyższa dwadzieścia metrów ciężar ten przypadkowy (surcharge) został stale zastąpiony przez ciężar 4,000 kilogramów na metr bieżący pojedynczej kolei.

Nie zamierzamy bynajmniej poszukiwać na jakiéj zasadzie wyższa administracya mogła oznaczyć powyżej podane ilości 5,000 i 4,000 kilogramów; możemy tylko nadmienić i dowieść, że dekret takowy, nie polega bynajmniej na matematyczném dowodzeniu, lecz jest tylko wypływem tak zwanej metody przybliżeń kolejnych (methode de tâtonnement), która nie może wzbudzić najmniejszego zaufania w ludziach poświęcających się tak sztuce Inżynierskiej jako też i w budowniczych; o tem z łatwością możemy się przekonać, rzuciwszy okiem na tablicę podaną w końcu drugiej części tej maleńkiej pracy. Ciężar przypadkowy przepisany przez administracyą jest za słaby.

Przedmiot niniejszej pracy. — Postaramy się w tym artykule : 1° podać sposób obliczania ciężaru jednostajnie rozłożonego, mogącego z dokładnością zastąpić ciężar przypadkowy złożony z jakichkolwiek sił w chwili kiedy on zajmuje na danym moście położenie najniekorzystniejsze.

2° Za pomocą teoryi podanej, obliczymy tablicę ciężarów jednostajnie rozłożonych zastępujących dokładnie ciężary przypadkowe, złożone z pociągu lokomotyw całkowicie obładowanych (à pleine charge) i w chwili kiedy taki pociąg zajmuje na moście położenie najniekorzystniejsze.

Nie podobnem byłoby, dla każdego szczególnego przypadku, na który w praktyce natrafić możemy, obliczać sposobem zwyczajnym, największy moment zgięcia wywarty przez jakikolwiek systemat sił, zmieniający swe położenie na danej belce. Podamy więc sposób, znalezienia od razu najniekorzystniejszego położenia, które zająć może na moście jakikolwiek systemat sił; a znalazłszy to położenie będziemy w stanie wyznaczyć moment zgięcia największy i wartość siły jednostajnie rozłożonej, wywierającej w tymże punkcie ten sam największy moment zgięcia.

Znakowanie przyjęte w całym ciągu niniejszej pracy ma na celu usunięcie czytelnikom wszelkich trudności; może ono być streszczoném w sposób następujący :

p oznacza zawsze siłę składową systematu uważanego.

P » » summę algebraiczną pewnej liczby sił składających systemat.

$\mathfrak{P}$ » » summę algebraiczną wszystkich sił systematu.

d » » odległość każdej z sił systematu od pierwszej.

D » » summę algebraiczną momentów pewnej liczby sił systematu uważanego względem pierwszej.

$\mathfrak{D}$ » » summę algebraiczną momentów wszystkich sił systematu względem pierwszej.

$mM\mu$ oznacza zawsze moment zgięcia wywarty w danej belce: jużto przez jedną siłę działającą samodzielnie, jużto przez cały systemat sił w położeniu jakiemkolwiek, lub w położeniu najniekorzystniejszém.

x, ξ oznacza zawsze odległość pierwszej siły systematu uważanego od najbliższej podpory. Pozostałe znaki, mało używane, znajdą ich określenie w miejscu ich użycia.

CZĘŚĆ PIERWSZA

SYSTEMAT SIŁ NIERUCHOMY.

Dla wyprowadzenia wzorów, dających największy moment zgięcia w jakimkolwiek punkcie belki uważanej, przez działanie sił zmieniających swe położenie na całej jej długości, niezbędną jest znajomość kilku twierdzeń pomocniczych, które podajemy na samym wstępie.

Pierwsze twierdzenie pomocnicze. — *Jeżeli na belkę wolno leżącą na dwóch podporach jednego poziomu, działa w kierunku pionu siła* p_1 *stale przyczepiona w jednym z jej punktów, to obwód wszystkich momentów zgięcia wywartych przez nią przedstawiony jest dwiema liniami prostemi, a moment zgięcia największy znajduje się w punkie przyczepienia siły* p_1.

W samej rzeczy: niech będzie belka długości l spoczywająca na dwóch podporach jednego poziomu w punktach A i B (fig. 1).

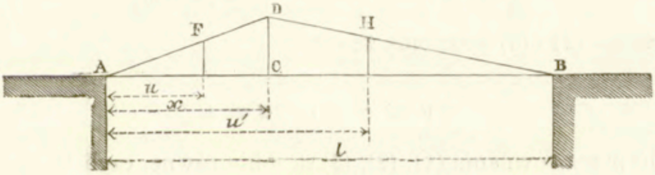

Fig. 1.

Niech będzie siła p_1 przyczepiona w jednym z punktów tej belki np. w punkcie C,

x odległość punktu C od podpory A,

$m_{1\cdot 1}$. moment zgięcia w punkcie C.

Równanie dające nam wartość momentu zgięcia w punkcie przyczepienia siły p_1 jest następujące:

$$m_{1\cdot 1} = \frac{1}{l} p_1 (l - x) x. \tag{1}$$

Niech będzie nadto

$m'_{1\cdot 1}$. moment zgięcia wywarty w belce w punkcie naprzykład F leżącym pomiędzy punktami A i C;

u odległość tego punktu F od końca A.

Moment zgięcia w punkcie F będzie wyrażony przez równanie:

$$m'_{1\cdot 1\cdot} = \frac{1}{l} p_1 (l - x) u \tag{2}$$

Równanie (2) przedstawia nam linię prostą przechodzącą pzzez początek A; w samej rzeczy, przypuśćmy na chwilę że

$$u=0,$$

w takim razie otrzymamy

$$m^{f}_{1\cdot1}=0\,;$$

a założywszy $u=x$, otrzymamy

$$m^{f}_{1\cdot1}=m_{1\cdot1}.$$

Niech będzie

$m^{h}_{1\cdot1}$. moment zgięcia wywarty w punkcie H leżącym pomiędzy punktami C i B,

u' odległość tego punktu H od końca A;

moment zgięcia wywarty w punkcie H będzie wyrażonym przez równanie następujące :

$$m^{h}_{1\cdot1}=\frac{1}{l}p_1(l-u')x. \tag{3}$$

Równanie to jest równaniem linii prostej przechodzącej przez początek B i przez punkt H; mamy bowiem dla

$$u'=l, \qquad m^{h}_{1\cdot1}=0;$$

a dla

$$u'=x, \qquad m^{h}_{1\cdot1}=m_{1\cdot1}.$$

Porównywając równania (2) i (3) widziemy że dla

$$u=x \quad \text{i} \quad u'=x$$

momenta zgięcia dane przez równania (1), (2), (3) są sobie równe, czyli że

$$m^{f}_{1\cdot1}=m_{1\cdot1}=m^{h}_{1\cdot1}\,;$$

to jest że linje proste wyrażone przez równania (2) i (3) mają punkt zbiegu w punkcie D na prostopadłej przechodzącej przez punkt przyczepienia siły p_1 a zatem moment zgięcia wyrażony najprzód przez równanie (2) wzrasta bezustannie wychodząc z punktu A i dążąc ku punktowi C : po przejściu za punkt C, ten moment zgięcia wyrażony jest przez równanie (3) i zmniejsza się stopniowo aż do zera, wartość którą nabywa w punkcie B; wskutek więc tego moment zgięcia o którym mówimy jest największy w punkcie przyczepienia siły p_1, co było do okazania.

Drugie twierdzenie pomocnicze. — *Jeżeli na belkę wolno leżącą na dwóch podporach jednego poziomu, działa jakikolwiek systemat sił pionowych stale przyczepiony na jej długości, to granica obwodu wszystkich momentów zgięcia wywartych w belce jest wielokątem prostolinijnym a moment zgięcia największy, znajduje się w jednym z jego wierzchołków, to jest, w punkcie przyczepienia jednej z sił systematu uważanego.*

Niech będzie belka długości l, wolno leżąca na dwóch podporach jednego poziomu A i B (fig. 2).

Niech będą

Q i Q′ oddziaływania podpór w punktach A i B;

$M_1, M_2, M_3 \ldots M_i \ldots M_{n-1}, M_n$ momenta zgięcia w punktach przyczepienia sił systematu wziętego pod uwagę.

Dla okazania że granicą obwodu wszystkich momentów zgięcia jest wielokąt prostolinijny, dosta-

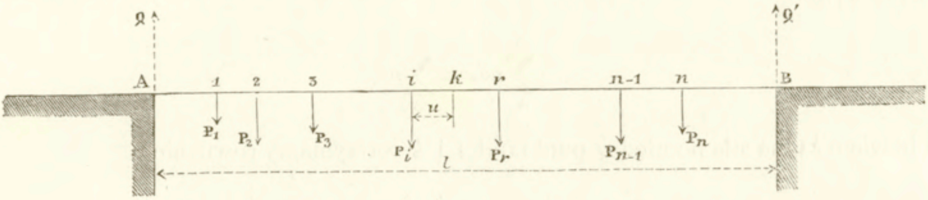

Fig. 2.

tecznem jest dowieść że pomiędzy dwiema po sobie następującemi jakiemikolwiek siłami systematu uważanego, granicą obwodu wszystkich momentów zgięcia jest linia prosta.

Wiemy że moment zgięcia w punkcie naprzykład i przyczepienia siły p_i, wywarty przez cały system sił, jest dany przez równanie następujące

$$(1) \qquad M_i = QAi - \sum_A^i pd_i,$$

w którém wyraz $\sum_A^i pd_i$ oznacza, względem punktu i, summę algebraiczną momentów wszystkich sił systematu, zawartych pomiędzy A i i, a d_i oznacza odległość jakiejkolwiek siły od punktu i.

Niech będzie punkt k przyczepienia najbliższej siły od poprzedzającej naprzykład siły p_k, moment zgięcia wywarty w punkcie k przez cały systemat sił, jest dany przez równanie następujące:

$$(2) \qquad M_k = QAk - \sum_A^k pd_k,$$

w którém

M_k oznacza moment zgięcia wywarty w punkcie k przez cały systemat sił.

$\sum_A^k pd_k$ oznacza summę algebraiczną momentów wszystkich sił systematu, zawartych pomiędzy punktami A i k, względem punktu k.

Widzimy z równania (2) że pierwszy wyraz może się napisać w sposób następujący:

$$QAk = Q(Ai + ik)$$

a wyraz drugi pd_k może być zastąpiony przez

$$pd_k = p(Ai + ik)$$

a zatem równanie (2) przedstawi się w kształcie

$$M_k = QAi - \sum_A^k pd_i + ik\left(Q - \sum_A^k p\right);$$

z uwagi zaś że wyraz

$$\sum_A^k pd_i = \sum_A^i pd_i,$$

nie działa bowiem żadna siła pomiędzy punktami i i k, otrzymamy równanie

$$M_k = QAi - \sum_A^i pd_i + ik\left(Q - \sum_A^k p\right) = M_i + ik\left(Q - \sum_A^k p\right).$$

Przyjmując za początek punkt i i oznaczając przez u długość ik, otrzymamy

(3) $$M_k = M_i + u\left(Q - \sum_A^k p\right).$$

Równanie (3) będąc pierwszego stopnia względem u przedstawia linię prostą. Przypuśćmy że w tém równaniu

$$u = 0,$$

otrzymamy

$$M_k = M_i,$$

czyli że prosta wyrażona równaniem (3) przechodzi przez punkt (M_i, A_i).

Dostatecznem więc teraz będzie sprawdzić, czy wartość M_r czyni zadość równaniu (3), to jest, czy moment zgięcia w punkcie r czyni zadość linii prostej danej (3).

Moment zgięcia w punkcie przyczepienia siły p_r wyrażonym jest przez równanie

(4) $$M_r = QAr - \sum_A^r pd_r;$$

założywszy w równaniu (3) $u = ir$, otrzymamy:

(5) $$M_k = M_i + ir\left(Q - \sum_A^r p\right)$$

Podstawiając w równaniu (5) za M_i wartość wyciągniętą z równania (1) otrzymamy

(6) $$M_k = QAi - \sum_A^i pd_i + ir\left(Q - \sum_A^r p\right) = QAr - \sum_A^r pd_r.$$

Równania (4) i (6) mają drugie strony równe, wartość więc momentu zgięcia M_r, czyni także zadość równaniu (3); wskutek więc tego widzimy że: granica obwodu momentów zgięcia wywartych w belce wolno leżącej na dwóch podporach jednego poziomu, przez systemat sił stale położony na całej jej długości jest wielokątem prostolinijnym, którego wierzchołki odpowiadają punktom przyczepienia sił składających systemat wzięty pod uwagę.

