PRZYCZYNEK

DO

OGÓLNEJ TEORYI KÓŁ ZAZĘBIONYCH

NAPISAŁ

JAN NEP. FRANKE,

Professor Mechaniki w Akademii technicznej we Lwowie,

Korespondent Towarzystwa Nauk Ścisłych.

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa d. 6 Marca 1873 r.).

1. — Willis w swoich « Principles of Mechanism » (London, 1841 i 1870) pierwszy poruszył kwestyą oznaczenia kształtu i stosunku kół zazębionych w tym przypadku ogólnym, jeżeli osie nie są ani równoległe, ani się przecinają. Usiłując rozwiązać powyższą kwestyą, popełnił był Willis błąd zasadniczy, poprawiony przez Olliviera, który posługiwał się metodami Geometryi Wykreślnej, i dał pochop innym matematykom do głębszego zbadania całej sprawy. Pomiędzy tymi pracownikami wymienić należy przedewszystkiem panów : Weisbach, Reuleaux i Haton de la Goupillière. Prace tych geometrów, powyższéj kwestyi poświęcone, nie opierały się na twierdzeniach ogólnéj nauki o ruchu, lecz wychodziły częstokroć z pewnych założeń specyalnych, niezawsze ściśle uzasadnionych, z czego wynikło, że rozwiązania przez nich podane nie wyczerpały kwestyi postawionej i pozostawiły niektóre wątpliwości pod względem zastósowania tychże do kwestyi kół zazębionych. Z tego krótkiego przedstawienia rzeczy widać, że wyczerpujące rozwiązanie powyższej kwestyi ze stanowiska Cynematyki jest bardzo pożądane, tak dla teoryi, jak dla konstrukcyi kół zazębionych.

W toku dalszego rozumowania przekonamy się, że powyższa kwestya tkwi w następującem ogólnem zagadnieniu Cynematyki czystej :

(1) Ciału ruchomemu Σ o kształcie niezmiennym udzielamy równocześnie ruchy obrotowe około dowolnie w przestrzeni położonych osi O_1, O_2, $O_3, \ldots O_i, \ldots O_{n-1}$, O_n z odpowiednemi chyżościami kątowemi $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_i, \ldots \omega_{n-1}, \omega_n$: oznaczyć elementa ruchu wypadkowego.

W tym celu odnieśmy dany układ osi obrotów do dowolnego układu prostokątnego osi spółrzędnych Ax, Ay, Az, i niechaj

$$(2) \qquad \left.\begin{aligned} x &= a_i z + m_i \\ y &= b_i z + n_i \end{aligned}\right\} \ldots\ldots O_i$$

będą równania osi O_i względem $(Axyz)$, przyczém wskazówka i może przybrać wartości wszystkich liczb całkowitych $(1, 2, 3, \ldots, i, \ldots n-1, n)$. Zowiąc dowolną płaszczyznę $\Pi_i \perp O_i$ *płaszczyzną obrotu* około tej osi, odetnijmy ze śladu osi O_i na Π_i na tejże osi przynależną chyżość kątową ω_i w takim kierunku, abyśmy, patrząc z punktu końcowego tego odcinka na płaszczyznę obrotu, widzieli obrót każdego punktu na Π_i w kierunku obiegu wskazówki u zegara. Tym trybem postępując, przedstawimy dane ruchy obrotowe za pomocą odcinków $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_i, \ldots \omega_{n-1}, \omega_n$ we właściwych kierunkach, z dowolnych punktów początkowych $(x_1, y_1, z_1); \ldots (x_i, y_i, z_i); \ldots (x_n, y_n, z_n)$.

