TEORYA

FUNKCYJ ZMIENNÉJ ZŁOŻONÉJ

napisał

WŁADYSŁAW PUCHEWICZ

Magister Nauk Matematycznych b. Szkoły Głównéj Warszawskiéj.

Przedstawione na posiedzeniu Towarzystwa dnia 5 Maja 1873 roku.

SŁÓWKO WSTĘPNE.

Teorya funkcyj zmiennéj złożonéj, choć nauka nowa, bo powstała w pierwszéj połowie bieżącego stulecia, zajęła odrazu ważne stanowisko w Matematyce, tak, że dziś zaliczyć ją należy do elementów téj nauki, — bo bez niéj w wielu względach jasne pojmowanie funkcyj i ich własności jest niemożliwe. Brak wyczerpująco i specyalnie ten przedmiot traktującego dziełka w naszéj literaturze, skłonił mię do napisania niniejszego artykułu. Pracę moję podzieliłem na dwie części: w pierwszéj zająłem się zbadaniem znanych nam funkcyj prostych, uważanych przy zmiennéj złożonéj, — w drugiéj rozwinąłem zasady ogólnéj teoryi funkcyj zmiennéj złożonéj, z niektóremi ich zastosowaniami. Starałem się przedewszystkiem przeprowadzić rzecz z jaknajwiększą wyczerpującą ścisłością, i uniknąć tym sposobem niedokładności, jakie czasami u innych autorów spotkać można; — a nadto za punkt wyjścia, którego w całym ciągu nie traciłem z oczu, przyjąłem prawdy z teoryi funkcyj rzeczywistych znajome, i starałem się zawsze wykazywać związek między funkcyami zmiennéj rzeczywistéj a złożonéj istniejący. Dlatego to tak obszernie traktowałem część pierwszą, i, gdy tego było potrzeba, nie wahałem się użyć choćby zawilszych sposobów traktowania rzeczy (jak np. przy wprowadzeniu całek), byle tylko nie stawiać nic w oderwaniu od pojęć z teoryi funkcyj zmiennéj rzeczywistéj.

Warszawa, Grudzień 1872 roku.

CZĘŚĆ I

I. — DZIAŁANIA NAD ILOŚCIAMI ZŁOŻONEMI.

§ 1. **Początek ilości urojonych i złożonych.** Weźmy najprostsze równanie stopnia drugiego:

(1) $$x^2 = \mathrm{A},$$

gdzie x oznacza niewiadomą, A ilość daną. Równaniem tém wyrażamy pytanie: jakie ilości podniesione do kwadratu wydają nam A?

Mechanicznie rozwiązując to równanie, otrzymujemy wypadek:

(2) $$x = \pm\sqrt{\mathrm{A}},$$

z którego czytamy odpowiedź na nasze pytanie następującą: są dwie ilości, przeciwne między sobą co do znaku, które podniesione do kwadratu wydają A.

Jeżeli **A** jest ilością dodatną, daną co do wartości liczebnéj, to dane są także liczebne wartości obu ilości szukanych, albowiem, gdy A jest dodatne, $\sqrt{\mathrm{A}}$ (chociażby A nie było zupełnym kwadratem) przedstawia ilość zupełnie ściśle określoną.

Jeżeli zaś A jest ilością odjemną, $\sqrt{\mathrm{A}}$, zostając się tego samego rodzaju symbolem algebraicznym, co w przypadku A dodatnego, nie przedstawia jednak żadnej określonéj ilości; jak i być powinno, jeżeli zważymy, że nie ma ilości, któraby będąc podniesioną do kwadratu wydała ilość odjemną. Łatwo jednak spostrzedz, że i w tym przypadku symbol stojący na drugiej stronie równania (2), a otrzymany przez mechaniczne rozwiązanie równania (1), w saméj rzeczy zadość czyni temu równaniu, jeżeli mechanicznie wykonywać nad nim będziemy działania wskazane témże równaniem.

Spotykamy więc symbol algebraiczny, niemający żadnego rzeczywistego znaczenia, a jednak zadość czyniący pewnym związkom algebraicznym: to skłania nas do bliższego zajęcia się tego rodzaju symbolami. A najwpierw, jak poprzednio przyjęliśmy ilość oznaczać symbolami, tak teraz na odwrót, symbole te nazwiemy *ilościami urojonemi*, dla odróżnienia od poprzednio uważanych *rzeczywistych*

W ten sposób wprowadzamy do matematyki ilości urojone pod postacią pierwiastków kwadratowych z ilości rzeczywistych odjemnych, i nadto otrzymujemy wskazówkę, jak należy postępować z temi ilościami; a mianowicie: w działaniach nad ilościami urojonemi należy zachowywać mechanizm odpowiednich działań nad ilościami rzeczywistemi.

Rozwiązanie ogólnego równania stopnia drugiego:

(3) $$x^2 + px + q = 0,$$

prowadzi nas do wypadku:

(4) $$x = \mathrm{B} \pm \sqrt{\mathrm{C}},$$

gdzie

$$\mathrm{B} = -\frac{p}{2}, \qquad \mathrm{C} = \frac{p^2}{4} - q;$$

jeżeli zaś $q > \frac{p^2}{4}$, wtedy C jest ilością odjemną, i druga strona równania (4) przedstawia nam ilość złożoną z dwóch oddzielnych części: jedną jest ilość rzeczywista, drugą urojona. Taką ilość nazwiemy *ilością złożoną*: tak ilości rzeczywiste, jak i urojone zawierają się jako szczególne przypadki w ilości złożonéj.

Jeżeli na drugiéj stronie równania (4) podstawimy:

$$\mathrm{B} = \alpha, \qquad \mathrm{C} = -\beta^2,$$

i zważymy, że według mechanicznego prawidła na wynoszenie czynników z pod znaku pierwiastku:

$$\sqrt{-\beta^2} = \sqrt{(-1)\beta^2} = \beta\sqrt{-1},$$

to otrzymamy drugi kształt ilości złożonéj:

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

§ 2. **Jedność urojona, stanowcze określenie ilości złożonych.** Powyżéj podany sposób określenia ilości urojonych i złożonych jest niedogodny: raz dlatego, że upodobniając ilości urojone ilościom pierwiastkowym stopnia drugiego, nie nadajemy im najogólniejszéj natury ilości, drugi raz dlatego, że na samym początku badań naszych nad temi ilościami, spotykamy dwójznaczność wynikającą właśnie ztąd, iż postępujemy z niemi jak z ilościami pierwiastkowemi.

I tak, mnożąc przez siebie dwie ilości urojone, i trzymając się prawideł mnożenia ilości pierwiastkowych, powinnibyśmy napisać:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{(-a)(-b)} = \sqrt{ab},$$

a więc także:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{a^2} = a;$$

z drugiéj zaś strony wiemy, że;

$$\sqrt{-a} . \sqrt{-a} = (\sqrt{-a})^2 = -a.$$

Sprzeczność tę w elementarnych kursach algebry usuwają przyjęciem absolutnego prawidła: iloczyn dwóch ilości urojonych jest ilością odjemną; nie powstanie ona zupełnie przy drugiém określeniu.

Podobnie jak ilość rzeczywistą uważać można za iloczyn z oderwanéj liczby przez jedność rzeczywistą, tak *ilość urojoną uważać będziemy jako iloczyn z oderwanéj liczby rzeczywistéj przez jednostkę uro-*

jona. Tę jednostkę urojoną oznaczymy literą i, w rachunkach zaś postępować z nią będziemy tak, jak z każdym innym nieokreślonym algebraicznym znakiem, pamiętając tylko o tém, żeby zamiast i^2 pisać $=1$, zkąd bezpośrednio wypada, że zamiast $\pm\sqrt{-1}$, należy pisać odpowiednio $\pm i$. Wtedy ilość urojona napisze się:

$$ai,$$

a ilość złożona:

$$\alpha+\beta i(*).$$

Czasami znak i pisze się przed swoim współczynnikiem.

Przy tém określeniu mnożenie dwóch ilości urojonych wykonać będzie można li tylko w ten sposób:

$$\sqrt{-a}.\sqrt{-b}=\sqrt{a}\,i\times\sqrt{b}\,i=\sqrt{ab}\,i^2=-\sqrt{ab}.$$

Możemy nadto opierając się na tém określeniu, wyprowadzić ogólne prawo, które rozstrzyga, czy pewien wzór algebraiczny (**), wyprowadzony dla ilości rzeczywistych, utrzymuje się i dla ilości złożonych. Powiedzieliśmy bowiem, że z symbolem oznaczającym jedność urojoną postępować będziemy tak, jak ze znakiem algebraicznym nieokreślonego znaczenia; każdy więc wzór algebraiczny utrzymujący się dla *wszelkich* wartości pewnéj ilości k w niego wchodzącéj, utrzyma się i wtedy gdy za k podstawimy i, t.j. jednostkę urojoną; albowiem wzór ten będzie, że tak powiem, symbolicznie dla k prawdziwy, można więc w nim za k podstawić symbol wszelki, nie zważając na jego znaczenie. Prawo więc nasze można tak wypowiedzieć:

Jeżeli wzór wyrażający związek algebraiczny między ilościami $M_0, M_1, M_2,\ldots, N_0, N_1, N_2,\ldots$, utrzymuje się, gdy w nim zamiast ilości $M_0, M_1, M_2,\ldots$, podstawimy ilości kształtu $P_0+kQ_0, P_1+kQ_1,\ldots$, gdzie $P_0, Q_0, P_1, Q_1,\ldots$ mogą być poddane pewnym warunkom, ale gdzie k oznacza ilość zupełnie dowolną, — to wtedy wzór ten utrzymywać się będzie i dla ilości złożonych $P_0+iQ_0, P_1+iP_1,\ldots$

Ztąd zaś wypada wniosek:

Wzór algebraiczny utrzymujący się dla wszelkich rzeczywistych wartości ilości $M_0, M_1, M_2,\ldots$, utrzymuje się i wtedy, gdy za te ilości podstawimy ilości złożone dowolne, t. j. utrzymuje się także dla wszelkich wartości złożonych.

Prawa te są zasadnicze, i w nich zawarte są wszystkie prawidła tyczące się postępowania z ilościami złożonemi.

§ 3. Działania nad ilościami złożonemi.

Dodawanie i odejmowanie. Według naszego prawa:

$$(a+bi)+(a'+b'i)=a+a'+(b+b')i,$$

$$(a+bi)-(a'+b'i)=a-a'+(b-b')i,$$

(*) Właściwszym byłby tu wyraz *liczba*, nie *ilość*: należałoby mówić podobnie jak Niemcy: liczba urojona, złożona (imaginäre, complexe Zahl). Ogólnie jednak przyjęty w nauce funkcyj wyraz: ilość, skłonił mię do pozostania przy tém nazwaniu.

(**) Tylko wzory algebraiczne, to jest wyrażające algebraiczny związek między funkcyami algebraicznemi, są obrazem działań, jakie niejako mechanicznie nad ilościami się wykonywają.

co przedstawić można we wzorze ogólnym :

(1) $$\Sigma(a+bi)=\Sigma a+i\Sigma b.$$

Przekonawszy się, że dodawanie i odejmowanie nad ilościami złożonemi, odbywa sie tak samo, jak nad rzeczywistemi, bezpośrednio wnioskujemy, że prawo przenoszenia ilości z jednej strony równania na drugą, stosuje się i do ilości złożonych.

Ztąd zaś wynika : jeżeli ilość złożona jest równą zeru, to oddzielnie część rzeczywista, oddzielnie współczynniki części urojonéj są równe zeru; albowiem jeżeli

$$a+bi=0,\quad \text{to}\quad a=-bi,$$

że zaś ilość rzeczywista nie może być równą urojonéj, więc musi być :

$$a=0,\quad \text{i}\quad b=0.$$

Nadto : jeżeli dwie ilości złożone są sobie równe, to oddzielnie części rzeczywiste i współczyniki części urojonych są sobie równe, bo jeżeli :

$$a+bi=a'+b'i,$$

to

$$a-a'+(b-b')i=0,$$

czyli :

$$a=a',\quad b=b'.$$

Mnożenie i dzielenie. Widzieliśmy już, jak należy wykonywać mnożenie ilości urojonych; stosując nasze prawo do ilości złożonych otrzymujemy :

$$(a+bi)(a'+b'i)=aa'+a'bi+ab'i+bb'i^2.$$

albo inaczéj :

(2) $$(a+bi)(a'+b'i)=aa'-bb'+(ab'+a'b)i.$$

Dzielenie nie przedstawia także żadnéj trudności, bo jeżeli położymy :

(3) $$\frac{a+bi}{a'+b'i}=x+yi,$$

to pamiętając, że powinno być :

$$(a'+b'i)(x+yi)=a+bi,$$

i wykonywając mnożenie, otrzymamy :

$$(a'x-b'y)+(a'y+b'x)i=a+bi,$$

a oddzielając w tém równaniu ilości rzeczywiste od urojonych, dojdziemy do dwóch równań stopnia pierwszego, które rozwiązawszy otrzymamy :

(4) $$x=\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2},\quad y=\frac{a'b-ab'}{a^2+b^2}.$$

Uwaga. Dwie ilości złożone kształtu :

$$a + bi \quad \text{i} \quad a - bi,$$

nazywają się *sprzężonemi z sobą*; summa ich równa jest ilości rzeczywistéj $2a$, różnica równa jest ilości urojonej $2bi$, iloczyn jest równy ilości rzeczywistéj zawsze dodatnéj $a^2 + b^2$.

Podnoszenie do potęg. Dla potęg całkowitych i dodatych można stosować wzór Newton'a dla dwumianów, ilość bowiem złożoną uważać można za dwumian. I tak :

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi, \tag{5}$$

zkąd widzimy, że kwadrat ilości złożonéj nie może być ilością rzeczywistą.

Zanim przystąpimy do potęg wyższych, poznamy najpierw potęgi jedności urojonéj. Wiemy już, że :

$$i^2 = -1,$$

daléj otrzymujemy :

$$i^3 = (i^2)i = -i,$$

$$i^4 = (i^2)(i^2) = 1,$$

$$i^5 = (i^4)i = i, \text{ i t. d.}$$

Zważywszy zaś, że wszelką liczbę całkowitą dodatną można przedstawić w kształcie $4m + r$, gdzie m i r są całkowite, a $r < 4$, to wówczas będziemy mogli napisać wzory ogólne :

$$\left.\begin{aligned} (i)^{4m} &= 1 \\ (i)^{4m+1} &= i \\ (i)^{4m+2} &= -1 \\ (i)^{4m+3} &= -i \end{aligned}\right\} \text{gdzie } m \text{ całkowite.} \tag{6}$$

Ztąd bezpośrednio wynikają ogólne wzory na podnoszenie do potęg ilości urojonych :

$$\left\{\begin{aligned} (\alpha i)^{4m} &= \alpha^{4m}, \\ (\alpha i)^{4m+1} &= \alpha^{4m+1} i, \\ (\alpha i)^{4m+2} &= -\alpha^{4m+2}, \\ (\alpha i)^{4m+3} &= -\alpha^{4m+3} i. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Jeżeli teraz podobnie, jak przy ilościach rzeczywistych, pod $(\alpha i)^{-n}$ rozumieć będziemy $\frac{1}{(\alpha i)^n}$, to łatwo przekonać się, że potęgi o wykładnikach odjemnych zawarte są we wzorach (7), jeżeli w nich pod m rozumieć będziemy stosownie dobraną ilość odjemną. Niech bowiem będzie :

$$n = 4m + r,$$

wtedy :

$$(\alpha i)^{-n} = \frac{1}{(\alpha i)^n} = \frac{1}{\alpha^n i^r},$$

a pomnożywszy licznik ostatniego ułamku przez i^4, t. j. przez jedność, otrzymamy :

(8) $$(\alpha i)^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} i^{4-r}.$$

Zobaczmy teraz do jakiego wypadku dojdziemy używając bezpośrednio wzorów (7). Niech będzie :

$$-n = 4m' + r',$$

gdzie m' odjemne a r' dodatne, wtedy :

(9) $$(\alpha i)^{-n} = \alpha^{-n} i^{r'}.$$

Ponieważ :

$$n + (-n) = 0,$$

to i :

$$4(m + m') + r + r' = 0;$$

ztąd zaś widzimy, że $r + r'$ musi być podzielne przez 4, a jest mniejsze od 8 bo r i r', każde oddzielnie, mniejsze są od 4 : musi więc być :

$$r + r' = 4, \quad \text{zkąd} \quad r' = 4 - r,$$

a to pokazuje zgodność równań (8) i (9).

Mogłoby być także $r + r' = 0$, ale wtedy i r i r' musiałyby być zerami, a tém samém (8) i (9) byłyby z sobą zgodne.

Przejdźmy teraz do ilości złożonych. Ponieważ wzór Newton'a stosuje się do wszelkich dwumianów, przeto zastosować go można i do ilości złożonych. Będzie :

(10) $$(a + bi)^m = \begin{cases} \left(a^m - \dfrac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 + \ldots\right) + \\ + \left(\dfrac{m}{1} a^{m-1} b - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3 + \ldots\right) i. \end{cases}$$

Strona druga równania (10) jest w ogólnym przypadku ilością złożoną.

Potęgi odjemne ilości złożonych określa równanie :

$$(a + bi)^{-n} = \frac{1}{(a + bi)^n}.$$

Powinnibyśmy teraz zająć się potęgami ułamkowemi, t. j. pierwiastkami z ilości złożonych, ale, ponieważ te badania dogodniéj przeprowadzić używając innego kształtu ilości złożonéj, poznamy więc najpierw ten kształt, zwany *trygonometrycznym*.

§ 4. **Geometryczny obraz ilości złożonej, kształt trygonometryczny.** Jeżeli przez punkt dowolny zwany *początkiem*, poprowadzimy linię w oznaczonym kierunku, to każdą ilość rzeczywistą dodatną a możemy przedstawić przez punkt na téj linii leżący i odległy od początku na a jednostek linijnych, ilość zaś rzeczywista odjemna a przedstawi się przez punkt leżący w tej saméj odległości od początku, ale na przedłużeniu tej linii. Tak więc obrazem geometrycznym ilości rzeczywistéj jest punkt na linii prostéj w dwóch kierunkach uważanéj.

Obrazem geometrycznym ilości złożonéj, będzie punkt na płaszczyznie : obieramy na niéj punkt O, początek, wyprowadzamy z niego dwie osi Ox i Oy wzajemnie do siebie prostopadłe; punkt C którego

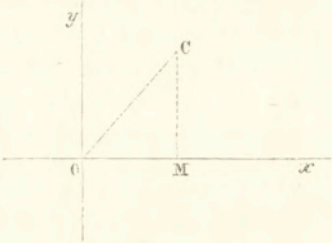

Fig. 1.

współrzędne będą :

$$\begin{cases} x = \mathrm{OM} = a \\ y = \mathrm{CM} = b \end{cases}$$

jest obrazem geometrycznym ilości złożonéj :

$$a + bi.$$

Widocznén jest, że sposób ten przedstawienia ilości złożonéj obejmuje w sobie poprzednio opisany sposób przedstawienia ilości rzeczywistéj.

Biegunowemi współrzędnemi punktu C_x będą : linia OC, którą oznaczymy przez r, i kąt COx, który oznaczymy przez θ. Między ilościami a i β z jednéj strony, a r i θ z drugiéj zachodzą związki :

$$(1) \qquad \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} & \begin{cases} \theta = \text{łuk wst} \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \theta = \text{łuk dost} \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \\ a = r \operatorname{dos} \theta, & b = r \operatorname{wst} \theta. \end{cases}$$

Na mocy tych związków możemy napisać :

$$(2) \qquad a + bi = r\,(\operatorname{dos} \theta + i \operatorname{wst} \theta).$$

Na pierwszéj stronie równania (2) ilość złożona przedstawioną jest w kształcie ***normalnym*** na drugiéj stronie w kształcie *trygonometrycznym*.

W drugim tym kształcie ilość złożona zależy także od dwóch wielkości : jednéj zawsze dodatnéj r zwanéj *modułem*, drugiéj θ zwanéj *rozwartością*. Widzimy nadto, że jednéj i téj saméj ilości złożonéj odpowiada nieskończenie wiele rozwartości, różniących się między sobą o dodatne lub odjemne wielokrotności 2π.

Doszliśmy tutaj do kształtu trygonometrycznego ilości złożonéj z uważań geometrycznych : można jednak dojść do niego drogą analityczną, uważając że :

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, i \right\};$$

obie ilości znajdujące się w nawiasie są mniejsze od jedności, a summa ich kwadratów równa jest jedności, można więc jedną z nich uważać za wstawę, drugą za dostawę pewnego kąta.

Zajmiemy się teraz bliżéj zbadaniem związku pomiędzy modułem a ilością złożoną do któréj on należy. I tak: jeżeli dwie ilości złożone są sobie równe, to i moduły ich są także sobie równe; odwrotność nie ma tu miejsca: jednemu modułowi odpowiada nieskończenie wiele ilości złożonych, których miejscem geometryczném jest okrąg koła zakreślony z początku promieniem równym modułowi. Jeżeli ilość złożona jest równą zeru, to moduł jéj musi być zerem, gdyż ażeby: $r(\text{dos}\theta + i\,\text{wst}\,\theta)$ było zerem, potrzeba aby oddzielnie $r\,\text{dos}\theta$ i $r\,\text{wst}\theta$ były zerami, że zaś wstawa i dostawa nie mogą być jednocześnie zerem, to r musi być zerem. Odwrotność tu jest oczywista.

Podobnie ponieważ wstawa i dostawa nie mogą być jednocześnie ilościami nieskończenie małemi: przeto jeżeli ilość złożona jest nieskończenie małą (*), musi i moduł jéj być nieskończenie mały. Nadto nieskończenie mała ilość złożona jest tego stopnia nieskończenie małości jakiego stopnia jest jéj moduł. Również jeżeli ilość złożona jest nieskończenie wielką, to i moduł jéj jest nieskończenie wielki.

W ogólności moduł ilości złożonéj uważać można za przedstawiciela ilości pod względem wielkości, i jeżeli kiedy powiemy, że jedna ilość złożona jest większą od drugiéj, będzie to znaczyć, że moduł pierwszéj jest większy od modułu drugiéj. Bezpośrednio bowiem ilości złożonych porównywać z sobą nie można: gdyż są one złożone z dwóch części różnorodnych, między któremi nie ma punktu porównania. Porównywanie z sobą ich modułów, jest także najodpowiedniejsze ze względu na geometryczne przedstawienie ilości złożonych.

§ **5**. Zajmiemy się teraz poprzednio już poznanemi działaniami odniesionemi do trygonometrycznego kształtu ilości złożonéj. I tak dodawanie wyrazi się wzorem:

$$\Sigma\,[r\,(\text{dos}\,\theta + i\,\text{wst}\,\theta)] = \Sigma\,r\,\text{dos}\,\theta + i\,\Sigma\,r\,\text{wst}\,\theta.$$

Uważmy w szczególności summę dwóch ilości złożonych, moduł téj summy oznaczmy przez R, będzie:

$$R = \sqrt{(r_1\,\text{dos}\,\theta_1 + r_2\,\text{dos}\,\theta_2)^2 + (r_1\,\text{wst}\,\theta_1 + r_2\,\text{wst}\,\theta_2)^2},$$

a rozwinąwszy:

$$(\alpha)\qquad R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\,\text{dos}\,(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Ponieważ dostawa jest mniejszą lub równą jedności, przeto widzimy z powyższego wzoru, że moduł summy jest mniejszy lub równy summie modułów, równym jest tylko wtedy gdy $\theta_1 = \theta_2$, t. j. gdy obie ilości złożone mają jednakowe rozwartości. We wszystkich innych przypadkach *moduł summy jest mniejszy od summy modułów.*

Twierdzenie to bezpośrednio rozciągnąć można do przypadku ogólnego, t. j. do jakiejkolwiek liczby czynników.

Gdybyśmy teraz we wzorze (α) zamiast dos $(\theta_1 - \theta_2)$, położyli -1, otrzymalibyśmy pod pierwiastkiem kwadrat z różnicy modułów, że zaś ta dostawa jest równą -1, tylko wtedy, gdy $\theta_1 = \theta_2, = \pi$, a w każdym innym przypadku jest większą, przeto *moduł summy dwóch ilości jest większy od różnicy modułów tych ilości*, równy zaś tylko wtedy gdy ich rozwartości różnią się o π, co odnośnie do geome-

(*) Ilość złożoną nazywamy nieskończenie małą, gdy obie jéj części składowe są nieskończenie małe, — nazywamy nieskończenie wielką, gdy przynajmniéj jedna z jéj części składowych jest nieskończenie wielką.

trycznego przedstawienia, znaczy, że linije przedstawiające ich moduły się przedłużeniami jedna drugiéj. Do większéj liczby czynników summy twierdzenia tego stosować nie można.

Pytamy się teraz, jaki punkt będzie obrazem geometrycznym sumy dwóch ilości złożonych $a+bi$ i $a'+b'i$, których obrazami są odpowiednie punkta C i C'. Współrzędnemi tego punktu będą odpowiednio: $a+a'$ i $b+b'$, jeżeli więc z punktu C wyprowadzimy liniję CC'_1 równą, równoległą i w tym samym kierunku co linija OC': to koniec tej linii, punkt C_1', będzie szukanym obrazem geometrycznym.

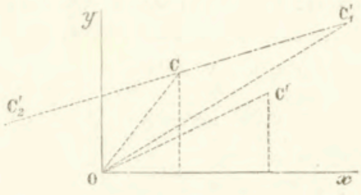

Fig. 2.

Z trójkąta OCC_1' widać, że moduł summy jest mniejszy od summy a większy od różnicy modułów czynników, wyjąwszy gdy zachodzi który z dwóch wyżej wymienionych szczególnych przypadków.

Odpowiednio postępuje się dla znalezienia różnicy dwóch ilości złożonych: punkt C'_2, gdzie $CC_2' = OC'$, będzie obrazem geometrycznym różnicy dwóch poprzednio uważanych ilości.

Dla mnożenia ilości złożonych przedstawionych w kształcie trygonometrycznym znajdujemy:

$$(\beta) \qquad r(\operatorname{dos}\theta + i\operatorname{wst}\theta).\ r'(\operatorname{dos}\theta' + i\operatorname{wst}\theta') = (rr')\,[\operatorname{dos}(\theta+\theta') + i\operatorname{wst}(\theta+\theta')],$$

zkąd czytamy: *moduł iloczynu równa się iloczynowi modułów, a rozwartość iloczynu jest sumują rozwartości czynników*.

Stosując wzór (β) podnoszenia do potęg, otrzymujemy równanie zwane *wzorem Moivre'a*:

$$(\gamma) \qquad [r(\operatorname{dos}\theta + i\operatorname{wst}\theta)]^m = r^m(\operatorname{dos} m\theta + i\operatorname{wst} m\theta).$$

Wzór na dzielenie będzie:

$$(\delta) \qquad \frac{r(\operatorname{dos}\theta + i\operatorname{wst}\theta)}{r'(\operatorname{dos}\theta' + i\operatorname{wst}\theta')} = \left(\frac{r}{r'}\right)[\operatorname{dos}(\theta-\theta') + i\operatorname{wst}(\theta-\theta')].$$

Ztąd łatwo wnioskujemy, że odwrotność ilości złożonej ma za moduł odwrotność modułu danéj ilości, rozwartość zaś ma tę samą, tylko ze znakiem przeciwnym.