Moment zgięcia największy znajduje się w jednym z wierzchołków wielokąta; w samej rzeczy : dowiedliśmy powyżej że pomiędzy dwiema siłami składającemi systemat uważany i po sobie następującemi, granicą momentów zgięcia jest linia prosta, której końce odpowiadają punktom przyczepienia sił wziętych pod uwagę; wyrażenie momentu zgięcia jest funkcyą linijną, która w tych granicach zmniejsza się lub powiększa w sposób ciągły, nie może więc zajść żadne maximum pomiędzy dwoma punktami przyczepienia sił po sobie następujących, a więc moment zgięcia największy przypaść musi w jednym z wierzchołków wielokąta.

Trzecie twierdzenie pomocnicze. *Moment zgięcia całkowity wywarty w jakimkolwiek punkcie belki, wolno leżącej na dwóch podporach jednego poziomu, przez działanie jakiegokolwiek systematu sił pionowych stale na niej położonego, równa się summie algebraicznej momentów zgięcia wywartych w tymże punkcie przez każdą z sił jak gdyby one działały każda z osobna.*

Niech będzie belka długości l wolno leżąca na dwóch podporach A i B jednego poziomu (fig. 3).

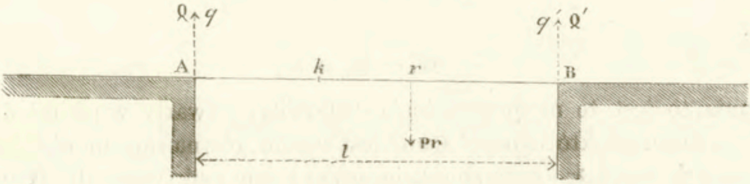

Fig. 3.

Niech będzie

M_k moment zgięcia wywarty w punkcie k przez systemat sił wzięty pod uwagę,

Q i Q′ oddziaływania podpór w punktach A i B.

Twierdzenie to będzie dowiedzionėm jak okażemy, że dodając do systematu wziętego pod uwagę jakąkolwiek nową siłę p_r, moment zgięcia całkowity wywarty w punkcie k jest równy summie algebraicznej momentów zgięcia wywartych w tymże punkcie kiedy systemat sił działa oddzielnie i kiedy siła p_r działa sama.

W samej rzeczy, wiemy że równanie momentu zgięcia wywartego w punkcie k przez systemat sił wzięty pod uwagę jest następujące:

(1) $$M_k = QAk - \sum_A^k pd_k$$

$\sum_A^k pd_k$ wyraża tu summę momentów wszystkich sił systematu, względem punktu k, zawartych pomiędzy punktami A i k.

Wiemy nadto że równanie momentu zgięcia wywartego w punkcie k przez działanie samej siły

p_r jest

$$m_k = qAk. \tag{2}$$

m_k przedstawia tu moment zgięcia wywarty w punkcie k przez siłę p_r, q i q' oddziaływania podpór w punktach A i B, skutkiem siły p_r oddzielnie działającej.

Gdybyśmy oznaczyli przez M'_k moment zgięcia wywarty w punkcie k w chwili kiedy siła p_r działa wspólnie z całym systematem, w takim razie równanie dające moment zgięcia, byłoby

$$M'_k = (Q+q)Ak - \sum_A^k pd_k \tag{3}$$

wyraz $\sum_A^k pd_k$ ma tęż samą wartość co w równaniu (1), siła bowiem p_r leży na zewnątrz przestrzeni Ak.

Równanie (3) możemy napisać w sposób następujący

$$M'_k = QAk - \sum_A^k pd_k + qAk \tag{4}$$

czyli że

$$M'_k = M_k + m_k$$

co było do okazania, to jest że moment zgięcia całkowity, wywarty w jakimkolwiek punkcie belki przez działanie systematu sił, którego położenie jest stałém, równa się summie algebraicznej momentów zgięcia wywartych w tymże samym punkcie, przez każdę z sił systematu działającą oddzielnie.

Wartości analityczne, w punktach przyczepienia sił, momentu zgięcia wywartego przez jakikolwiek systemat sił stale położony na danej belce.

Niech będzie belka długości l wolno leżąca na dwóch podporach jednego poziomu w punktach A i B (fig. 4) na którą działa systemat sił stale położony.

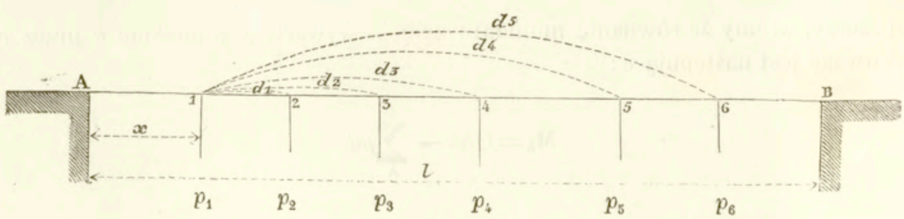

Fig. 4.

Oznaczmy przez :

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, \ldots \text{etc.}$$

siły składające systemat wzięty pod uwagę.

Niech będzie :

x odległość pierwszej siły od punktu podpory A,

$d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \ldots$ etc., odległości, każdej z sił systematu od pierwszej,

$m_{1\cdot 1}, m_{2\cdot 2}, m_{3\cdot 3}, m_{4\cdot 4}, m_{5\cdot 5}, m_{6\cdot 6} \ldots$ etc., momenta zgięcia wywarte przez każdą siłę w punkcie jej przyczepienia,

$m_{2\cdot 1}, m_{3\cdot 1}, m_{4\cdot 1}, m_{5\cdot 1}, m_{6\cdot 1}, \ldots$ etc., momenta zgięcia wywarte w punkcie przyczepienia pierwszej siły p_1, przez pozostałe siły systematu, działające każda z osobna.

Liczba sześciu sił, którą przyjmujemy, jest dostateczną do uchwycenia ogólnego prawa, które pozwoli nam wypisać od razu wartość jakiegokolwiek momentu zgięcia wywartego w punkcie przyczepienia którejkolwiek z sił systematu wziętego pod uwagę.

Dla jasności określeń przyjętych, podajemy tu tablicę zawierającą wszystkie wartości momentów zgięcia wywarte w każdym z punktów przyczepienia sił składających systemat wzięty pod uwagę, przez każdą z pozostałych sił systematu, działającą oddzielnie.

Oznaczenie siły.	PUNKTA PRZYCZEPIENIA SIŁ.					
	p_1		p_2		p_3	
p_1	$m_{1\cdot 1}$	$\frac{1}{l} p_1 (l - x) x$	$m_{1\cdot 2}$	$\frac{1}{l} p_1 (l - x - d_1) x$	$m_{1\cdot}$	$\frac{1}{l} p_1 (l - x - d_2) x$
p_2	$m_{2\cdot 1}$	$\frac{1}{l} p_2 (l - x - d_1) x$	$m_{2\cdot 2}$	$\frac{1}{l} p_2 (l - x - d_1)(x + d_1)$	$m_{2\cdot 3}$	$\frac{1}{l} p_2 (l - x - d_2) x + d_1)$
p_3	$m_{3\cdot 1}$	$\frac{1}{l} p_3 (l - x - d_2) x$	$m_{3\cdot 2}$	$\frac{1}{l} p_3 (l - x - d_2)(x + d_1)$	$m_{3.3}$	$\frac{1}{l} p_3 (l - x - d_2)(x + d_2)$
p_4	$m_{4\cdot 1}$	$\frac{1}{l} p_4 (l - x - d_3) x$	$m_{4\cdot 2}$	$\frac{1}{l} p_4 (l - x - d_3)(x + d_1)$	$m_{4\cdot 3}$	$\frac{1}{l} p_4 (l - x - d_3)(x + d_2)$
p_5	$m_{5\cdot 1}$	$\frac{1}{l} p_5 (l - x - d_4) x$	$m_{5\cdot 2}$	$\frac{1}{l} p_5 (l - x - d_4)(x + d_1)$	$m_{5\cdot 3}$	$\frac{1}{l} p_5 (l - x - d_4)(r + d_2)$
p_6	$m_{6\cdot 1}$	$\frac{1}{l} p_6 (l - x - d_5) x$	$m_{6\cdot 2}$	$\frac{1}{l} p_6 (l - x - d_5)(x + d_1)$	$m_{6\cdot 3}$	$\frac{1}{l} p_6 (l - x - d_5)(x + d_2)$
	p_4		p_5		p_6	
p_1	$m_{1\cdot 4}$	$\frac{1}{l} p_1 (l - x - d_3) x$	$m_{1\cdot 5}$	$\frac{1}{l} p_1 (l - x - d_4) x$	$m_{1\cdot 6}$	$\frac{1}{l} p_1 (l - x - d_5) x$
p_2	$m_{2\cdot 4}$	$\frac{1}{l} p_2 (l - x - d_3)(x + d_1)$	$m_{2\cdot 5}$	$\frac{1}{l} p_2 (l - x - d_4)(x + d_1)$	$m_{2\cdot 6}$	$\frac{1}{l} p_2 (l - x - d_5)(x + d_1)$
p_3	$m_{3\cdot 4}$	$\frac{1}{l} p_3 (l - x - d_3)(x + d_2)$	$m_{3\cdot 5}$	$\frac{1}{l} p_3 (l - x - d_4)(x + d_2)$	$m_{3\cdot 6}$	$\frac{1}{l} p_3 (l - x - d_5)(x + d_2)$
p_4	$m_{4\cdot 4}$	$\frac{1}{l} p_4 (l - x - d_3)(x + d_3)$	$m_{4\cdot 5}$	$\frac{1}{l} p_4 (l - x - d_4)(x + d_3)$	$m_{4\cdot 6}$	$\frac{1}{l} p_4 (l - x - d_5)(x + d_3)$
p_5	$m_{5\cdot 4}$	$\frac{1}{l} p_5 (l - x - d_4)(x + d_3)$	$m_{5\cdot 5}$	$\frac{1}{l} p_5 (l - x - d_4)(x + d_4)$	$m_{5\cdot 6}$	$\frac{1}{l} p_5 (l - x - d_5)(x + d_4)$
p_6	$m_{6\cdot 4}$	$\frac{1}{l} p_6 (l - x - d_5)(x + d_3)$	$m_{6\cdot 5}$	$\frac{1}{l} p_6 (l - x - d_5)(x + d_4)$	$m_{6\cdot 6}$	$\frac{1}{l} p_6 (l - x - d_5)(x + d_5)$

W powyższej tablicy naprzeciwko każdego momentu zgięcia m znajduje się jego wartość analityczna, która otrzymuje się z łatwością używając pierwszego twierdzenia pomocniczego.

Oznaczmy przez :

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4,\ M_5,\ N_6 \ldots \text{i t. d.}$$

momenta zgięcia w punktach przyczepienia każdej siły kiedy takowe działają wspólnie; wiemy że moment zgięcia całkowity, wywarty w punkcie przyczepienia każdej siły przez wszystkie siły systematu uważanego, jest summą algebraiczną momentów zgięcia wywartych w tym punkcie przez każdą z sił działającą oddzielnie; dodając więc do siebie wyrażenia zawarte w powyżej podanej tablicy otrzymamy :

$$\begin{array}{lll}
\text{Dla punktu} & 1 - & M_1 = m_{1\cdot1} + m_{2\cdot1} + m_{3\cdot1} + m_{4\cdot1} + m_{5\cdot1} + m_{6\cdot1} + \ldots \text{etc,} \\
\text{»} & 2, & M_2 = m_{1\cdot2} + m_{2\cdot2} + m_{3\cdot2} + m_{4\cdot2} + m_{5\cdot2} + m_{6\cdot2} + \ldots \text{etc,} \\
\text{«} & 3, & M_3 = m_{1\cdot3} + m_{2\cdot3} + m_{3\cdot3} + m_{4\cdot3} + m_{5\cdot3} + m_{6\cdot3} + \ldots \text{etc,} \\
\text{«} & 4, & M_4 = m_{1\cdot4} + m_{2\cdot4} + m_{3\cdot4} + m_{4\cdot4} + m_{5\cdot4} + m_{6\cdot4} + \ldots \text{etc,} \\
\text{«} & 5, & M_5 = m_{1\cdot5} + m_{2\cdot5} + m_{3\cdot5} + m_{4\cdot5} + m_{5\cdot5} + m_{6\cdot5} + \ldots \text{etc,} \\
\text{«} & 6, & M_6 = m_{1\cdot6} + m_{2\cdot6} + m_{3\cdot6} + m_{4\cdot6} + m_{5\cdot6} + m_{6\cdot6} + \ldots \text{etc.}
\end{array}$$