Przez punkt początkowy A układu osi spółrzędnych poprowadźmy pęk promieni $O'_1, O'_2, O'_3, \ldots O'_i, \ldots O'_{n-1}, O'_n$, z których każdy $O'_i \parallel O_i$, i udzielmy ciału Σ około każdego z tych promieni jako osi dwa obroty równoczesne z chyżościami kątowemi ω_i i $-\omega_i$, przezco w niczém nie zmienimy ruchu ciała, albowiem każde dwa obroty ω_i i $-\omega_i$ nawzajem się znoszą. Z dodania tego układu obrotów równoczesnych do pierwotnego wynika system ruchów obrotowych

$$(3) \qquad (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_i, \ldots \omega_{n-1}, \omega_n)$$

około osi $(O'_1, O'_2, \ldots O'_i, \ldots O'_{n-1}, O'_n)$, przecinających się w punkcie A, i system par wirujących (couple de rotation)

$$(4) \qquad [(\omega_1, -\omega_1); (\omega_2, -\omega_2); \ldots (\omega_i, -\omega_i); \ldots (\omega_{n-1}, -\omega_{n-1}); (\omega_n, -\omega_n)],$$

których płaszczyzny przez punkt A przechodzą. Ponieważ każda z par wirujących równowarta jest ruchowi postępowemu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny pary z chyżością równą momentowi pary, przeto wypadkową systemu (4) będzie ruch postępowy z pewną, późniéj oznaczyć się mającą chyżością V, podczas gdy system obrotów równoczesnych (3) daje jako wypadkową ruch obrotowy z chyżością kątową Ω około pewnéj osi O, któréj kierunek i położenie późniéj oznaczymy. Rozkładając postęp wypadkowy V na dwie składowe V' i V'', z których $V' \parallel O$, $V'' \perp O$, otrzymamy ze złożenia postępu V'' z obrotem Ω ruch obrotowy z chyżością kątową Ω około osi $S \parallel O$, tak, że system danych pierwotnie ruchów obrotowych równowarty jest ruchowi obrotowemu Ω około osi S w połączeniu z równoczesnym ruchem postępowym V' w kierunku tejże osi, czyli : ruchowi śrubowemu około osi S. Oś S wypadkowego ruchu śrubowego nazwiemy *osią centralną* ruchu ciała Σ. Mamy tedy następujące twierdzenie zasadnicze :

(5) *Dowolne równoczesne ruchy obrotowe, udzielone ciału stałemu Σ, równowarte są ruchowi śrubowemu około osi centralnej.*

W celu obliczenia elementów ruchu śrubowego, oznaczamy przez $(\overset{x}{\omega_i}, \overset{y}{\omega_i}, \overset{z}{\omega_i})$ składowe ruchu obrotowego ω_i około osi O'_i odnośnie do Ax, Ay, Az, to kładąc

$$(6) \qquad \rho^2_i = a^2_i + b^2_i + 1,$$

otrzymamy

$$(7) \qquad \overset{x}{\omega_i} = \frac{\omega_i a_i}{\rho_i}, \qquad \overset{y}{\omega_i} = \frac{\omega_i b_i}{\rho_i}, \qquad \overset{z}{\omega_i} = \frac{\omega_i}{\rho_i},$$

z czego na oznaczenie składowych chyżości kątowych Ω_x, Ω_y, Ω_z wypadkowego ruchu obrotowego

Ω około osi O wynikają następujące wartości:

$$
(8) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\Omega_x &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\omega_i a_i}{\rho_i}, \\
\Omega_y &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\omega_i b_i}{\rho_i}, \\
\Omega_z &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\omega_i}{\rho_i}.
\end{aligned}
\right.
$$

Niechaj (λ, μ, ν) będą kąty kierunkowe osi O względem $(Axyz)$, to mamy

$$
(9) \qquad \cos\lambda = \frac{\Omega_x}{\Omega}, \qquad \cos\mu = \frac{\Omega_y}{\Omega}, \qquad \cos\nu = \frac{\Omega_z}{\Omega},
$$

gdzie

$$
(10) \qquad \Omega^2 = \Omega^2_x + \Omega^2_y + \Omega^2_z.
$$

Oznaczmy przez δ_i najkrótszą odległość punktu A od osi O_i, to $M_i = \omega_i \delta_i$ będzie liczebną wartością momentu pary wirującej $(\omega_i, -\omega_i)$, gdzie

$$
(11) \qquad \delta^2_i = \frac{1}{\rho^2_i} \left\{ m^2_i + n^2_i + (a_i n_i - b_i m_i)^2 \right\}.
$$