Ztąd zaś wynika że wzór (γ) Moivre'a utrzymuje się i dla potęg odjemnych, położywszy bowiem $m = -m'$ będzie:

$$[r(\operatorname{dos}\theta + i\operatorname{wst}\theta)]^m = \frac{1}{[r(\operatorname{dos}\theta + i\operatorname{wst}\theta)]^{m'}} = \frac{1}{r^{m'}}[\operatorname{dos} m\theta + i\operatorname{wst} m\theta].$$

§ 6. **Potęgi ułamkowe ilości złożonéj.** Opieramy się tu na następującem określeniu pierwiastku:

Pierwiastkiem stopnia m^{tego} z ilości danéj jest wszelka ilość taka, która, podniesiona do potęgi $m^{\text{téj}}$, wydaje nam ilość daną.

Zanim zajmiemy się w ogólności pierwiastkami ilości złożonéj, dowiedziemy twierdzenia pomocniczego:

Ilość rzeczywista i dadatna ma jeden i tylko jeden pierwiastek stopnia m^{tego}, rzeczywisty i dodatny.

Że ilość rzeczywista i dodatna A ma jeden rzeczywisty i dodatny pierwiastek stopnia m^{tego}, o tém już wiemy, gdyż symbol : $\sqrt[m]{A}$, jeżeli A dodatne, ma zawsze określone znaczenie : przedstawia on tak zwany pierwiastek arytmetyczny, który w ogólnym przypadku jest ilością niewymierną, ale zawsze rzeczywistą i dodatną. Pozostaje nam dowieść, że więcej pierwiastków rzeczywistych i dodatnych być nie może. Przypuśćmy bowiem, że są dwa rzeczywiste i dodatne pierwiastki : mniejszy a, większy $a+\varepsilon$, gdzie ε oznacza ilosć dodatną. Wtedy :

$$a^m = \mathrm{A}$$

$$(a+\varepsilon)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}\varepsilon + \frac{m(m-2)}{1.2}\cdot a^{m-2}\varepsilon^2 + \ldots\ldots = \mathrm{A}.$$

Z zestawienia tych dwóch równań wypada, że :

$$\frac{m}{1}a^{m-1}\varepsilon + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}\varepsilon^2 + \ldots\ldots = 0,$$

co być nie może, wszystkie bowiem wyrazy na stronie pierwszéj są dodatne : zatém ilość A nie może mieć więcéj, jak jeden pierwiastek rzeczywisty i dodatny.

Wiedząc to, przystąpimy do naszego zagadnienia : znaleźć pierwiastki stopnia m^{tego} ilości :

(1) $$r(\mathrm{dos}\,\theta + i\,\mathrm{wst}\,\theta).$$

W tym celu uważmy, że wszelka ilość kształtu :

(2) $$\sqrt[m]{r}\left(\mathrm{dos}\frac{\theta+2s\pi}{m} + i\,\mathrm{wst}\frac{\theta+2s\pi}{m}\right),$$

gdzie s oznacza liczbę całkowitą, podniesiona do potęgi $m^{téj}$ daje :

$$r[\mathrm{dos}(\theta+2s\pi) + i\,\mathrm{wst}\,(\theta+2s\pi)]$$

t. j. ilość daną (1).

Nadto, tylko ilości kształtu (2) podniesione do potęgi $m^{téj}$ wydają ilość daną : gdyż z twierdzenia pomocniczego wypada, że modułem tych ilości może być tylko $\sqrt[m]{r}$ a co do rozwartości, to tylko wyrażenie kształtu $\dfrac{\theta+2s\pi}{m}$ pomnożone przez m, wydaje θ zwiększone wielokrotnością 2π, t. j. rozwartość odpowiadającą ilości danéj.

Wzorem więc (2) objęte są wszystkie pierwiastki stopnia m^{tego} ilości (1) : w nim s oznacza liczbę całkowitą dowolną, dość jednak ograniczyć się na uważaniu wartości : 0, 1, 2,... $m-1$, wszelka bowiem inna wartość dla s da się przedstawić przez $qm+\lambda$, gdzie q oznacza liczbę całkowitą, a λ pewną z powyżéj wypisanego szeregu wartości, rozwartości zaś :

$$\frac{\theta+\overline{(qm+\lambda)\,2\pi}}{m} \quad \mathrm{i} \quad \frac{\theta+2\lambda\pi}{m}$$

odpowiadają jednéj i téj samój ilości złożonéj.

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie:

Wszelka ilość złożona (1) *ma m pierwiastków stopnia m*^{tego} *przedstawionych wzorem* (2).

Zastępując oznaczenie pierwiastku przez potęgę ułamkową, spostrzegamy że wzór Moivre'a (γ) stosuje się i do potęg ułamkowych, t. j.:

$$(\varepsilon) \qquad [r(\operatorname{dos}\theta + i \operatorname{wst}\theta)]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\operatorname{dos}\frac{m}{n}\theta + i \operatorname{wst}\frac{m}{n}\theta\right),$$

z tém tylko zastrzeżeniem, że tu pod θ kolejno rozumieć należy: θ, $\theta + 2\pi, \ldots\ldots, \theta + 2(m-1)\pi$.

Wyrażenie (2) pisać można inaczéj, mianowicie:

$$\sqrt[m]{r}\left(\operatorname{dos}\frac{\theta}{m} + i \operatorname{wst}\frac{\theta}{m}\right)\left(\operatorname{dos}\frac{2\lambda\pi}{m} + i \operatorname{wst}\frac{2\lambda\pi}{m}\right),$$

gdzie λ oznacza kolejno: $0, 1, 2 \ldots\ldots m-1$.

Uważmy pierwszy czynnik:

$$(3) \qquad \sqrt[m]{r}\left(\operatorname{dos}\frac{\theta}{m} + i \operatorname{wst}\frac{\theta}{m}\right):$$

jestto jeden z pierwiastków ilości (1) odpowiadający $\lambda = 0$. Ponieważ w przypadku ilości rzeczywistéj i dodatnéj ($\theta = 0$), ten właśnie pierwiastek jest arytmetycznym, przez analogię więc nazwiemy wyrażenie (3) arytmetycznym pierwiastkiem z ilości złożonéj.

Drugi czynnik można także pisać:

$$\sqrt[m]{1}\left(\operatorname{dos}\frac{0 + 2\lambda\pi}{m} + i \operatorname{wst}\frac{0 + 2\lambda\pi}{m}\right),$$

a ponieważ modułowi jedność i rozwartości zero odpowiada jedność, można przeto powiedzieć:

Pierwiastki stopnia m^{tego} *z danéj ilości złożonéj równe są arytmetycznemu pierwiastkowi z téj ilości, pomnożonemu przez wszystkie kolejno pierwiastki stopnia m*^{tego} *z jedności.*

Oznaczywszy pierwiastek z jedności odpowiadający $\lambda = 1$ przez α_1, będziemy mogli wszystkie pierwiastki przedstawić w szeregu:

$$1,\ \alpha_1,\ \alpha_1^2,\ \alpha_1^3, \ldots\ldots\ldots \alpha_1^{m-1}.$$

Z kształtu (2) pierwiastków można łatwo wywnioskować znane z elementarnych kursów algebry własności pierwiastków ilości rzeczywistych dodatnych i odjemnych.

Roztrzygniemy tu jeszcze jedną pozorną wątpliwość, a mianowicie, jak uważać należy pierwiastek stopnia m^{tego} z ułamku? Pierwiastków tych powinno być m, jeżeli zaś łączyć będziemy każdy z m pierwiastków licznika z każdym z m pierwiastków mianownika otrzymamy m^2 wartości. Łatwo się jednak przekonać możemy, że różnych będzie tylko m wartości, które otrzymać możemy łącząc m pierwiastków licznika z arytmetycznym pierwiastkiem mianownika lub na odwrót.

Niech bowiem będzie ułamek:

$$\frac{r(\operatorname{dos}\theta + i \operatorname{wst}\theta)}{r'(\operatorname{dos}\theta' + i \operatorname{wst}\theta')},$$

ułamek, powstający z połączenia którychkolwiek dwóch pierwiastków licznika i mianownika, można napisać :

$$\frac{\sqrt[m]{r}\left(\operatorname{dos}\frac{\theta}{m}+i\operatorname{wst}\frac{\theta}{m}\right)\alpha_1^{\lambda}}{\sqrt[m']{r'}\left(\operatorname{dos}\frac{\theta'}{m}+i\operatorname{wst}\frac{\theta'}{m}\right)\alpha_1^{\lambda'}}$$

albo :

$$\frac{\sqrt[m]{r}\left(\operatorname{dos}\frac{\theta}{m}+i\operatorname{wst}\frac{\theta}{m}\right)\alpha_1^{\lambda-\lambda'}}{\sqrt[m]{r'}\left(\operatorname{dos}\frac{\theta'}{m}+i\operatorname{wst}\frac{\theta'}{m}\right)},$$

zaś $\alpha^{\lambda-\lambda'}$ znajduje się w szeregu : $1, \alpha_1, \alpha_1^2 \ldots\ldots \alpha_1^{m-1}$, jeżeli $\lambda > \lambda'$, jeżeli zaś $\lambda < \lambda'$, to w szeregu tym znajdziemy $\alpha_1^{m+\lambda-\lambda'}$ równe uważanemu, bo $\alpha_1^m = 1$.

Podobne prawidło stosuje się do iloczynu dwóch czynników.

Uwaga. Widzieliśmy poprzednio, że powiększenie rozwartości o wielokrotność 2π, nie zmieniając wartości samej ilości, zmienić może wartość pewnego jej pierwiastku. Dlatego to, trzeba być bardzo ostróżnym przy przekształceniach wyrażeń pierwiastkowych, i zwracać się zawsze do rozwartości w celu przekonania się, czy ta przez przekształcenie nie ulegała zmianie. I tak chociaż :

$1 = i^4$, nie można napisać : $\sqrt{a} = \sqrt{ai^4}$, bo rozwartość ilości podpierwiastkowej zwiększamy wtedy o 2π : i rzeczywiście wynosząc i^4 z pod znaku pierwiastka otrzymujemy wzór fałszywy :

$$\sqrt{a} = i^2\sqrt{a} = -\sqrt{a}.$$

Podobnie, chociaż się pisze : $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$, nie można napisać : $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$, bo, przypuściwszy dla prostoty, że a jest ilością rzeczywistą i dodatną, pierwsza strona będzie miała rozwartość zero, druga zaś rozwartość π. Można zaś dokonać przekształcenia w ten sposób :

$$\sqrt{a} = i\frac{\sqrt{a}}{i} = (-i)\,(i\sqrt{a}) = -i\sqrt{-a},$$

pisząc bowiem w ten sposób rozwartości nie zmieniamy.

II. — O FUNKCYACH ALGEBRAICZNYCH ZMIENNEJ ZŁOŻONEJ I O SZEREGACH ZŁOŻONYCH.

§ 7. **Określenie zmiennéj złożonéj.** Ilość rzeczywistą nazywamy zmienną wtedy, gdy może przybierać wszelkie możliwe rzeczywiste wartości : podobnież ilość złożona będzie zmienną, gdy będzie mogła przybierać wszelkie możliwe wartości złożone. Na to zaś potrzeba, żeby oddzielnie część rzeczywista zmiennéj złożonéj, oddzielnie współczynnik części urojonéj przybierać mogły wszelkie możliwe wartości rzeczywiste : jeżeli więc zmienną złożoną oznaczymy jedną głoską z i położymy :

(1) $$z = x + yi,$$

to x i y będą ilościami rzeczywistemi zmiennemi zupełnie od siebie niezależnemi.

Podobnie jak miejscem geometrycznem zmiennéj rzeczywistéj jest linja prosta, tak miejscem geometrycznem zmiennéj złożonéj jest cała płaszczyzna; pewnéj oznaczonéj wartości zmiennéj złożonéj odpowiadać będzie punkt na téj płaszczyznie.

Jeżeli zmienna złożona przedstawioną jest nie w kształcie normalnym (1) ale trygonometrycznym:

$$r(\operatorname{dos}\theta + i \operatorname{wst}\theta), \tag{2}$$

to w niéj r i θ są ilości niezależnie zmienne.

Wiadomo nam, że jeżeli jedna ilość jest związana z drugą tak, że pewnéj oznaczonéj wartości téj drugiéj odpowiada jedna lub więcéj ściśle określonych wartości pierwszéj, to wtedy pierwszą ilość uważamy jako funkcyę drugiéj. Zamierzamy teraz zbadać, jak uważać należy te związki wtedy, gdy na drugą ilość zakładać będziemy już nie rzeczywiste wartości, ale złożone, czyli innemi słowy, chcemy zbadać, czém staje się funkcya, gdy w niéj zamiast zmiennéj rzeczywistéj uważać będziemy zmienną złożoną. Będziemy więc po kolei zajmować się znanemi nam funkcyami prostemi czyli zasadniczemi zmiennéj złożonéj, wszystkie bowiem inne funkcye powstają, jak wiadomo, z połączenia kilku funkcyj prostych.

Podamy tu jeszcze niektóre oznaczenia i skrócone sposoby mówienia, których używać będziemy. I tak:

Płaszczyznę, będącą miejscem geometrycznem zmiennéj złożonéj, nazywać będziemy płaszczyzną (Z), punkt, odpowiadający uważanéj wartości zmiennéj, nazywać będziemy punktem Z, i zamiast mówić że funkcya ma pewną własność dla wartości z, powiemy: funkcya ma taką własność w punkcie z, podobnież zamiast mówić: funkcya ma pewną własność dla tych wartości zmiennéj, których obrazy geometryczne leżą na pewnéj określonéj części płaszczyzny, powiemy: funkcya ma tę własność na téj części płaszczyzny. Ilość stałą oznaczać będziemy $c = a + bi$, a punkt jéj odpowiadający nazwiemy C.

Zwrócimy tu jeszcze uwagę na to, że podstawienie w analityczne wyrażenie funkcyi zamiast zmiennéj z wyrażenia $z + c$, odpowiada przeniesieniu do punktu C, początku układu osi współrzędnych, do których odnosimy geometryczny obraz zmiennéj z.

§ 8. **Funkcye algebraiczne.** Funkcye algebraiczne proste są:

summa: $w = c + z$,

iloczyn: $w = cz$,

potęga: $w = cz^m$, gdzie m całkowite.

Funkcyą algebraiczną złożoną jest ułamek algebraiczny wymierny. Oprócz tych funkcyj istnieją odwrotne: różnica i iloraz (zawarte w poprzednich), pierwiastek potęgi, oraz najogólniejsza złożona: pierwiastek równania algebraicznego:

$$F(w, z) = 0.$$

Funkcye proste nie wyłączając pierwiastku potęgi, pochodzą z wykonania nad zmienną jednego z działań w poprzednim rozdziale badanych; wszystko więc co tam było powiedziane stosuje się do tych funkcyj; ponieważ zaś widzieliśmy tam że wykonywając działania nad ilościami złożonemi otrzymywaliśmy na wypadek ilość złożoną, przeto powiedzieć możemy: *wszelkie funkcye algebraiczne zmiennéj złożonéj są także ilościami złożonemi*; ztąd zaś wypada, że przyjąwszy już raz ilości złożone, funkcye algebraiczne badać możemy dla wszelkiéj wartości zmiennéj, t. j. na całéj płaszczyznie, co miejsca nie miało, kiedyśmy się ograniczali do zmiennéj rzeczywistéj : np. funkcya $\sqrt{1-x}$ nie miała żadnego znaczenia dla wartości na x większych od jedności. Nadto ścisła i ogólna teorya tych funkcyj wymaga koniecznie wprowadzenia zmiennéj złożonéj : żadna z funkcyj odwrotnych, wyjąwszy różnicy, ilorazu, zawierających się w funkcyach prostych, i pierwiastku równania stopnia pierwszego, który jest połączeniem dwóch wymienionych funkcyj nie może być ściśle przy uważaniu tylko zmiennéj rzeczywistéj poznaną ; pierwiastek potęgi, teorya równań liczbowych podawąna w kursach algebry, mogą tu służyć za dowód, najogólniejszą zaś teoryę tych funkcyj poznamy dopiero w części drugiéj, gdy mówić będziemy o funkcyach wielowartościowych.

Z kolei rzeczy wypada nam się zająć funkcyami przestępnemi, ale ponieważ niektóre z nich określać będziemy za pomocą szeregów złożonych, najpierw więc o tych szeregach mówić będziemy.

§ 9. **Ogólne własności szeregów złożonych nieskończonych.** Szeregiem złożonym nazywamy szereg którego pojedyncze wyrazy są ilościami złożonemi. Twierdzeniem zasadniczém jest tu :

Szereg nieskończony złożony :

$$(u_0+iv_0)+(u_1+iv_1)+\ldots\ldots+(u_\lambda+iv_\lambda)+\ldots\ldots \tag{1}$$

będzie zbieżny, a granicą jego będzie :

$$U+iV, \tag{1'}$$

jeżeli szeregi :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0+u_1+\ldots\ldots+u_\lambda+\ldots\ldots \\ v_0+v_1+\ldots\ldots+v_\lambda+\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{2}$$

będą zbieżne a granicami ich będą odpowiednio :

$$U \quad i \quad V; \tag{2'}$$

i na odwrót jeżeli szereg (1) *jest zbieżny, a granicą jego jest* (1'), *to i szeregi* (2) *będą zbieżne, a granicami ich będą odpowiednio ilości* (2').

Twierdzenie to jest tylko rozciągnięciem prawidła na dodawanie ilości złożonych do przypadku, gdy liczba czynników summy jest nieskończenie wielką : powstaje tu jednakowoż wątpliwość, czy można rozciągnąć prawo dodawania do szeregów złożonych wtedy, gdy go nie można rozciągnąć do dwumiennych szeregów rzeczywistych. Ażeby tę wątpliwość usunąć uważamy, że pierwsza część naszego twierdzenia stosuje się i do szeregów dwumiennych : druga zaś część niezawsze stosuje się do do nich dlatego, że przy sumowaniu szeregów rzeczywistych każdy dwumian wstępuje do summy, jako jedna ilość, i może się zdarzyć, że chociaż szeregi :

$$A_0+A_1+A_2+\ldots\ldots$$

$$B_0+B_1+B_2+\ldots\ldots$$

są rozbieżne, szereg :

$$(A_0+kB_0)+(A_1+kB_1)+\ldots\ldots$$

jest zbieżnym; teoretycznie jednak możemy i wówczas rzecz tak objaśnić, że summujemy oddzielnie pierwsze, oddzielnie drugie wyrazy dwumianów, jako granicę otrzymujemy ilość : $\infty + k\,\infty$, która w szczególnych przypadkach może mieć wartość skończoną (*).

Przy ilościach złożonych, części rzeczywiste i urojone nie przechodzą jedne na drugie, i w summie ilukolwiek wyrazów złożonych zawsze oddzielnie występuje summa części rzeczywistych a oddzielnie summa części urojonych, z wszelką więc słusznością możemy prawidło dodawania rozciągnąć do przypadku, gdy liczba czynników summy jest nieskończenie wielką.

Dodamy tu jeszcze, że powyżéj przytoczony szczególny przypadek spotykany przy szeregach dwumiennych rzeczywistych, możliwy jest i przy szeregach złożonych i tak np. szereg :

$$\sum_{\lambda=\infty}^{\lambda=\infty} [(u_\lambda + iv_\lambda) + (u'_\lambda + iv'_\lambda)],$$

może być zbieżny, chociaż szeregi :

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (u_\lambda + v'_\lambda) \quad \text{i} \quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (u'_\lambda + iv'_\lambda)$$

są rozbieżne; szeregi jednak :

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (u_\lambda + u'_\lambda) \quad \text{i} \quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (v_\lambda + v'_\lambda),$$

będą wtedy zbieżne.

Widzimy więc, że szeregi nieskończone tak uważane, t. j. upodobnione do summy, są funkcyami algebraicznemi, i dlatego stosować do nich będziemy prawa w § 2 podane.

§ **10.** Podamy teraz twierdzenie pomocnicze : jeżeli wyrazy szeregu rzeczywistego o znakach jednakowych zbieżnego :

$$(\alpha) \qquad T_0 + T_1 + T_2 + \ldots\ldots$$

pomnożymy odpowiednio przez dowolne skończone ilości :

$$(\beta) \qquad a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,$$

to szereg ztąd otrzymany :

$$(\gamma) \qquad a_0\,T_0 + a_1\,T_1 + a_2\,T_2 + \ldots\ldots$$

będzie zbieżnym.

Oznaczywszy bowiem przez A największą w ilości a_λ co do bezwzględnéj wartości, uważamy że szereg o znakach jednakowych :

$$(\delta) \qquad AT_0 + AT_1 + AT_2 + \ldots\ldots$$

(*) W ogóle prawo niepozwalające dowolnie zmieniać porządku czynników summy, w przypadku gdy ich liczba jest nieskończenie wielką — ma znaczenie tylko praktyczne, ze względu na istotne wykonywanie dodawania w celu zbliżenia się do granicy — teoretycznie nie istnieje : byłby to paradoks matematyczny.

będzie zbieżnym, tém bardziéj zatém szereg (γ) będzie zbieżnym, gdyż żaden wyraz szeregu (γ) nie jest co do bezwzględnéj wartości większy od odpowiedniego wyrazu szeregu (δ), co się zaś tyczy znaków, to wiemy, że jeśli pewien szereg o znakach jednakowych jest zbieżny, to zmieniwszy znaki pewnej dowolnéj liczby jego wyrazów na przeciwne, otrzymamy także szereg zbieżny.

Z tego twierdzenia wnioskujemy :

Jeżeli szereg, którego wyrazami są moduły wyrazów szeregu danego, jest zbieżny, to i szereg dany jest zbieżnym.

Niech będą wyrazy szeregu danego przedstawione w kształcie trygonometrycznym :

$$r_0(\operatorname{dos}\theta_0 + i\operatorname{wst}\theta_0) + r_1(\operatorname{dos}\theta_1 + i\operatorname{wst}\theta_1) + \ldots\ldots ;$$

Jeżeli szereg modułów :

$$(\varepsilon) \qquad r_0 + r_1 + r_2 + \ldots\ldots$$

jest zbieżnym, to na mocy powyżéj dowiedzionego twierdzenia pomocniczego każdy z szeregów :

$$(\varepsilon') \qquad \begin{cases} r_0 \operatorname{dos}\theta_0 + r_1 \operatorname{dos}\theta_1 + \ldots\ldots \\ r_0 \operatorname{wst}\theta_0 + r_1 \operatorname{wst}\theta_1 + \ldots\ldots \end{cases}$$

będzie zbieżnym, wstawa bowiem i dostawa nie przyjmują wartości nieskończenie wielkich.

Tak więc zbieżność szeregu modułów pociąga za sobą zbieżność samego szeregu, pytamy się teraz czy i naodwrót, zbieżność szeregu złożonego pociąga za sobą zbieżność szeregu modułów.

W tym celu uważamy, że zbieżność szeregów (ε') nie pociąga za sobą bezpośrednio zbieżności szeregu (ε), a tylko, że względu, że wstawa i dostawa nie mogą jednocześnie zbliżać się do zera, wynika, że wyrazy szeregu (ε) muszą maleć nieoznaczenie.

Powyżéj dowiedzione twierdzenie pomocnicze możemy teraz rozciągnąć do przypadku ogólnego, i wypowiedzieć : *jeżeli szereg* :

$$m_0 + m_1 + m_2 + \ldots\ldots$$

jest takim, że szereg modułów jego wyrazów jest zbieżnym, to i szereg :

$$a_0 m_0 + a_1 m_1 + \ldots\ldots$$

gdzie a_0, a_1 i t. d. są ilościami złożonemi skończonemi, będzie zbieżny, szereg bowiem, którego ogólny wyraz jest :

$$\operatorname{mod}[a_\lambda] . \operatorname{mod}[m_\lambda]$$

będzie zbieżny.

Możemy jeszcze opierając się na powyższém, dowieść twierdzenia : *jeżeli w szeregu, dla którego szereg modułów jest zbieżnym, zmienimy w jakikolwiek sposób porządek wyrazów, to otrzymany ztąd szereg będzie zbieżnym i równoznacznym z szeregiem danym, t. j. będzie miał tę samą granicę, co dany.*

Wiadomém jest z teoryi szeregów rzeczywistych, że jeżeli w szeregu o znakach niejednakowych, ale takim, że bezwględne wartości jego wyrazów tworzą szereg zbieżny, zmienimy porządek wyrazów, to nie zmienimy przez to wartości szeregu; otóż jeżeli mamy szereg złożony :

$$U + Vi = r_0(\operatorname{dos}\theta_0 + i\operatorname{wst}\theta_0) + r_1(\operatorname{dos}\theta_1 + i\operatorname{wst}\theta_1) + \ldots$$

i jeżeli moduły tworzą szereg zbieżny, to wówczas każdy z dwóch zbieżnych szeregów :

$$U = r_0 \operatorname{dos} \theta_0 + r_1 \operatorname{dos} \theta_1 + \ldots$$

$$V = r_0 \operatorname{wst} \theta_0 + r_1 \operatorname{wst} \theta_1 + \ldots$$

jest takim, że bezwzględne wartości jego wyrazów tworzą szereg zbieżny; można więc w każdym z nich dowolnie zmienić porządek wyrazów, a tém samém można to uskutecznić w szeregu danym.

§ 11. **O szeregach uporządkowanych według potęg zmiennéj złożonéj.** Podamy najpierw twierdzenie które winniśmy Cauche'mu :

Szereg nieskończony :

(1) $$m_0 z + m_1 z + m_2 z^2 + \ldots$$

zostaje zbieżnym dla wszystkich wartości z, *których moduł* r, *jest mniejszy od rzeczywistéj dodatnéj wartości* R, *takiéj, że* $a_n R^n$, (*gdzie* $a_n = \operatorname{mod}[m_n]$), *zostaje skończonym gdy* n *rośnie do nieskończoności.* Aby tego dowieść uważmy $r < R$; mnożąc wyrazy szeregu nieskończonego zbieżnego, o znakach jednakowych :

$$1 + \frac{\rho}{R} + \frac{\rho^2}{R^2} + \ldots,$$

przez ilości skończone :

$$a_0,\ a_1 R,\ a_2 R^2, \ldots,$$

otrzymamy szereg zbieżny :

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots$$

A że ostatnio napisany szereg jest szeregiem modułów dla szeregu (1), wnioskujemy, że i szereg (1) będzie dla odpowiednich wartości z zbieżnym.

Odnieśmy się teraz do geometrycznego przedstawienia ilości złożonéj. Jeżeli z początku nakreślimy okrąg promieniem równym R, to każdy punkt leżący wewnątrz tego okręgu będzie obrazem geometrycznym takiego z, którego moduł jest mniejszy od R, t. j. takiego dla którego szereg (1) jest zbieżny; możemy więc powiedzieć : *Szereg* (1) *jest zbieżny w okręgu o promieniu* R, okrąg ten nazywa się *okręgiem zbieżności* dla szeregu (1).