Podstawiając w tych równaniach za $m_{1\cdot1}$, $m_{1\cdot2}$, $m_{1\cdot3}$ ... i t d. odpowiednie im wartości znosząc mianownik i oznaczając przez :

$$\begin{array}{ll}
P_1 = p_1 & \\
P_2 = p_1 + p_2 & D_2 = p_2 d_1 \\
P_3 = p_1 + p_2 + p_3 & D_3 = p_2 d_1 + p_3 d_2 \\
P_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 & D_4 = p_2 d_1 + p_3 d_2 + p_4 d_3 \\
P_5 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 & D_5 = p_2 d_1 + p_3 d_2 + p_4 d_3 + p_5 d_4 \\
\mathfrak{P} = P_6 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \ldots & \mathfrak{D} = D_6 = p_2 d_1 + p_3 d_2 + p_4 d_3 + p_5 d_4 + p_6 d_5 + \ldots
\end{array}$$

Otrzymamy na ostateczną wartość momentu zgięcia wywartego w punktach powyżej oznaczonych równania następujące :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\text{Dla punktu} & 1, & l M_1 = x[(l-x)\mathfrak{P} - \mathfrak{D}] \\
\text{«} & 2, & l M_2 = (l - x - d_1) P_1 x + (x + d_1)[(l - x)(\mathfrak{P} - P_1) - \mathfrak{D}] \\
\text{«} & 3, & l M_3 = (l - x - d_2)(P_2 x + D_2) + (x + d_2)[(l - x)(\mathfrak{P} - P_2) - (\mathfrak{D} - D_2)] \\
\text{«} & 4, & l M_4 = (l - x - d_3)(P_3 x + D_3) + (x + d_3)[(l - x)(\mathfrak{P} - P_3) - (\mathfrak{D} - D_3)] \\
\text{«} & 5, & l M_5 = (l - x - d_4)(P_4 x + D_4) + (x + d_4)[(l - x)(\mathfrak{P} - P_4) - (\mathfrak{D} - D_4)] \\
\text{«} & 6, & l M_6 = (l - x - d_5)(\mathfrak{P} x + \mathfrak{D})
\end{array}\right.$$

Przeglądając z uwagą równania (1) z łatwością dostrzeżemy ogólne prawo na mocy którego możemy wypisać odrazu wartość momentu zgięcia, wywartego w jakimkolwiek punkcie przyczepienia jednej z sił, przez systemat złożony z n sił działających jednocześnie.

Tak, mamy w punkcie przyczepienia siły np. p_i gdzie wskaźnik i jest zawarty w granicach

$$1 < i < n,$$

$$l\mathrm{M}_i = (l - x - d_{(i-1)})(\mathrm{P}_{(i-1)}x + \mathrm{D}_{(i-1)}) + (x + d_{(i-1)})[(l - x)(\mathfrak{P} - \mathrm{P}_{(i-1)}) - (\mathfrak{D} - \mathrm{D}_{(i-1)})]:$$

w punkcie przyczepienia przedostatniej siły $p_{(n-1)}$ otrzymamy równanie

$$l\mathrm{M}_{(n-1)} = (l - x - d_{(n-2)})(\mathrm{P}_{(n-2)}x + \mathrm{D}_{(n-2)}) + (x + d_{(n-2)})[(l - x)(\mathfrak{P} - \mathrm{P}_{(n-2)}) - (\mathfrak{D} - \mathrm{D}_{(n-2)})];$$

nakoniec wyrażenie momentu zgięcia w punkcie przyczepienia ostatniej siły p_n systematu uważanego będzie

$$l\mathrm{M}_n = (l - x - d_{(n-1)})(\mathfrak{P}x + \mathfrak{D})$$

$\mathfrak{P}$ oznacza tu jak poprzednio summę algebraiczną wszystkich sił systematu uważanego,

$\mathfrak{D}$ summę algebraiczną momentów wszystkich sił systematu wziętego pod uwagę względem pierwszej; czyli że mamy

$$\mathfrak{P} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \ldots + p_i + \ldots p_{n-1} + p_n,$$

$$\mathfrak{D} = p_2d_1 + p_3d_2 + p_4d_3 + p_5d_4 + p_6d_5 + \ldots + p_{(i-1)}d_{(i-2)} + p_id_{(i-1)} + \ldots + p_{(n-1)}d_{(n-2)} + p_nd_{(n-1)}.$$

Uwaga. Zadanie, które w tej chwili rozwiązaliśmy, może być zastosowaném w szczególności do obliczania belek prostych na które działa jakikolwiek systemat sił leżący na całej ich długości; przypadek ten ma miejsce w praktyce dla mostów lub wiaduktów, w których główne belki mając wielką odległość podtrzymują poprzecznice (entretoises), których odległości przechodzą granicę, poza którą ciężar przelany na belki mógłby być uważanym jako ciężar jednostajnie rozłożony.

Granica odległości poprzecznic nie powinna przewyższać $1^m,30$, żeby ciężar przez nie przelany na belki mógł być zamienionym dla ułatwienia rachunku, na ciężar jednostajnie rozłożony.

Znajomość dokładna największego momentu zgięcia wywartego w danej belce przez jakikolwiek systemat sił, jako też punktu w którym on ma miejsce, jest rzeczą niezbędną, bez niej bowiem nie bylibyśmy w stanie wyznaczyć ostatecznych wymiarów belki; lecz otrzymanie tego maximum wymaga rozwiązania tylu równań podobnych do poprzedzających (1) ile jest sił działających na belkę i wybrania z pomiędzy wypadków tego, którego wartość liczebna bezwzględnie na znak, jest największą: zadanie więc to staje się o tyle mozolniejszém o ile liczba sił składających systemat uważany jest większą; dla uniknienia podobnej pracy podamy tutaj sposób graficzny otrzymania największego momentu zgięcia nie rozwiązując żadnego z równań powyżej podanych.

Sposób graficzny wykreślenia granicy obwodu momentów zgięcia wywartych w jakiejkolwiek belce przez jakikolwiek systemat sił stale leżący na jej długości.

Niech będzie belka długości l wolno leżąca na dwóch podporach stałych A i B, niech będzie systemat sił działający na belkę w położeniu oznaczoném na figurze 4ej.

Siły składające systemat uważany są:

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6.$$

Odległości ich od pierwszej siły p_1, są :

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5.$$

Przypuśćmy naprzód że siła p_1, działa sama, wszystkie momenta zgięcia wywarte w belce będą zawarte w trójkącie ADB a granicą ich obwodu będzie linia łamana AD, DB ; wiemy z 1go twierdzenia pomocniczego, że moment zgięcia największy znajduje się w punkcie przyczepienia siły p_1, a wielkość jego możemy oznaczyć linią prostą, odcinając na prostopadłej przechodzącej przez punkt 1 przyczepienia siły p_1 długość 1,D równoważną momentowi zgięcia, który wyznaczymy za pomocą równania podanego w twierdzeniu 1em .

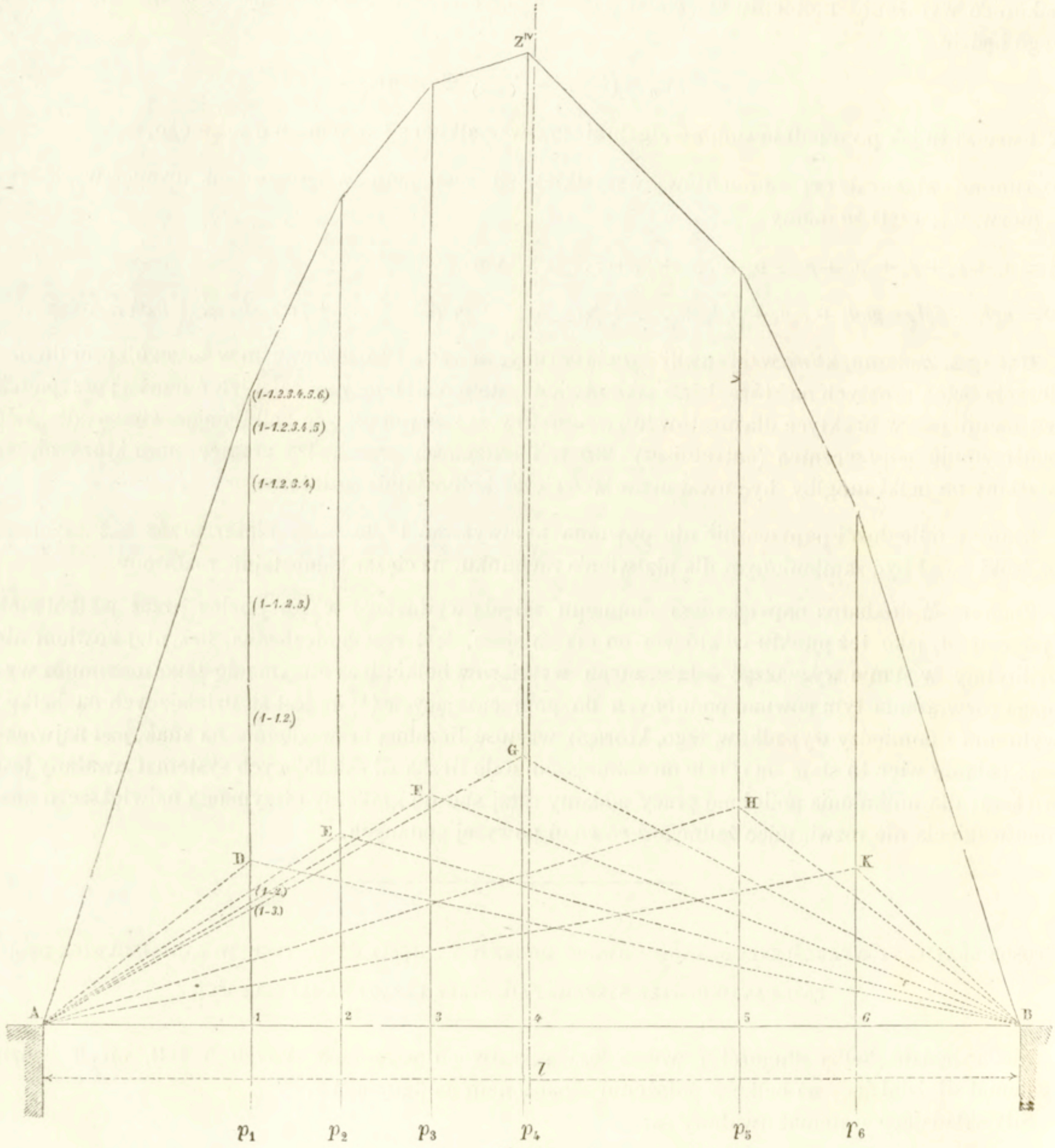

Fig. 5.

Gdyby siła p_2 działała sama, otrzymalibyśmy w sposób podobny do poprzedzającego tak granicę obwodu jako też i największy moment zgięcia, to jest dla granicy obwodu wszystkich momentów zgięcia, linię łamaną AE, EB, a dla momentu zgięcia największego długość 2,E.

Postępując w podobny sposób z każdą z sił składających systemat uważany otrzymamy :

dla sił :	p_1,	p_2,	p_3,	p_4,	p_5,	p_6.
granice obwodu :	AD,DB;	AE,EB;	AF,FB;	AG,GB;	AH,HB;	AK,KB.
momenta zgięcia maximum	1,D;	2,E;	3,F;	4,G;	5,H;	6,K.

Przypuśćmy na chwilę że siły p_1 i p_2 działają jednocześnie odrzucając wszystkie inne; moment zgięcia wywarty przez siłę p_2 w punkcie przyczepienia siły p_1, równa się długości (1.2), a ponieważ moment zgięcia wywarty w tymże punkcie przez siłę p_1 równy jest (1.D) a zatem dodając te dwa momenta do siebie, otrzymamy moment całkowity w punkcie przyczepienia siły p_1, równy (1, D + 1.2) czyli (1 — 1,2) przedstawiony na figurze 5ej.

Wziąwszy pod uwagę trzy siły p_1, p_2, p_3, odrzucając wszystkie inne, otrzymalibyśmy w punkcie przyczepienia siły p_1, moment zgięcia całkowity przedstawiony linią (1 — 1.2.3), i t. d.

W podobny sposób możemy otrzymać wielkości momentów zgięcia w punktach przyczepienia wszystkich sił systematu kiedy takowe działają razem, a łącząc pomiędzy sobą liniami prostemi tak znalezione punkta, otrzymamy obwód wszystkich momentów zgięcia wywartych w belce przez systemat sił uważany. Figura 5a daje nam jego kształt, i największy z momentów zgięcia, który w danym przypadku znajduje się na prostopadłej przechodzącej przez punkt przyczepienia siły p_4, a jego wielkość geometryczna równa się (4, Z^{IV}).