Aby moment M_i przedstawić geometrycznie, wyprowadźmy w punkcie A prostopadłą do płaszczyzny pary wirującej $(\omega_i, -\omega_i)$, i odetnijmy na tej prostopadłej z punktu A odległość M_i w takim kierunku, abyśmy, patrząc z punktu końcowego tego odcinka na płaszczyznę pary $(\omega_i, -\omega_i)$, widzieli strzałkę kierunkową odcinka ω_i obracającą punkt początkowy odcinka $-\omega_i$ w kierunku obiegu wskazówki u zegara. Oznaczając przez $(\lambda_i, \mu_i, \nu_i)$ kąty kierunkowe odcinka M_i względem $(Axyz)$, mamy na mocy (11):

$$
\cos\lambda_i = \frac{n_i}{\delta_i \rho_i}, \qquad \cos\mu_i = -\frac{m_i}{\delta_i \rho_i}, \qquad \cos\nu_i = \frac{b_i m_i - a_i n_i}{\delta_i \rho_i},
$$

z czego na oznaczenie składowych $\overset{x}{M}_i, \overset{y}{M}_i, \overset{z}{M}_i$ momentu M_i wynika:

$$
(12) \qquad \overset{x}{M}_i = \frac{\omega_i n_i}{\rho_i}, \qquad \overset{y}{M}_i = -\frac{\omega_i m_i}{\rho_i}, \qquad \overset{z}{M}_i = \frac{\omega_i (b_i m_i - a_i n_i)}{\rho_i}.
$$

Z tych równań dostaniemy, znacząc przez M_x, M_y, M_z składowe momentu wypadkowego M, a przez (λ', μ', ν') jego kąty kierunkowe względem $(Axyz)$:

$$
(13) \qquad \left\{
\begin{aligned}
M_x &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\omega_i n_i}{\rho_i}, \\
M_y &= -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\omega_i m_i}{\rho_i}, \\
M_z &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\omega_i}{\rho_i} (b_i m_i - a_i n_i);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(14) \qquad M^2 = M^2_x + M^2_y + M^2_z;
$$

$$
(15) \qquad \cos\lambda' = \frac{M_x}{M}, \qquad \cos\mu' = \frac{M_y}{M}, \qquad \cos\nu' = \frac{M_z}{M}.
$$

Moment M jest niczém innέm, jak żądaną chyżością V ruchu postępowego, o którym poprzednio była mowa.

Ponieważ w zrównania (8) wchodzą tylko takie ilości, które zupełnie niezależne są od położenia punktu A, przeto wnosimy, że tak położenie osi O, jak wielkość chyżości kątowéj Ω pozostają te same, do któregokolwiek punktu A sprowadzimy pierwotny system ruchów obrotowych. W zrównania (13), (14) i (15) wchodzą jednak takie ilości, które zawisłe są od punktu A, zdaje się tedy, że tak kierunek, jak wielkość momentu wypadkowego M dla każdego punktu A będą inne. Aby to przypuszczenie uzasadnić, sprowadźmy pierwotny system ruchów obrotowych do punktu A', ktorego spółrzędne względem $(Axyz)$ niechaj będą (ξ, η, ζ). Przesunąwszy przez A' układ osi spółrzędnych $(A'x'y'z')$ zgodny z pierwotnym, oznaczmy przez (x', y', z') składowe dowolnego punktu a przez

$$\begin{cases} x' = a_i z' + m'_i \\ y' = b_i z' + n'_i \end{cases}$$

zrównania osi O_i względem $(A'x'y'z')$, to ze wzorów transformacyi

$$x' = x - \xi, \qquad y' = y - \eta, \qquad z' = z - \zeta$$

wynika

$$m'_i = m_i - \xi + a_i\zeta, \qquad n'_i = n_i - \eta + b_i\zeta,$$

z czego otrzymamy

$$(16) \qquad \begin{cases} \overset{x}{M}{}'_i = \overset{x}{M}_i - \eta\dfrac{\omega_i}{\rho_i} + \zeta\dfrac{\omega_i b_i}{\rho_i}, \\ \overset{y}{M}{}'_i = \overset{y}{M}_i - \zeta\dfrac{\omega_i a_i}{\rho_i} + \xi\dfrac{\omega_i}{\rho_i}, \\ \overset{z}{M}{}'_i = \overset{z}{M}_i - \xi\dfrac{\omega_i b_i}{\rho_i} + \eta\dfrac{\omega_i a_i}{\rho_i}; \end{cases}$$