Zobaczmy teraz jak zachowuje się szereg potęgowy na okręgu zbieżności, a mianowicie : czy może zostawać zbieżnym dla niektórych przynajmniéj wartości z, których moduł jest równy R.

Z uwagi w poprzednim paragrafie zrobionéj, wiemy że wtedy nie dosyć aby $a_n R^n$ zostawało skończone, potrzeba nadto żeby :

$$\operatorname{gr}_{n=\infty} (a_n R^n) = 0,$$

co jeżeli położymy :

$$a_\lambda = p_\lambda + i q_\lambda,$$

pociąga za sobą :

$$\operatorname{gr}_{n=\infty} (p_n R^n) = 0, \qquad \operatorname{gr}_{n=\infty} (q_n R^n) = 0.$$

Załóżmy nadto, że zaczynając od pewnego n, zresztą dowolnie wielkiego, wszystkie ilości :

$$p_n, p_{n+1}, \ldots$$

z sobą znaków jednakowych, podobnież ilości :

$$q_n, q_{n+1}, \ldots$$

są znowuż z sobą jednakowych znaków.

Dowiedziemy wtedy że szeregi :

$$(a) \qquad p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$$

$$(b) \qquad q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots$$

są zbieżne dla wszystkich punktów okręgu zbieżności wyjąwszy jednego, a ztąd wypada, że i dany szereg (1) zbieżny będzie dla tychże punktów.

Połóżmy jeszcze dla skrócenia :

$$z = R(\mathrm{dos}\,\theta + i\,\mathrm{wst}\,\theta) = R.\varphi(\theta), \qquad z^n = R^n.\varphi(n\theta),$$

$$p_n R^n = \alpha, \qquad p_{n+1} R^{n+1} = \beta, \ldots p_{n+k} R^{n+k} = \mu,$$

$$\mathrm{mod}\,[\alpha] = \alpha', \qquad \mathrm{mod}\,[\beta] = \beta', \ldots \mathrm{mod}\,[\mu] = \mu',$$

gdzie już $\alpha, \beta, \ldots \mu$ są ilości rzeczywiste, a więc $\alpha', \beta', \ldots \mu'$, są tylko ich bezwzględne wartości.

Oznaczywszy teraz przez S_n summę $(k+1$ wyrazów szeregu (a) poczynając od n^{tego} $p_n z^n$, będzie :

$$S_n = \varphi^n(\theta)\{\alpha + \beta\varphi(\theta) + \gamma\varphi(2\theta) + \ldots + \lambda\varphi(\overline{k-1}\theta) + \mu\varphi(k\theta)\},$$

ztąd :

$$[1 - \varphi(\theta)]S_n = \varphi^n(\theta)\left\{\begin{matrix} \alpha + \beta\varphi(\theta) + \ldots + \mu\varphi(k\theta) \\ - \alpha\varphi(\theta) - \ldots - \lambda\varphi(k\theta) - \mu\varphi(k\theta) \end{matrix}\right\}.$$

Ponieważ moduł summy jest mniejszy od summy modułów, przeto :

$$\mathrm{mod}\,[(1 - \varphi(\theta)S_n] < \mathrm{mod}\,[\alpha] + \mathrm{mod}\,[\beta - \alpha] + \ldots + \mathrm{mod}\,[\mu - \lambda] + \mathrm{mod}\,[\mu],$$

$$\text{gdyż} \quad \mathrm{mod}\,[\varphi(\lambda\theta)] = 01,$$

a ponieważ ilości $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu$ są rzeczywiste i znaki mają jednakowe, zważywszy przeto, że różnica dwóch ilości z jednakowemi rozwartościami da się przedstawić jako summa dwóch ilości, których rozwartości różnią się o π, będziemy mogli na mocy powiedzianego w § 5, zamiast modułu różnicy wziąć różnicę modułów, i będzie ostatecznie :

$$\mathrm{mod}\,[S_n] < \mathrm{mod}\left(\frac{2\alpha' + 2\mu'}{1 - \varphi(\theta)}\right).$$

Uważmy teraz, że jeżeli zaczniemy od dostatecznie wielkiego n, to α' i μ' w granicy będą zerami, a więc :

$$\mathrm{gr}_{n=\infty}(S_n = 0, \qquad \text{wyjąwszy dla} \qquad \theta = 2s\pi.$$

Jeżeli zaś summa dowolnéj liczby wyrazów końcowych ma za granicę zero, szereg ten jest zbieżny ; podobnież dowodzi się dla szeregu (b), więc ostatecznie : jeżeli szereg potęgowy czyni zadość powyżéj wymienionym warunkom, to jest on zbieżny w każdym punkcie okręgu zbieżności, wyjąwszy punktu leżącego na osi rzeczywistych ilości.

Zastosujemy tę teoryę do kilku przykładów :

I tak, szereg :

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

jest zbieżny w okręgu o promieniu jedność, gdyż :

$$\mathrm{gr}_{n=\infty}\left(\frac{1^n}{n}\right) = 0,$$

a dla $1+\varepsilon$ jest :

$$\frac{(1+\varepsilon)^n}{n} = \frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{n-1}{1.2}\varepsilon^2 + \dots$$

$$\mathrm{gr}_{n=\infty}\left(\frac{(1+\varepsilon)^n}{n}\right) = \infty .$$

Ponieważ zaś $\mathrm{gr}\left(\frac{1^n}{n}\right)$ jest zerem, a wszystkie współczynniki są znaków jednakowych, to szereg :

$$1 + \frac{1}{1}(\mathrm{dos}\,\theta + i\,\mathrm{wst}\,\theta) + \frac{1}{2}(\mathrm{dos}\,2\theta + i\,\mathrm{wst}\,2\theta) + \dots$$

jest zbieżny dla wszystkich wartości θ wyjąwszy $2s\pi$.

Szereg zaś :

$$1 - \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \dots$$

nie jest zbieżny na okręgu zbieżności, dla punktu mającego rozwartość π, co pochodzi ztąd, że współczynniki są niejednakowych znaków.

Szereg znowu :

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

jest zbieżny wewnątrz okręgu o promieniu jedność, ale dla wszystkich punktów na okręgu jest rozbieżny, gdyż tu $\mathrm{gr}(1^n) = 1$, a nie zeru.

Dowiedziemy tu jeszcze, że *szereg uporządkowany według rosnących potęg zmiennéj, zmienia się w sposób ciągły*, t. j. że gdy zmienną przeprowadzać będziemy od jednéj wartości do drugiéj, przechodząc przez wartości pośrednie, szereg także przechodzić będzie przez wartości pośrednie; albo można określić inaczéj, gdy dostatecznie małemu (*) przyrostowi zmiennéj odpowiada dowolnie mały przyrost szeregu.

Ażeby tego dowieść oznaczmy dla krótkości szereg przez $f(z)$, summę n pierwszych wyrazów przez

---

(*) O małości przyrostku sądzimy z małości jego modułu.

$\varphi(z)$, a summę pozostałych wyrazów przez $\psi(z)$; będzie:

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z),$$

gdzie jeśli n jest dostatecznie wielkie, $\psi(z)$ dla wszelkich wartości z wewnątrz okręgu zbieżności będzie dowolnie małe, tak że możemy napisać:

$$\mathrm{mod}\,[\psi(z)] < \alpha,$$

gdzie α jest ilością rzeczywistą dodatną dowolnie małą.

Uważmy szereg przy wartości $z+h$, przyrost wyrazi się:

$$f(z+h) - f(z) = \{\varphi(z+h) - \varphi(z)\} + \{\psi(z+h) - \psi(z)\},$$

Ponieważ $\varphi(z)$ jako funkcya algebraiczna całkowita i wymierna jest funkcyą ciągłą, pierwsza przeto część strony drugiéj jest ilością dowolnie małą, druga część koniecznie mniejsza od 2α jest także ilością dowolnie małą; ostatecznie zatém, przyrost szeregu jest ilością dowolnie małą.

Z téj własności szeregu wynika, że jeżeli funkcyę jaką określimy przez szereg potęgowy, to z określenia tego bezpośrednio wynikać będzie ta własność, że funkcya zmieniać się będzie w sposób ciągły.

III. — FUNKCYA WYKŁADNICZA I FUNKCYE TRYGONOMETRYCZNE (KOŁOWE PROSTE).

§ 12. **Określenie funkcyi wykładniczéj zmiennéj złożonéj.** Szereg:

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

jest zbieżny dla wszelkich wartości z, t. j. na całéj płaszczyznie, gdyż:

$$\mathrm{gr}_{n=\infty}\left[\frac{R^n}{n!}\right] = 0, \quad \text{dla wszelkiego } R.$$

Wiemy, że jeżeli z w tym szeregu oznacza ilość rzeczywistą, to szereg ten ma dla każdéj wartości z, za granicę wartość funkcyi oznaczonéj e^z, i dającéj się określić przez równanie:

(1) $$e^z = \mathrm{gr}_{m=\infty}\left[\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m\right].$$

Ponieważ tak równanie (1), jak i równanie:

(2) $$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

mają miejsce dla wszelkich wartości rzeczywistych zmiennéj z, więc zgodnie z zasadniczém prawem (§ 2), utrzymują się one i dla wartości na z złożonych.

Gdybyśmy chcieli bezpośrednio przekonać się, że drugie strony równań (1) i (2) są identyczne i wtedy, gdy z oznacza ilość złożoną, to postępowalibyśmy tak samo jak przy dowodzeniu identyczności tych wyrażeń dla z rzeczywistego: oparlibyśmy się na wzorze Newton'a na rozwinięcie potęgi dwumianu, który to wzór utrzymuje się dla ilości złożonych.

Tak więc: *przestępna funkcya wykładnicza zmiennéj złożonéj określa się równaniami* (1) *lub* (2), *w których e oznacza znaną liczbę Neper'a*: 2,7182818.

Zasadnicze twierdzenie mnożenia funkcyj wykładniczych wyraża się wzorem:

$$e^z . e^{z'} = e^{z+z'}, \tag{4}$$

a ponieważ wzór ten utrzymuje się dla wszelkich wartości rzeczywistych z i z' (*), a więc:

Wzór (4) *utrzymuje się i wtedy, kiedy* z *i* z' *oznaczają ilości złożone.*

Położywszy:

$$z = x + yi,$$

możemy podług wzoru (4) napisać:

$$e^z = e^{x+yi} = e^x . e^{yi}. \tag{5}$$

§ **13. Określenie funkcyj trygonometrycznych.** Uważmy że szeregi:

$$\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

$$1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \dots$$

są zbieżne na całéj płaszczyznie.

Przy rzeczywistych wartościach na z, szeregi te przedstawiają nam funkcye znane z geometryi, które oznaczamy symbolami: wst$z$ i dos$z$; otóż możemy przez analogię tymiż samymi symbolami oznaczyć granicę, do których zbiegają te szeregi wtedy, gdy w nich z oznacza ilość złożoną. Samo przez się rozumie się, że tu wprowadzone wst$z$ i dos$z$, nie mają takiego geometrycznego znaczenia, jak przy ilościach rzeczywistych: są to poprostu symbole przyjęte dla oznaczenia granic powyżéj wypisanych szeregów, przyjęcie zaś tych mianowicie, a nie innych symbolów ma w sobie tę dogodność, że jeżeli przejdziemy do zmiennéj rzeczywistéj, wszystko przywiedzie się do dobrze nam znajomych oznaczeń. Gdybyśmy granice tych szeregów oznaczyli nowymi symbolami, należałoby dodać, że przy zmiennych rzeczywistych nowe te symbole są identyczne z poprzednio poznanyni wst$z$ i dos$z$. Zresztą lepiéj jeszcze przekonamy się o trafności przyjęcia tych symbolów, gdy w dalszym ciągu dowiedziemy, że związki analityczne między temi funkcyami, dowiedzione dla zmiennych rzeczywistych, utrzymują się i dla zmiennych złożonych. Tak więc: *dwie zasadnicze funkcye trygonometryczne: wstawę i dostawę zmiennéj złożonéj określamy równaniami:*

$$\text{wst}\, z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \tag{6}$$

$$\text{dos}\, z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

(*) Wzór (4) nie jest wprawdzie algebraicznym, — ale można w nim funkcye przestępne zastąpić przez szeregi, do których prawo § 2 się stosuje.

Wprowadzamy także inne funkcye trygonometryczne zmiennéj złożonéj, określając je równaniami :

(8) $$\mathrm{st}\,z = \frac{\mathrm{wst}\,z}{\mathrm{dos}\,z},$$

(9) $$\mathrm{dot}\,z = \frac{\mathrm{dos}\,z}{\mathrm{wst}\,z},$$

(10) $$\mathrm{sie}\,z = \frac{1}{\mathrm{dos}\,z},$$

(11) $$\mathrm{dosie}\,z = \frac{1}{\mathrm{wst}\,z}.$$

Oczywistém jest, że te cztery nowo wprowadzone funkcye przy rzeczywistych wartościach zmiennéj są znanemi nam z geometyi funkcyami, przez takie symbole oznaczanemi.

Stawiamy teraz takie pytanie : Wiemy, że styczna i sieczna zmiennéj rzeczywistéj rozwijają się w granicach $+\frac{\pi}{2}$ i $-\frac{\pi}{2}$, na szeregi potęgowe; pytamy się, czy te szeregi, gdy w nich uważać będziemy zmienną złożoną, pozostające zbieżnymi w okręgu o promieniu $\frac{\pi}{2}$, co łatwo na mocy § 11 udowodnić, czy te szeregi przedstawiać będą w tym okręgu styczną określoną równaniem (8) i sieczną określoną równaniem (10). Odpowiedź będzie : gdyby styczna dla wartości rzeczywistych rozwijała się na szereg dla wszelkich wartości, to wówczas zgodność tego szeregu z funkcyą określoną równaniem (8), nie potrzebowałaby oddzielnego dowodu przy uważaniu zmiennéj złożonéj, równości bowiem :

$$\mathrm{st}\,z = \frac{\mathrm{wst}\,z}{\mathrm{dos}\,z} = \frac{\frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \ldots}{1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots} = A_1 z + A_2 z + \ldots$$

utrzymujące się dla wszelkich wartości rzeczywistych, utrzymywałyby się i dla wartości złożonych ; ponieważ jednak styczna tylko w pewnych granicach rozwija się na szereg, równości powyżéj wypisanych nie można bez dowodu do zmiennych złożonych rozciągnąć, i dlatego zgodność szeregu z funkcyą (8) wymaga także oddzielnego dowodu. Podobnie rzecz się ma ze sieczną.

Ponieważ jednak rozwinięcia te nie będą nam tu potrzebne, zajmować się przeto niemi nie będziemy, témbardziéj że w części drugiéj podamy ogólną teoryę rozwijania funkcyj na szeregi. To zaś cośmy tu powiedzieli, miało tylko na celu rozjaśnienie prawa w § 2 wypowiedzianego.

§ 14. Przedstawienie funkcyi wykładniczéj w kształcie normalnym, jéj okresowość. Uważmy teraz, że podobnie jak funkcye algebraiczne zmiennéj złożonéj, tak i poznane funkcye przestępne : wykładnicze i trygonometryczne, są dla wszelkich wartości zmiennéj złożonéj, także ilościami złożonemi. Dla wykładniczéj, wstawy i dostawy wynika to z określenia ich przez szeregi, pozostałe zaś funkcye trygonometryczne są funkcyami algebraicznemi tejże wstawy i dostawy. Można więc te funkcye przedstawić w kształcie normalnym, t. j. takim, w którym część rzeczywista oddzieloną jest od urojonéj.

Zacznijmy od funkcyi wykładniczéj. Wiemy już że :

$$e^z = e^x e^{yi}.$$

W tém wyrażeniu czynnik e^x ma wartość rzeczywistą dla każdéj wartości na x, pozostaje więc nam tylko czynnik e^{yi} sprowadzić do kształtu normalnego. W tym celu we wzorze (2, § 12) połóżmy $z = yi$, otrzymamy :

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1} - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3 i}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots$$

W tym szeregu oddzielając wyrazy rzeczywiste od urojonych i odnosząc się do wzorów : (6 i 7, § 13) otrzymujemy :

(12) $$e^{yi} = \operatorname{dos} y + i \operatorname{wst} y,$$

zkąd :

(13) $$e^{x+yi} = (e^x \operatorname{dos} y) + (e^x \operatorname{wst} y)\, i,$$

co jest żądanym normalnym kształtem funkcyi wykładniczéj.

Ze wzoru (12) czytamy łatwo niektóre własności funkcyi wykładniczéj, a mianowicie :

(14) $$e^{2s\pi i} = 1, \qquad e^{(2s+1)\pi i} = -1,$$

gdzie s jest liczbą całkowitą.

Jest także :

$$e^{(y+2s\pi)i} = e^{yi},$$

$$e^{x+(y+2s\pi)i} = e^{x+yi},$$

co można przedstawić wzorem ogólnym :

(15) $$e^{z+2s\pi i} = e^z.$$

Wiemy, że jeśli pewna funkcya $f(z)$ ma własność wyrażającą się wzorem :

$$f(z + sp) = f(z),$$

gdzie s oznacza liczbę całkowitą, a p ilość stałą, to $f(z)$ nazywa się *okresową* albo peryodyczną, a ilość p nazywa się *okresem* albo *peryodem*.

Z równania zatém (15) czytamy : *Funkcya wykładnicza jest okresową, a okresem jéj jest* $2\pi i$.

Zobaczmy teraz jak można geometrycznie przedstawić okresowość funkcyi, a dla ogólności przypuśćmy, że okres jest ilością złożoną : $p = a + bi$.

Niech będzie układ osi współrzędnych Ox i Oy, i niech punkt c przedstawia nam ilość p.

Poprowadźmy linię OC i odetnijmy na niéj części CC_1, $C_1C_2 \ldots OC_{-1}$ $C_{-1}C_{-2}$, równe OC, i przez punkta podziału poprowadźmy linie prostopadłe do oc, a części płaszczyzny, pasy między temi liniami zawarte oznaczmy odpowiednio przez :

$$\ldots, M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \ldots$$

Wszystkie punkta przedstawione ogólnym wzorem $z + sp$ leżeć będą na jednéj linii równoległéj od OC, w równych od siebie odległościach : w jednym pasie znajdować się będzie jeden tylko punkt, i każdy w swoim pasie będzie miał jednakowe położenie. Jeżeli np. punkt z leży w pasie M_0, to punkt $z+sp$ leżeć będzie odpowiednio w pasie M_s. Widzimy ztąd, że jeżeli płaszczyznę (z) podzielimy na pasy równoważne liniami prostopadłemi do promienia wodzącego okresu, a odległemi od

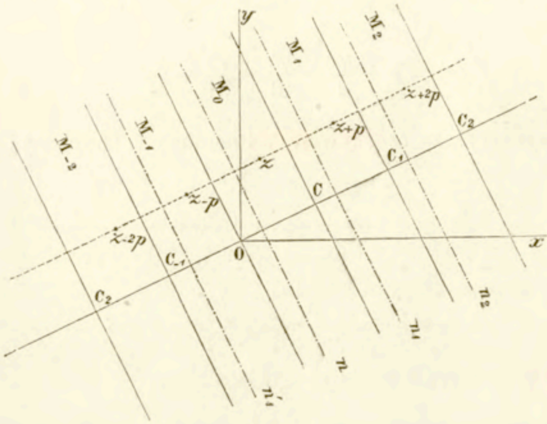

Fig. 3.

siebie na moduł okresu, to funkcya w każdym pasie w punktach podobnie położonych przyjmować będzie wartości jednakowe, zkąd także wypada, że *funkcya w każdym pasie przyjmuje wszystkie swoje wartości*.

Oczywiście niekoniecznie potrzeba, ażeby jedna z linii ograniczających pasy przechodziła przez początek układu; układ pasów ograniczonych liniami $\ldots n_1', n, n_1, n_2, \ldots$ posiada te same własności, co układ poprzedni; w wielu jednak przypadkach dogodniéj jak prowadzić pasy sposobem pierwszym.

Przy uważanéj funkcyi wykładniczéj okres jest urojony: pasy ograniczone będą liniami prostopadłemi do osi y, i odległemi od siebie na 2π. Oś x przyjęliśmy za ograniczenie pasa M_0.

Wzór (12) pozwala nam w prostym bardzo kształcie przedstawić ilość złożoną, stosując bowiem ten wzór do kształtu trygonometrycznego $r(\text{dos}\theta + i\text{wst}\theta)$, otrzymujemy kształt $re^{\theta i}$. Nie dajemy temu

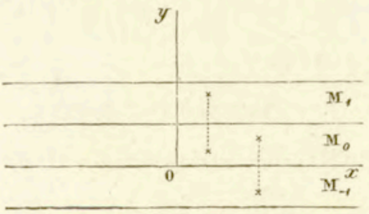

Fig. 4.

kształtowi nowego nazwiska: ilość złożona określona w nim jest przez te same wielkości, co w kształcie trygonometrycznym; jestto tylko dogodne skrócenie w pisaniu, podobne do tego, jakiegośmy użyli w § 11, pisząc: $r\varphi(\theta)$.

§ **15. Okresowość funkcyj trygonometrycznych.** Zajmiemy się teraz bliżéj funkcyami trygonometrycznemi a w szczególności wstawą i dostawą: inne bowiem funkcye trygonometryczne z tych dwóch się wyprowadzają.

Pytamy się najpierw: czy związki dowiedzione dla łuków rzeczywistych, utrzymują się i dla łuków złożonych(*)? t. j. czy te ogólniejsze funkcye oznaczone przez nas wst$z$ i dos$z$, mają te same własności, co funkcye w szczególnym przypadku z nich powstające, a poprzednio już w geometryi poznane?

Związki między temi funkcyami są dwojakiego rodzaju: jedne (związek między wstawą i dostawą jednego łuku, związek między temi funkcyami dla łuków dopełniających się, spełniających się, łuków z przeciwnymi znakami, związek między wstawą summy dwóch łuków, a wstawami i dostawami tych łuków, nakoniec okresowość tych funkcyj) wyprowadzone z badań geometrycznych nad liniami trygonometrycznemi, drugie (wszystkie pozostałe związki) wyprowadzone przez analityczne przekształcenie pierwszych związków. Otóż jeżeli dowiedziemy, że pierwsze związki utrzymują się dla łuków złożonych, dowiedziemy tém samém że i drugie także się utrzymują.

Uważmy że te pierwsze związki, jakkolwiek wyprowadzone były z uważań geometrycznych, są jednakowoż zarazem analitycznemi własnościami szeregów, przedstawiających wstawę i dostawę, a utrzymując się dla wszelkich rzeczywistych wartości, utrzymują się i dla wartości złożonych.

Tak więc będzie między innymi:

(16) $$\mathrm{wst}^2 z + \mathrm{dos}^2 z = 1,$$

(17) $$\mathrm{wst}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \mathrm{dos}\, z,$$

(18) $$\mathrm{wst}(-z) = -\,\mathrm{wst}\, z, \qquad \mathrm{dos}(-z) = \mathrm{dos}\, z,$$

(19) $$\mathrm{wst}(z + z') = \mathrm{wst}\, z\, \mathrm{dos}\, z' + \mathrm{dos}\, z\, \mathrm{wst}\, z',$$

(20) $$\mathrm{wst}(\pi - z) = \mathrm{wst}\, z, \qquad \mathrm{dos}(2\pi - z) = \mathrm{dos}\, z,$$

(21) $$\mathrm{wst}(z + 2s\pi) = \mathrm{wst}\, z, \qquad \mathrm{dos}(z + 2s\pi) = \mathrm{dos}\, z.$$

Wzory (21) pokazują, że *wstawa i dostawa są funkcyami okresowemi, a okresem ich jest* 2π. Geometryczne znaczenie téj okresowości pokazuje się, gdy płaszczyznę (Z) podzielimy na pasy liniami prostopadłemi do osi Ox, i odległemi od siebie na 2π.

Ale nadto z równań (20) czytamy, że dla każdego punktu znajdzie się drugi nieodpowiadający jemu okresowo (to jest nierówny poprzedniemu zwiększonemu o pewną wielokrotność okresu), w którym

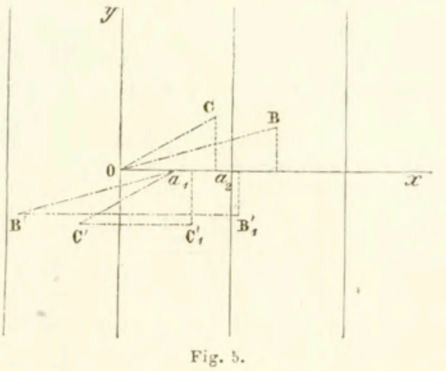

Fig. 5.

funkcya będzie miała tę samą wartość. Dla wstawy takimi dwoma nieodpowiadającymi sobie okresowo punktami są: z i $\pi - z$, a dla dostawy z i $2\pi - z$, albo prościéj $-z$. Ztąd bezpośrednio

(*) Mówimy tu łuk zamiast zmienna: choć pamiętać należy, że łuk złożony geometrycznie nic nie znaczy.

widać, że w niektórych przynajmniej pasach musi być więcéj jak jeden punkt, w których funkcya tę pewną oznaczoną wartość przyjmuje, że zaś funkcya w każdym pasie tożsamościowo się powtarza, przeto w każdym pasie musi więcéj jak jeden punkt odpowiadać téj saméj wartości funkcyi. Ponieważ zaś z drugiéj strony, pomiędzy wszystkimi punktami odpowiadającymi jednéj i téj saméj wartości funkcyj, znajdą się tylko dwa takie, które sobie okresowo nie odpowiadają, wszystkie zaś inne jednemu lub drugiemu z nich okresowo odpowiadać będą, przeto w każdym pasie muszą leżeć dwa punkta odpowiadające jednéj i téj wartości funkcyi, albo inaczéj *funkcye: wstawa i dostawa, w każdym pasie dwa razy przyjmują jedną i tę samą wartość.*

Zobaczmy jak leżą takie dwa punkta dla wstawy. W tym celu uważmy, że w ogólności punkt $\pi - z$ nie leży w tym samym pasie co punkt z, ale dodaniem stosownéj liczby okresów, co odpowiada geometrycznie posunięciu się po linii równoległéj do osi Ox, można znaleźć odpowiedni punkt w tym samym pasie. I tak punktowi C odpowiada C′, ale w punkcie C'_1 funkcya ma tę samą wartość co w C′. Podobnie z punktami B, B′, B'_1.

Łatwo spostrzedz, że te wartości zmiennéj które odpowiadają w jednym pasie téj saméj wartości wstawy, mają części urojone ze znakami przeciwnymi.

Podobnie rzecz się przeprowadza dla dostawy.

§ 16. Związki między funkcyami trygonometrycznemi a funkcyą wykładniczą. — Kształt normalny funkcyj trygonometrycznych. Wiemy, że:

$$e^{yi} = \operatorname{dos} y + i \operatorname{wst} y,$$

ztąd:

$$e^{-yi} = \operatorname{dos} y - i \operatorname{wst} y;$$

dodając te równania a potém odejmując, otrzymamy:

$$(22)\qquad \begin{cases} \operatorname{dos} y = \dfrac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \\ \operatorname{wst}(y) = \dfrac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}. \end{cases}$$

Ponieważ równania te, podane przez Euler'a, utrzymują się dla wszystkich wartości na y rzeczywistych, możemy więc w nich zamiast y napisać z, i wtedy:

$$(23)\qquad \begin{cases} \operatorname{dos} z = \dfrac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \\ \operatorname{wst} z = \dfrac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}. \end{cases}$$

Równania (23) pokazują związek między funkcyami trygonometrycznemi z jednéj, a wykładniczą z drugiéj strony.