Widzimy więc że sposób otrzymania granicy obwodu momentów zgięcia wywartych w jakiejkolwiek belce, działaniem jakiegokolwiek systematu sił stale na niej położonego, podany powyżej, jest sposobem ogólnym; ma on nadto tę zaletę że wyznacza natychmiast siłę w punkcie przyczepienia której największy z momentów zgięcia zostaje wywartym; znając tę siłę i rozwiązując równanie jej odpowiednie w grupie równań (1), otrzymamy wartość analityczną największego z momentów zgięcia, która zarazem posłużyć może jako sprawdzenie metody graficznej.

W przypadku przedstawionym na figurze 5ej największy z momentów zgięcia przypada w punkcie przyczepienia siły p_4, a zatem należy rozwiązać równanie następujące wzięte w grupie równań (1) :

$$lM_4 = (l - x - d_3)(P_3x + D_3) + (x + d_3)\left[(l - x)(\mathfrak{P} - P_3) - (\mathfrak{D} - D_3)\right].$$

CZĘŚĆ DRUGA

SYSTEMAT SIŁ RUCHOMY.

Uwagi ogólne.— Rozwiązanie zadania zawartego w pierwszej części niniejszej pracy znajduje natychmiastowe zastosowanie przy obliczaniu mostów metalicznych, złożonych z prostych belek, dla których ciężary przypadkowe są bardzo małe w porównaniu z ciężarem stałym wynikającym z wagi samego mostu, lub też w razie kiedy ciężar przypadkowy jest jednostajnie rozłożony na całej długości mostu. Rzecz dzieje się zupełnie inaczej jeżeli ciężar jednostajnie rozłożony zastąpimy przez ciężar ruchomy, którego stosunek do ciężaru stałego jest bardzo wielki, lub kiedy ciężar ten przypadkowy składa się z kilku ciężarów pojedynczych rozłożonych na całej długości belki, bez żadnej symetryi i nierównych sobie; nie wahamy się powiedzieć iż dla podobnego systematu sił nie jesteśmy w stanie oznaczyć z góry położenia najniekorzystniejszego.

Zadanie to jako też i metoda za pomocą której podamy jego rozwiązanie stanowią przedmiot tej drugiej części naszej pracy.

Czwarte Twierdzenie pomocnicze. — *Jeżeli siła pionowa, działająca na belkę wolno leżącą na dwóch podporach jednego poziomu, zmienia swe położenie w sposób ciągły na całej długości belki, w takim razie granica obwodu wszystkich momentów zgięcia wywartych w belce jest parabola, której wierzchołek leży na prostopadłej przechodzącej przez środek belki i odpowiada największemu momentowi zgięcia, jaki w tejże belce przez daną siłę wywartym być może.*

Dla dowiedzenia niniejszego twierdzenia weźmy pod uwagę belkę długości l leżącą na dwóch podporach A i B jednego poziomu.

Niech będą:

p_1 siła działająca na belkę;

x odległość jej od podpory A;

$m_{1\cdot 1}$ moment zgięcia wywarty w belce w punkcie przyczepienia siły p_1.

Równanie dające wartość momentu zgięcia wywartego w belce w punkcie przyczepienia siły p_1 jest następujące

$$m_{1\cdot 1} = \frac{1}{l} p_1 (l - x)\, x. \tag{1}$$

Przypuśćmy że siła p_1 zmienia swe położenie na belce przechodząc przez wszystkie punkta zawarte pomiędzy końcami A i B: odległość x siły p_1 od punktu podpory A w czasie tego ruchu przybierać będzie wszelkie wartości zawarte pomiędzy o i l; widzimy więc z łatwością że równanie (1) przedstawia granicę obwodu wszystkich momentów zgięcia wywartych w belce przez siłę p_1, poruszającą się ruchem ciągłym.

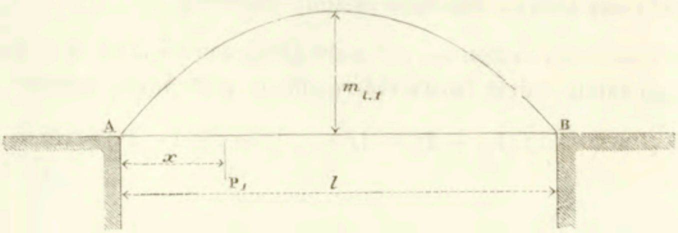

Fig. 5.

Równanie (1) w którem wchodzi x w potędze 2_{ej} jest równaniem paraboli, które z łatwością sprowadzilibyśmy do ogólnego kształtu znosząc wyraz pierwszego stopnia co do x przez proste przestawienie osi y.

Największy moment zgięcia znajduje się w środku belki: w samej rzeczy, dwa czynniki zawierające zmienną x, których summa jest stałą i równą l, dają iloczyn największy, w chwili kiedy x przybiera wartość

$$x = \frac{1}{2}\, l;$$

widzimy więc że największy moment zgięcia wywarty w belce przez siłę p_1 poruszającą się w sposób ciągły na całej jej długości znajduje się w środku belki, i w chwili kiedy siła p_1 przechodzi przez ten punkt.

Piąte Twierdzenie pomocnicze. *Jeżeli systemat sił pionowych, działający na belkę wolno leżącą na dwóch podporach jednego poziomu, zmienia swe położenie w sposób ciągły na całéj jej długości, to granica obwodu wszystkich momentów zgięcia wywartych w belce jest wielokątem złożonym z łuków parabolicznych.*

Wiemy z Twierdzenia 1go (Część pierwsza) że momenta zgięcia największe wywarte w belce znajdują się w punktach przyczepienia sił. Granicą obwodu jest wielokąt złożony z łuków których każdy punkt odpowiada momentowi zgięcia wywartemu w tymże punkcie przez systemat sił wzięty pod uwagę; te momenta zgięcia przedstawione są łukami parabol, wartość bowiem momentu zgięcia wywartego w punkcie przyczepienia siły p_i, czyli M_i daną jest przez równanie

$$l\mathrm{M}_i = (l - x - d_{(i-1)})(\mathrm{P}_{(i-1)}x + \mathrm{D}_{(i-1)}) + (x + d_{(i-1)})[(l - x(\mathfrak{P} - \mathrm{P}_{(i-1)}) - (\mathfrak{D} - \mathrm{D}_{(i-1)})],$$

w którém druga strona zawiera tylko wyrazy co do x, stopnia drugiego, pierwszego lub wyrazy stałe: otoż zmieniając położenie osi y z łatwością zniesiemy wyrazy zawierające x w stopniu pierwszym i wyrazy stałe, a w ten sposób sprowadzimy powyższe równanie do ogólnego kształtu paraboli; widzimy więc że granicą obwodu wszystkich momentów zgięcia wywartych w belce przez systemat sił ruchomy jest wielokąt złożony z łuków parabolicznych, których wszystkie punkta odpowiadają momentom zgięcia wywartym w punktach przyczepienia sił.

Oznaczenie wartości największych momentów zgięcia, wywartych w danej belce przez systemat sił ruchomy.

Wartości momentów zgięcia wywartych w punktach przyczepienia sił są nam znane z równań zawartych w grupie (1) (Część pierwsza) wyrażonych w funkcyi x, to jest, odległości pierwszej siły systematu od najbliższej podpory, kiedy systemat uważany jest nieruchomy.

Przypuśćmy obecnie że dany systemat sił porusza się ruchem ciągłym na belce; zmienna x podczas tego ruchu przybierać będzie wszelkie wartości zawarte pomiędzy punktem podpory A i położeniem pierwszej siły systematu, kiedy ostatnia z nich znajdzie się w punkcie podpory B.

W tych granicach x przybierze taką wartość iż podstawiając ją w odpowiednie równanie, momenta zgięcia wywarte w punktach przyczepienia sił będą największemi.

Dla otrzymania tych szczególnych wartości na x, zrównajmy zeru pochodne równań (1) (Część pierwsza) względem x; tak otrzymane równania mają kształt następujący:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
0=\dfrac{ldM_1}{dx}=(l-2x)\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}, \\[2ex]
0=\dfrac{ldM_2}{dx}=(l-2x-d_1)\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}, \\[2ex]
0=\dfrac{ldM_3}{dx}=(l-2x-d_2)\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}, \\[2ex]
0=\dfrac{ldM_4}{dx}=(l-2x-d_3)\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}, \\[2ex]
0=\dfrac{ldM_5}{dx}=(l-2x-d_4)\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}, \\[2ex]
0=\dfrac{ldM_6}{dx}=(l-2x-d_5)\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}, \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
0=\dfrac{ldM_i}{dx}=(l-2x-d_{(i-1)})\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}, \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
0=\dfrac{ldM_{(n-1)}}{dx}=(l-2x-d_{(n-2)})\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}, \\[2ex]
0=\dfrac{ldM_n}{dx}=(l-2x-d_{(n-1)})\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}.
\end{array}
\right. \tag{2}
$$

Z każdego z tych równań możemy wyciągnąć wartość na x, którą oznaczywszy przez ξ, odpowiednie sile do której się odnosi równanie, otrzymamy szereg wartości :

$$
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{2}\left(l-\dfrac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)=\xi_1, \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(l-d_1-\dfrac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)=\xi_2, \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(l-d_2-\dfrac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)=\xi_3, \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(l-d_3-\dfrac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)=\xi_4, \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(l-d_4-\dfrac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)=\xi_5, \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(l-d_5-\dfrac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)=\xi_6, \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(l-d_{(i-1)}-\dfrac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)=\xi_i \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(l-d_{(n-2)}-\dfrac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)=\xi_{(n-1)}, \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(l-d_{(n-1}-\dfrac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}\right)=\xi_n
\end{array}
$$

Podstawiając w równaniach (3) za $\frac{1}{2}\left(l-\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}}\right)$ jemu równe ξ_1 otrzymamy :

$$
(4)\qquad \left|\begin{array}{l}
\xi_1=\frac{1}{2}\left(l-\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}}\right), \\[2ex]
\xi_2=\xi_1-\frac{1}{2}d_1, \\[2ex]
\xi_3=\xi_1-\frac{1}{2}d_2, \\[2ex]
\xi_4=\xi_1-\frac{1}{2}d_3, \\[2ex]
\xi_5=\xi_1-\frac{1}{2}d_4, \\[2ex]
\xi_6=\xi_1-\frac{1}{2}d_5, \\[2ex]
\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\[2ex]
\xi_i=\xi_1-\frac{1}{2}d_{(i-1)}, \\[2ex]
\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\[2ex]
\xi_{(n-1)}=\xi_1-\frac{1}{2}d_{(n-2)} \\[2ex]
\xi_n=\xi_1-\frac{1}{2}d_{(n-1)},
\end{array}\right.
$$

równania z których każde odpowiada jednemu z największych momentów zgięcia skoro takowy przypada na jednej z sił :

$$1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6\ \ldots\ldots\ i\ \ldots\ldots\ (n-1),\ n^{\text{ej}},$$

to jest na siłach

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6,\ldots\ p_i,\ldots\ p_{(n-1)},\ p_n.$$

Po otrzymaniu powyższych wartości na x z łatwością wypiszemy wartości analityczne momentów zgięcia odpowiadających każdej z sił, podstawiając w każdém z równań (1) (Część pierwsza) za x wartość odpowiednią uważanej sile, daną przez jedno z równań (4) ; oznaczając przez

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4,\ \mu_5,\ \mu_6,\ldots\ \mu_i,\ldots\ \mu_{(n-1)},\ \mu_n,$$

wartości na

$$\mathrm{M}_1,\ \mathrm{M}_2,\ \mathrm{M}_3,\ \mathrm{M}_4,\ \mathrm{M}_5,\ \mathrm{M}_6\ldots\ \mathrm{M}_i\ldots\ \mathrm{M}_{(n-1)},\ \mathrm{M}_n,$$

dla x równego

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_4,\ \xi_5,\ \xi_6\ldots\ \xi_i\ldots\ \xi_{(n-1)},\ \xi_n.$$

otrzymamy w ten sposób równania :

$$
(5)\qquad \left\{\begin{array}{l}
l\mu_1=\xi_1\left[(l-\xi_1)\mathfrak{P}-\mathfrak{D}\right], \\
l\mu_2=(l-\xi_2-d_1)(\mathrm{P}_1\xi_2+(\xi_2+d_1)\left[(l-\xi_2)(\mathfrak{P}-\mathrm{P}_1)-\mathfrak{D}\right], \\
l\mu_3=(l-\xi_3-d_2)(\mathrm{P}_2\xi_3+\mathrm{D}_2)+(\xi_3+d_2)\left[(l-\xi_3)(\mathfrak{P}-\mathrm{P}_2)-(\mathfrak{D}-\mathrm{D}_2)\right], \\
l\mu_4=(l-\xi_4-d_3)(\mathrm{P}_3\xi_4+\mathrm{D}_3)+(\xi_4+d_3)\left[(l-\xi_4)(\mathfrak{P}-\mathrm{P}_3)-\mathfrak{D}-\mathrm{D}_3)\right], \\
l\mu_5=(l-\xi_5-d_4)(\mathrm{P}_4\xi_5+d_4)+(\xi_5+d_4)\left[(l-\xi_5)(\mathfrak{P}-\mathrm{P}_4)-(\mathfrak{D}-\mathrm{D}_4)\right], \\
l\mu_6=(l-\xi_6-d_5)(\mathfrak{P}\xi_6+\mathfrak{D}).
\end{array}\right.
$$