$$(17) \qquad \begin{cases} M'_x = M_x - \eta\Omega_z + \zeta\Omega_y, \\ M'_y = M_y - \zeta\Omega_x + \xi\Omega_z, \\ M'_z = M_z - \xi\Omega_y + \eta\Omega_x; \end{cases}$$

gdzie M_i, względnie M' oznaczają moment pary $(\omega_i, -\omega_i)$, a względnie moment pary wypadkowéj, odnośnie do punktu A'. Z porównania wzorów (17) z wzorami (13), (14) i (15) wynika, że w ogólności tak wielkość, jak kierunek momentu wypadkowego zawisłym jest od punktu, do którego dany system ruchów obrotowych sprowadzono.

Oznaczywszy przez (M', Ω) kąt, jaki oś O zamyka z kierunkiem momentu wypadkowego M', mamy z (9) i (14):

$$(18) \qquad \cos(M', \Omega) = \frac{1}{M\,\Omega}\left\{\Omega_x M'_x + \Omega_y M'_y + \Omega_z M'_z\right\};$$

wstawiając w to równanie wartości na $M'_x, \ldots, \Omega_x, \ldots$, M' i Ω, przekonać się łatwo, że kąt (M', Ω) jest zmienny i zależy od położenia punktu A'. Z poprzedniego określenia osi centralnej S ruchu ciała Σ wiemy, że odnośnie do każdego punktu tejże musi być $\cos(M', \Omega) = \pm 1$, z czego wynika, że w punktach osi centralnéj musi być na mocy (18):

$$(\Omega_x M'_y - \Omega_y M'_x)^2 + (\Omega_y M'_z - \Omega_z M'_y)^2 + (\Omega_z M'_x - \Omega_x M'_z)^2 = 0,$$

który-to warunek wymaga koniecznie spółistnienia następujących dwóch zrównań:

(19) $$\begin{cases} \Omega_x M'_y - \Omega_y M'_x = 0 \\ \Omega_y M'_z - \Omega_z M'_y = 0, \end{cases}$$

jeżeli założymy $\Omega_x \gtrless 0, \quad \Omega_y \gtrless 0, \quad \Omega_z \gtrless 0.$

Wstawiając w te dwa zównania wartości z (17), i wyrażając ξ i η jako funkcye ζ, otrzymamy, kładąc

$$K = \Omega_x M_x + \Omega_y M_y + \Omega_z M_z:$$

(20) $$\begin{cases} \xi = \dfrac{\Omega_x}{\Omega_z}\zeta + \dfrac{1}{\Omega_z}\left[\dfrac{K}{\Omega^2}\Omega_y - M_y\right], \\ \eta = \dfrac{\Omega_y}{\Omega_z}\zeta + \dfrac{1}{\Omega_z}\left[M_x - \dfrac{K}{\Omega^2}\Omega_x\right] \end{cases}$$

jako zrównania prostéj, któréj każdy punkt A′ czyni zadość warunkowi $\cos(M', \Omega) = \pm 1$, czyli zrównania żądanéj osi centralnéj ruchu S. Z (9) i (20) wynika, że oś centralna równoległa jest do osi O, wpadającéj w promień wypadkowy pęku promieni $(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$, przesuniętego przez dowolny punkt A.

Aby oznaczyć moment wypadkowy V′ odnośnie do punktu A′ na osi centralnéj, podstawmy w (17) takie trzy wartości na (ξ, η, ζ), które czynią zadość zrównaniom (20), a dostaniemy

(21) $$V'^2 = \frac{K^2}{\Omega^2},$$

które-to zrównanie zapowiada, że moment wypadkowy V′ dla każdego punktu A′ osi centralnéj jest ilością stałą. Z wiadomych własności par wirujących wynika bezpośrednio, że V′ jest chyżością postępową ruchu śrubowego około osi centralnéj.