Zatrzymamy się tu nad przejściem od wzorów (22) do (23): polega ono na zastosowaniu prawa w § 2 wyrażonego do tego przypadku, gdy we wzór uważany już wchodzi ilość złożona, można w takim wzorze zamiast x i y podstawiać ilości złożone, jeżeli tylko wzór utrzymuje się dla wszelkich wartości x i y; jeżeli są pewne ograniczenia należy je uwzględnić przy podstawieniu.

Pisząc we wzorach (23) $z = x + yi$, i nadając funkcyom wykładniczym ich kształt normalny, znajdziemy kształt normalny wstawy i dostawy. Prościéj jednak do tego dojdziemy uważając, że podług wzoru (19):

$$(19') \quad \begin{cases} \mathrm{wst}(x+yi) = \mathrm{wst}x\,\mathrm{dos}(yi) + \mathrm{dos}x\,\mathrm{wst}(yi) \\ \mathrm{dos}(x+yi) = \mathrm{dos}x\,\mathrm{dos}(yi) - \mathrm{wst}x\,\mathrm{wst}(yi), \end{cases}$$

a kładąc we wzorach (23) yi zamiast z:

$$(23') \quad \mathrm{dos}yi = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \mathrm{wst}(yi) = -\frac{e^y - e^{-y}}{2i} = i\frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

a więc:

$$(24) \quad \begin{cases} \mathrm{wst}(x+yi) = \mathrm{wst}x\,\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + i\left(\mathrm{dos}x\,\dfrac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ \mathrm{dos}(x+yi) = \mathrm{dos}x\,\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} - i\left(\mathrm{wst}x\,\dfrac{e^y - e^{-y}}{2}\right). \end{cases}$$

Wzory (24) dają nam żądany kształt normalny: w nich wyrażenia $\frac{e^y + e^{-y}}{2}$, $\frac{e^y - e^{-y}}{2}$ są widocznie zawsze rzeczywiste. Nadto ze wzorów (23') czytamy, że dla łuku urojonego wstawa jest urojoną, a dostawa rzeczywistą i dodatną (*).

Przed zakończeniem tego rozdziału zrobimy kilka uwag o stycznéj łuku złożonego. Ze wzorów (8) i (23):

$$\mathrm{st}z = -i\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}}.$$

Mnożąc tu licznik i mianownik przez mianownik:

$$(25) \quad \mathrm{st}z = -i\,\frac{e^{2zi} - e^{-2zi}}{e^{2zi} + e^{-2zi} + 2}.$$

Ważny wzór, z którego czytamy że *styczna jest okresową, a okresem jej jest* π.

(*) Gdybyśmy znali wstawy i dostawy łuków urojonych, to podług wzorów (19') moglibyśmy obliczyć wartości liczebne funkcyj kołowych łuku złożonego. Otóż funkcye:

$$\mathrm{dos}\,ti = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \frac{\mathrm{wst}\,ti}{i} = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

mające dla każdego t rzeczywistego wartości rzeczywiste, nazwane zostały odpowiednio dostawą i wstawą hyperboliczną zmiennéj t, i obliczone w tablicach Houel'a (*Recueil de Formules et de Tables numériques*, 1867), i w dzienniku Crelle'go (tomy VII, VIII, IX, XV) przez Rudolmann'a. Nazwano je hyperbolicznemi, ponieważ są one tém względem jednéj gałęzi huperboli równoramiennéj, czém funkcye kołowe względem okręgu koła. Jeżeli bowiem ξ η są współrzędnemi punktu na hyperboli; któréj równanie jest:

$$\xi^2 - \eta^2 = 1,$$

to przy ξ dodatném, odpowiednio związkowi

$$(\mathrm{dos\,hyp}\,t)^2 - (\mathrm{wst\,hyp}\,t)^2 = 1$$

Do normalnego kształtu stycznéj najłatwiéj dojść w ten sposób:

$$\mathrm{st}(x+yi)=\frac{\mathrm{wst}(x+yi)}{\mathrm{dos}(x+yi)}=\frac{2\mathrm{wst}(x+yi)\mathrm{dos}(x-yi)}{2\mathrm{dos}(x+yi)\mathrm{dos}(x-yi)},$$

$$\mathrm{st}(x+yi)=\frac{\mathrm{wst}(2x)+\mathrm{wst}(2yi)}{\mathrm{dos}(2x)+\mathrm{dos}(2yi)}=\frac{\mathrm{wst}2x+i\dfrac{e^{2y}-e^{-2y}}{2}}{\mathrm{dos}2x+\dfrac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}},$$

Zkąd ostatecznie:

$$\mathrm{st}(x+yi)=\frac{\mathrm{wst}(2x)}{\mathrm{dos}(2x)+\dfrac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}}+i\frac{\dfrac{e^{2y}-e^{-2y}}{2}}{\mathrm{dos}(2x)+\dfrac{e^{2y}+e^{-2y}}{2}}.$$

---

możemy położyć:

$$\mathrm{OM}=\xi=\mathrm{dos\,hyp}\;t,$$
$$\mathrm{MN}=\eta=\mathrm{wst\,hyp}\;t.$$

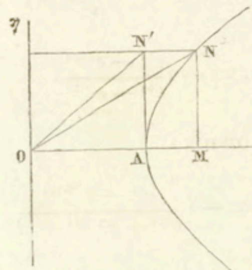

Fig. 6.

Różniczkując układ jednoczesnych równań:

$$\xi=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\qquad \eta=\frac{e^t-e^{-t}}{2},$$

otrzymamy:

$$d\xi=\eta dt,\qquad d\eta=\xi dt,$$

zkąd

$$dt=\xi d\eta-\eta d\xi.$$

Związek różniczkowy pokazujący, że t przedstawia powierzchnię podwójną wycinka ONA, podobnie jak to ma miejsce przy okręgu koła o promieniu jedność.

Nadto oznaczywszy kąt N′OA przez φ, znajdziemy:

$$\mathrm{wst\,hyp}\;t=\mathrm{st}\,\varphi,\qquad \mathrm{dos\,hyp}\;t=\mathrm{sie}\,\varphi.$$

IV. — FUNKCYA LOGARYTMICZNA I FUNKCYE CYKLOMETRYCZNE (KOŁOWE ODWROTNE).

§ 17. **Ogólne uwagi o funkcyach odwrotnych.** Jeżeli zajmujemy się pewną funkcyą: $f(z)$ w ogólności zmiennéj złożonéj i wiemy, że każdéj wartości zmiennéj z odpowiada pewna wartość funkcyi, która, jakeśmy się w poprzednich badaniach przekonali, jest także ilością złożoną, to oznaczywszy ją przez $\zeta = \xi + \eta i$, możemy napisać:

$$(\alpha) \qquad f(z) = \zeta.$$

W tém równaniu z i ζ są zmienne, ale zmienne w określony sposób od siebie zależące, tak że każdą z nich uważać możemy jako funkcyę drugiéj: i nadto zależność zmiennéj z od ζ, jest odwrotnością zależności zmiennéj ζ od z. Jeżeli więc z równaniem (α) zestawimy drugie:

$$(\beta) \qquad z = \varphi(\zeta),$$

to funkcyę oznaczoną przez φ, nazwać można *funkcya* odwrotną funkcyi oznaczonéj przez f, i na odwrót. Oczywiście każda funkcya ma swoją odwrotną.

Jeżeli przypuścimy, że $f(z)$ jest okresową względem okresu p, to $\varphi(\zeta)$ będzie funkcyą nieskończenie-wielowartościową; tak, że wszystkie wartości z odpowiadające jednéj wartości ζ tworzyć będą szereg arytmetyczny, którego wykładnikiem będzie p. Jeżeli $f(z)$ będzie tego rodzaju, że dla m różnych wartości z, przybiera jedną i tę samą wartość, to $\varphi(\zeta)$ będzie miała m różnych wartości na każdą wartość ζ, czyli będzie m-wartościową.

Po tych ogólnych uwagach, przystąpmy do badania funkcyj odwrotnych tych funkcyi przestępnych, któreśmy poznali w poprzedzającym rozdziale.

§ 18. Funkcya logarytmiczna odwrotna wykładniczéj.

Niech będzie równanie:

$$(1) \qquad e^z = \zeta,$$

odwrotne jemu napiszmy:

$$(2) \qquad z = \mathrm{Lg}\zeta,$$

i nazwijmy z *naturalnym logarytmem* ζ.

Ponieważ wiemy, że funkcya wykładnicza jest okresową względem okresu $2\pi i$, więc logarytm jest funkcyą nieskończenie-wielowartościową w ten sposób, że jedne wartości różnią się od drugich o wielokrotności ilości $2\pi i$. Jeżeli więc wybierzemy jedną szczególną wartość funkcyi $\mathrm{Lg}\zeta$, oznaczymy ją $\mathrm{lg}.\zeta$ i nazwiemy *logarytmem głównym*, to będzie można napisać:

$$(3) \qquad \mathrm{Lg}\zeta = \mathrm{lg}\zeta + 2s\pi i \quad (\text{gdzie } s \text{ całkowite}).$$

Z algebry elementarnéj wiadomo, że każda ilość rzeczywista dodatna ma swój logarytm rzeczywisty i tylko jeden; opierając się na tém możemy umówić się, że dla takich ζ, w których część rzeczywista jest dodatną, za logarytm główny przyjmiemy tę wartość $\mathrm{Lg}\zeta$, która sprowadza się do znanego nam z algebry logarytmu, gdy współczynnik części urojonéj ζ staje się zerem.

Aby lepiéj określić, która wartość jest tą wartością główną w wyżéj wymienionym przypadku, a jednocześnie analogicznie znaleźć określenie wartości głównéj w drugim przypadku, wyrazimy logarytm w kształcie normalnym.

Położywszy:

$$z = x + yi, \qquad \zeta = \xi + \eta i,$$

będziemy mogli napisać:

$$(1') \qquad e^{x+yi} = \xi + \eta i,$$

$$(2') \qquad \mathrm{Lg}(\xi + \eta i) = x + yi.$$

Z ostatniego równania widzimy, że jeżeli wyrazimy x i y w funkcyi ξ i η, znajdziemy kształt normalny.

W tym celu odnieśmy się do wzoru (13, § 14), łącząc go z równaniem (1'), otrzymamy:

$$(\alpha) \qquad \xi = e^x \mathrm{dos}\, y,$$

$$(\beta) \qquad \eta = e^x \mathrm{wst}\, y.$$

Należy nam teraz z tych dwóch równań wyrazić x i y w funkcyi ξ i η. Podnosząc do kwadratu i dodając:

$$(\gamma) \qquad \xi^2 + \eta^2 = e^{2x}.$$

Ztąd zaś wypada:

$$(4) \qquad x = \frac{1}{2} \lg(\xi^2 + \eta^2).$$

Równanie (4) napisane zostało na mocy prawideł algebry elementranéj: doskonale wiemy, co rozumieć należy pod $\lg a$, gdy a jest dodatne.

Z równania (γ) wypada:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = e^x,$$

(piszemy przed pierwiastkiem znak $+$, bo e^x jest dla rzeczywistych x dodatne) łącząc zaś to równanie z równaniami (α) i (β), otrzymamy:

$$\mathrm{wst}\, y = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}}, \qquad \mathrm{dos}\, y = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

zkąd:

$$(5) \qquad \begin{cases} y = \text{Łuk wst}\, \dfrac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}} \\[2ex] y = \text{Łuk dos}\, \dfrac{\xi}{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}}. \end{cases}$$

Równania (5) określają y tak, że w jednym okręgu jedną tylko wartość znajdziemy. Zastępujemy je jedném równaniem:

(6) $$y = \text{Łuk st}\,\frac{\eta}{\xi},$$

pamiętając że rozbierając równanie (6), nie należy spuszczać z uwagi równań (5).

Zamiast (6) możemy napisać:

(7) $$y = \text{łuk st}\,\frac{\eta}{\xi} + m\pi \ (*).$$

Jeżeli $\xi > 0$, to równanie (5) pokazują, że y powinno leżeć w ćwiartce 1ej albo 4ej, stosownie do tego, czy η jest dodatne czy odjemne.

Równanie znów (7) w tym przypadku, t. j. przy $\xi > 0$, daje łuki:

w ćwiartce 1ej, gdy m parzyste }
w ćwiartce 3ej, gdy m nieparzyste } dla η dodatnego,

w ćwiartce 4ej, gdy m parzyste }
w ćwiartce 2ej, gdy m nieparzyste } dla η odjemnego,

Aby więc równanie (7) zastępowało równania (5), potrzeba w niém pod m rozumieć liczbę parzystą, gdy $\xi > 0$; podobny rozbiór przekonałby nas, że, gdy $\xi < 0$, pod m rozumieć trzeba liczbę nieparzystą.

Ostatecznie równanie (7) rozpada się na dwa:

(8) $$\begin{cases} y = \text{łuk st}\,\frac{\eta}{\xi} + 2s\pi, & \text{gdy } \xi > 0 \\ y = \text{łuk st}\,\frac{\eta}{\xi} + (2s+1)\pi, & \text{gdy } \xi < 0. \end{cases}$$

A podstawiając (4) i (8) w (2'), otrzymujemy dwa równania dające normalny kształt logarytmu:

(9) $$\begin{cases} \text{gdy } \xi > 0, & \text{Lg}(\xi + \eta i) = \frac{1}{2}\,\text{lg}(\xi^2 + \eta^2) + \left(\text{łuk st}\,\frac{\eta}{\xi} + 2s\pi\right)i \\ \text{gdy } \xi < 0, & \text{Lg}(\xi + \eta i) = \frac{1}{2}\,\text{lg}(\xi^2 + \eta^2) + \left(\text{łuk st}\,\frac{\eta}{\xi} + (2s+1)\pi\right)i, \end{cases}$$

Teraz łatwo znajdujemy wartość główną, ponieważ dla $\xi > 0$ odpowiada ona wartości $s = 0$, przyjmujemy więc analogicznie, że i w drugim przypadku téj wartości odpowiada.

(*) Przypominamy tutaj, że pod: Łuk wst t, Łuk st t ... rozumiemy wszystkie łuki danemu t odpowiadające, zaś pod łuk wst t, łuk st t, łuk dot t, łuk dosie t, rozumiemy łuki zawarte między $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$, pod łuk dos t i łuk sie t zawarte między 0 i π.

(**) Ćwiartki, pierwsza odjemna i czwarta dodatna, są jednoznaczne.

Wówczas oba wzory (9) zamknąć można w jednym:

$$\mathrm{Lg}(\xi+\eta i)=\lg(\xi+\eta i)+2s\pi i,$$

który to wzór jednoznaczny jest z wzorem (3), ale nie przedstawia logarytmu w kształcie normalnym.

Zakładając we wzorach (9) $\eta=0$, $\xi=1$ lub -1, będzie:

$$\mathrm{Lg}(+1)=2s\pi i, \qquad \mathrm{Lg}(-1)=(2s+1)\pi i,$$

zkąd

$$\lg(+1)=0, \qquad \lg(-1)=\pi i,$$

a więc:

$$(10) \quad \begin{cases} \text{gdy } \xi>0, & \mathrm{Lg}(\xi+\eta i)=\frac{1}{2}\lg(\xi^2+\eta^2)+\left(\text{łuk}\,\mathrm{st}\,\frac{\eta}{\xi}\right)i+\mathrm{Lg}(+1) \\ \text{gdy } \xi<0, & \mathrm{Lg}(\xi+\eta i)=\frac{1}{2}\lg(\xi^2+\eta^2)+\left(\text{łuk}\,\mathrm{st}\,\frac{\eta}{\xi}\right)i+\mathrm{Lg}(-1). \end{cases}$$

Jeżeli zaś zważymy, że wyrażenie $\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}$ jest jednością z tym znakiem co ξ, to będziemy mogli napisać w jednym wzorze:

$$(10') \quad \mathrm{Lg}(\xi+\eta i)=\frac{1}{2}\lg(\xi^2+\eta^2)+\left(\text{łuk}\,\mathrm{st}\,\frac{\eta}{\xi}\right)i+\mathrm{Lg}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}\right).$$

Zresztą normalny kształt logarytmu można jeszcze w jednym wzorze przedstawić pisząc:

$$(11) \quad \mathrm{Lg}(\xi+\eta i)=\frac{1}{2}\lg(\xi^2+\eta^2)+\omega i,$$

gdzie ω określone jest układem równań:

$$(11') \quad \begin{cases} \mathrm{wst}\,\omega=\dfrac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}} \\ \mathrm{dos}\,\omega=\dfrac{\xi}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}}. \end{cases}$$

Godnym jest uwagi kształt logarytmu ilości złożonéj przedstawiającéj w kształcie trygonometrycznym; otrzymujemy go z wzoru (11):

$$(12) \quad \mathrm{Lg}[r(\mathrm{dos}\,\theta+i\,\mathrm{wst}\,\theta)]=\lg r+\theta i.$$

Z zasadniczego twierdzenia na mnożenie funkcyj wykładniczych:

$$e^z\,.\,e^{z'}=e^{z+z'},$$

wyprowadzamy bezpośrednio zasadnicze twierdzenie dla logarytmów, wyrażające się wzorem:

$$(13) \quad \mathrm{Lg}(\zeta).\mathrm{Lg}(\zeta')=\mathrm{Lg}(\zeta\zeta').$$

We wzorze tym nie można znaku Lg zastąpić przez lg, to jest uważać go dla logarytmów głównych, gdyż nie zawsze summa logarytmów głównych czynników wydaje logarytm główny iloczynu. Niech bowiem będą dwa czynniki:

$$r(\mathrm{dos}\theta + i\mathrm{wst}\theta) \qquad \text{i} \qquad r'(\mathrm{dos}\theta' + i\mathrm{wst}\theta'),$$

ich logarytmy główne:

$$\lg r + \theta i, \qquad \lg r' + \theta' i$$

gdzie θ i θ' są mniejsze od 2π.

Summa tych logarytmów:

$$\lg(rr') + (\theta + \theta')i,$$

wtedy tylko będzie logatytmem głównym iloczynu, gdy $\theta + \theta' < 2\pi$.

Ze wzoru (13) wypada wzór na podniesienie do potęg:

$$\mathrm{Lg}(\zeta^m) = m\mathrm{Lg}\zeta, \tag{14}$$

gdzie m oznaczać może tak całkowitą, jak i ułamek.

Rozciągając wzór (14) do wykładników złożonych określamy w ten sposób pośrednio ilość z wykładnikiem złożonym. A mianowicie:

Pod ζ^{a+bi}, rozumieć będziemy taką ilość, że:

$$\mathrm{Lg}(\zeta^{a+bi}) = (a + bi)\mathrm{Lg}\zeta, \tag{15}$$

ztąd zaś wynika:

$$\zeta^{a+bi} = e^{(a+bi)\mathrm{Lg}\zeta}. \tag{15'}$$

Jeżeli zważymy, że logarytm jest funkcyą nieskończenie-wielowartościową, to wnioskujemy że i pierwsza strona równania (15') jest funkcyą tegoż rodzaju.

Szczególne przypadki zachodzą tu także : jeżeli $b = 0$, a a całkowite, to ze względu na okresowość funkcyi wykładniczéj, uważana funkcya jest jednowartościową.

Gdy $b = 0$, a a zaś jest ułamkiem z mianownikiem n funkcya ma n wartości, gdy zaś a jest ilością niewymierną funkcya ma nieskończenie wiele wartości, co łatwo na mocy poprzedzającego przypadku objaśnić można, zważywszy że ilość niewymierną przedstawić można w postaci ułamku, którego mianownik ma nieskończoną liczbę cyfr, t. j. jest nieskończenie wielki.

We wzorze (15') uważając ζ za stałe, a $a + b$ i za zmienną, znajdujemy określenie nowéj funkcyi, oznaczonéj w teoryi funkcyj rzeczywistych przez a^z, i uważanéj za ogólniejszą funkcyę wykładniczą. Będzie mianowicie :

$$a^z = e^{z\mathrm{Lg}a},$$

funkcya nieskończenie wielowartościowa.

Widzimy jednak że podstawienie w niéj $a = e$, nie prowadzi do poprzednio poznanéj funkcyi wykładniczéj, nie należy więc ją uważać za ogólniejszą funkcyę wykładniczą, i badanie jéj nie przedstawia żadnego interesu.

§ 19. **Funkcye odwrotne wstawie i dostawie.** Zajmiemy się najpierw wstawą. — Równaniu :

(1) $$\text{wst}(x+yi)=\xi+\eta i=\zeta,$$

odwrotne równanie napiszemy :

(2) $$z=x+yi=\text{Łuk wst}(\xi+\eta i).$$

Ponieważ, jak wiemy z poprzedniego, wstawa jest nietylko funkcyą okresową, ale nawet w każdym pasie przybiera dwa razy jedną i tę samą wartość, przeto funkcya odwrotna ma nieskończenie wiele wartości, które ustawić można w dwie grupy tak, że jeżeli w każdéj z nich wybierzemy jednę dowolną : z_0 i z_0', za wartości główne, to wszystkie inne do odpowiedniéj grupy należące, napiszą się :

$$\left.\begin{array}{l} z_0+2s\pi \\ z_0'+2s'\pi \end{array}\right\} \text{gdzie } s \text{ liczba całkowita.}$$

Łatwo znaleźć związek między dwiema głównemi wartościami. Wiemy, że dla wartości z i $\pi-z$ wypadają jednakowe wartości wstawy, dla każdego więc s w grupie pierwszéj, znajdzie się takie s w grupie drugiéj,

że $$z_0'+2s'\pi=\pi-(z_0+2s\pi),$$

zkąd $$z_0'=\pi-z_0-2(s+s')\pi.$$

To jest związek szukany w kształcie najogólniejszym, możemy jednak dowolnie wybrawszy z_0, tak wybrać z_0', aby wprost było :

$$z_0'=\pi-z_0.$$

Jeżeli teraz z_0 oznaczymy przez łuk wst ζ, to równanie (2) zastąpić będzie można równaniami

(3) $$\left\{\begin{array}{l} z=\text{łuk wst}\,\zeta+2s\pi \\ z=-\text{łuk wst}\,\zeta+(2s+1)\pi. \end{array}\right.$$

Zupełnie odpowiednio, uważając równanie :

(4) $$z=\text{Łuk dos}\,\zeta,$$

i oznaczywszy główne wartości przez łuk dos ζ, i $2\pi-$ łuk dos ζ, albo prościéj : ($-$ łuk dos ζ), będzie

(5) $$\left\{\begin{array}{l} z=\text{łuk dos}\,\zeta+2s\pi \\ z=-\text{łuk dos}\,\zeta+2s\pi \end{array}\right.$$

Zwrócimy tu tylko uwagę, że przy wyborze pierwszéj głównéj wartości, który dotychczas pozostał dowolny, najwłaściwiéj mieć to na względzie, aby w przypadku gdy ζ oznacza ilość rzeczywistą równania (3) i (5) zgodne były z odpowiedniemi równaniami znanemi z geometryi.

Zajmiemy się teraz przedstawieniem tych funkcyj w kształcie normalnym.

Odnosząc się do normalnego kształtu wstawy otrzymamy równania :

(6)
$$\begin{cases} \xi = \operatorname{wst} x . \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2} \\ \eta = \operatorname{dos} x . \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}, \end{cases}$$

z których należy znaleźć x i y w funkcyi ξ i η.

Z równań (6) znajdujemy :

(α)
$$e^{y} = \frac{\xi}{\operatorname{wst} x} + \frac{\eta}{\operatorname{dos} x}$$

(β)
$$e^{-y} = \frac{\xi}{\operatorname{wst} x} - \frac{\eta}{\operatorname{dos} x},$$

ztąd zaś :

(γ)
$$1 = \frac{\xi^2}{\operatorname{wst}^2 x} - \frac{\eta^2}{\operatorname{dos}^2 x},$$

z ostatniego równania :

$$\operatorname{dos}^2 x = \frac{1}{2}\left[1 - \xi^2 - \eta^2 + \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\eta^2}\right],$$

przed pierwiastkiem napisaliśmy tylko znak dodatny, bo $\operatorname{dos}^2 x$ musi być dodatną. Otrzymujemy daléj :

$$\operatorname{wst}^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + \xi^2 + \eta^2 - \sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\eta^2}\right],$$

co inaczéj można napisać :

$$\operatorname{wst}^2 x = \frac{\xi^2}{\frac{1}{2}\left[1 + \xi^2 + \eta^2 - \sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\eta^2}\right]}.$$

Połóżmy teraz dla skrócenia :

(7)
$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[+ \xi^2 + \eta + \sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2) + 4\eta^2}\right]} = \mathrm{X},$$

(8)
$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[1 - \xi^2 - \eta^2 + \sqrt{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\eta^2}\right]} = \mathrm{Y},$$

to będziemy mogli napisać :

(9)
$$\operatorname{wst} x = \frac{\xi}{\mathrm{X}},$$

(10)
$$\operatorname{dos} x = \pm \mathrm{Y}.$$

W równaniu (9) napisaliśmy X bez podwójnego znaku, bo pierwsze z równań (5) pokazuje, że wst$x$

jest zawsze tego samego znaku, co ξ. W równaniu zaś (10) piszemy znak podwójny, bo jeszcze nie możemy roztrzygnąć; jaki tam znak wziąść należy.

Aby rzecz tę zbadać, uważmy, że z drugiego z równań (5) widać, że gdy dos x jest tego samego znaku co η, to y jest dodatne, a gdy przeciwnego, to y odjemne.

Z drugiéj strony, uważmy, że z równania (α) wypada:

(11) $$y = \lg\left(X + \frac{\eta}{\pm Y}\right) \; (*).$$

Jeżeli η jest tego samego znaku co Y, to:

$$X + \frac{\eta}{Y} > X - \frac{\eta}{Y},$$

zatém uwzględniwszy równanie (γ) wnioskujemy, że $X + \frac{\eta}{Y}$ będzie wtedy większe od jedności, a więc y będzie dodatne, co czytamy z równania (11); jeżeli zaś η jest przeciwnego znaku jak Y, to rzecz ma się naodwrót, i wypadnie y odjemne.

Odnosząc się do poprzednio zrobionéj uwagi co do znaków η, Y i y, widzimy, że jakikolwiek znak weźmiemy przed Y, dojdziemy do wypadków sprawiedliwych: należy więc w równaniu (10) wziąść znak podwójny. W takim zaś razie równanie to nie dopełnia równania (9), i dlatego możemy je opuścić i określić x przez samo równanie (9) i widzimy że:

(12) $$x = \text{Łuk wst}\left(\frac{\xi}{X}\right).$$

Równania (11) i (12) dają nam szukany kształt normalny:

(13) $$\text{Łuk wst}(\xi + \eta i) = \text{Łuk wst}\left(\frac{\xi}{X}\right) + i \lg\left(X \pm \frac{\eta}{Y}\right),$$

do czego należy przyłączyć równania (7) i (8), i pamiętać, że w logarytmie należy brać znak dodatny, kiedy część rzeczywista przedstawia łuk, którego dostawa jest dodatną, znak odjemny w razie przeciwnym.