Równania (5) wzkazują nam ogólne prawo łatwe de pochwycenia, na mocy którego możemy podać wyrażenie momentu zgięcia największego wywartego przez systemat sił ruchomy i składający się z n sił; tak dla siły p_i kiedy i jest zawarte w granicach

$$1 < i < n,$$

wartość momentu zgięcia odpowiadająca tej sile wyrazi się przez równanie

$$l\mu_i = (l - \xi_i - d_{(i-1)}) + (\mathrm{P}_{(i-1)}\xi_i + \mathrm{D}_{(i-1)}) + (\xi_i + d_{(i-1)}) \left[(l - \xi_i)(\mathfrak{P} - \mathrm{P}_{(i-1)}) - (\mathfrak{D} - \mathrm{D}_{(i-1)})\right].$$

Równanie dające wartość momentu zgięcia odpowiadającego przedostatniej sile systematu ruchomego jest następujące

$$l\mu_{(n-1)} = (l - \xi_{(n-1)} - d_{(n-2)})(\mathrm{P}_{(n-2)}\xi_{(n-1)} + \mathrm{D}_{(n-2)}) + (\xi_{(n-1)} + d_{(n-2)}) \left[(l - \xi_{(n-1)})(\mathfrak{P} - \mathrm{P}_{(n-2)}) - (\mathfrak{D} - \mathrm{D}_{n-2})\right];$$

dla ostatniej siły p_n, otrzymamy

$$l\mu_n = (l - \xi_n - d_{(n-1)})(\mathfrak{P}\xi_n + \mathfrak{D}).$$

Wniosek. — Z równań (4) możemy wyprowadzić wniosek następujący (fig. 7):

Środek belki, dzieli się na dwie równe części odległość zawartą pomiędzy środkiem ciężkości systematu sił uważanego a punktem przyczepienia siły na której wywartym jest największy moment zgięcia.

Ażeby dowieść podanego wniosku, uważmy jakąkolwiek siłę p_i i przypuśćmy że największy moment zgięcia przypada w punkcie jej przyczepienia C. Niech będzie $d_{(i-1)}$ odległość siły p_i od pierwszej

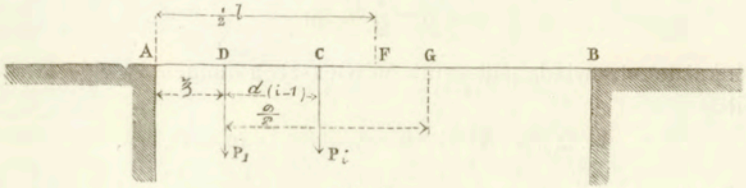

Fig. 7.

z sił systematu wziętego pod uwagę G środek ciężkości tegoż systematu, ażeby moment zgięcia wywarty w punkcie C był największym, powinno zachodzić równanie

$$\xi_i = \frac{1}{2}\left(l - d_{(i-1)} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}}\right),$$

zkąd

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}} = \frac{1}{2}\,l - \left(\xi_i + \frac{1}{2}\,d_{(i-1)}\right),$$

odejmując od obydwóch stron tego równania $\frac{1}{2}\,d_{(i-1)}$ otrzymamy:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}} - d_{(i-1)}\right) = \frac{1}{2}\,l - (\xi_i + d_{(i-1)}).$$

Figura 7 pokazuje nam że

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}} - d_{(i-1)}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{DG} - \mathrm{DC}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{CG},$$

mamy nadto

$$\frac{1}{2}l=AF; \quad \xi_i+d_{(i-1)}=AC,$$

a zatem

$$\frac{1}{2}CG=AF-AC=CF,$$

to jest że punkt F środek belki, dzieli na dwie równe części, odległość pomiędzy środkiem ciężkości systematu sił uważanego, przypadającym w punkcie G i punktem C przyczepienia siły p_i na której przypada największy z mometów zgięcia, co było do okazania.

Uwagi.— Znając siłę, na której w systemacie danym, przypada największy moment zgięcia, zostaje do znalezienia położenie jego najniekorzystniejsze na całej długości belki, to jest położenie w którém systemat uważany wywiera ten sam moment zgięcia co do wartości analitycznej; wniosek podany powyżej wskazuje je nam natychmiast, należy bowiem umieścić systemat uważany na danej belce w ten sposób: ażeby środek jej dzielił na dwie równe części odległość pomiędzy środkiem ciężkości systematu a siłą na której przypada maximum maximorum momentu zgięcia.

Największy ze wszystkich momentów zgięcia wywartych w danej belce przez systemat sił uważany w położeniu najniekorzystniejszém, jest ten, który odpowiada momentowi zgięcia wywartemu w punkcie przyczepienia siły najbliżej leżącej środka belki, wnosić więc należy że ta największość przypadnie zawsze w punkcie przyczepienia siły najbliżej leżącej środka ciężkości systematu sił uważanego.

Środek ciężkości zmienia swe położenie stosownie do systematu sił wziętego pod uwagę; i tak: może on przypaść w punkcie przyczepienia jednej z sił systematu, lub też znaleść się pomiędzy dwiema siłami systematu uważanego, po sobie następującemi; w pierwszym przypadku środek ciężkości systematu przypadnie w środku belki i największy z momentów zgięcia będzie wywartym w tymże punkcie: w drugim zaś razie największy z momentów zgięcia oddali się od środka belki tem więcej, im więcej środek ciężkości systematu danego będzie oddalony od siły najbliżej niego leżącej.

Sposób graficzny otrzymania granicy obwodu największych momentów zgięcia wywartych w belce przez systemat sił ruchomy.

Dla dokładnego oznaczenia długości *tablic* dodatkowych belki mającej znaczne wymiary, niezbędną jest dokładna znajomość granicy obwodu wszystkich momentów zgięcia jakie w danej belce wywarte być mogą pod wpływem systematu sił na nią działającego.

Otoż dla jak najłatwiejszego wykreślenia granicy obwodu wszystkich największych momentów zgięcia, uważmy najprzód, że wszystkie parabole przedstawiające największe momenta zgięcia wywarte przez każdą z sił systematu wziętego pod uwagę, i wyrażone za pomocą równań (5) mają jeden i ten sam parametr, równy summie algebraicznej wszystkich sił systematu uważanego.

Równanie (4) (Wniosek) wzkazuje nam sposób za pomocą którego odrazu oznaczyć możemy odciętę odpowiadającą największemu z momentów zgięcia wywartemu w punkcie przeczepienia jakiejkolwiek siły przez systemat sił uważany; dosyć jest bowiem odciąć od środka belki długość równą odległości środka ciężkości systematu od siły uważanej, a punkt tak otrzymany będzie właśnie punktem odpowiadającym rzędnej na której odetniemy długość równoważną największemu momentowi zgięcia wywartemu przez dany systemat w punkcie przyczepienia siły którą się zajmujemy.

Znamy w tej chwili odciętę największgo momentu zgięcia i parametr paraboli przedstawiającej go, moglibyśmy więc z łatwością wykreślić ją za pomocą wyciętej na ten cel formy, gdybyśmy znali wielkość rzędnej, to jest wierzchołek paraboli szukanej ; do oznaczenia tego wierzchołka przedstawiają się dwa sposoby, pierwszy polega na użyciu równań (4) i (5), możemy bowiem z równań (4) otrzymać odciętę szukaną a podstawiając tak otrzymaną wartość w równaniach (5) i rozwiązując, otrzymamy rzędne szukane : drugi sposób jest czysto graficzny, za pomocą którego nie używając zupełnie równań (4) i (5) otrzymamy rzędne o których mowa ; w samej rzeczy, wykreślmy parabole odpowiadające każdej sile systematu kiedy takowe działają oddzielnie (4 twierdzenie pomocnicze) (fig. 5), oznaczmy odcięte największych momentów zgięcia wywartych na każdej z sił, w sposób podany powyżej kiedy te siły działają razem, i po oznaczeniu punktów przyczepienia każdej z sił systematu w położeniu najniekorzystniejszém ustawmy go na danej belce zostawiając niezmiennemi odległości pomiędzy siłami.

W punkcie przyczepienia każdej z sił systematu otrzymamy pewien moment zgięcia, którego wielkość będzie równa długości rzędnej paraboli odpowiadającej sile wziętej pod uwagę, kiedy ta siła działa sama. Znając w ten sposób wszystkie momenta zgięcia cząstkowe, z łatwością otrzymamy moment zgięcia całkowity, w punkcie przyczepienia każdej siły ; postępując w ten sam sposób jakeśmy postąpili dla systematu nieruchomego; to jest, łącząc każdy z wierzchołków paraboli, przedstawiających momenta zgięcia cząstkowe, z dwoma końcami belki i na przedłużeniu rzędnej przedstawiającej moment zgięcia odpowiedni sile wziętej pod uwagę odcinając długości, równe momentom zgięcia wywartym na sile uważanej, przez wszystkie pozostałe siły systematu. Punkt tak otrzymany będzie właśnie wierzchołkiem szukanym, a znając już poprzednio parametr i położenie osi paraboli, zadanie zostaje całkowicie rozwiązaném.

Przykład. *Znaleść wartość ciężaru jednostajnie rozłożonego na metr bieżący pojedynczej kolei, któryby w odpowiednim punkcie wywarł moment zgięcia, równy największemu z momentów zgięcia utworzonych w danej belce przez lokomotywę systemu Engerth'a całkowicie obładowaną.*

Przypuśćmy że otwór mostu, po którym przechodzi lokomotywa wzięta pod uwagę, jest $14^{m},00$; ciężary działające na most będą następujące (fig. 8) :

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= 10100 \\ p_2 &= 9200 \\ p_3 &= 9900 \\ p_4 &= 11100 \\ p_5 &= 10900 \\ p_6 &= 11600 \end{aligned}\right\} 62800^{kg}.\ \text{Ciężar całkowity lokomotywy Engerth'a,}$$

ciężary tu podane odpawiadają ciążarom osi lekomotywy idąc w porządku od jej przodu ku tyłowi.

Odległości każdej z osi tego systemu od pierwszej :

$$d_1 = 1^{m},30,\quad d_2 = 2^{m},60,\quad d_3 = 3^{m},95,\quad d_4 = 7^{m},00,\quad d_5 = 8^{m},70,$$

Środek ciężkości lokomotywy, od pierwszej osi, znajdzie się w odległości równej

$$\frac{\Theta}{\Psi} = \frac{p_2d_1 + p_3d_2 + p_4d_3 + p_5d_4 + p_6d_5}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6} = 4^{m},12.$$

Ciężar najbliżej środka ciężkości leżący, jest p_4, a odległość jego równa $0^m,17$, a zatém największy z momentów zgięcia będzie odpowiadał sile p_4 w położeniu najniekorzystniejszém, to jest wtenczas