Postawione pod (1) zagadnienie ogólne jest tedy wyczerpująco rozwiązane, zrównania bowiem (10), (20) i (21) pozwalają obliczyć wszystkie elementa żądanego ruchu wypadkowego.

2. — Aby pokazać, jak na podstawie powyższego zagadnienia cynematycznego rozwiązać się dają wszystkie kwestye o kształcie i wzajemnym stosunku kół zazębionych, załóżmy, że dwie osie O_1, O_2, które się ani przecinają, ani są równoległe, mamy połączyć za pomocą kół zazębionych R_1, R_2, przyczem stosunek

(22) $$\lambda = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

chyżości kątowych ich ruchów obrotowych ma być ilością stałą. Jeżeli R_1 jest kołem pędzącém, R_2 zaś pędzoném, to kształt obydwóch kół zawisłym jest jedynie od ruchu koła pędzonego *względem* pędzącego, musimy tedy przedewszystkiem ten ruch względny ściśle oznaczyć. Używając w tym celu ogólnej metody, jaką nauka o ruchu względnym podaje, udzielimy obydwom kołom R_1 i R_2 ruch obrotowy około osi O_1 z chyżością kątową $-\omega_1$: w skutek tego obrotu koło pędzące przejdzie w stan spoczynku, a ruch wynikający z obydwóch obrotów równoczesnych $-\omega_1$ i ω_2 koła R_2 około osi O_1, względnie O_2, będzie żądanym ruchem względnym tegoż. Na mocy założenia o położeniu wzajemném obydwóch osi wynika z poprzedniego, że ruch koła pędzonego względem pędzącego jest ruchem śrubowym około osi centralnéj.

Celem oznaczenia elementów tego względnego ruchu śrubowego, obierzmy oś O_1 trzeciorzędną osią Az układu $(Axyz)$, i niechaj

$$\left.\begin{cases} x = az + m \\ y = bz + n \end{cases}\right\} \dots O_2 \tag{23}$$

będą równaniami analitycznemi osi O_2. W takim razie mamy:

$$\overset{x}{\omega}_1 = 0, \qquad \overset{y}{\omega}_1 = 0, \qquad \overset{z}{\omega}_1 = \omega_1;$$

$$\overset{x}{\omega}_2 = \frac{\omega_2 a}{\rho}, \qquad \overset{y}{\omega}_2 = \frac{\omega_2 b}{\rho}, \qquad \overset{z}{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{\rho},$$

gdzie $\rho^2 = a^2 + b^2 + 1$;

$$\Omega_x = \frac{\omega_2 a}{\rho}, \qquad \Omega_y = \frac{\omega_2 b}{\rho}, \qquad \Omega_z = \omega_1 + \frac{\omega_2}{\rho}, \tag{24}$$

$$\Omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{2\omega_1\omega_2}{\rho}. \tag{25}$$

Zrównania (24) pokazują, że oś centralna S równoległa jest do płaszczyzny, przesuniętej przez punkt A równoległe do obydwóch osi, że zatem kierunek osi centralnej z danych kierunków O_1 i O_2 za pomocą konstrukcyi płaskiéj łatwo oznaczyć się daje.

Dalej mamy:

$$\overset{x}{M}_1 = 0, \qquad \overset{y}{M}_1 = 0, \qquad \overset{z}{M}_1 = 0;$$

$$M_x = \overset{x}{M}_2 = \frac{\omega_2 n}{\rho}, \qquad M_y = \overset{y}{M}_2 = -\frac{\omega_2 m}{\rho}, \qquad M_z = \overset{z}{M}_2 = \frac{\omega_2}{\rho}(bm - an), \tag{26}$$

$$K = \frac{\omega_1\omega_2}{\rho}(bm - an). \tag{27}$$

Po wstawieniu tych wartości w (20) dostaniemy:

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\omega_2}{\omega_2 + \rho\omega_1}\left\{ a\zeta + \dfrac{\omega_1\omega_2 b(bm - an)}{\omega_1(\omega_2 + \rho\omega_1) + \omega_2(\omega_1 + \rho\omega_2)} + m \right\} \\ \eta = \dfrac{\omega_2}{\omega_2 + \rho\omega_1}\left\{ b\zeta - \dfrac{\omega_1\omega_2 a(bm - an)}{\omega_1(\omega_2 + \rho\omega_1) + \omega_2(\omega_1 + \rho\omega_2)} + n \right\} \end{cases} \tag{28}$$

jako zrównania osi centralnéj S.