Uważmy więc, że jeżeli część rzeczywista jest kształtu:

$$\text{łuk wst}\left(\frac{\xi}{x}\right) + 2s\pi,$$

w logarytmie należy brać znak górny, jeżeli zaś jest kształtu:

$$\pi - \text{łuk wst}\left(\frac{\xi}{x}\right) + 2s\pi,$$

w logarytmie bierze się znak dolny; — uważamy daléj że według równania (γ):

$$\lg\left(X - \frac{\eta}{Y}\right) = -\lg\left(X + \frac{\eta}{Y}\right),$$

(*) Bierzemy tu logarytm główny, ponieważ w działaniach tych pozostajemy w obrębie ilości rzeczywistych.

tak że ostatecznie zamiast równania (13) można napisać

$$(14)\quad \begin{cases} \text{Łuk wst}(\xi+\eta i)=\text{łuk wst}\left(\frac{\xi}{X}\right)+2s\pi+i\,\lg\left(X+\frac{\eta}{Y}\right) \\ \text{Łuk wst}(\xi+\eta i)=-\,\text{łuk wst}\left(\frac{\xi}{X}\right)+(2s+1)\pi-i\,\lg\left(X+\frac{\eta}{Y}\right) \end{cases}$$

do czego przyłączyć należy (7) i (8).

Czytamy z tych równań, że łuki mające jednakową wstawę mają części urojone ze znakami przeciwnymi, co jest zgodne z uwagą zrobioną poprzednio w § 15.

Widzimy nadto, że kształt (14) zgodny jest z równaniami (3), należy tylko brać:

$$(15)\quad \text{łuk wst}(\xi+\eta i)=\text{łuk wst}\frac{\xi}{X}+i\,\lg\left(X+\frac{\eta}{Y}\right).$$

Zupełnie podobną drogą postępując znaleźlibyśmy:

$$(16)\quad \text{Łuk dos}(\xi+\eta i)=\text{Łuk dos}\left(\frac{\xi}{X}\right)\mp i\,\lg\left(X+\frac{\eta}{Y}\right)$$

gdzie X i Y są określone równaniami (7) i (8).

W części urojonéj znak górny brać należy wtedy gdy część rzeczywista jest łukiem mającym wstawę dodatną, znak dolny w przypadku przeciwnym. Zamiast równania (16) można napisać:

$$(17)\quad \begin{cases} \text{Łuk dos}(\xi+\eta i)=\text{łuk dos}\left(\frac{\xi}{X}\right)+2s\pi-i\,\lg\left(X+\frac{\eta}{Y}\right) \\ \text{Łuk dos}(\xi+\eta i)=-\,\text{łuk dos}\left(\frac{\xi}{X}\right)+2s\pi+i\,\lg\left(X+\frac{\eta}{Y}\right) \end{cases}$$

a zgodnie z poprzedzającém, za pierwszą wartość główną bierzemy:

$$(18)\quad \text{łuk dos}(\xi+\eta i)=\text{łuk dos}\left(\frac{\xi}{X}\right)-i\,\lg\left(X+\frac{\eta}{Y}\right).$$

Dodając równania (15) i (18), otrzymujemy:

$$\text{łuk wst}(\xi+\eta i)+\text{łuk dos}(\xi+\eta i)=\text{łuk wst}\left(\frac{\xi}{X}\right)+\text{łuk dos}\left(\frac{\xi}{X}\right).$$

Wiemy zaś, że dla t rzeczywistego, jest:

$$\text{łuk wst}\,t+\text{łuk dos}\,t=\frac{\pi}{2},$$

jest więc także, gdy ζ oznacza zmienną złożoną:

$$(19)\quad \text{łuk wst}\,\zeta+\text{łuk dos}\,\zeta=\frac{\pi}{2}.$$

§ **20.** Dowiedźmy teraz, że wartość główna: łuk wst$(\xi+\eta i)$, określona równaniem (15), w przypadku: $\eta=0$ a $(-1)<\xi<1$, staje się istotnie tém, cośmy w geometryi przez łuk wst ξ oznaczyli.

W tym celu uważmy najpierw, że przy $\eta = 0$, równania (7) i (8) przechodzą na następujące :

$$X = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\xi^2+\sqrt{(1-\xi^2)^2}\right]}, \qquad Y = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\xi^2+\sqrt{(1-\xi^2)^2}\right]},$$

ponieważ według poprzednio zrobionéj uwagi $\sqrt{(1-\xi)^2}$, oznacza ilość dodatną, należy więc to wyrażenie pisać : $1-\xi^2$ lub ξ^2-1, stosownie do tego, czy ξ jest mniejsze czy większe od jedności. My znajdujemy się w pierwszym przypadku, i będzie :

$$X = 1, \quad Y = \sqrt{1-\xi^2},$$

zkąd :

$$\frac{\xi}{X} = \xi, \quad \frac{\eta}{Y} = 0,$$

co podstawiwszy we wzór (15), otrzymamy tożsamość.

Zostaje tylko wątpliwość co do $\xi = \pm 1$, wtedy bowiem i Y staje się zerem, i nie możemy bez bliższego zbadania rzeczy twierdzić, że $\frac{\eta}{Y}$ będzie zerem. Ale jest :

$$\frac{\eta^2}{Y^2} = \frac{\eta^2}{\frac{1}{2}\left[1-\xi^2-\eta^2+\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\eta^2}\right]} = \frac{\eta^2 \cdot \frac{1}{2}\left[1-\xi^2-\eta^2-\sqrt{(1-\xi^2-\eta^2)^2+4\eta^2}\right]}{-\eta^2}$$

a z ostatniego kształtu wnioskujemy, że $\frac{\eta}{Y}$ staje się zerem i wtedy, gdy $\xi = \pm 1$.

To samo daje przeprowadzić się z wzorem (18).

Weźmy teraz pod uwagę przypadek drugi, t. j. gdy $\xi^2 > 1$. Wtedy

$$X = \sqrt{\xi^2}, \quad Y = 0, \quad \frac{\eta}{Y} = \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Gdy ξ jest dodatne, $\sqrt{\xi^2}$, który ma być dodatny, będzie ξ, i :

$$(20) \qquad \left\{\begin{aligned} &\text{łuk wst}\,\xi = \frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{lg}(\xi + \sqrt{(\xi^2-1)}) \\ &\text{łuk dos}\,\xi = \pi + i\,\mathrm{lg}\,(\xi - \sqrt{\xi^2-1}). \end{aligned}\right. \qquad 1 < \xi < \infty$$

W przeciwnym razie, $\sqrt{\xi^2}$ będzie $-\xi$, i :

$$(20') \qquad \left\{\begin{aligned} &\text{łuk wst}\,\xi = -\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{lg}(-\xi + \sqrt{\xi^2-1}) \\ &\text{łuk dos}\,\xi = 0 + i\,\mathrm{lg}\,(-\xi - \sqrt{\xi^2-1}). \end{aligned}\right. \qquad (-1) > \xi > -\infty.$$

Wzory (20) i (20′) pokazują że łuki, których wstawy lub dostawy są większe liczebnie od jedności, nie są rzeczywiste, jak i powinno było wypaść.

Damy tu przykład użycia pierwszego z wzorów (20).

Niech będzie elipsa, któréj równanie jest :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

wyrażenie na powierzchnię odcinka ograniczonego : przez oś odciętych, krzywą, i dwie rzędne w odległości x_1 i x_2 od początku układu, jest następujące :

$$P=b\int_{x_1}^{x_n}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

co zcałkowawszy, otrzymamy :

$$(\alpha)\qquad P=\frac{ab}{2}\Big/_{x_1}^{x_2}\left[\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\text{łuk wst}\frac{x}{a}\right],$$

albo inaczéj :

$$(\beta)\qquad P=\Big/_{x_1}^{x_2}\left[\frac{xy}{2}+\frac{ab}{2}\,\text{łuk wst}\,\frac{x}{a}\right].$$

Ażeby teraz otrzymać wyrażenie na powierzchnię takiegoż odcinka dla hyperboli, któréj równaniem jest :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

dosyć jest we wzorze (β) podstawić bi zamiast b (*) i otrzymamy wtedy wyrażenie pozornie złożone, ale gdy zważymy, że obie granice podstawienia są większe od a, przez co $\frac{x}{a}$ jest większe od jedności, i użyjemy wzoru (20), pamiętając, że ilość stała znika przy podstawieniu, to będzie :

$$P=\Big/_{x_1}^{x_2}\left[\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\lg\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)\right],$$

wyrażenie rzeczywiste i takie same, jakie otrzymujemy obliczając bezpośrednio tę powierzchnię.

§ **21**. Załóżmy teraz we wzorach (15) i (18) oraz (7) i (8) : $\xi=0$, wtedy otrzymamy :

$$X=\sqrt{1+\eta^2},\qquad Y=1,\qquad \text{zkąd :}$$

$$(21)\qquad \begin{cases}\text{łuk wst}(\eta i)=i\lg\left(\sqrt{1+\eta^2}+\eta\right)\\ \text{łuk dos}(\eta i)=\frac{\pi}{2}+i\lg\left(\sqrt{1+\eta^2}-\eta\right)\end{cases}$$

(*) To samo podstawienie można uskutecznić we wzorze (α), należy tylko pamiętać, że według uwagi w § 6, pisze się : $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=-i\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$.

Ponieważ wzory te mają miejsce dla wszelkich wartości η można więc w nich zamiast η napisać ζi, gdzie ζ oznacza w ogólności zmienną złożoną. Otrzymamy wtedy :

$$(22)\quad \begin{cases} \text{łuk wst}(\zeta) = i \lg\left[\sqrt{1+(\zeta i)^2} - \zeta i\right]. \\ \text{łuk dos}(\zeta) = \frac{\pi}{2} + i\lg\left[\sqrt{1+(\zeta i)^2} + \zeta i\right]. \end{cases}$$

Wzory (21) i (22) odpowiadają wzorom (22) i (23) § 16.

Skorzystamy z pierwszego ze wzorów (21). Wiemy że :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{łuk wst}\, t + C, \qquad \text{i że}$$

$$(\alpha)\quad \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \lg\left[\sqrt{1+t^2}+t\right] + C,$$

z drugiéj znowu strony :

$$(\beta)\quad \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{i}\int \frac{d(ti)}{\sqrt{1-(ti)^2}} = -\,i\ \text{łuk wst}(ti) + C.$$

Pierwszy z wzorów (21) pokazuje, że drugie strony równań (α) i (β) są jednoznaczne.

Gdybyśmy chcieli znaleźć wyrażenia na inne funkcye kołowe odwrotne, należałoby postępować w podobny sposób, jak przy wstawie i dostawie. Dla funkcyi odwrotnéj stycznéj otrzymalibyśmy :

$$\text{Łuk st}(\xi+\eta i) = \text{Łuk st}\left(\frac{2\xi}{1-\xi^2-\eta^2-Z}\right) + i\,\frac{1}{2}\lg\left(\frac{\xi^2+(1+\eta)^2-Z}{Z-(1-\eta)^2-\xi^2}\right)$$

gdzie
$$Z = \sqrt{(1+\xi^2+\eta^2)^2 - 4\eta^2}.$$

Zakładając w tych wzorach $\xi = 0$, otrzymujemy :

$$(23)\quad \begin{cases} \text{gdy } \eta^2 < 1, \quad \text{łuk st}\,\eta i = i.\frac{1}{2}\lg\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right) \\ \text{gdy } \eta^2 > 1, \quad \text{łuk st}\,\eta i = \pm\frac{\pi}{2} + i\,\frac{1}{2}\lg\left(\frac{\eta+1}{\eta-1}\right)(*). \end{cases}$$

Piszemy w drugim wzorze znak + lub — stosownie do tego, czy $\xi = 0$ jest granicą malejących ilości dodatnych czy też rosnących odjemnych.

Na mocy wzorów ostatnio otrzymanych, można dowieść tożsamość całek :

$$\int \frac{dt}{1-it^2} \quad \text{i} \quad \int \frac{dt}{1+(ti)^2}.$$

§ 22. Znaczenie ilości złożonych w Matematyce. — Ilości geometryczne. Należałoby

(*) Żadnego z wzorów (23) rozciągnąć do ogólnego przypadku nie można, bo w żadnym z nich η nie jest dowolne, mylny więc jest wzór : łuk st$z = i\,\frac{1}{2}\lg\left[\frac{1-zi}{1+zi}\right]$ dla złożonego z, w niektórych dziełach podawany.

nam teraz zająć się różniczkowaniem i całkowaniem funkcyj zmiennéj złożonéj, ale ponieważ w téj części nauki najdogodniejszém a nawet prawie koniecznėm jest używać znaków ogólnych, co znowu wymaga ogólniejszych teoryj : pomieścimy więc to w części drugiéj. Tutaj zaś zrobimy kilka uwag o znaczeniu ilości złożonych w matematyce i podamy teoryę Cauchy'ego tak zwanych ilości geometrycznych.

Zwróćmy najpierw uwagę na to, że nie można uważać ilości złożonych za symbole algebraiczne tego samego rodzaju, co ilości odjemne, opierając się na tém, że do jednych i drugich dochodzimy przez rozwiązywanie działań odwrotnych działaniom prostym. Chociaż bowiem wyciąganie pierwiastków kwadratowych doprowadza nas do ilości urojonych, to jednak nie należy zapatrywać się na to tak samo, jak gdy odejmowanie doprowadza nas do ilości odjemnych : widzieliśmy już, że bezwzględne upodobnienie ilości urojonych ilościom pierwiastkowym prowadzi do błędów, a nadto do ilości odjemnych dojść możemy wprost z życia praktycznego, gdy zauważymy dwa rodzaje wielkości, zupełnie sobie przeciwnych i wzajem się znoszących; i dlatego ilości odjemne oznaczają w ogólności ilości rzeczywiście istniejące, gdy tymczasem ilości złożone są czysto symbolicznemi wyrażeniami, nieoznaczającemi żadnych wielkości. Wypadki odjemne mogą być w *pewnych zagadnieniach* niemożliwe, podobnie jak i ułamkowe, ilości urojone i złożone, w jakikolwiek sposób wystąpią, *zawsze* oznaczają niemożliwość albo rzeczy szukanych albo złożonych (*).

Pomimo jednak tego zajmujemy się niemi; spostrzegamy, że ilości złożone, wypadające dla zadość uczynienia związkom między ilościami rzeczywistemi, mają to do siebie, iż często przez pewne obroty rachunku doprowadzają nas znowuż do wypadków rzeczywistych. W ten sposób, przyjąwszy ilości złożone i mające prawa postępowania z niemi, nie jesteśmy zmuszeni w przeróbkach matematycznych zatrzymywać się za pierwszém spotkaniem ilości urojonéj albo złożonéj : możemy prowadzić je daléj, a zdarzyć się może, że ostateczny wypadek, o który nam właśnie chodzi, będzie rzeczywisty. Prócz tego równania między ilościami złożonemi mogą być często z wielką dogodnością użyte w dowodzeniu rozmaitych twierdzeń, i w tych przypadkach można powiedzieć, jak Cauchy, że symbol $\sqrt{-1}$ jest pewnego rodzaju narzędziem, instrumentem rachunkowym. Ale nietylko te korzyści osięgamy z wprowadzenia ilości złożonych. Badając funkcye zmiennéj złożnéj dochodzimy do ogólnych twierdzeń, do lepszego zrozumienia natury funkcyj, i nadto otwieramy sobie obszerną drogę do badania nowych funkcyj, które przy uważaniu tylko zmiennéj rzeczywistéj niejako nam się przedstawiają. Poznamy to w części drugiéj; z tego zaś, cośmy tu powiedzieli (pomijając teoryę równań algebraicznych), widzimy że własności i związki między zbadanemi prostemi funkcyami przestępnemi dopiero przy zmiennéj złożonéj jasno się pokazują; nadto funkcye ich odwrotne są, można powiedzieć, wyczerpane przez wprowadzenie zmiennéj złożonéj, możemy je wtedy uważać przy wszelkiéj wartości zmiennéj.

Te ostatnie względy naprowadziły na myśl uważania ilości złożonych za jakieś ogólniejsze ilości, w których jakby naturze już leży to, że one wyczerpią funkcyę, i t. p. Niektórzy matematycy chcąc wytłomaczyć tę ogólność ilości złożonych, starali się dowieść, że za nową jednostkę właśnie pierwiastek z odjemnéj jedności przyjąć należy.

Zanim poznamy to rozumowanie, powiemy tu, że wprowadzając je tak, jakeśmy w § 2 wprowadzili, ogólności ich a priori wywnioskować nie można, t. j. nie można było przewidywać, że $\lg a$

(*) Jeżeli, według znanego wzoru, obliczać będziemy powierzchnię trójkąta znając trzy jego boki, w przypuszczeniu, że jeden z boków większy jest od summy dwóch pozostałych, otrzymamy ilość urojoną, która w tym razie oznacza niemożliwość założenia, — albowiem gdyby trójkąt był możliwy, miałby pewną powierzchnię.

gdy $a < 0$, albo łuk wst b gdy $b > 1$, przywiodą się do takich właśnie symbolów, w które wchodzi $\sqrt{-1}$: do tego doprowadziły rachunki.

Dla uzasadnienia ogólności ilości złożonych Gauss rozumuje w ten sposób (*) : Jeżeli porównywamy z sobą przedmioty, które ustawić możemy w szereg np :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

w ten sposób, że przejście od A do B jest niejako równoważne przejściu od B do C i t. d, to wówczas przejścia od C do B i od B do A będą także sobie równoważne i wprost przeciwne przejściom poprzednio uważanym. Jeżeli więc przejście pierwszego rodzaju przedstawione będzie przez $+1$, to przejście rodzaju drugiego przedstawić należy przez -1. Przykładem takiego szeregu jest szereg liczb całkowitych.

Jeżeli teraz uważamy przedmioty takie że nie można ustawić ich w szereg pojedyńczy, ale w szereg szeregów :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\ldots\ldots & \mathrm{A}'' & \mathrm{B}'' & \mathrm{C}'' & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \mathrm{A}' & \mathrm{B}' & \mathrm{C}' & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \ldots\ldots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

to wówczas koniecznie inaczéj powinno się przedstawić przejście od pewnego przedmiotu do następującego w szeregu poziomym, a inaczéj w szeregu pionowym. Jeżeli dla szeregów poziomych przejścia przedstawione będą przez $+1$, i -1, to dla szeregów pionowych przez np. $+i$ i $-i$: przejście od pewnego przedmiotu do dowolnie wybranego innego, składa się także z pewnéj liczby przejść $+1$ lub -1, i z pewnéj liczby przejść $+i$ lub $-i$.

Tu symbol i pozostał zupełnie nieoznaczony : wnioskujemy jednak, że taka grupa przedmiotów ma za geometryczny obraz płaszczyznę : z uważania więc położenia punktu na płaszczyznie dojść będziemy mogli do oznaczenia symbolu i. Do tego posłuży właśnie teorya Cauchy'ego ilości geometrycznych (**).

Obierzmy na płaszczyznie punkt stały O, i kierunek Ox.

Położenie punktu M zależy od długości linii OM, którą nazwiemy r, i od rozwartości kąta MOx

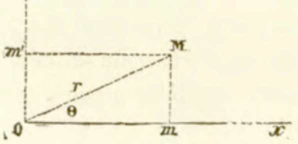

Fig. 7.

który nazwiemy θ. Tę zależność oznaczmy symbolem

$$r_\theta,$$

(*) Göttinger, gelehrte Anzeigen, 1831.
(**) Exercices d'Anal. et de Ph. matém.

jest to właśnie ilość geometryczna. Dla upodobnienia zaś tych uważań poprzednim, załóżmy że r_0 przedstawia wielkość liczbową r, a r_π wielkość $-r$.

Podamy teraz prawidło na dodawanie i mnożenie dwóch ilości geometrycznych. Summa dwóch ilości r_θ i $r'_{\theta'}$ powinna tak powstać z r_θ jak $r'_{\theta'}$ powstało z zera: zaś $r'_{\theta'}$ powstało z zera, t. j. z punktu O przez odsunięcie się od niego na odległość r' i odchylenie téj odległości od osi Ox na kąt θ'. Powtarzając to działanie od punktu $M(r_\theta)$ spostrzeżemy, że punkt, będący summą dwóch innych, jest trzecim wierzchołkiem trójkąta wystawionego na promieniach wodzących tych punktów.

Uważmy daléj, że iloczyn dwóch ilości r_θ i $r'_{\theta'}$, powinien tak powstać z r_θ jak $r'_{\theta'}$ powstało z jedności. Jedność jest to punkt na osi Ox leżący w odległości od O równéj jedności; ażeby z niego przejść do $r'_{\theta'}$ należy zwiększyć jéj promień wodzący w stosunku od $1:r'$ i odchylić go od jego pierwotnego położenia o kąt θ'. Jeżeli zaś to uskutecznimy z punktem r_θ, to spostrzeżemy że będzie:

$$r_\theta \times r'_{\theta'} = (rr')_{\theta+\theta'},$$

zkąd bezpośrednio wypada:

$$(r_\theta)^2 = (r^2)_{2\theta}.$$

Zobaczmy teraz jaki na mocy tego kształt nadać można wyrażeniu r_θ.

Spostrzegamy najpierw, że na mocy prawidła na dodawanie, punkt M uważać można za summę dwóch: m i m'. Można więc napisać:

$$r_\theta = (r\cos\theta)_0 + (r\sin\theta)_{\frac{\pi}{2}}.$$

Ponieważ zaś z prawidła na mnożenie wynika, że $R_t = R1_t$, przeto, pamiętając na znaczenie symbolu R_0, napiszemy:

$$r_\theta = r\cos\theta + (r\sin\theta)1_{\frac{\pi}{2}}.$$

Pozostaje nam znaleźć jeszcze wyrażenie analityczne ilości $1_{\frac{\pi}{2}}$. Uważmy że:

$$(1_{\frac{\pi}{2}})^2 = 1_\pi = -1,$$

zkąd

$$1_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}.$$

A właśnie $1_{\frac{\pi}{2}}$ odpowiada owemu i Gauss'a.

W ten sposób wykazaném zostało, że chcąc uważać ilości w ogólniejszym zakresie, za nową jednostkę wybieramy $\sqrt{-1}$, nie dlatego, że był to pierwszy spotkany przez nas symbol niesprowadzający się do znanych ilości, ale dla tego, że taki właśnie symbol odpowiada temu uważaniu.

Ilości złożone znane najpierw były matematykom włoskim w XVI wieku, którzy zajmowali się równaniami algebraicznemi. Cardano, który podał znany wzór na rozwiązywanie równań stopnia 3go wspomina o nich, ale je odrzuca. Wallis w 1673 roku pierwszy nazwał je urojonemi, niemożliwemi.

W ogólności w przeszłych wiekach mało do nich przywiązywano uwagi, a zajmowanie się niemi uważono za rodzaj zabawki; w ostatnich dopiero czasach zrozumiano ich ważność w matematyce, za pierwszego zaś twórcę ogólnej teoryi funkcyi zmiennéj złożonéj, tak jak my ją dziś pojmujemy, uważać należy Cauchy'ego.

CZĘŚĆ II

I. OGÓLNE WIADOMOSCI O FUNKCYI ZMIENNÉJ ZŁOŻONÉJ I O JÉJ POCHODNÉJ.

§ **23. Własność charakterystyczna.** W pierwszéj części widzieliśmy, że wszystkie znane nam funkcye proste, gdy w nich zamiast zmiennéj rzeczywistéj, podstawimy zmienną złożoną:

(1) $$z = x + yi,$$

dają się sprowadzać do kształtu normalnego

(2) $$\varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

gdzie $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ przybierają wartości tylko rzeczywiste dla wszelkich wartości rzeczywistych zmiennych x i y. Ponieważ zaś wszelkie inne funkcye powstają z połączenia funkcyi prostych przeto:

Każda funkcya zmiennéj złożonéj może być przedstawianą w kształcie normalnym (2).

Możemy teraz zapytać się, czy i na odwrót wyrażenie (2) przedstawia nam zawsze funkcyę zmiennéj złożonéj. Ażeby na to pytanie odpowiedzieć, zauważmy że tak wyrażenie (1) jak (2) uważać możemy jako funkcyę dwóch zmiennych x i y, uważając czynnik i za ilość stałą nieoznaczoną, i dowiedziemy *twierdzenia pomocniczego:*

Ażeby funkcya dwóch zmiennych: $F(x, y)$ *była funkcyą drugiéj funkcyi tychże zmiennych* $f(x, y)$, *warunkiem koniecznym i wystarczającym jest aby:*

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Warunek ten jest konieczny, bo jeżeli ma być $F = \varphi(f)$, to:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d\varphi}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d\varphi}{df} \cdot \frac{\partial f}{\partial y};$$

mnożąc pierwsze równania przez $\frac{\partial f}{\partial y}$, drugie przez $\frac{\partial f}{\partial x}$, i odejmując drugie od pierwszego, otrzymamy żądany warunek.

Jest on także wystarczającym: gdyby bowiem F nie dało się wyrazić przez samo f, to zawsze wyrazić by je można było przez F i jedną ze zmiennych x lub y. Przypuśćmy, że będzie: $F = \Psi(x, f)$ (*), różniczkując ostatnie równanie: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x}$, porównawszy zaś to z równaniem: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$ wypadającém przy algebraiczném rozwiązaniu założonego warunku względem $\frac{\partial F}{\partial x}$, widzimy, że $\frac{\partial \Psi}{\partial f} = 0$, co znaczy, że F tylko od samego f zależy.

(*) Mechanicznie się to przeprowadza w ten sposób: z równania: $f = f(x, y)$, wypada: $y = f(x, f)$; tę wartość na y podstawiamy w równanie: $F = F(x, y)$.

Stosując to twierdzenie do naszego przypadku, w którym (1) jest $f(x, y)$, a (2) jest $F(x, y)$, otrzymamy:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)i - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0,$$

co przez rozdzielenie części rzeczywistych i urojonych, rozpada się na dwa warunki:

(3)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Równania (3) *przedstawiają warunek, pod którym wyrażenie* (2) *można uważać za funkcyę zmiennéj złożonéj* (1), i naodwrót: *Normalny kształt funkcyi zmiennéj złożonéj zawsze zadość czyni równaniom warunkowym* (3).

Własność funkcyi zmiennéj złożonéj wyrażoną równaniami (3) nazywamy charakterystyczną własnością funkcyi zmiennéj złożonéj.

Powiemy jeszcze słów kilka o znaczeniu tej własności:

Wyrażenie (2) zależące od x i y, zależy także od z, ponieważ, gdy z się zmieni, musi się zmienić x i y, albo przynajmniéj jedno z nich. Ale nam chodzi tu o to, czy (2) zależy bezpośrednio od z, to jest czy (2) nie zmieni się, gdy z zostanie to samo, chociaż w (2) za x i z podstawimy odmienne wartości, np. $x' = x + \varepsilon i$, $y' = y - \varepsilon$, przy których:

$$z' = x' + y'i = x + yi = z.$$

Szukając warunków, pod którymi przy takiem podstawieniu wyrażenie (2) nie ulega zmianie, można nawet dojść do równań (3) (*).