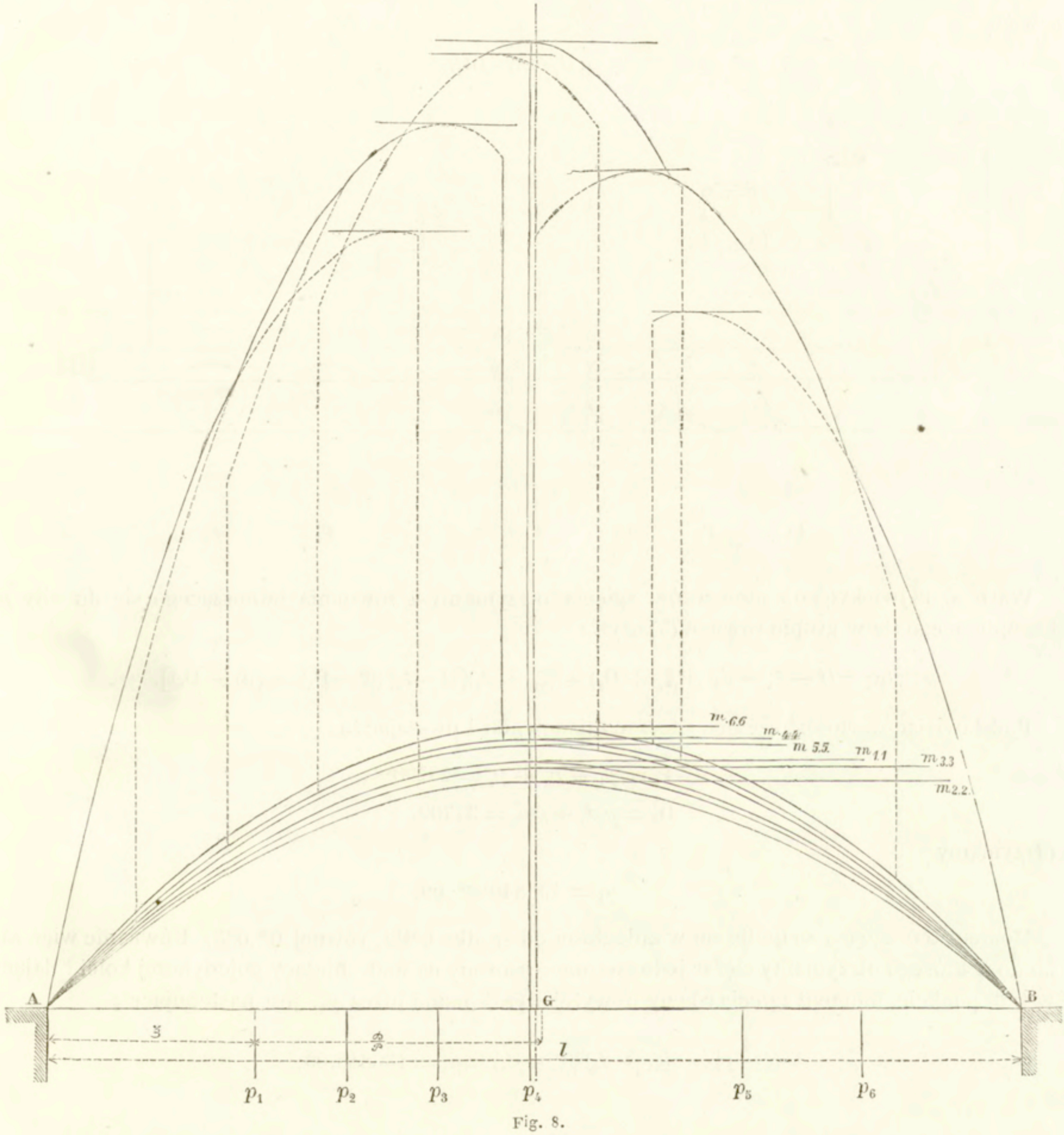

Fig. 8.

kiedy środek belki wchodzącej w skład mostu, podzieli odległość pomiędzy punktem przyczepienia siły p_4 a środkiem ciężkości lokomotywy na dwie równe części: położenie to jest przedstawione na (fig. 8).

Odcięta punktu w którym przypada największy z momentów zgięcia jest daną przez jedno z równań (4) a mianowicie przez równanie odnoszące się do siły p_4:

$$\xi_4 = \frac{1}{2}\left(l - d_3 - \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}\right).$$

Podstawiając za czynniki tego równania ich wartości liczebne, otrzymamy :

$$\xi_4 = 2^{\mathrm{m}},965,$$

a więc

$$\xi_4 + d_3 = 6^{\mathrm{m}},015.$$

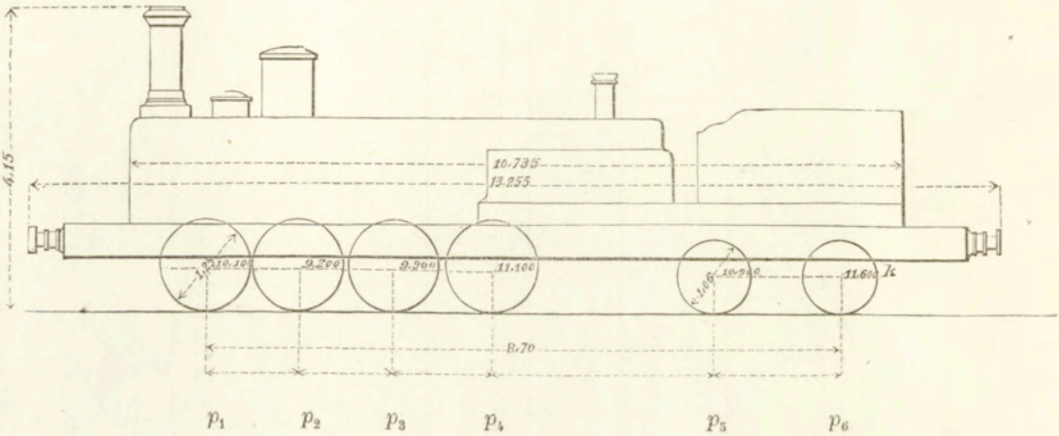

Fig. 9.

Wartość największego z momentów zgięcia otrzymamy z równania odnoszącego się do siły p_4 i znajdującego się w grupie równań (5) czyli :

$$l\mu_4 = (l - \xi_4 - d_3)(\mathrm{P}_3\xi_4 + \mathrm{D}_3) + (\xi_4 + d_3)[(l - \xi_4((\mathfrak{P} - \mathrm{P}_3) - (\mathfrak{D} - \mathrm{D}_3)].$$

Podstawiając wartości liczebne, znosząc mianowniki i uważając że :

$$\mathrm{P}_3 = p_1 + p_2 + p_3 = 29200^{\mathrm{kg.}},$$
$$\mathrm{D}_3 = p_2 d_1 + p_3 d_2 = 37700.$$

otrzymamy :

$$\mu_4 = 136840^{\mathrm{kgm.}},09.$$

Moment ten zgięcia znajduje się w odległości od środka belki, równej $0^{\mathrm{m}},085$. Równanie więc zapomocą którego otrzymamy ciężar jednostajnie rozłożony na metr bieżący pojedynczej kolei i dający w tym punkcie, moment zgięcia równy powyżej wyrażonemu przez μ_4, jest następujące :

$$\frac{1}{2} p[l - (\xi_4 + d_3)](\xi_4 + d_3) = \mu_4 = 136840,09;$$

p przedstawia tu ciężar jednostajnie rozłożony na jednostkę długości, otrzymamy ztąd

$$p = \frac{2\mu_4}{(l - \xi_4 - d_3)(\xi_4 + d_3)} = 5586^{\mathrm{kgm.}},44,$$

czyli dla zaokrąglenia :

$$p = 5590^{\mathrm{kgm.}}.$$

Znalazłszy wartość największego momentu zgięcia, zajmijmy się wykreśleniem granicy obwodu wszystkich momentów zgięcia jakie w danej belce wywartémi być mogą przez ciężar całkowity lokomotywy systemu Engertha; użyjemy tutaj sposobu podanego w artykule (Sposób graficzny: Część 2).

Wiemy z wniosku że odcięte odpowiadające największym momentom zgięcia otrzymują się z równań następujących:

dla siły p_1 $\quad \xi_1 = \frac{1}{2}\left(l - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}}\right) = \frac{1}{2}(14 - 4{,}12) = 4^m{,}94.$

id. p_2 $\quad \xi_2 = \xi_1 - \frac{1}{2} d_1 = 4^m{,}29$ zkąd $\xi_2 + d_1 = 5^m{,}59,$

id. p_3 $\quad \xi_3 = \xi_1 - \frac{1}{2} d_2 = 3^m{,}64$ id. $\xi_3 + d_2 = 6^m{,}24,$

id. p_5 $\quad \xi_5 = \xi_1 - \frac{1}{2} d_4 = 1^m{,}44$ id. $\xi_5 + d_4 = 8^m{,}44,$

id. p_6 $\quad \xi_6 = \xi_1 - \frac{1}{2} d_5 = 0^m{,}59$ id. $\xi_6 + d_5 = 9^m{,}29.$

Znając w ten sposób wszystkie odcięte, wyznaczymy rzędne odpowiadające podstawiając w równaniach (5) wartości liczebne; otrzymamy tedy:

dla siły $p_1 - l\mu_1 = 1532402{,}82$ a zatem $\mu_1 = 109457{,}34,$

id. $p_2 - l\mu_2 = 1778398{,}57$ id. $\mu_2 = 127028{,}47,$

id. $p_3 - l\mu_3 = 1913660{,}32$ id. $\mu_3 = 136690{,}02,$

id. $p_5 - l\mu_5 = 1666999{,}32$ id. $\mu_5 = 119071{,}02,$

id. $p_6 - l\mu_6 = 1393298{,}07$ id. $\mu_6 = 99521{,}30.$

Znając w tej chwili wszystkie największe momenta zgięcia wywarte w danej belce, jakoteż odcięte punktów w których one się tworzą i parametr parabol przedstawiających obwody wszystkich momentów zgięcia utworzonych przez każdą z sił, z łatwością wykreślimy w sposób ciągły, granicę obwodu wszystkich momentów zgięcia wywartych w belce przez systemat sił wzięty pod uwagę. Widzimy więc że zadanie jest całkiem rozwiązane sposobem analitycznym, figura 8ª przedstawia nam wykreślenie geometryczne.

Po wyznaczeniu w sposób podany, ciężaru jednostajnie rozłożonego na metr *podłużny* jakiejkolwiek belki, którym zastąpiemy wszelkie ciężary rozłożone na belce w sposób dowolny, jesteśmy w stanie oznaczyć wszystkie wymiary naszej belki, dodając do ciężaru jednostajnie rozłożonego zastępującego ciężar przypadkowy, ciężar jednostajnie rozłożony wynikający z wagi samej budowli.

Wyniki. Za pomocą metody podanej, możemy wyznaczyć: 1° Wartość największego z momentów zgięcia jakie systemat sił jakikolwiek wywrzeć może w danej belce; 2° Wykreślić granicę obwodu wszystkich momentów zgięcia wywartych w belce przez systemat sił uważany, potrzebną do dokładnego oznaczenia długości tablic (semelles) dodatkowych.

Figura 8ª wskazuje nam punkta przecięcia się z sobą parabol, przedstawiających momenta zgięcia wywarte przez każ lą z sił, kiedy cały systemat działa jednocześnie, wnosić tedy możemy że jeżeli belka której chcemy wyznaczyć wymiary ma znaczną długość, a systemat sił na nią działający składa się z wielkiej liczby sił, których wzajemne odległości są stosunkowo małe, w takim razie punkta te przecięcia parabol po sobie następujących, tak mogą być do siebie zbliżone, iż te parabole częściowe przedstawią niejako jedną parabolę obejmującą poza obwód której, pod żadnym względem, żaden z momentów zgięcia wywartych w belce wyjść nie może.

Po wykreśleniu granicy obwodu wszystkich momentów zgięcia wywartych w belce przez systemat sił wzięty pod uwagę, z łatwością oznaczemy wielkość ciężaru jednostajnie rozłożonego, który wywiera też same momenta zgięcia w odpowiednich punktach belki.

Dodać tu należy że sposób przyjęty przez *administracyę* wskazuje nam że największy z momentów zgięcia wywartych w belce przypada zawsze w jej środku, otóż widzieliśmy (Wniosek-Uwagi) że punkt w którym największy moment zgięcia wywartym być może oddala się od środka belki tem więcej im się więcej oddala środek ciężkości systemu sił od siły, na której on przypada.

Przyjmując zatem metodę administracyi popełniamy błąd tém większy im odległości pomiędzy osiami lokomotywy są większe; mogą się zdarzyć przypadki w których błąd popełniony będzie bardzo wielki.

Możemy więc nie popełniając błędu dostrzegalnego, zastąpić granicę obwodu wszystkich momentów zgięcia wywartych w belce mającej znaczną długość, przez jedną parabolę utworzoną działaniem ciężaru jednostajnie rozłożonego, byleby tylko wierzchołek jej, to jest punkt największego z momentów zgięcia przypadał dokładnie w punkcie przyczepienia siły systematu, kiedy takowy znajduje się w położeniu najniekorzystniejszém.

Wszystko cośmy podali dotąd stosuje się wyłącznie do belek leżących na dwóch podporach, dodać więc należy że ta sama metoda i ciężary na jej zasadzie obliczone, użytemi być mogą do obrachowywania belek leżących na jakiejkolwiek liczbie podpór, byleby ciężar jednostajnie rozłożony brany dla tych ostatnich odpowiadał dokładnie temu, któryśmy znaleźli dla belki o jednym otworze (seule travée) którego długość jest równa długości każdego otworu belki leżącej na kilku podporach.