Oznaczmy przez Δ najkrótszą wzajemną odległość danych osi, przyczém $o_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $o_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ niechaj będą punkta spotkania się prostéj Δ z osią O_1, względnie O_2, to

$$\left.\begin{cases} ax + by = 0 \\ z = -\dfrac{am + bn}{a^2 + b^2} \end{cases}\right\} \dots o_1 o_2 \tag{29}$$

są zrównania prostéj o_1o_2. Podstawiając $\zeta = -\dfrac{am+bn}{a^2+b^2}$ w zrównanie (28), otrzymamy $a\xi + by = 0$, z czego ze względu na (29) wnioskujemy, że *oś centralna przecina najkrótszą wzajemną odległość danych osi*. Niechaj $p \equiv (\xi', \eta', \zeta')$ będzie punktem spotkania się obydwóch prostych S i o_1o_2, to mamy

(30) $$\xi' = \frac{x_2}{\Omega^2\rho}\omega_2(\omega_1 + \rho\omega_2), \qquad \eta' = \frac{y_2}{\Omega^2\rho}\omega_2(\omega_1 + \rho\omega_2), \qquad \zeta' = -\frac{am+bn}{a^2+b^2},$$

gdzie

(31) $$x_2 = \frac{b(bm-an)}{a^2+b^2}, \qquad y_2 = -\frac{a(bm-an)}{a^2+b^2},$$

z czego wynika

(32) $$\Delta^2 = \frac{(bm-an)^2}{a^2+b^2}.$$

Punkt p można łatwo oznaczyć konstrukcyą. Z (30) i (31) mamy bowiem

(33) $$\frac{po_2}{po_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2 + \rho\omega_1}{\omega_1 + \rho\omega_2},$$

a ponieważ

(34) $$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin(S, O_2)}{\sin(S, O_1)}, \qquad \omega_1 + \rho\omega_2 = \Omega\rho\cos(S, O_2), \qquad \omega_2 + \rho\omega_1 = \Omega\rho\cos(S, O_1),$$

gdzie (S, O_1), względnie (S, O_2) oznaczają kąt zawarty między osią centralną a osią O_1, względnie O_2, przeto będzie

(35) $$\frac{po_2}{po_1} = \frac{\operatorname{tang}(S, O_2)}{\operatorname{tang}(S, O_1)}.$$

Oznaczywszy tedy konstrukcyą płaską kierunek osi centralnéj, możemy za pomocą stosunku (35) oznaczyć punkt p, przyczém zauważać należy, że długości po_1, względnie po_2 są najkrótszemi wzajemnemi odległościami prostych S i O_1, względnie S i O_2, albowiem $o_1o_2 \perp S$.

Pozostaje jeszcze do obliczenia chyżość postępowa V′ względnego ruchu śrubowego. Podstawiając wartość na $(bm-an)^2$ z (32) w zrównanie (27), otrzymamy

$$K^2 = \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\rho^2}\Delta^2(a^2+b^2),$$

co na mocy,

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1} = \sin^2(O_1, O_2)$$

daje

$$K^2 = \omega_1^2\omega_2^2\Delta^2\sin^2(O_1, O_2),$$

co podstawiwszy w (21), dostaniemy ostatecznie:

(36) $$V'^2 = \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\Omega^2}\Delta^2\sin^2(O_1, O_2).$$