Jeżeli (2) bezpośrednio od z zależy, można je analitycznie przez samo z wyrazić; i wtedy gdy w (2) położymy $y = 0$, a w otrzymanéj ztąd funkcyi x, zamiast x napiszemy z, otrzymamy analityczne wyrażenie funkcyi (2) przez samo z; gdy zaś w to ostatnie podstawimy: $z = x + yi$, i sprowadzimy funkcyę do kształtu normalnego, to wrócimy się do równania (2).

Łatwo przekonać się można, że poznane w części pierwszéj normalne kształty funkcyi prostych zadość czynią warunkowi (3).

Gdyby zaś było dane wyrażenie:

$$x^2 + y^2 + 2(x + y)i,$$

to ono, jako nieczyniące zadość temu warunkowi, nie jest funkcyą zmiennéj złożonéj i nie da się analitycznie przez samo z wyrazić. Można tu także sprawdzić ostatnio zrobioną uwagę, i przekonamy się że kładąc w tém wyrażeniu $y = 0$, i uskuteczniając wiadome podstawienia, nie powrócimy do danego wyrażenia.

Gdyby zmiana złożona przedstawiona była w kształcie trygonometrycznym:

(1') $$r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

(*) Neumann: *Vorlesungen über Riemann's Theorie.*

a funkcya w kształcie:

(2') $$\varphi(r,\theta)+i\psi(r,\theta),$$

to stosując wyżéj dowiedzione twierdzenie, po rozdzieleniu części rzeczywistych i urojonych otrzymalibyśmy:

$$\frac{\partial\varphi}{d\theta}\operatorname{dos}\theta-\frac{d\psi}{d\theta}\operatorname{wst}\theta=-r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\operatorname{wst}\theta-r\frac{d\psi}{dr}\operatorname{dos}\theta,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\operatorname{wst}\theta+\frac{d\psi}{d\theta}\operatorname{dos}\theta=r\frac{d\varphi}{dr}\operatorname{dos}\theta-r\frac{\partial\psi}{\partial r}\operatorname{wst}\theta,$$

mnożąc odpowiednio te równania, raz przez $\operatorname{dos}\theta$ i $\operatorname{wst}\theta$, drugi raz przez $-\operatorname{wst}\theta$ i $\operatorname{dos}\theta$, i dodając otrzymamy:

(3') $$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}&=-r\frac{\partial\psi}{\partial r}\\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta}&=r\frac{\partial\varphi}{\partial r},\end{aligned}\right.$$

równania odpowiadające równaniom (3).

Sprawdzić można, że podane w części pierwszéj wyrażenia kształtu (2') zadość czynią warunkom (3').

Uwaga. W dalszym ciągu używać będziemy następujących oznaczeń: funkcyę zmiennéj złożonéj znaczyć będziemy literą w, część rzeczywistą normalnego wyrażenia téj funkcyi znaczyć będziemy u, a urojoną v, tak iż będzie:

$$f(z)=w=u+vi.$$

§ 24. **O pochodnej.** Określiwszy w ten sposób funkcyę zmiennéj złożonéj, już nie spotykamy żadnych trudności w określeniu pochodnéj: ponieważ funkcya zmiennéj złożonéj od téj tylko zmiennéj zależy, przeto granica, do któréj zbliża się stosunek pomiędzy odpowiadającymi sobie przyrostami funkcyi i zmiennéj, gdy przyrost zmiennéj zbliża się do zera, granica ta nazywa się pochodną funkcyi zmiennéj złożonéj wziętą względem tejże zmiennéj, i znaczy się $\frac{dw}{dz}$.

Aby się rzecz jaśniéj przedstawiła, uważmy funkcyę w kształcie normalnym i szukajmy stosunku między odpowiadającymi sobie przyrostami:

$$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$$

$$\Delta w=\Delta u+i\Delta v=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+\varepsilon,$$

gdzie ε przy nieskończenie małych Δy i Δx, jest wyższego od nich stopnia nieskończenie-małości. Będzie:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\Delta y}{\Delta x}+\varepsilon\frac{1}{\Delta x}}{1+i\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

przechodząc zaś do granicy:

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}}{1+i\frac{dy}{dx}}, \tag{4}$$

widzimy, że wyrażenie to zależy od $\frac{dy}{dx}$; ma więc dla każdéj wartości z nieskończenie wiele wartości, zależnie od tego, jaki był przyrost z, który uważamy w granicy, jeżeli jednak uwzględnimy równania (3), strona druga równanie (4) będzie skracalną przez $1+i\frac{dy}{dx}$, i przekonamy się *że funkcya zmiennéj złożonéj ma jedną tylko pochodną*. Zresztą łatwo to było przewidzieć, bo jeżeli funkcya zależy tylko od $x+yi$, to przyrost jéj zależy tylko od $\Delta x+i\Delta y$ a nie od Δx i od Δy oddzielnie. Nadto łatwo widzieć, że poszukując warunków, aby (4) miało jedną tylko wartość znowuż wpadniemy na równania (3).

Funkcya zmiennéj złożonéj ma odnośnie do swojéj pochodnéj ciekawe własności. I tak, łącząc równania (3) z równaniem (4), będziemy mogli napisać:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dw}{dz}&=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{dw}{dz}&=-\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right. \tag{6}$$

albo inaczéj:

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial w}{\partial x}=i\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{6'}$$

co znaczy, że zupełna pochodna funkcyi wyraża się przez pochodną cząstkową.

Równania (6) dają nam normalny kształt pochodnéj, i z łatwością sprawdzić możemy, że drugie strony równań (6) zadość czynią równaniom (3), co znaczy że pochodna jest także funkcyą zmiennéj złożonéj.

Różniczkując cząstkowo równania (3) raz względem x, drugi raz względem y, otrzymamy:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}&=0,\end{aligned}\right. \tag{7}$$

równania pokazujące że ani u ani v nie mogą być funkcyami zupełnie dowolnemi.

Różniczkowanie równań (3), (6) i (7) doprowadziłoby nas do związków między pochodnemi wyższego rzędu funkcyi w, u, v, ponieważ jednak związki te nie są ważne, więc ich nie podajemy.

Pytamy się teraz, czy pochodne funkcyj zmiennéj złożonéj, oznaczonych według praw w części pierwszéj podanych, symbolami używanymi przy funkcyach rzeczywistych, czy dla tych funkcyi pochodne wyrażają się tymiż samymi symbolami co pochodne odpowiadających funkcyi zmiennéj rzeczywistéj?

Samo przez się rozumie się, że należy tego dowieść tylko dla funkcyi prostych: można zaś dowieść wychodząc z kształtu normalnego i stosując jeden z wzorów (6). Można to także odrazu wyczytać z wzorów (6'), które pokazują, że pochodną można brać tak, jakby tylko jedna część zmiennéj złożonéj x albo yi była zmienną. Ze względu jednak na ważność tej kwestyi, dowiedziemy jéj ogólnie i bezpośrednio, niezależnie od wzorów (6').

Ponieważ pochodna jest zawsze taka sama; niezależnie od tego, jakie przyrosty zmiennéj uważamy, przeto możemy szukać pochodnéj jako granicy stosunku odpowiadających sobie przyrostów pewnego szczególnego rodzaju, np. takich w którym y związane jest z x równaniem: $y = \chi(x)$, gdzie χ oznacza dowolnie wybraną funkcyę. Wtedy będzie: $w = f[x + i\chi(x)]$, i zależeć będzie od jednéj tylko zmiennéj. Czynnik i uważany za nieoznaczoną ilość stałą: i postępujemy z uważaną funkcyą, jak z funkcyami zmiennéj rzeczywistéj. Uważamy że:

$$\Delta z = [1 + i\chi'(x)]dx + \varepsilon,$$

$$\Delta w = f'[x + i\chi(y)].[1 + i\chi'(x)]\Delta x + \varepsilon',$$

biorąc stosunek i przechodząc do granicy, otrzymamy:

$$\mathrm{gr}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \frac{dw}{dz} = f'[x + i\chi(x)] = f'(z),$$

a f' oznacza właśnie ten symbol, którym znaczy się pochodna funkcyi f, przy zmiennych rzeczywistych.

Łatwo spostrzedz, że wywodowi téj prawdy z pierwszego z równań (6') odpowiada w naszém przypuszczeniu $y =$ stałéj.

Uwaga. Cauchy a zanim francuzcy matematycy postępują tu inaczéj. Wyrażenie (2) Cauchy nazywa funkcyą zmiennéj złożonéj. Do warunkowych równań (3) dochodzi on szukając, kiedy funkcya ma tylko jedną pochodną, t. j. jest *monogène*. Tak więc gdy my mówimy *funkcya zmiennéj złożonéj*, domyślając się tém samém wypełnienia równań (3); Cauchy mówił: *fonction monogène*. Niemieccy autorowie, tak jak my, rzecz tę uważają, i jest to w saméj rzeczy uważanie konsekwentniejsze. Trzeba jednak pamiętać iż dowód, że pewne wyrażenie, zmieniające się wraz z z, ma jedną tylko pochodną, jest zarazem dowodem, że ono tylko od z zależy, i da się przez samo z analitycznie wyrazić.

§ 25. **Różniczkowanie szeregu złożonego uporządkowanego według rosnących potęg zmiennéj złożonéj.** Dowiedziemy najpierw, że szereg otrzymany przez różniczkowanie wyrazów szeregu zbieżnego w pewnym okręgu, jest szeregiem zbieżnym w tymże okręgu. Niech będzie szereg:

$$(\alpha) \qquad m_0 + m_1 z + m_2 z^2 + \ldots,$$

zbieżny w okręgu o promieniu R, powiadamy że szereg:

$$(\beta) \qquad m_1 + 2m_2 z + 3m_3 z^2 + \ldots,$$

będzie w tymże okręgu zbieżny.

Jeżeli bowiem $r < \mathrm{R}$, to szereg rzeczywisty o znakach jednakowych:

$$1 + 2\frac{r}{\mathrm{R}} + 3\frac{r^2}{\mathrm{R}^2} + \ldots$$

jest zbieżny, gdyż jakiekolwiek będzie r, możemy wybrać n tak wielkie, aby stosunek dwóch następujących po sobie wyrazów: $\frac{n+1}{n}\,\frac{r}{R}=\frac{r}{R}+\frac{1}{n}\,\frac{r}{R}$, był mniejszym od jedności.

Mnożąc wyrazy tego szeregu przez ilości skończone:

$$a_1,\ a_2 R,\ a_3 R^n,\ \ldots, \quad \text{gdzie } a_\lambda = \mathrm{mod}[m_\lambda],$$

otrzymamy szereg zbieżny, który będzie szeregiem modułów dla szeregu (β): zkąd wypada, że szereg (β) jest zbieżnym w okręgu o promieniu R.

Zwracamy tylko uwagę, że dowodzenie to tyczy się tylko punktów wewnątrz okręgu leżących. Zbieżność na okręgu szeregu (α) zupełnie nie pociąga za sobą zbieżności szeregu (β), bo chociaż jest: $\mathrm{gr}_{n=\infty}[a_n R^n]=0$, może nie być: $\mathrm{gr}_{n=}[n.a_n R^{n-1}]=0$; spostrzedz jednak łatwo, że jeżeli drugie równanie ma miejsce, to i pierwsze także ma miejsce.

Oczywiście szereg, otrzymany przez różniczkowanie szeregu (β), będzie zbieżnym w tymże okręgu, tak że: ilekolwiek razy zróżniczkujemy wyrazy szeregu (α), zawsze szereg ztąd otrzymany, będzie zbieżnym w punkcie o promieniu R.

Należy nam teraz dowieść, że w saméj rzeczy szereg (β) jest pochodną szeregu (α), t. j. granicą, do któréj zbliża się stosunek odpowiadających sobie przyrostów szeregu i zmiennéj.

Nadajmy zmiennéj z przyrost Δz, będzie:

$$f(z+\Delta z) = m_0 + m_1(z+\Delta z) + m_2(z+\Delta z)^2 + \ldots,$$

ponieważ szereg otrzymany z powyżéj napisanego, po rozwinięciu potęg dwumianów w pierwszych n wyrazach, będzie tego rodzaju, że odpowiadający mu szereg modułów będzie zbieżnym (przypuszczamy bowiem że $z+\Delta z$ leży w okręgu zbieżności), możemy więc w nim zmienić porządek wyrazów, i uporządkować to rozwinięcie według rosnących potęg Δz, i napisać:

$$(\gamma)\quad \begin{cases} f(z+\Delta z) = [m_0 + (m_1 z + \ldots + m_{n-1} z^{n-1}] + [m_1 + 2m_2 z + \ldots (n-1) m_{n-1} z^{n-2}]\dfrac{\Delta z}{1} \\ \qquad + [2m_2 + \ldots + (n-1(n-2) m_{n-1} z^{n-3}]\dfrac{\Delta^2 z}{1.2} + \ldots + [\ldots]\dfrac{\Delta z^{n-1}}{(n-1)!} + R_n \end{cases}$$

gdzie R_n oznacza summę pozostałych wyrazów.

Ponieważ we wzorze (γ) n może być dowolnie wielkie, możemy więc zawnioskować, że i wtedy jeszcze otrzymamy wzór prawdziwy, gdy przejdziemy do granicy, to jest rozwiniemy potęgi dwumianów we wszystkich wyrazach, przezco otrzymamy szereg nieskończony, według potęg Δz uporządkowany, w którym każdy współczynnik będzie szeregiem nieskończonym, otrzymanym przez zróżniczkowanie wyrazów poprzedzającego współczynnika. Oznaczywszy więc dla krótkości szereg otrzymany przez zróżniczkowanie λ razy wyrazów szeregu (α) przez f_λ, napiszemy rozwinięcie:

$$(\delta)\qquad f(z+\Delta z) = f(z) + f_1(z)\frac{\Delta z}{1} + f_2(z)\frac{\Delta z}{1.2} + \ldots + f_{n-1}(z)\frac{\Delta z^{n-1}}{(n-1)!} + R'_n.$$

Można zresztą z zupełną ścisłością udowodnić, że rozwinięcie (δ) jest prawdziwe. Oznaczmy w tém rozwinięciu summę wyrazów następujących po n^{tym} przez R'_n, a summę wyrazów następujących po n^{tym} we współczynniku f_λ oznaczmy przez $\rho_{n,\lambda}$. Jeżeli wzór (δ) jest prawdziwy, to powinno wyrażenie:

$$(\varepsilon) \qquad R_n - R'_n - \rho_{n,0} - \rho_{n,1}\frac{\Delta z}{1} - \ldots - \rho_{n,n-1}\frac{\Delta z^{n-1}}{(n-1)!}$$

być zerem, co wypada z porównania szeregów (γ) i (δ).

Przy dostatecznie wielkiem n ilości: R_n, $\rho_{n,0} \ldots \rho_{n,n-1}$, będą dowolnie małe: dowieść łatwo, że R'_n niem będzie. Uważmy bowiem dwa szeregi:

$$(\gamma') \qquad [a_0 + \ldots + a_{n-1}r^{n-1}] + [a_1 + \ldots + (n-1)a_{n-1}r^{n-2}]\frac{\Delta r}{1} + \ldots + [\ldots]\frac{\Delta r^{n-1}}{(n-1)!} + [R]_n,$$

$$(\delta') \qquad [a_0 + a_1 r + \ldots] + [a_1 + 2a_2 r + \ldots]\frac{\Delta r}{1} + \ldots + [\ldots]\frac{\Delta r^{n-1}}{(n-1)!} + [R']_n,$$

gdzie $a_0, a_1 \ldots r$ i Δr oznaczają moduły $m_0, m_1 \ldots z$ i Δz.

Łatwo spostrzedz związek między drugiemi stronami wzorów (γ) i (δ) a szeregami (γ') i (δ'): z tego zaś związku wypada:

$$\mathrm{mod}[R_n] \leqq [R]_n, \qquad \mathrm{mod}[R'_n] \leqq [R']_n,$$

ponieważ z jednéj strony $[R]_n > [R']_n$, co łatwo spostrzedz pamiętając, że w szeregach (γ') i (δ') wszystkie wyrazy są dodatne, a z drugiéj strony R_n przy dostatecznie wielkiém n, jest dowolnie małe, jest niém przeto i R'_n. Wyrażenie więc (ε) może być dowolnie małe, musi zatém być zerem (*).

Ze wzoru (δ) bezpośrednio wypada:

$$\mathrm{gr}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{df}{dz} = f_1(z),$$

co pokazuje, że $f_1(z)$ jest pochodną szeregu (α). Można więc zamiast f_1 pisać f', i w ogólności f_λ pisać $f^{(\lambda)}$, rozumując pod $f^{(\lambda)}$ pochodną funkcyi f rzędu λ.

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie:

Szereg nieskończony, uporządkowany według rosnących potęg zmiennéj, można w okręgu zbieżności różniczkować ilekolwiek razy.

§ **26. Geometryczny obraz funkcyi, ciągłość funkcyi.** Musimy najpierw określić, co jest obrazem geometrycznym funkcyi zmiennéj złożonéj. Wiemy już jak zmienną z przedstawić można geometrycznie przez punkt na płaszczyznie. Jeżeli teraz z tego punktu wyprowadzimy prostopadłą do płaszczyzny i na niéj co do wielkości i kierunku odetniemy wartości przybrane przez funkcye u i v, gdy w nich podstawimy za x i y wartości odpowiadające uważanemu z, to układ tych dwóch punktów

(*) Ostatnie zawnioskowanie wymaga rozjaśnienia. Właściwie, jeżeli pewna funkcya liczbowa $F(n)$ przy dostatecznie wielkiem n przybiera wartość dowolnie małą, to wnosimy, że w granicy staje się zerem: tu zaś wnieść można, że jest stale zerem. Ma to miejsce dlatego, że w uważanéj różnicy między szeregami (γ) i (δ) chodzi właśnie o wyrazy odpowiadające n nieskończenie wielkiemu, i rzecz można tak uważać: przypuśćmy, że dla $n = n_1$, $F(n_1)$ ma pewną wartość; możemy znaleźć n_2 (gdzie $n_2 > n_1$) takie, że $F(n_2)$ ma pewną jeszcze mniejszą wartość: ale $F(n_1) = F(n_2)$, bo summa wyrazów odłączonych od $F(n_1)$ aby przejść do $F(n_2)$ jest tożsamościowo równą zeru. Z tego widzimy, że wyrażenie (ε) jest dowolnie małe, niezależnie od wartości na n, i dlatego musi być stale równém zeru.

przedstawiać będzie wartość funkcyi w uważanym punkcie : geometrycznym zaś obrazem funkcyi będzie układ dwóch powierzchni będących miejscem geometrycznėm tych punktów, a które odpowiednio nazwiemy : (U) i (V).

Jeżeli do układu osi Ox i Oy przyłączymy trzecią Ot, to równaniem powierzchni (U) w tym prostokątnym układzie będzie : $t = u = \varphi(x, y)$; a powierzchni (V) : $t = v = \psi(x, y)$.

Oprócz tego sposobu geometrycznego przedstawienia, uważamy jeszcze następujący :

Do płaszczyzny (Z), na której wiadomym sposobem znaczymy wartości zmiennėj z, dołączamy drugą płaszczyznę (W), na której odpowiednim sposobem znaczymy wartości funkcyi : kreślimy układ osi prostokątnych Ou i Ov, a wartość funkcyi $u + vi$ oznaczoną będzie przez punkt, którego współrzędne są odpowiednio u i v. Tym sposobem punktowi na płaszczyznie (Z) odpowiadać będzie punkt na płaszczyznie (W).

Przy teoryi szeregów złożonych widzieliśmy, że ciągłość funkcyi zmiennėj złożonėj określa się w następujący sposób : *funkcya zmiennėj złożonėj jest ciągła, gdy dostatecznie małemu przyrostowi zmiennėj odpowiada dowolnie mały przyrost funkcyi*. Ażeby zaś przyrost funkcyi był dowolnie mały, potrzeba aby odpowiadające przyrosty funkcyj u i v były dowolnie małe, t. j. aby funkcye u i v były ciągłemi funkcyami zmiennych x i y. Ten warunek analityczny ma następujące geometryczne znaczenie : przy pierwszym sposobie przedstawienia, potrzeba, aby każda z powierzchni (U) i (V) całkowicie pokrywała płaszczyznę, nie miała odosobnionych części albo punktów. Przy drugim sposobie przedstawienia, znaczy to, aby krzywėj nieprzerwanėj nakreślonėj, na płaszczyznie (Z), odpowiadała takaż krzywa na płaszczyznie (W). Pokazuje to bezpośrednio, że jeżeli z zmienia się w sposób ciągły, bez przeskoków, to i w powinno się w ten sam sposób zmieniać.

Zobaczymy teraz jakie geometryczne znaczenie mają powyżėj wyprowadzone warunki. I tak jeżeli się odniesiemy do pierwszego sposobu geometrycznego przedstawienia funkcyi, to równania (7) pokazują, że powierzchnie (U) i (V) nie są w żadnym punkcie wypukło-wypukłe, ani wklęsło-wklęsłe, wskazujące ich bowiem są hyperbolami, co znaczy, że i krzywizna nie jest elliptyczną, tylko hyperboliczną.

Równania (3) mają także swoje znaczenie, które odnosi się do drugiego sposobu geometrycznego przedstawienia. Niech Z i W będą dwa odpowiadające sobie punkta na płaszczyznach (Z) i (W), a ds i dS dwa elementa odpowiadających sobie krzywych, zaczynające się w punktach Z i W : wtedy :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2, \qquad (dS)^2 = (du)^2 + (dv)^2,$$

albo inaczėj :

$$(dS)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)^2,$$

na mocy zaś równań (3) można napisać :

$$(dS)^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right](ds)^2,$$

zważywszy zaś, że pierwszy czynnik jest dla danego punktu ilością stałą, i oznaczywszy ją przez λ, można napisać :

$$dS = \lambda ds.$$

Wzór ten pokazuje proporcyonalność odpowiadających sobie dróg elementarnych, zkąd łatwo wywnioskować podobieństwo nieskończenie małych odpowiadających sobie trójkątów.

Gauss do tego podobieństwa dochodzi bezpośrednio. Uważmy, wychodząc z danego punktu, dwa przyrosty zmiennéj :

$$\Delta_1 z = \varepsilon_1 e^{\tau_1 i}, \qquad \Delta_2 z = \varepsilon_2 e^{\tau_2 i}.$$

Odpowiadające im przyrosty funkcyi będą :

$$\Delta_1 w = \eta_1 e^{\theta_1 i}, \qquad \Delta_2 w = \eta_2 e^{\theta_2 i}.$$

Stosunki między odpowiadającymi sobie przyrostami funkcyi i zmiennéj będą :

$$\frac{\eta_1}{\varepsilon_1} e^{(\theta_1 - \tau_1)i}, \qquad \frac{\eta_2}{\varepsilon_2} e^{(\theta_2 - \tau_2)i};$$

ażeby zaś funkcya miała jedną tylko pochodną, potrzeba aby w granicy było :

$$\frac{\eta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\eta_2}{\varepsilon_2}, \qquad \theta_1 - \tau_1 = \theta_2 - \tau_2,$$

albo :

$$\eta_1 : \eta_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2, \qquad \theta_2 - \theta_1 = \tau_2 - \tau_1,$$

co właśnie jest warunkiem podobieństwa nieskończenie małych trójkątów.

Objaśnimy to na bardzo prostym przykładzie.

Uważmy funkcyę : $w = e^z$, tu : $u = e^x \operatorname{dos} y$, $v = e^x \operatorname{wst} y$.

Wyjdźmy z punktu $(x = a, y = o)$, i prowadźmy zmienną po dwóch drogach do siebie prostopadłych (*) : po osi Ox, po linii równoległéj do osi Oy. Na płaszczyznie (W) drodze Ox odpowiada oś Ou, drodze drugiéj odpowiada okrąg, którego równanie otrzymamy rugując y między równaniami : $u = e^a \operatorname{dos} y$, $v = e^a \operatorname{wst} y$.

Równanie tego okręgu będzie :

$$u^2 + v^2 = e^{2a},$$

styczna zaś doń w punkcie $(u = e^a, v = o)$, przedstawiająca kierunek elementu, będzie prostopadłą do osi Ou.

§ 27. **Funkcye wielowartościowe.** Funkcya zmiennéj złożonéj będzie jednowartościową wtedy, gdy jednéj wartości zmiennéj odpowiada jedna wartość funkcyi, gdy zaś jednéj wartości zmiennéj odpowiada dwie lub więcéj wartości funkcyi, funkcya nazywa się odpowiednio dwu lub wielowartościową.

Uważmy funkcyę $w = \sqrt{z - a}$, gdzie a przypuszczamy rzeczywiste, punkt więc A leżeć będzie na

(*) Wyrażając się w ten sposób, przenosimy się myślą do geometrycznego przedstawienia zmiennéj, analitycznie powiedzieć to należy : nadajemy zmiennéj kolejno wartości odpowiadające punktom na dwóch prostych do siebie prostopadłych.

osi Ox. Funkcya ta jest ogólnym wyrażeniem dwóch różnych funkcyj : jednéj odpowiadającéj znakowi $+$ przed pierwiastkiem, drugiéj odpowiadającéj znakowi $-$. Weźmy jedną z tych funkcyj :

$$w_1 = +\sqrt{z-a},$$

przy ograniczeniu się do zmiennych rzeczywistych, funkcya ta ma dla każdéj wartości z jedną tylko wartość, przy uważaniu jednak zmiennych złożonych rzecz ma się inaczéj, i zobaczymy, że wyszedłszy z jednego punktu i idąc do drugiego po dwóch różnych drogach, dojdziemy do tego drugiego punktu i różnemi wartościami funkcyi.

Dla uproszczenia zróbmy podstawienie :

$$z - a = z' = r(\mathrm{dos}\,\theta + \mathrm{i}\ \mathrm{wst}\,\theta),$$

co odpowiada odniesieniu zmiennéj do układu osi Ax i Ay', i prowadźmy zmienną z' od punktu B do C raz po drodze BMNPC, drugi raz po drodze BM'N'P'C. W punkcie B funkcya ma wartość $+\sqrt{b-a}$,

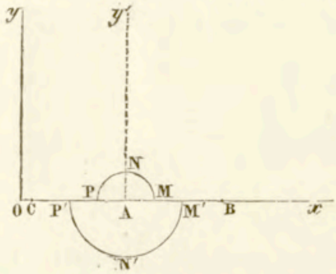

Fig. 8.

odpowiadającą $r = b - a$, $\theta = 0$, na części drogi BM, θ jest stale zerem, a r maleje od $b-a$ do $m-a$, tak że w punkcie M funkcya ma wartość $+\sqrt{m-a}$. Gdy zmienna z' przebiega półokrąg MNP, r się nie zmienia, a θ od zera rośnie do π, funkcya więc w punkcie P ma wartość :

$$+\sqrt{m-a}\left(\mathrm{dos}\frac{\pi}{2} + i\ \mathrm{wst}\frac{\pi}{2}\right), \text{ t. j. } +i\sqrt{m-a},$$

na drodze PC, θ się nie zmienia a r rośnie od $m-a$, albo $a-p$ do $a-c$, tak że wartość funkcyi C będzie $+i\sqrt{a-c}$.