Tablica poniżej umieszczona daje nam ciężary jednostajnie rozłożone, równoważne ciężarom lokomotyw systemu Engerth'a i Petiet. Lokomotywy te są najcięższe ze znanych nam dotąd, i wywierają największe momenta zgięcia w belkach mostów po których one przechodzić mogą, ciężar ich nadzwyczajny jako też i rozkład jego na wszystkie osie, były jedyną pobudką do uformowania poniższej tablicy

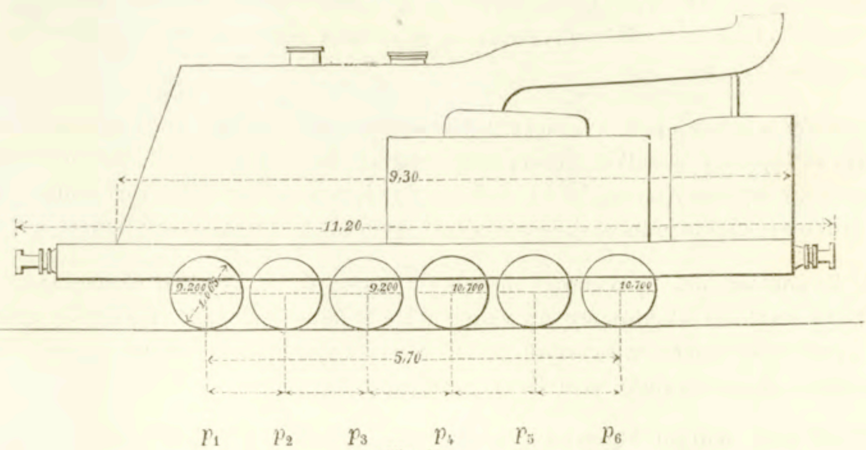

Fig. 10.

Figury 9 i 10 przedstawiają nam w jaki sposób ciężar każdej z lokomotyw jest rozłożony na wszystkich osiach. Zwrócimy jednakże uwagę Inżynierów, że ciężary podane tutaj nie powinny być używane do obliczania mostów dla linii kolei żelaznych, na których transport towarów nie wymaga użycia jednej z lokomotyw o których mowa, ciężar bowiem ich będąc nadzwyczajnie wielkim, wymaga massy metalu za dużej i zupełnie bezużytecznej; dobrém więc byłoby, zasadzając się na metodzie podanej, obliczyć tablicę odpowiadającą potrzebom miejscowym, i stosować ciężary tak znalezione do obliczania mostów mających zadosyć czynić warunkom wymagalnym.

Tablica dająca ciężar jednostajnie rozłożony na metr bieżący pojedynczej kolei, wywierający w tymże samym punkcie, taki sam moment zgięcia największy jaki wywiera bieżący pociąg lokomotyw całkowic e obładowanych.

Otwór mostu lub wiaduktu w metrach.	Ciężar jednostajnie rozłożony na metr bieżący pojedynczej kolei równoważny lokomotywie systematu	
	Engerth'a.	Petiet.
1	Crampton	24000 klg.
2		12000
3	9100 klg.	11000
4	8400	10000
5	8050	9500
6	7750	9300
7	7300	9100
8	6850	8800
9	6400	8400
10	6300	8000
11	6000	7600
12	5800	7200
13	5750	6850
14	5600	6500
15	5500	6200
16	5300	5900
17	5300	5800
18	id	5650
19	id	id
20	id	id
21	id	id
22	id	id
23	id	id
24	id	5600
25	id	5600
..	...	....
30	id	id
..	...	....
40	id	id
..	...	....
50	id	id

Z powyżéj podanej tablicy wnosić możemy, że ciężar jednostajnie rozłożony na metr bieżący pojedynczej kolei jest stałym dla wszystkich otworów których długość jest większa od $25^{m},00$; dodać tu możemy że własność ta sprawdza się dla wszelkich lokomotyw jakiegokolwiek systemu.

CZĘŚĆ TRZECIA

Zastosowania.

Uwagi Ogólne. W dwóch pierwszych częściach niniejszej pracy wskazaliśmy w jaki sposób teorya przez nas podana zastosowaną być może do obliczania ciężarów przypadkowych i do ich zamiany na ciężar jednostajnie rozłożony; zobaczmy obecnie, w jaki sposób teorya dotąd używana do obliczania mostów metalicznych, zostanie zmodyfikowaną wskutek przyjętej i dowiedzionej naszej metody.

Przy obliczaniu mostów lub wiaduktów metalicznych zwrócić należy uwagę iż wszystkie sztuki wchodzące w skład samego pomostu zostają zawsze pod wpływem dwóch rodzai ciężarów: 1° Ciężaru stałego jednostajnie rozłożonego, wynikającego z wagi samego pomostu, i 2° Ciężaru przypadkowego dowolnej wielkości i rozłożonego w sposób całkiem dowolny. Ostatni cyrkularz ministerium robót publicznych we Francyi, dotyczący ciężarów przypadkowych tak dla mostów pod drogi zwyczajne jako też dla wiaduktów przepisuje następujące wartości:

Cyrkularz z dnia 5 czerwca 1869 roku.

Mosty pod drogi zwyczajne: Wóz dwukołowy ważący 11000 kg. lub wóz 4° kołowy ważący 16000 kg. } dla poprzecznic;

400 kilg. na metr kwadratowy pomostu, dla belek.

Wiadukty (mosty pod kolej żelazną). Wartość, którą podaliśmy w samym początku tej pracy, i dla której dowiedliśmy że jest za słabą

Oznaczenie wymiarów dokładnych tak belek jako i poprzecznic, wymaga dokładnej znajomości granicy obwodu wszystkich momentów zgięcia wywartych w sztuce wziętej pod uwagę, tak przez ciężar jednostajnie rozłożony jako też i przez ciężar przypadkowy działających jednocześnie.

Granica obwodu o której mówimy, może być otrzymaną za pomocą metody graficznej podanej powyżej dla ciężaru przypadkowego jakiegokolwiek, dodając do tak otrzymanego obwodu parabolę utworzoną przez ciężar jednostajnie rozłożony, i biorąc na przyjętą skalę summę algebraiczną momentów zgięcia odpowiadających każdemu punktowi belki.

Sposób ten, w samej rzeczy, da nam wszelkie wartości momentów zgięcia wywartych w uważanej sztuce, pod wpływem ciężarów na nią działających jednocześnie; zwrócić jednakże należy uwagę, że w blizkości maximum różnice tak otrzymanych summ momentów zgięcia są tak małe, iż niepodobnem jest oznaczyć sposobem graficznym dokładnego położenia największego momentu zgięcia; dla uniknienia więc niepewności postaramy się oznaczyć sposobem analitycznym, tak wartości odpowiadające momentom zgięcia wywartym w każdym punkcie sztuki uważanej, jako też i odległość punktu największego momentu zgięcia od najbliższej podpory.

Metoda, za pomocą której wypiszemy od razu wartości analityczne momentów zgięcia, pod wpływem jakichkolwiek ciężarów i wartość momentu zgięcia największego, jest głównym przedmiotem tej trzeciej części.

Oznaczenie spółczynika poprawki. — Społczynnikiem poprawki nazwiemy *odległość punktu w którym przypada największy moment zgięcia, wywarty pod wpływem ciężaru stałego i ciężaru przypad-*

kowego, działających jednocześnie, od punktu w którym przypada największy z momentów zgięcia, wywartych pod wpływem samego ciężaru przypadkowego.

Uważmy belkę długości l wolno leżącą na dwóch podporach jednego poziomu, na którą działają jednocześnie ciężar stały i ciężar przypadkowy, przypuśćmy że ciężar przypadkowy składa się z n sił jakichkolwiek (fig. 11)

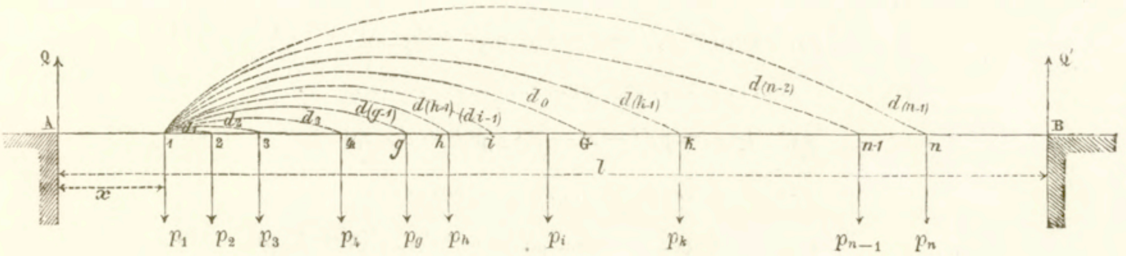

Fig. 11.

Niech będą

$p_1, p_2, p_3, p_4, \dots p_g, \dots p_h \dots p_k \dots p_{(n-1)}, p_n$ siły systematu danego,

$1,\ 2,\ 3,\ 4\ \dots g\ \dots h\ \dots k\ \dots (n-1), n$ punkta przyczepienia sił,

$d_1, d_2, d_3 \dots d_{(g-1)} \dots d_{(h-1)} \dots d_{(k-1)} \dots d_{(n-2)},\ d_{(n-1)}$ odległości każdej z sił systematu uważanego od pierwszej siły p_1,

x odległość pierwszej siły p_1. od punktu podpory A ;

p ciężar jednostajnie rozłożony na jednostkę długości ;

Q i Q′ oddziaływania podpór.

Moment zgięcia wywarty w punkcie jakimkolwiek i którego odległość od siły p_1 jest $d_{(i-1)}$, przez jedną z sił leżących pomiędzy punktami A i i, naprzykład przez siłę p_g, wyrazi się przez równanie następujące :

$$lm_{g.i} = p_g(l - x - d_{(i-1)})\,(x + d_{(g-1)})$$

w którém $m_{g.i}$ oznacza moment zgięcia wywarty w punkcie i przez siłę p_g odrzucając wszystkie inne.

Moment zgięcia wywarty w punkcie i przez jedną z sił leżących pomiędzy punktami i i B, naprzykład przez siłę p_k, wyrazi się przez równanie następujące :

$$lm_{k.i} = p_k(l - x - d_{(k-1)})(x - d_{(i-1)})$$

w którém

$m_{k.i}$ oznacza moment zgięcia wywarty w punkcie i przez siłę p_k, odrzucając wszsytkie inne.

Wiemy że moment zgięcia całkowity wywarty w jakimkolwiek punkcie, równa się summie algebraicznej momentów zgięcia cząstkowych wywartych w tymże punkcie przez każdą z sił systematu uważanego, kiedy takowe działają oddzielnie ; otrzymamy zatem równania następujące :

Dla siły p_1, $lm_{1.i} = p_1(l - x - d_{(i-1)})x$ moment zgięcia w punkcie i

p_2, $lm_{2.i} = p_2(l - x - d_{(i-1)})(x + d_1)$ id

p_3, $lm_{3.i} = p_3(l - x - d_{(i-1)})(x + d_1)$ id

p_4, $lm_{4.i} = p_4(l - x - d_{(i-1)})(x + d_3)$ id

. . . .

p_g, $lm_{g.i} = p_g(l - x - d_{(i-1)})(x + d_{(g-1)})$ id

. . . .

p_k, $lm_{k.i} = p_k(l - x - d_{(k-1)})(x + d_{(i-1)})$

. . . .

$p_{(n-1)}$, $lm_{(n-1.i)} = p_{(n-1)}(l - x - d_{(n-2)})(x + d_{(i-1)})$ id

p_n, $lm_{(n.i)} = p_n(l - x - d_{(n-1)})(x + d_{(i-1)})$. id

Dla ciężaru jednostajnie rozłożonego działającego oddzielnie:

p, $lm'_i = \frac{1}{l} pl(x + d_{(i-1)})[l - (x + d_{(i-1)})]$. id

Uważając że moment zgięcia całkowity wywarty w jakimkolwiek punkcie pod wpływem jakichkolwiek ciężarów działających jednocześnie może być zawsze przedstawionym w ogólnym kształcie przez równanie następujące

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} = y \tag{1}$$

w którém y oznacza moment zgięcia całkowity; A, B i C oznaczają spółczynniki, których wartości równe są summie algebraicznej wyrażeń zawartych w poniżej podanej tablicy.