Aby na podstawie powyższej analizy wysnuć ostatecznie wnioski co do kształtu kół R_1 i R_2, załóżmy, zgodnie z praktyką mechanizmu kół zazębionych, że nietylko stosunk (22), ale nadto tak chyżość kątowa ω_1, jak ω_2 zachowują wartości stałe, to znaczy, że ruch jednostajny koła pędzącego ma być przeniesiony jednostajnie na pędzone. Zrównania (24) i (35) pokazują, że w takim razie oś centralna względnego ruchu śrubowego jest nieruchoma w przestrzeni, a z (25) i (36) widzimy, że tak postęp, jak obrót podczas ruchu względnego odbywają się jednostajnie. Z tego wynika, że miejscem geometrycznem ciągle po sobie następujących położeń osi centralnej *względem* osi O_1 jest hyperboloida obrotowa H_1, której osią geometryczną jest O_1, rodzącą zaś prosta S; że tak samo druga hyperboloida obrotowa H_2 o osi O_2 i tej samej rodzącej S wyobraża miejsce geometryczne ciągle po sobie następujących położeń osi centralnej *względem* osi O_2. Obie hyperboloidy, osadzone na dotyczących osiach O_1 i O_2, dotykające się wzajemnie wzdłuż nieruchomej w przestrzeni prostej S, mogą służyć jako części składowe mechanizmu, mającego przenieść ruch obrotowy z osi O_1 na O_2 pod danymi warunkami. Ponieważ koła zazębione wypełniać mają te same funkcye, co dotyczące mechanizmy pierwotne H_1 i H_2, przeto boki ich zębów muszą się zazębiać na powyższych dwóch hyperboloidach, a koła ich podziałowe muszą być równoleżnikami obydwóch hyperboloid H_1 i H_2, dotykającymi się wzajemnie w dowolnym punkcie prostej S. Z tego powodu nazywamy koła zazębione, osadzone na dwóch osiach ani równoległych, ani przecinających się, *kołami hyperboloidalnemi*. Długości po_1 i po_2 wyobrażają promienie kół szyjnych obydwóch hyperboloid pierwotnych, kładąc tedy $R_1 = po_1$, $R_2 = po_2$, widzimy, że najmniejsze koła podziałowe, jakie tylko pod powyższymi warunkami do konstrukcyi kół zazębionych mogą być użyte, należy opisać z punktów o_1 i o_2 promieńmi R_1 i R_2, których długości z poprzedzających formuł łatwo obliczyć się dają. Używając kół szyjnych jako pierwotnych, otrzymamy koła hyperboloidalne, które dla odróżnienia od innych często *kołami śrubowemi* nazywane bywają.

Jeżeli osie O_1, O_2 są równoległe, to na mocy (36) znika postęp, a pozostaje tylko obrót podczas ruchu względnego, którego chyżość kątowa jest różnicą danych chyżości. Oś centralna względnego ruchu obrotowego przybiera w tym razie kierunek równoległy do danych osi, a punkt p dzieli najkrótszą wzajemną odległość tychże w odwrotnym stosunku dotyczących chyżości kątowych. Każda z hyperboloid H_1 i H_2 przechodzi w walec obrotowy o osi O_1, względnie O_2, a koła zazębione przybierają z tego powodu miano kół czelnych.

Jeżeli osie O_1 i O_2 przecinają się w punkcie C, to także ruch względny koła pędzonego jest obrotowy, albowiem $\Delta = 0$. Oś S tego ruchu obrotowego przechodzi przez punkt stały C i pada na płaszczyznę przesuniętą przez obydwie dane osie; kierunek jej wyznacza taka sama konstrukcya, jak w przypadku ogólnym. Każda z hyperboloid H_1 i H_2 przechodzi w stożek obrotowy o osi O_1, względnie O_2, a koła zazębione przybierają z tego powodu miano kół stożkowych.

Gdybyśmy w przypadku ogólnym założyli, że przy niezmienności stosunku λ każda z chyżości kątowych ω_1 i ω_2 jest funkcyą czasu, to i w takim razie oś centralna, w której obydwa koła zazębione ciągle się dotykają, pozostaje nieruchoma w przestrzeni, a tylko chyżość postępowa V' wzdłuż tejże osi jest zmienną. Możemy tedy zapomocą danej pary kół zazębionych niejednostajny ruch obrotowy zamienić na niejednostajny, byle tylko stosunek chyżości kątowych tych ruchów nie podlegał żadnej zmianie.