W podobny sposób rozbierając przejście dróg : BM', M'N'P', P'C, znajdziemy, że funkcya w C przybierze wartość $-i\sqrt{a-c}$, t. j. drugą wartość, zawartą w ogólném wyrażeniu funkcyi. Przekonać się łatwo można, że gdy zmienna biegnie po okręgu z punktu A opisanym, funkcya wróciwszy do punktu wyjścia ma wartość ze znakiem przeciwnym; a znowuż gdy zmienna porusza się na części płaszczyzny niezawierającéj punktu A, to po każdéj drodze funkcya do danego punktu przychodzi z jedną i tą samą wartością. Punkt A jest tu rzeczywiście punktem osobliwym, bo w nim dwie, w ogólności różne funkcye : $w_1 = +\sqrt{z-a}$, i $w_2 = -\sqrt{z-a}$, objęte ogólnym wzorem $w = \sqrt{z-a}$, przybierają wartości jednakowe.

Podobnie rzecz się ma z funkcyą w_2.

Uważmy teraz funkcyę więcéj złożoną :

$$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} + \sqrt{z-c},$$

w któréj zawiera się sześć różnych funkcyi. Uważmy okrężenia punktu B, w którym z sześciu wartości (dwie grupy po trzy) jest tylko dwie różne : Położywszy :

$$\operatorname{dos}\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{wst}\frac{2\pi}{3} = h, \qquad \text{a} \qquad z - b = r(\operatorname{dos}\theta + i\operatorname{wst}\theta),$$

i przyjąwszy dla uproszczenia oznaczenie łatwe do odgadnięcia, sześć wartości będziemy mogli napisać:

$$w_1 = \frac{[A]^{\frac{1}{3}}}{[B]^{\frac{1}{3}}} + [C]^{\frac{1}{2}}, \qquad w_2 = \frac{[A]^{\frac{1}{3}}}{[B]^{\frac{1}{3}}h} + [C]^{\frac{1}{2}}, \qquad w_3 = \frac{[A]^{\frac{1}{3}}}{[B]^{\frac{1}{3}}h^2} + [C]^{\frac{1}{2}},$$

$$w_4 = \frac{[A]^{\frac{1}{3}}}{[B]^{\frac{1}{3}}} - [C]^{\frac{1}{2}}, \qquad w_5 = \frac{[A]^{\frac{1}{3}}}{[B]^{\frac{1}{3}}h} + [C]^{\frac{1}{3}}, \qquad w_6 = \frac{[A]^{\frac{1}{3}}}{[B]^{\frac{1}{3}}h^2} - [C]^{\frac{1}{2}}.$$

Zakreślmy z punktu B okrąg tak, aby on nie zawierał ani punktu A ani C, i prowadźmy zmienną z po tym okręgu : uważmy jak zmieniać się będzie funkcya w_1. Gdy zmienna z biegnie po okręgu, r się nie zmienia, a θ przyrasta o 2π, tak że po okrążeniu w_1 stanie się :

$$\frac{\left[b - a + r\left(\operatorname{dos}\overline{\theta + 2\pi} + i\operatorname{wst}\overline{\theta + 2\pi}\right)\right]^{\frac{1}{3}}}{r^{\frac{1}{3}}\left(\operatorname{dos}\frac{\theta + 2\pi}{3} + i\operatorname{wst}\frac{\theta + 2\pi}{3}\right)} + \left[b - c + r\left(\operatorname{dos}\overline{\theta + 2\pi} + i\operatorname{wst}\overline{\theta + 2\pi}\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

ponieważ wyrażenia, w które przeszły [A] i [C], należy zsummować przed wyciągnięciem z nich pierwiastka, przeto na przyrost rozwartości można nie zwracać uwagi, mianownik zaś przejdzie na $r^{\frac{1}{3}}\left(\operatorname{dos}\frac{\theta}{3} + i\operatorname{wst}\frac{\theta}{3}\right)h$, tak, że w_1 przejdzie na w_2.

Gdybyśmy jeszcze raz okrążyli punkt B, od wartości w_2 przeszlibyśmy do w_3, a okrążywszy raz trzeci, powrócilibyśmy do wartości w_1.

Przedstawiwszy w odpowiednim kształcie pierwiastki, łatwo przekonać się, że okrążenie punktu A, podobne sprawia zmiany w wartościach pierwiastków; tak że okrążenie punktów A i B albo obydwóch sprawia przemianę pomiędzy sobą wartości w grupach po trzy :

$$\begin{cases} w_1, \ w_2, \ w_3 \\ w_4, \ w_5, \ w_6 \end{cases}.$$

tak jednak, że okrążenia tych punktów nie przeprowadzają pierwiastków z jednéj grupy do drugiéj.

Okrążenie znowuż punktu C sprawia przejście wartości jedna na drugą w grupach po dwie :

$$\overbrace{w_1, \ w_4} \qquad \overbrace{w_2, \ w_5} \qquad \overbrace{w_3, w_5} \ (*).$$

Dotychczas rozumieliśmy tu okrężenia w kierunku dodatnym, t. j. w stronę rosnących rozwartości :

(*) Widzimy, że ostatecznie każda z uważanych sześciu funkcyj przybiera wszystkie wartości odpowiadające innym funkcyom. To już naprowadza nas na myśl, aby nie rozdzielać tych sześciu funkcyj, ale uważać jedną funkcyę w. w każdym punkcie sześciowartościową, i zamiast mówić wychodzimy z punktu z_0 uważając funkcyę w_4, wyrażać się : wychodzimy z punktu z_0 z wartością początkową funkcyi w równą w_4. W dalszym ciągu rzecz ta ostatecznie będzie zbadaną.

od dodatnego kierunku osi Ox ku dodatnemu kierunkowi osi Oy. Okrążenie w kierunku przeciwnym sprawia przejścia także w kierunku przeciwnym; zawsze jednak w porządku podstawienia kołowego. Jednakże niekażdy punkt, w którym kilka różnych wartości funkcyi stają się równemi, jest tego rodzaju, że gdy go zmienna okrąży, funkcya przybiera inną wartość. Np. dla funkcyi dwuwartościowéj: $w=(z-b)\sqrt{z-a}$, okrążenie punktu B nie zmienia wartości funkcyi, jak się zaraz o tém przekonamy. Kładąc bowiem: $z-b=r(\operatorname{dos}\theta+i\operatorname{wst}\theta)$ i wychodząc z wartością: $r(\operatorname{dos}\theta+i\operatorname{wst}\theta)$ $[b-a+r$ $(\operatorname{dos}\theta+i\operatorname{wst}\theta)]$, po okrążeniu w kierunku dodatnym doszlibyśmy do:

$$r\left(\operatorname{dos}\overline{\theta+2\pi}+i\operatorname{wst}\overline{\theta+2\pi}\right)\left[b-a+r(\operatorname{dos}\overline{\theta+2\pi}+i\operatorname{wst}\overline{\theta+2\pi})\right]^{\frac{1}{2}},$$

a dla téj saméj przyczyny co poprzednio, taka zmiana rozwartości w ilości podpierwiastkowéj nie zmienia pierwiastku.

Aby się niejako naocznie przekonać że w saméj rzeczy wyrażenie:

$$\left[b-a+r(\operatorname{dos}\theta+i\operatorname{wst}\theta)\right]^{\frac{1}{2}}$$

nie zmienia wartości przez okrążenie punktu B, uważmy geometrycznie zmiany ilości podpierwiastkowéj przy tém okrążeniu.

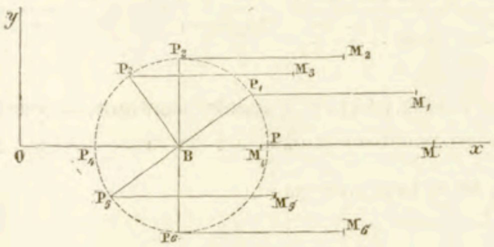

Fig. 9.

Dla uproszczenia, przypuśćmy że $a=o$, b jest ilością rzeczywistą dodatną, a początkowa wartość rozwartości jest zero.

Z punktu B promieniem $r=$ PB zakreślamy okrąg, odcinamy PM $=$ OB, a punkt M przedstawiać będzie ilość podpierwiastkową na początku drogi.

Odpowiednio rozwartościom: P_1Bx, P_2Bx, i t. d., punkta M_1, M_2 i t. d. przedstawiać będą ilość podpierwiastkową: ztąd widać, że rozwartość téj ilości najpierw rośnie od zera do M_2Bx (*), następnie maleje do zera (w położeniu M_4), potém staje się odjemną i maleje do M_6Bx, następnie znów rośnie do zera.

Gdybyśmy okrąg zakreślili tak, aby on objął w sobie punkt O, to wówczas rozwartość wciążby rosła od zera do 2π, ale tak i być powinno, wówczas bowiem okrążalibyśmy punkt odpowiadający ilości a, w naszym przypadku równéj zero. Pokażemy tu jeszcze, że i funkcye przestępne mają takie punkta szczególne, których okrążenie nie doprowadza do téj saméj wartości funkcyi. I tak uważamy: $\operatorname{Lg}z$, funkcyę nieskończenie wielowartościową. Położywszy:

$$z=r(\operatorname{dos}\theta-i\operatorname{wst}\theta),\ \text{będzie}\ \operatorname{Lg}z=\lg r+\theta i.$$

(*) Nie należy tu odnosić się do punktu O jako początku, ale do punktu B, gdyż odnośnie do tego początku kreśliliśmy geometryczny obraz ilości uważanéj.

Łatwo spotrzedz, że przez okrążenie początku, θ przyrasta o 2π, i logarytm otrzymuje wartość:

$$\lg r + (\theta + 2\pi)i.$$

W teoryi funkcyi wielowartościowych będzie to jaśniéj wytłumaczone, tutaj możemy zauważyć to tylko, że w punkcie $z = o$, wszystkie wartości logarytmu stają się równemi sobie, gdyż wszystkie są nieskończenie wielkie.

Cauchy funkcyę jednowartościową nazywa *monodrome*, a punkta, w których kilka różnych wartości funkcyi stają się równemi sobie, nazywa *points singuliers*. My punkta także nazywać będziemy punktami *zejścia*, w nich bowiem schodzą się wartości w punktach sąsiednich różne. Punkta zejścia, punkta, w których funkcya staje się nieskończenie wielką lub doznaje przerwy w ciągłości, obejmować będziemy ogólném nazwiskiem punktów *krytycznych*.

§ **28**. Uważmy teraz część płaszczyzny (Z) ograniczoną krzywą zamkniętą, wewnątrz któréj nie leży żaden z punktów krytycznych uważanéj funkcyi, dowiedziemy że na téj części płaszczyzny funkcya jest jednowartościową; to znaczy, że jeżeli z punktu z_0 wyjdziemy z pewną wartością, i iść będziemy do punktu z_1 po różnych drogach, ale tylko takich, które leżą na uważanéj części płaszczyzny zawsze w punkcie z_1, otrzymamy jedną i tę samą wartość.

Jeżeli funkcya jest ciągłą, to wartości jéj należące do téj saméj grupy różnią się o ilości dowolnie małe w punktach dostatecznie blizkich; wartości zaś odpowiadające innéj grupie różnią się od poprzedzających o ilości dowolnie małe tylko w punktach dostatecznie blizkich punktów zejścia. Pamiętając o tém, uważmy dwie drogi Z_0MZ_1 i Z_0NZ_1, dostatecznie siebie blizkie i leżące na odgraniczonéj części płaszczyzny.

Jeżeli uważać będziemy dwa punkta m i n dostatecznie blizkie siebie i punktu Z_0, to wartości uważanéj funkcyi w tych trzech punktach będą się różnić o ilości dowolnie małe, a więc te wartości będą należeć do jednéj i téj saméj grupy: podobnie w punktach m' i n' dostatecznie blizkich siebie i punktów m i n, i t. d. dojdziemy nakoniec do punktów m'' i n'', w tych wszystkich punktach funkcya

Fig. 10.

przybiera wartości należące do téj saméj grupy; ostatecznie więc w Z_1 funkcya przybierze z drogi Z_0NZ_1 tę samą wartość, jaką przybrała z drogi Z_0MZ_1. Ponieważ zaś każda inna droga, jak np. Z_0PZ_1, może być utworzoną przez pewną liczbę dostatecznie blizkich odchyleń krzywéj Z_0NZ_1, przeto twierdzenie nasze jest dowiedzione.

Jeżeli na pewnéj części płaszczyzny nie leży żaden punkt krytyczny funkcyi, powiadamy, że funkcya na téj części płaszczyzny jest *funkcyą doskonałą* (fonction synectique, podług Cauchy'ego). Widzimy zatém, że funkcya doskonała jest skończoną, ciągłą i jednowartościową. Jeżeli punkta krytyczne funkcyi leżą w odległości nieskończonéj, t. j. odpowiadają $z = \infty$, to powiadamy, że funkcya jest doskonałą na całéj płaszczyznie. Szereg np. nieskończony, uporządkowany podług rosnących potęg zmiennéj złożonéj jest funkcyą doskonałą w okręgu zbieżności, ponieważ jest skończony jednowartościowy i ciągły. Funkcye przestępne : wykładnicza, wstawa i dostawa, określone przez szereg nieskończony zbieżny na całéj płaszczyznie, są tém samém funkcyami doskonałemi na całéj płaszczyznie.

Uwaga. Jest rzeczą oczywistą, że pochodna funkcyi jednowartościowéj jest funkcyą także jednowartościową, pochodna zaś funkcyi wielowartościowéj wtedy tylko jest jednowartościową, gdy wszystkie wartości funkcyi w jednym punkcie różnią się pomiędzy sobą o ilości stałe; jeżeli zaś różnica między dwiema któremikolwiek wartościami zależy od położenia punktu, tak że napisawszy jedną z nich tylko $\varphi(z)$, drugą napisać należy $\varphi(z)+\psi'(z)$, to pochodne odpowiadające tym wartościom mogą być równe, przy szczególnych wartościach na z określonych równaniem $\psi'(z)=0$.

§ 29. **O nieskończonościach**. Punkt na płaszczyznie (Z) odpowiadający téj wartości zmiennéj dla któréj funkcya staje się zerem, nazywać będziemy *zerem funkcyi*, podobnież punkt odpowiadający téj wartości zmiennéj, dla któréj funkcya staje się nieskończenie wielką, nazywać będziemy *nieskończonością*. Nieskończoności funkcyi są dwojakiego rodzaju : pierwszego rodzaju są takie, że funkcya $\frac{1}{w}$ staje się zerem i pozostaje w okolicy ciągłą i jednowartościową, jak np. punkt $\left(z=\frac{\pi}{2}\right)$ dla funkcyi stz, sama zaś funkcya w blizkości tych punktów zbliża się do granicy nieskończoności; drugiego rodzaju są takie, że w nich tak sama funkcya w, jak i $\frac{1}{w}$ ma kilka wartości, np. punkt $(z=o)$ dla funkcyi $e^{\frac{1}{z}}$, która jest nieskończoną gdy z jest granicą malejących dodatnych, a zerem gdy z jest granicą rosnących odjemnych.

Powiemy tu jeszcze, jak należy uważać punkt przedstawiony równaniem $z=\infty$. Wiemy, że ilość złożona jest nieskończenie wielką, gdy moduł jéj jest nieskończenie wielki; w równaniu przeto powyżéj napisaném objęte jest nieskończenie wiele wartości zmiennéj kształtu : $\pm\infty+ai$, i $a\pm\infty i$, gdzie a jest ilością dowolną, mogącą być nawet nieskończenie wielką. Geometrycznie także wartości $z=\infty$, odpowiada nieskończenie wiele punktów leżących na okręgu zakreślonym z początku promieniem nieskończenie wielkim.

Przyjmujemy jednak wartość zmiennéj nieskończenie wielką uważać za jedną wartość tylko, a wszystkie punkta téj wartości odpowiadające za jeden tylko punkt. Skłania nas do tego ten wzgląd, że jeżeli w funkcyi uważanej uskutecznimy podstawienie : $z=\frac{1}{z'}$, i odniesiemy się do nowéj płaszczyzny (Z'), to tak, jak analitycznie wszystkim nieskończenie wielkim wartościom z, odpowiada jedna wartość z', t. j. zero, podobnie wszystkim punktom leżącym na płaszczyznie (Z) w odległości nieskończonéj, odpowiada na płaszczyznie (Z') jeden tylko punkt, t. j. początek.

Nadto ażeby zbadać, jak zachowuje się uważana funkcya dla wartości $z=\infty$, badamy jak zachowuje się funkcya, wypadająca po podstawieniu $\frac{1}{z'}$ za z, dla wartości $z'=0$. I tak funkcyje algebraiczne wymierne pozostają jednowartościowemi w punkcie nieskończenie odległym, jeżeli więc on jest dla nich nieskończonością, to rodzaju pierwszego; funkcye znów : wykładnicza, wstawa i dostawa, jednowartościowe na całéj płaszczyznie, przestają niemi być w punkcie nieskończenie odległym, jest więc on dla nich nieskończonością rodzaju drugiego.

II. — O CAŁKACH FUNKCYJ DOSKONAŁYCH I ROZWIJANIU FUNKCYJ NA SZEREGI POTĘGOWE.

§ 30. **Całki nieokreślone.** Pod symbolem całki nieokreślonéj :

$$\int f(z)dz,$$

rozumieć będziemy funkcyę, któréj pochodną jest $f(z)$. Ponieważ w § 24 dowiedliśmy, że prawa różniczkowania są takie same dla funkcyj zmiennéj złożonéj co i rzeczywistéj, można przeto powiedzieć : całka nieokreślona funkcyi zmiennéj złożonéj znaczy się tym samym symbolem, jakim się znaczy całka odpowiedniéj funkcyi zmiennéj rzeczywistéj.

Jest więc :

$$\int z^m\, dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C,$$

$$\int \operatorname{dos} z\, dz = \operatorname{wst} z + C \quad \text{i. t. d.}$$

gdzie C oznacza stałą dowolną (ilość złożoną).

Zrobimy tu ciekawą uwagę o całkach nieokreślonych, która nam późniéj będzie przydatną.

Kładąc jak zawsze :

$$z = x + yi, \qquad f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

otrzymamy :

$$\int f(z)\,dz = \int [\varphi(x,y) + i\psi(x,y)]\,(dx + i\,dy),$$

zkąd :

$$\int f(z)dz = \int [\varphi(x, y)dx - \psi(x, y)dy] + i\int [\varphi(x, y)dy + \psi(x, y)dx].$$

Ażeby ostatnie równanie miało swoje znaczenie i mogło być uważane jako normalny kształt całki, potrzeba aby oba wyrażenia, stojące pod znakami całkowania, były zupełnemi różniczkami ; co i rzeczywiście ma miejsce, ze względu na równania (3, § 23). Kładąc więc :

$$(1) \qquad \begin{cases} \int [\varphi(x, y)dx - \psi(x, y)dy] = \Phi(x, y) + A, \\ \int [\varphi(x, y)dy + \psi(x, y)dx] = \Psi(x, y) + B, \end{cases}$$

otrzymamy :

$$(1') \qquad \int f(z)dz = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) + C,$$

gdzie $C = A + Bi =$ stałéj dowolnéj.

Przy tym rozbiorze mieliśmy nową sposobność przekonać się, jak ściśle związane są z pojęciem funkcyi zmiennéj złożonéj równania (3, § 23) wyrażające jéj charakterystyczną własność.

§ 31. O całkach określonych. Całka określona :

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \mathrm{gr}_{n=\infty}\,[f(z_1)(\zeta_1 - z_1) + f(\zeta_1)(\zeta_2 - \zeta_1) + \ldots + f(\zeta_n)(z_2 - \zeta_n)], \tag{2}$$

gdzie $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ jest szereg następujących po sobie wartości zmiennéj z, gdy ta w sposób ciągły przechodzi od wartości z_1 do z_2.

Widzimy więc, że określenie to jest podobne do określenia podanego w teoryi funkcyj zmiennéj rzeczywistéj, z tą tylko różnicą wynikającą z natury rzeczy, że przy zmiennéj rzeczywistéj w jeden tylko sposób przejść można od jednéj wartości zmiennéj do drugiéj, wtedy gdy przy zmiennéj złożonéj przejście to odbyć się może nieskończenie wieloma sposobami, czyli, jak przyjęto mówić, jest nieskończenie wiele *dróg całkowania*. Dla każdéj odmiennéj drogi całkowania są odmienne wartości pośrednie ζ_λ.

W rachunku całkowym było dowiedzione, że jeżeli t oznacza zmienną rzeczywistą, a $f(t)$ między granicami t_1 i t_2 jest ciągłą i skończoną, to :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \mathrm{F}(t_2) - \mathrm{F}(t_1), \tag{α}$$

$$\text{gdzie } \mathrm{F}(t) = \int f(t)\,dt.$$

Pytamy się najpierw czy odpowiedni wzór ma miejsce i dla funkcyi zmiennéj złożonéj? Dowiedziemy, że ma miejsce jeżeli funkcya na drodze całkowania pozostaje ciągłą i skończoną.

Połóżmy : $\zeta_\lambda = \xi_\lambda + \eta_\lambda i$, a droga całkowania niech będzie dana równaniem :

$$y = \chi(x); \tag{β}$$

wtedy ogólny wyraz strony drugiéj równania (2) będzie :

$$\{\varphi[\xi_\lambda, \chi(\xi_\lambda)] + i\psi[\xi_\lambda, \chi(\xi_\lambda)]\}\,\{[\xi_{\lambda+1} - \xi_\lambda] + i[\chi(\xi_{\lambda+1}) - \chi(\xi_\lambda)]\},$$

a po rozdzieleniu części rzeczywistych i urojonych, uwzględniając określenie odpowiadające równaniu (2), i odnoszące się do funkcyi zmiennéj rzeczywistéj, napiszemy :

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \left\{\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} \varphi[x, \chi(x)]\,dx - \int_{\chi(x_1)}^{\chi(x_2)} \psi[x, \chi(x)]\,d[\chi(x)], \\ &+ i\int_{x_1}^{x_2} \psi[x, \chi(x)]\,dx + i\int_{\chi(x_1)}^{\chi(x_2)} \varphi[x, \chi(x)]\,d[\chi(x)], \end{aligned}\right.$$

a jeżeli całki przedstawimy w kształcie, jak wyżéj pokazano, odniesiemy się do równań (1), i zważymy, że równania te, jako mające miejsce dla dowolnych x i y, utrzymują się i wtedy, gdy y związane jest z x równaniem (β), to na mocy równania (α) będziemy mogli napisać :

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} \{\varphi[x, \chi(x)]\, dx - \psi[x, \chi(x)]\, d\,[\chi(x)]\} = \Phi[x_2, \chi(x_2)] - \Phi[x_1, \chi(x_1)] = \Phi(x_2, y_2) - \Phi(x_1, y_1), \\ \int_{x_1}^{x_2} \{\psi[x, \chi(x)]\, dx + \varphi[x, \chi(x)]\, d\,[\chi(x)]\} = \Psi[x_2, \chi(x_2)] - \Psi[x_1, \chi(x_1)] = \Psi(x_2, y_2) - \Psi(_1, y_1). \end{cases}$$

Odnosząc się zaś do równania (1'), i kładąc :

$$(3') \qquad \int f(z)dz = \mathrm{F}(z) + \mathrm{C},$$

otrzymamy :

$$(3) \qquad \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = \mathrm{F}(z_2) - \mathrm{F}(z_1),$$

wzór mający miejsce dla téj drogi całkowania, na któréj funkcya nie staje się nieskończoną i nie doznaje przerwy w ciągłości.

Z równania (3) wyprowadzić można niektóre własności całek określonych odpowiadające własnościom całek funkcyi zmiennéj rzeczywistéj; jako to :

$$\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{A} f(z) dz = \mathrm{A} \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz, \quad \text{gdzie } \mathrm{A} = \text{stałéj},$$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = -\int_{z_2}^{z_1} f(z) dz,$$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = \int_{z_1}^{\zeta} f(z)\, dz + \int_{\zeta}^{z_2} f(z) dz,$$ gdzie ζ odpowiada punktowi leżącemu na drodze całkowania między z_1 i z_2 i t. d.

Łatwo spostrzedz, że własności te można także wyprowadzić z ogólnego określenia (2).

Pytamy się teraz, czy wartość całki określonéj zależy od drogi całkowania. Jeżeli na każdéj z uważanych dróg całkowania funkcya pozostaje ciągłą i skończoną, to dla każdéj z nich wartość całki oblicza się podług wzoru (3); zkąd widoczném jest, że jeżeli F(z) jest funkcyą jednowartościową, lub wielowartościową taką, że wartości jéj w każdym punkcie różnią się o ilości stałe (*), wtedy wartość całki nie zależy od drogi całkowania. Mając więc na względzie uwagę w § 28 zrobioną, możemy wypowiedzić następujące twierdzenie :

Wszystkie drogi całkowania leżące na téj części płaszczyzny, na któréj $f(z)$ jest funkcyą doskonałą, prowadzą do jednéj i tej saméj wartości całki : $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$). Twierdzenie to można także wypowiedzić w ten sposób :

(*) Ze sposobu wyprowadzenia wzoru (3) bezpośrednio wypada, że jeżeli F(z) jest wielowartościową, to wartości jéj w punktach Z_1 i Z_2 należą do jednéj i téj saméj grupy, w każdym bowiem ze wzorów (γ) symbole Φ i Ψ czynią zadość temu warunkowi.

Dwie drogi całkowania, niezawierające między sobą żadnego krytycznego punktu funkcyi $f(z)$, prowadzą do jednéj i téj saméj wartości całki $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$.

§ **32. O całkach po ograniczeniach.** Ograniczeniem nazywamy w ogólności układ krzywych zamkniętych oddzielający pewną część płaszczyzny. Ograniczenie może się składać albo z jednéj krzywéj zamkniętéj, albo z kilku oddzielnych krzywych, z których każda jest zamkniętą. Na figurze ogra-

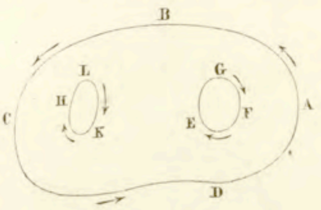

Fig. 11.

niczenie składa się z trzech krzywych, i oddziela część płaszczyzny zawartą wewnątrz krzywéj ABCD, ale nie całą : trzeba od niéj odłączyć części wewnątrz krzywych EFG i HKL leżące : powiadamy, że pierwsza krzywa ogranicza *zewnętrznie*, a dwie drugie *wewnętrznie*. Nawet ograniczenie złożone z pojedynczéj krzywéj może ograniczać wewnętrznie, gdy oddziela część płaszczyzny zewnątrz niéj leżącą wraz z punktem nieskończenie odległym.

Wiemy, co nazywać kierunkiem dodatnym ruchu po krzywéj uważanéj w saméj sobie; dodatnym kierunkiem ruchu po ograniczeniu nazwiemy ten kierunek, w którym człowiek postępując, miałby część ograniczoną po lewéj ręce; zkąd wypada, że kierunek dodatny po ograniczeniu zewnętrznem jest ten sam, co kierunek dodatny po krzywéj, odwrotnie rzecz się ma z ograniczeniem wewnętrznem. Strzałki na powyżéj uważanéj figurze pokazują, w jakim kierunku posuwać się trzeba po każdéj pojedyńczo krzywéj, aby ograniczenie przebiedz w kierunku dodatnym.