A		B		C	
$-\frac{1}{2}pl$	x^2	$+pl\left(\frac{1}{2}l - d_{(i-1)}\right)$	x	$-\frac{1}{2}pld^2_{(i-1)}$	$+\frac{1}{2}pl^2d_{(i-1)}$
$-p_1$		$+p_1(l - d_{(i-1)})$		0	
$-p_2$		$+p_2(l - d_{(i-1)}) - p_2d_1$			$+p_2d_1(l - d_{(i-1)})$
$-p_3$		$+p_3(l - d_{(i-1)}) - p_3d_2$			$+p_3d_2(l - d_{(i-1)})$
$-p_4$		$+p_4(l - d_{(i-1)}) - p_4d_1$			$+p_4d_3(l - d_{(i-1)})$
....	....	....	....	....	....
$-p_g$		$+p_g(l - d_{(i-1)}) - p_gd_{(g-1)}$			$+p_gd_{(g-1)}(l - d_{(i-1)})$
....	....	....	....	....	....
$-p_k$		$+p_k(l - d_{(i-1)}) - p_kd_{(k-1)}$			$+p_kd_{(i-1)}(l - d_{(k-1)})$
....	....	....	....	....	....
$-p_{n-1}$		$+p_{(n-1)}(l - d_{(i-1)}) - p_{(n-1)}d_{(n-2)}$			$+p_{(n-1)}d_{(i-1)}(l - d_{(n-2)})$
$-p_n$		$+p_n(l - d_{(i-1)}) - p_nd_{(n-1)}$			$+p_nd_{(i-1)}(l - d_{(n-1)})$.

dodając do siebie powyższe wartości i oznaczając przez :

$$\mathfrak{P} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots + p_g + \ldots + p_i + \ldots + p_k + \ldots + p_{(n-1)} + p_n$$

i przez

$$\mathfrak{D} = p_2 d_1 + p_3 d_2 + p_4 d_3 + \ldots + p_g d_{(g-1)} + \ldots + p_i d_{(i-1)} + \ldots + p_k d_{(k-1)} + \ldots p_{(n-1)} d_{(n-2)} + p_n d_{(n-1)}$$

otrzymamy na ostateczną wartość momentu zgięcia wywartego w punkcie i wyrażenie następujące :

$$l\mathrm{M}_i = -\frac{1}{2}(pl + 2\mathfrak{P})x^2 + \left[(l - d_{(i-1)})\mathfrak{P} - \mathfrak{D}\right]x + pl\left(\frac{1}{2}l - d_{(i-1)}\right)x + \frac{1}{2}pl(l - d_{(i-1)})d_{(i-1)}$$

$$+ \left\{(\mathfrak{P} - \mathrm{P}_{(i-1)})l - \mathfrak{D}\right\}d_{(i-1)} + l\mathrm{D}_{(i-1)}.$$

zkąd

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{M}_i = -\frac{1}{2}\left(p + \frac{2\mathfrak{P}}{l}\right)x^2 + \frac{1}{2}\left[(l - d_{(i-1)})\mathfrak{P} - \mathfrak{D}\right]x + p\left(\frac{1}{2}l - d_{(i-1)}\right)x + \frac{1}{2}p(l - d_{(i-1)})d_{(i-1)}$$

$$+ \left[(\mathfrak{P} - \mathrm{P}_{(i-1)}) - \frac{1}{l}\mathfrak{D}\right]d_{(i-1)} + \mathrm{D}_{(i-1)},$$

wyrażenie w którém

$\mathrm{P}_{(i-1)}$ i $\mathrm{D}_{(i-1)}$ zachowują znaczenie nadane im w pierwszej części.

Punkt w którym wyrażenie to będzie największością znajdziemy biorąc pochodną równania(2) względem zmiennej x, i zakładając że ona jest równa zeru. Otrzymamy tedy :

$$0 = -\left(p + \frac{2\mathfrak{P}}{l}\right)x + \frac{1}{l}\left\{(l - d_{(i-1)})\mathfrak{P} - \mathfrak{D}\right\} + p\left(\frac{1}{2}l - d_{(i-1)}\right)$$

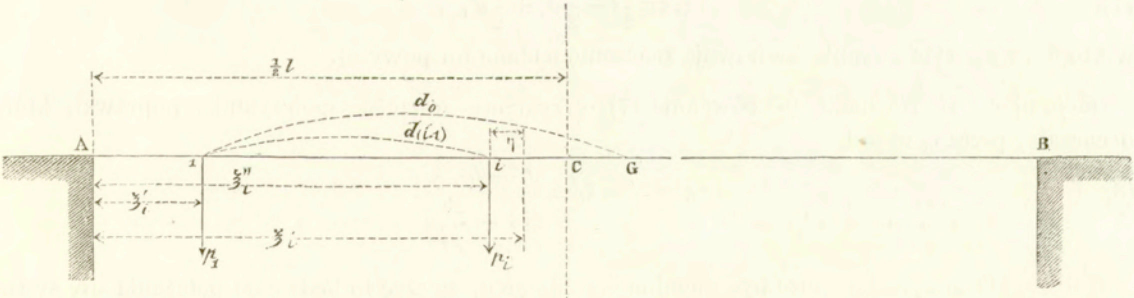

Fig. 12.

i oznaczając wartość tak znalezioną na x przez ξ'_1 (fig. 12), otrzymamy

$$\text{(3)} \qquad \xi_1' = \frac{l}{2} - \frac{\left[(pl + \mathfrak{P})d_{(i-1)} + \mathfrak{D}\right]}{2\left(\frac{pl}{2} + \mathfrak{P}\right)}.$$

Podstawmy w równanie (3) za $\mathfrak{D}$ jemu równe $\mathfrak{P}d_0$, to jest :

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P}d_0,$$

gdzie d_0 oznacza odległość środka ciężkości systematu sił uważanego od pierwszej siły p_1, otrzymamy równanie następujące

$$(4)\qquad \xi'_1 = \frac{l}{2} - \left(\frac{(pl+\mathfrak{P})d_{(i-1)} + \mathfrak{P}d_0}{2\left(\frac{pl}{2}+\mathfrak{P}\right)}\right),$$

w którém :

ξ'_1 wyraża odległość pierwszej siły systematu uważanego od punktu podpory A, odległość dla której moment zgięcia wywarty w danej sztuce przez działanie jednoczesne tak ciężaru stałego jako też i ciężaru przypadkowego jest największością. Znając więc tę odległość i uważając że odległość punktu i od pierwszej siły systematu jest równa $d_{(i-1)}$, odległość punktu w którym największy moment zgięcia zostanie wywartym od podpory A będzie dana przez równanie następujące

$$(5)\qquad \xi_i' = \xi'_1 + d_{(i-1)}$$

w którém :

ξ_i' oznacza odległość punktu szukanego od najbliższej podpory.

Podstawiając w równanie (5) za ξ'_1 jego wartość daną przez równanie (4), otrzymamy

$$(6)\qquad \xi_i' = \frac{l}{2} + \frac{1}{2}d_{(i-1)} - \frac{\left(\frac{pl}{2}+\mathfrak{P}d_0\right)d_{(i-1)}}{2\left(\frac{pl}{2}+\mathfrak{P}\right)}.$$

Oznaczmy przez ξ''_i odległość siły systematu uważanego od podpory A, dającą największy moment zgięcia wywarty w punkcie i przez ten systemat sił działający oddzielnie; wiemy z równań (4) (część 2^a) że żeby moment zgięcia wywarty w punkcie i był największością trzeba, zadosyć uczynić równaniu

$$(7)\qquad \xi_i'' = \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}d_{(i-1)};$$

w którém wszystkie czynniki zachowują znaczenie nadane im powyżej.

Odejmując od równania (6) równanie (7) otrzymamy wartość spółczynnika poprawki, którą oznaczamy przez η, to jest

$$(8)\qquad \eta = \xi_i' - \xi_i'' = \frac{d_0 - d_{(i-1)}}{2\left(1+\frac{2\mathfrak{P}}{pl}\right)}.$$

Wartość tak otrzymana może być dodatną lub odjemną, zależeć to będzie od położenia siły systematu uważanego na której przypada największy moment zgięcia wywarty pod wpływem samego systematu; względem środka ciężkości tego systematu : to jest że jeżeli siła na której przypada największy moment zgięcia przez działanie samego tylko systematu sił leży po lewej stronie środka ciężkości, wyrażenie (8) będzie dodatnem, w razie przeciwnym będzie ono odjemnem, licząc zawsze momenta zgięcia od początku A.

Równanie (8) pozwala nam wyprowadzić następujące wnioski :

1° Moment zgięcia największy wywarty pod wpływem ciężaru stałego i przypadkowego leży zawsze pomiędzy punktem przyczepienia siły systematu uważanego, na której przypada największy moment zgięcia pod wpływem samego tylko systematu, i środkiem belki.

2° Momen zgięcia największy wywarty przez ciężar stały i ciężar przypadkowy działające jednocześnie, przypadnie w środku belki wtenczas tylko jeżeli środek ciężkości ciężaru przypadkowego przypada w punkcie przyczepienia jednej z sił składowych, w tym bowiem przypadku

$$d_0 = d_{(i-1)},$$

a zatem

$$\frac{1}{2} l = x + d_{(i-1)} = x + d_0$$

lub kiedy ciężar przypadkowy będzie równy zeru, będzie on się oddalał od środka belki tém więcej, im stosunek ciężaru przypadkowego do ciężaru stałego będzie większy..

Wartość największego momentu zgięcia wywartego w danej belce, kiedy ciężary: stały i przypadkowy działają jednocześnie.

Za pomocą wniosku podanego w drugiej części, możemy z łatwością oznaczyć położenie najniekorzystniejsze jakie zajmuje na danej belce wszelki systemat sił ruchomy, po oznaczeniu więc tego położenia najniekorzystniejszego dla jakiegokolwiek systematu sił, możemy na chwilę uważać takowy jako systemat nieruchomy i oznaczyć wartości wszystkich momentów zgięcia wywartych przezeń w danej belce.

Widzieliśmy w części trzeciej że największe momenta zgięcia wywarte przez ciężary : stały i przypadkowy działające jednocześnie przypadają w punktach przyczepienia sił systematu uważanego, oprócz siły najbliżej leżącej od środka ciężkości tegoż systematu, oznaczyliśmy więc powyżej punkt w którym ten ostatni moment zgięcia zostaje wywartym, zostaje nam więc podać jego wartość analityczną którą otrzymamy w sposób następujący.

Rownanie (2) (Część 3), w którem za x podstawimy jego wartość daną przez równanie (3), wyrazi nam właśnie wielkość całkowitego największego z momentów zgięcia, przyjmie ono kształt następujący :

$$\mu'_i = -\frac{1}{2}\left(p + \frac{2\mathfrak{P}}{l}\right)\xi'^{\,-2}_1 + \frac{1}{l}[(l - d_{(i-1)})\mathfrak{P} - \mathfrak{D}]\,\xi_1' + p\left(\frac{1}{2}l - d_{(i-1)}\right)\xi_1' + \tag{10}$$

$$+\frac{1}{2}p(l - d_{(i-1)})d_{(i-1)} + \left[(\mathfrak{P} - \mathrm{P}_{(i-1)}) - \frac{1}{l}\mathfrak{D}\right]d_{(i-1)} + \mathrm{D}_{(i-1)}$$

jeżeli siła najbliżej leżąca środka ciężkości jest p_i (fig. 12)

W równaniu (10)

μ_i' oznacza największy moment zgięcia wywarty w danej belce przez ciężary : stały i przypadkowy działające jednocześnie

Zostawiamy szanownym czytelnikom łatwość oznaczenia wartości momentów zgięcia wywartych w punktach przyczepienia wszystkich pozostałych sił systematu wziętego pod uwagę i działającego jednocześnie z systematem stałym ; oznaczenie bowiem tych ostatnich nie przedstawia żadnej trudności; dostateczném będzie do równań otrzymanych w części pierwszej (1) i dających wartości momentów zgięcia wywartych w punktach przyczepienia sił, przez działanie samego tylko systemu nieruchomego (a w których to równaniach wartość na x wyraża zawsze odległość pierwszej siły systematu uważanego od najbliższej podpory, nadto : jeżeli skład sił działających jest ruchomy, to odległość ta przedstawi zawsze jego położenie najniekorzystniejsze na danej belce) dodać moment zgięcia utworzony w tymże punkcie przez ciężar stały, jednostajnie rozłożony a tak otrzymana summa algebraiczna będzie właśnie wartością momentu zgięcia szukanego.

Opis sposobu graficznego otrzymania granicy obwodu wszystkich momentów zgięcia, wywartych w danej belce pod wpływem ciężarów: jednostajnie rozłożonego i przypadkowego, działających jednocześnie, zdaje nam się być zbytecznym; każdy bowiem z czytelników, który z uwagą zechciał odczytać metody podane w niniejszej pracy i odnoszące się do sposobów graficznych, nie dozna bez wątpienia najmniejszej trudności w tym względzie.

Paryż, dnia 1 października, 1872 roku.

KAZIMIERZ BRANDT.