3. — Oznaczywszy kształt pierwotny kół zazębionych, pozostaje nam jeszcze do obliczenia każdorazowy ich stosunek. Pod stosunkiem dwóch kół zazębionych będziemy rozumieli w ogólności stosunek długości promieni ich kół podziałowych. Załóżmy, że dla konstrukcyi dwóch kół zazębionych hyperboloidalnych chcemy użyć kół szyjnych hyperboloid H_1 i H_2 jako kół pierwotnych (podziałowych),

i niechaj R_1, R_2 będą promienie tych ostatnich, to ze zrównania (35) wynika bezpośrednio:

(37) $$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\operatorname{tang}(S, O_2)}{\operatorname{tang}(S, O_1)}.$$

Połóżmy $m = \sin(O_1, O_2)$, to z podstawienia wiadomego stosunku chyżości kątowych w (37) otrzymamy:

(38) $$\frac{R_2}{R_1} = \lambda\sqrt{\frac{\Omega^2 - m^2\omega_2^2}{\Omega^2 - m^2\omega_1^2}},$$

co na mocy (25) daje ostatecznie:

(39) $$\frac{R_2}{R_1} = \lambda\sqrt{\frac{\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{1-m^2} - m^2 + 1}{\lambda^2(1-m^2) + 2\lambda\sqrt{1-m^2} + 1}}.$$

Zrównanie to pokazuje, że stosunek dwóch kół śrubowych w ogólności różni się od odwrotnego stosunku przynależnych chyżości kątowych, czyli, co na jedno wychodzi, od stosunku odwrotnego przynależnych ilości obrotów równoczesnych. Założywszy:

$$o < m < 1,$$

mamy tylko w przypadku $\lambda = 1$:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \lambda = 1,$$

bez względu na położenie danych osi. Dla kół czelnych mamy zawsze $m = 0$, co na mocy (38) daje:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \lambda,$$

bez względu na wzajemną odległość danych osi.

Jeżeli do przenoszenia ruchu nie chcemy użyć kół szyjnych, lecz jakichkolwiek dwóch odpowiednych równoleżników r_1 i r_2 na hyperboloidach pierwotnych, które dotykają się wzajemnie w punkcie M osi centralnej, to promienie r_1 i r_2 można łatwo następującym oznaczyć sposobem. Przesuńmy przez punkt M dwie płaszczyzny $P_1 \perp O_1$, $P_2 \perp O_2$, to ślady m_1, m_2 osi na tych płaszczyznach są środkami żądanych kół. Przesuwając przez wiadomy punkt p dwie proste $px \parallel O_1$, $py \parallel O_2$, oznaczmy przez n_1 ślad prostej px na P_1, przez n_2 zaś ślad prostej py na P_2, to z uwagi, że proste px, S, py na jedną padają płaszczyznę, wynika, że:

$$\text{kąt } Mn_1m_1 = \text{kąt } Mn_2m_2 = 90^\circ,$$

z czego, kładąc $pM = \delta$, otrzymamy:

(40) $$\begin{cases} r_1^2 = R_1^2 + \delta^2 . \sin^2(S, O_1), \\ r_2^2 = R_2^2 + \delta^2 . \sin^2(S, O_2), \end{cases}$$

z których-to zrównań łatwo oznaczyć się daje stosunek kół r_1, r_2 dla każdej wartości na δ. Wyrażając $\sin(S, O_1)$ i $\sin(S, O_2)$ przez m, dostaniemy z (40) przy założeniu:

(41) $$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \text{ jeżeli } 0 < m < 1,$$

bez względu na λ zawsze $\delta = \infty$, co pokazuje, że w ogólności nie istnieje para kół hyperboloidalnych, spełniająca warunek (41). Z (40) widać, że dla kół stożkowych, dla których $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, mamy zawsze:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \tag{42}$$

bez względu na obraną wartość na δ.

Lwów, w lutym 1873 r.