Jeżeli wyrażenie stojące na drugiéj stronie wzoru (2) uważać będziemy jako rozciągnięte na pewną krzywą zamkniętą, tak, że ζ przechodząc przez wartości odpowiadające kolejno po sobie następującym punktom krzywéj uważanéj, wraca do swojéj pierwotnéj wartości, to nazwiemy je *całką po krzywéj zamkniętéj*, i jeżeli krzywą znaczymy (K), całkę napiszemy : $\int_{(K)} f(z)$, lub $\int_{(-K)} f(z)\,dz$ (*), stosownie do tego, czy ζ przybiera kolejne wartości odpowiadające przebieganiu krzywéj w kierunku dodatnym, czy odjemnym.

Bezpośrednio z określenia wypada że :

$$\int_{(-K)} = -\int_{(K)}, \tag{4}$$

zkąd czytamy, że *całka po pewnéj krzywéj uważanéj jako ograniczenie wewnętrzne* (**), *jest równa całce po tejże krzywéj, uważanéj jako ograniczenie zewnętrzne, wziętéj ze znakiem przeciwnym.*

(*) Gdy nie będzie ztąd wynikać żadna wątpliwość, znakowanie takiéj całki upraszczać będziemy, opuszczając bądź wskazówkę drogi całkowania, bądź symbol funkcyi poddanéj całkowaniu.

(**) Całkę po ograniczeniu rozumieć zawsze będziemy jako wziętą w kierunku dodatnym ograniczenia, chyba że zastrzeżemy przeciwnie

Zanim zajmiemy się innemi własnościami całek po ograniczeniu, pokażemy, jakim sposobem taka całka da się przedstawić jako summa całek określonych zmiennéj rzeczywistéj; ponieważ zaś ograni-

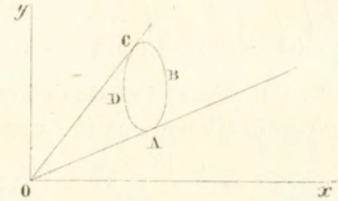

Fig. 12.

czenie składa się z krzywych zamkniętych, dość więc będzie pokazać to dla całki po jednéj krzywéj zamkniętéj. Uważmy zmienną w kształcie trygonometrycznym $re^{\theta i}$, i napiszmy równanie ograniczenia

$$r_1 = \chi_1(\theta), \qquad r_2 = \chi_2(\theta),$$

gdzie χ_1 i χ_2 oznaczają funkcye jednowartościowe odnoszące się odpowiednio do części krzywéj: ABC i ADC, nadto połóżmy: $\mathrm{L}AOx = \theta_1$ a $\mathrm{L}COx = \theta_2$, wtedy będzie:

$$\int_{(K)} f(z)\,dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_1(\theta)\,d\theta + \int_{\theta_2}^{\theta_1} F(\theta)d\theta,$$

gdzie: $F_\lambda(\theta) = f[\chi_\lambda(\theta)e^{\theta i}][\chi'_\lambda(\theta)e^{\theta i} + i\chi_\lambda(\theta)e^{\theta i}]$, $\lambda = 1$ lub 2.

Gdy początek układu leży wewnątrz krzywéj, równanie dla téj krzywéj będzie jedno, i będzie:

$$\int_{(K)} f(z)dz = i\int_0^{2\pi} F(\theta)\,d\theta.$$

Dowiedziemy teraz twierdzenia:

Całka po ograniczeniu, niezawierającém żadnego punktu krytycznego funkcyi podcałkowéj, jest równa zeru, wyjąwszy przypadek, gdy ograniczenie składa się z jednéj krzywéj ograniczającéj wewnętrznie.

Uważmy najpierw przypadek najprostrzy ograniczenia zewnętrznego, złożonego z jednéj tylko

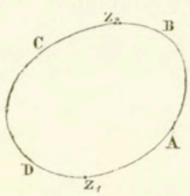

Fig. 13.

krzywéj np. ABCDA. Obierzmy na niéj dwa punkta dowolne Z_1 i Z_2; ponieważ między drogami $ZABC_2$ i Z_1DCZ_2 nie leży żaden punkt krytyczny funkcyi przeto:

$$\int_{(Z_1ABZ_2)} = \int_{(Z_1DCZ_2)} = -\int_{(Z_2CDZ_1)}$$

a więc

$$\int_{(ABCDA)} = \int_{(Z_1ABZ_2)} + \int_{(Z_2CDZ_1)} = 0, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Uważmy dalej przypadek, gdy ograniczenie (K) złożone jest z dwóch krzywych : AB i CD. Będzie wtedy :

$$\int_{(K)} = \int_{(AB)} - \int_{(CD)} .$$

Poprowadźmy dwie linie Z_1Z_2 i Z_3Z_4, i uważmy, że każda z krzywych zamkniętych $Z_1Z_2BZ_3Z_4CZ_1$ i $Z_3AZ_2Z_1DZ_2Z_3$ uważana jako ograniczenie zewnętrzne, nie zawiera żadnego punktu krytycznego

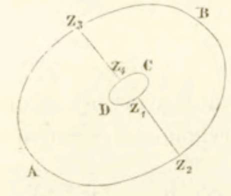

Fig. 14.

funkcyi, całka więc po każdéj z nich jest zero; rozkładając zaś stosownie każdą z nich, będziemy mogli napisać :

$$\int_{(Z_1Z_2)} + \int_{(Z_2BZ_3)} + \int_{(Z_3Z_4)} - \int_{(Z_1CZ_4)} = 0,$$

$$\int_{(Z_2Z_1)} + \int_{(Z_3AZ_2)} + \int_{(Z_4Z_3)} - \int_{(Z_4DZ_1)} = 0.$$

Z dodania do siebie tych dwóch równości wypada :

$$\int_{(AB)} - \int_{(CD)} = 0, \text{ c. b. d. o.}$$

Ostatnia równość pokazuje nam zarazem, że *jeżeli dwie krzywe zawierają te same punkta krytyczne, to wartości całek po jednéj lub drugiéj są jednakowe*, co także znaczy, że *wartość całki po ograniczeniu nie zależy od kształtu tego ograniczenia, a tylko od punktów krytycznych na części ograniczonéj leżących.*

Ażeby dowieść naszego twierdzenia dla ograniczenia złożonego z trzech krzywych, prowadzimy

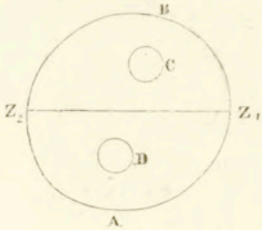

Fig. 15.

linię Z_1Z_2, i uważamy całki po ograniczeniach : ($Z_1BZ_2Z_1$ i C) i ($Z_2AZ_1Z_2$ i D), z których każda równą jest zeru. Summa zaś tych całek będzie całką po uważanym ograniczeniu. Gdy ograniczenie składa się z krzywéj ograniczającéj zewnętrznie i 3ch krzywych ograniczających wewnętrznie, przeprowadzamy linię tak, aby z jednéj strony téj linii leżały dwie krzywe ograniczające wewnętrznie, z drugiéj jedna, i dowodzimy jak poprzednio.

Łatwo ten sposób dowodzenia rozciągnąć do przypadku ogólnego, t. j. gdy ograniczenie składa się z jednéj krzywéj ograniczającéj zewnętrznie i n krzywych ograniczających wewnętrznie.

Z twierdzenia naszego łatwo zawnioskować, że *jeżeli mamy dwa układy krzywych obejmujących te same punkta krytyczne, to summa całek po krzywych pierwszego układu równa jest summie całek po krzywych układu drugiego*, zkąd w szczególności : *całka po krzywéj obejmującéj kilka punktów krytycznych równa jest summie całek po krzywych obejmujących każda jeden punkt krytyczny.*

Zajmiemy się teraz zastrzeżonym w twierdzeniu przypadkiem wyjątkowym. Uważmy krzywą (K), obejmującą wszystkie punkta krytyczne funkcyi $f(z)$, leżące w odległości skończonéj, i przypuśćmy, że uważana funkcya w punkcie nieskończenie odległym pozostaje skończoną. Wtedy krzywa (K), uważana jako ograniczenie wewnętrzne, nie będzie zawierać żadnego punktu krytycznego funkcyi.

Uważamy całkę $\int_{(K)} f(z)\, dz$; aby znaleść jéj wartość odnieśmy się do płaszczyzny (Z′) określonéj podstawieniem $z = \frac{1}{z'}$. Niech krzywéj (K) odpowiada krzywa (K′), która uważana jako ograniczenie zewnętrzne, obejmować będzie wszystkie punkta odpowiadające tym, które obejmuje krzywa (K) uważana jako ograniczenie wewnętrzne. Kładąc $f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z')$, i zważywszy, że jest $dz = -\frac{1}{z'^2}\, dz'$, napiszemy :

$$(\alpha) \qquad \int_{(K)} f(z)\, dz = -\int_{(K')} \frac{\varphi(z')}{z'^2}\, dz'.$$

Chociaż $\varphi(z')$ jest doskonałą w ograniczeniu (K′), jednak $\frac{\varphi(z')}{z'^2}$ nie jest nią w przypadku ogólnym i dlatego w ogólności całka po ograniczeniu wewnętrzném obejmującém punkt nieskończenie odległy, nie jest zerem, chociaż funkcya w punkcie tym pozostaje jednowartościową ciągłą i skończoną. W dalszym ciągu poznamy warunek, aby całka ta była zerem.

Uwaga. W ostatnio napisanym wzorze (α) na stronie drugiéj stoi znak odejmny, t. j. przekształcenie całki dokonane zostało bezpośrednio przez podstawienie $\varphi(z')$ za $f(z)$ a $-\frac{dz'}{z'^2}$ za dz, ze względu, że $\int_{(K)}$ odnosi się do ograniczenia wewnętrznego, t. j. wzięta jest po krzywéj (K) w kierunku bezwzględnie odjemnym, a $\int_{(K')}$ odnosi się do ograniczenia wewnętrznego, t. j. wzięta jest po krzywéj (K′), odpowiadającéj krzywéj (K) w kierunku bezwzględnie dodatnym, a przebieganiu rozmaitych elementów w pewnym kierunku na płaszczyznie (Z) równoważne jest przebieganie odpowiednich elementów na płaszczyznie (Z′) w kierunku przeciwnym.

Jeszcze jaśniéj pokazuje się to, gdy przyjąwszy za ograniczenie okrąg (R) przekształcimy całkę po ograniczeniu na całkę zmiennéj rzeczywistéj.

Kładąc :

$$z = Re^{\theta i}, \quad z' = R'e^{\theta' i}, \quad \text{gdzie } R' = \frac{1}{R}, \quad \theta' = \frac{1}{\theta};$$

będzie

$$\int_{(K)} f(z)\,dz = Ri \int_0^{-2\pi} f(Re^{\theta i})\,e^{\theta i}\,d\theta$$

$$-\int_{(K')} \frac{\varphi(z')}{z'^2}\,dz' = -\frac{1}{R'}\,i \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(R'e^{\theta' i})}{e^{\theta' i}}\,d\theta'.$$

Jeżeli zaś w ostatniéj całce zamiast $\frac{1}{R'}$ napiszemy R, a zamiast zmiennéj θ' wprowadzimy zmienną θ, wykaże się tożsamość całek $\int_{(K)}$ i $-\int_{(K')}$.

§ **33. Całkowanie szeregów nieskończonych.** Powyżéj (§ 25) dowiedliśmy, że szereg nieskończony uporządkowany według potęg rosnących zmiennéj złożonéj, można różniczkować w okręgu zbieżności; co się tyczy całkowania szeregów nieskończonych dowiedziemy twierdzenia ogólniejszego a mianowicie :

Wszelki szereg nieskończony można całkować, byle tylko droga całkowania leżała na téj części płaszczyzny, na któréj szereg jest zbieżny.

Pod wyrażeniem można całkować rozumiemy : 1° że szereg nieskończony otrzymany przez zcałkowanie każdego pojedynczo wyrazu szeregu danego, będzie zbieżny, 2° że granicą tego szeregu będzie całka granicy szeregu danego.

Niech będzie szereg nieskończony :

$$W_0 + W_1 + W_2 + \ldots\ldots,$$

zbieżny na pewnéj części płaszczyzny, a granicą tego szeregu niech będzie $f(z)$; należy dowieść, że :

$$(\beta)\qquad \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} W_0\,dz + \int_{z_1}^{z_2} W_1\,dz + \ldots\ldots,$$

w przypuszczeniu, że droga całkowania leży w obrębie zbieżności szeregu.

W tym celu uważmy, że jest :

$$f(z) - \{W_0 + W_1 + \ldots\ldots + W_n\} = R_n,$$

gdzie dla dostatecznie wielkiego n, R_n jest dowolnie małe, a w granicy R_n jest zerem.

Całkując powyżéj napisane równanie skończone :

$$(\gamma)\qquad \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz - \left\{\int_{z}^{z_2} W_0\,dz + \ldots\ldots + \int_{z_1}^{z_2} W_n\,dz\right\} = \int_{z_1}^{z_2} R_n\,dz;$$

gdy w każdym elemencie całki, stojącéj na stronie drugiéj ostatniego równania, odpowiednią wartość funkcyi R_n zastąpimy modułem największéj jéj wartości, który oznaczymy przez M, to :

$$\mathrm{mod}\left[\int_{z_1}^{z_2} M dz\right] > \mathrm{mod}\left[\int_{z_1}^{z_2} R_n dz\right],$$

albo :

$$M.\mathrm{mod}\,[z_2 - z_1] > \mathrm{mod}\left[\int_{z_1}^{z_2} R_n dz\right],$$

że zaś na drodze całkowania, jako leżącéj w obrębie zbieżności szeregu, M przy dostatecznie wielkiém n, jest ilością dowolnie małą a mod $[z_2 - z_1]$ jest ilością skończoną, przeto strona druga równania (γ) jest ilością dowolnie małą, a w granicy (przy $n = \infty$) jest zerem, zkąd bezpośrednio wynika słuszność wzoru (β).

§ 34. Rozwinięcie funkcyj doskonałych na szereg nieskończony według rosnących potęg zmiennéj. To rozwinięcie polega na następującém twierdzeniu : *Funkcya $f(z)$, doskonała w punkcie C i jego okolicy, rozwija się na szereg nieskończony, uporządkowany według rosnących potęg wyrażenia $(z - c)$, wewnątrz okręgu zakreślonego z punktu C, promieniem mniejszym jak odległość punktu C od najbliższego punktu krytycznego funkcyi $f(z)$, t. j. wewnątrz okręgu, w którym funkcya pozostaje doskonałą.*

Niech $f(z)$ będzie doskonałą wewnątrz krzywéj MNPQ. Zakreślmy z punktu C okrąg promieniem R, i uważmy punkt T, leżący wewnątrz tego okręgu, i taki, że w nim pochodna danéj funkcyi $f(t)$

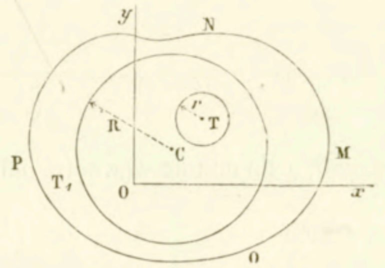

Fig. 16.

ma wartość skończoną. Wtedy funkcya $\frac{f(z) - f(t)}{z - t}$ będzie doskonałą wewnątrz krzywéj MNPQ, bo w punkcie T, jedynym gdzieby się mogła stawać nieskończoną, przyjmuje wartość $f'(t)$.

Możemy więc napisać :

$$\int_{(R)} \frac{f(z) - f(t)}{z - t} dz = 0$$

zkąd :

$$(1) \qquad f(t)\int_{(R)} \frac{dz}{z - t} = \int_{(R)} \frac{f(z)}{z - t} dz$$

Zajmiemy się teraz przekształceniem równania (1). Zakreślmy z punktu T dowolnym promieniem r

okrąg, nieprzechodzący po za obręb doskonałości funkcyi, ponieważ funkcya $\frac{1}{z-t}$ ma tylko jeden punkt krytyczny T, jest przeto :

$$\int_{(R)} \frac{dz}{z-t} = \int_{(r)} \frac{dz}{z-t},$$

a zamieniwszy całkę stojącą na stronie drugiéj na całkę określoną zmiennéj rzeczywistéj przez podstawienie :

$$z - t = re^{\theta i}, \qquad \text{gdzie } r = \text{stałéj},$$

otrzymamy :

$$\int_{(r)} \frac{dz}{z-t} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Równanie (1) można teraz napisać :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-t}\,dz, \tag{2}$$

wyraża ono związek pomiędzy wartością funkcyj w pewnym punkcie a całką po krzywéj ten punkt obejmującéj.

Zajmiemy się teraz przekształceniem całki stojącéj na drugiéj stronie wzoru (2). W tym celu uważmy, że jest tożsamościowo :

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{(z-c)-(t-c)} = \frac{\frac{1}{z-c}}{1-\frac{t-c}{z-c}},$$

a gdy z odpowiada punktom na okręgu, a t punktom węwnątrz okręgu, będzie :

$$\mathrm{mod}[t-c] < \mathrm{mod}[z-c], \quad \text{zkąd} \quad \mathrm{mod}\left(\frac{t-c}{z-c}\right) < 1.$$

na mocy zaś tego można napisać szereg ilorazowy :

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-c} + \frac{t-c}{(z-c)^2} + \ldots\ldots + \frac{(t-c)^n}{(z-c)^{n+1}} + \ldots\ldots$$

Powyżéj napisany szereg, uważany jako funkcya zmiennéj z, jest zbieżny na okręgu (R); mnożąc wyrazy tego szeregu przez ilość skończoną $f(z)$, otrzymamy jeszcze szereg na tymże okręgu zbieżny, można więc go po tym okręgu całkować i będzie :

$$\int_{(R)} \frac{f(z)}{z-t}dz = \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-c}dz + (t-c)\int_{(R)} \frac{f(z)}{(z-c)^2}dz - \ldots\ldots,$$

a odnosząc się do wzoru (2), otrzymamy :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{(R)} \frac{f(z)}{(z-c)}dz + (t-c)\int_{(R)} \frac{f(z)}{(z-c)^2}dz + \ldots\ldots + (t-c)^n\int_{(R)} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}dz + \ldots\right\} \tag{3}$$

Równanie (3) jest szukaném rozwinięciem na szereg; utrzymuje się ono dla wszytkich wartości na t, odpowiadających punktom leżącym wewnątrz okręgu (R), i takich, że pochodna $f'(t)$ jest przy nich skończoną.

Można jednak dowieść, że pochodna wewnątrz okręgu (R) będzie skończoną. Oznaczymy dla skrócenia szereg przez S, jego pochodną przez S', i uważamy funkcyę : $f(t)$ — S, która w okręgu (R) jest doskonałą, w szczególności zatém i ciągłą. Pochodna téj funkcyi : $f'(t)$ — S' będzie zerem dla tych t, w których $f'(t)$ pozostaje skończoną, dla których zatém rozwinięcie (3) ma miejsce, będzie nieskończoną, gdy $f'(t)$ nią będzie, ze względu, że S' jest w okręgu (R) skończone. Ponieważ zaś ta pochodna jest funkcyą ciągłą (*), przeto przeskok taki jest niemożliwy, a więc i to jest niemożliwe, aby $f'(t)$ stawała się w okręgu (R) nięskończoną (**). Rozwinięcie przeto (3) ma miejsce dla wszelkich t w okręgu (R), i twierdzenie nasze jest dowiedzione.

Nadto łatwo spostrzegamy, że jeżeli okrąg (R) będzie stosownie zakreślony, t. j. największym możliwym, rozwinięcie (3) nie będzie się utrzymywało, dla żadnéj wartości np. t_1 (odpowiednio punktowi T_1), szereg bowiem będzie przy téj wartości rozbieżnym ; widzieliśmy bowiem w teoryi szeregów, że granicą zbieżności takiego szeregu jest okrąg, w naszym zaś przypadku nie może nim być inny okrąg jak (R), jak to widać z przebiegu dowodzenia wzoru (3).

Z rozwinięcia (3) wypada że pochodna funkcyi $f(z)$ jest doskonałą wewnątrz okręgu (R), gdyż jest nią pochodna szeregu, jeżeli teraz zważymy, że całą część płaszczyzny, na której funkcya jest doskonałą, możemy pokryć takimi okręgami, dobrawszy stosownie środki tych okręgów i promienie, [1] w każdym takim okręgu rozwinąć funkcyę na szereg, to pamiętając, że wszystkie pochodne takiego szeregu są funkcyami doskonałemi, będziemy mogli wypowiedzieć następujące ogólne twierdzenie :

Wszystkie pochodne funkcyi doskonałéj na pewnéj części płaszczyzny, są także funkcyami doskonałemi na téj części płaszczyzny.

§ 35. **Wyrażenie pochodnych przez całki po krzywych zamkniętych.** Położywszy w rozwinięciu (3) :

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(R)} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz \tag{4}$$

napiszemy to rozwinięcie :

$$f(t) = A_0 + A_1(t-c) + \ldots\ldots + A_n(t-c)^n + \ldots\ldots \tag{5}$$

(*) Że pochodna funkcyi ciągłéj jest także ciągłą dowieść łatwo w następujący sposób : niech F(z) będzie ciągłą na pewnéj części płaszczyzny, uważmy wartości z_1 i $z_2 = z_1 + \Delta z$, na téj części płaszczyzny leżące. Na mocy określenia pochodnéj jako granicy, możemy napisać : $F(z_2) - F(z_1) = [F'(z) + \varepsilon_1]\Delta z$, $\quad F(z_1) - F(z_2) = [F'(z_2) + \varepsilon_2](-\Delta z)$, gdzie przy Δz dostatecznie małém, ε_1 i ε_2 są dowolnie małe. Z porównania wypada : $[F'(z_2) - F'(z_1)] + [\varepsilon_2 - \varepsilon_1] = 0$, ponieważ drugi wyraz jest ilością dowolnie małą, pierwszy także nią być musi, co właśnie jest warunkiem ciągłości.

(**) Autorowie w ogólności w prostszy sposób roztrzygają tę kwestyę, nie uciekając się do uważania pochodnéj $f'(t)$ — S' ale poprzestają na przypuszczeniu, że pochodna $f'(t)$ staje się nieskończoną w kilku odosobnionych punktach, co nie odpowiada ogólności twierdzenia; nie zastrzega się w niém, że pochodna nie może być nieskończoną na pewnéj części płaszczyzny.

Nadmienimy tu jeszcze, że gdybyśmy chcieli uniknąć uważania takiéj szczególnéj funkcyi, która jest stale zerem, możnaby uważać różnicę $f(t) - [S' - B(t-c)^n]$, gdzie $B(t-c)^n$ jest jednym z wyrazów szeregu S.

Biorąc kolejne pochodne :

$$f'(t)=A_1+2A_2(t-c)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(t)=n!\ A_n+(^{n+1})!\ A_{n+n}(t-c)+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a kładąc tu $t-c$, otrzymamy :

$$A_0=f(c),\quad A_1=f(c)\ldots\ldots A_n=\frac{1}{n!}f(c)^{(n)}\ldots \tag{6}$$

a rozwinięcie (3) napiszemy :

$$f(t)=f(c)+f'(c)(t-c)+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(t-c)^n+\ldots \tag{7}$$

Jestto znany wzór Taylor'a, kładąc w nim $c=0$, co odpowiada wzięciu środka okręgu w początku, otrzymamy wzór Mac-Laurin'a.

Łącząc wzory (4) i (6) otrzymamy :

$$f^{(n)}(c)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{(R)}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz, \tag{8}$$

a kładąc : $z-c=Re^{ti}$, gdzie $R=$ stałéj :

$$f^{(n)}(c)=\frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}f(c+Re^{\theta i})\,e^{-n\theta i}\,d\theta \tag{9}$$

Wzór (8) (w którym pod symbolem $\int_{(R)}$ rozumieć można całkę nietylko po okręgu, ale po wszelkiéj krzywéj zamkniętéj punkt C obejmującéj i leżącéj w obrębie doskonałości funkcyi) daje nam wyrażenie pochodnych przez całki; pod c rozumieć tu można wszelką wartość, byle nieodpowiadającą punktowi krytycznemu uważanéj funkcyi. Utrzymuje się on i dla $n=0$, i wtedy jest jednoznaczny ze wzorem (2).

Wzór (9) jest tylko przekształceniem wzoru (8) dla przypadku, gdy za krzywę całkowania bierzemy okrąg. Gdybyśmy we wzorze (9), wyrażenie $f(c+Re^{\theta i})$ rozwinęli według wzoru (3), otrzymalibyśmy szereg uporządkowany według potęg rosnących $(Re^{\theta i})$; całkując i pamiętając że :

$$\int_0^{2\pi}e^{\lambda\theta i}d\theta\ \begin{cases}=0 & \text{gdy}\quad \lambda \text{ różne od zera,}\\ =2\pi & \text{gdy}\quad \lambda=0,\end{cases}$$

otrzymamy tożsamość :

Do wzoru (8) dojść można nieprzechodząc przez rozwinięcie na szereg; wychodzimy z wzoru (2) jednoznacznego ze wzorem (8) w przypadku $n=0$; dla n różnego od zera uważamy jak następuje :

$$\int\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}=\text{gr}\left\{\int\frac{f(z)}{(z-c_0)(z-c_1)\ldots\ldots(z-c_n)}\,dz\right\},$$

rozumiejąc, że w granicy :

$$c_0 = c_1 = c_2 = \ldots\ldots = c_n = c.$$

Rozłożywszy funkcyę stojącą pod znakiem całki na stronie drugiéj, na ułamki cząstkowe, otrzymamy :

$$\int \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} \operatorname{gr} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \int \frac{f(c_\lambda)(c_\lambda - c_\lambda)}{(c_\lambda - c_0)(c_\lambda - c_1)\ldots\ldots(c_\lambda - c_n)} \frac{dz}{z-c_\lambda} \right\}.$$

a stosując do każdéj z tych całek wzór (2) :

$$\int \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} = 2\pi i \operatorname{gr} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{f(c_\lambda)(c_\lambda - c_\lambda)}{(c_\lambda - c_0)(c_\lambda - c_1)\ldots\ldots(c_\lambda - c_n)} \right\}.$$

Ponieważ $c_0, c_1, \ldots c_n$ są podległe temu tylko warunkowi, aby w granicy stawały się równe c, możemy więc położyć :

$$c_0 = c,\ c_1 = c_\alpha + \Delta c,\ \ldots.\ c_\lambda = c + \lambda\Delta c,\ \ldots..\ c_n = c + n\Delta c,$$

w skutek czego :

$$\int \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz = 2\pi i \operatorname{gr}_{\Delta c=0} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{f(c+\lambda\Delta c)}{\lambda!\ \Delta c^\lambda . (-1)^{n-\lambda} (n-\lambda)!\ \Delta c^{n-\lambda}} \right\}$$

a rozwinąwszy i dokonawszy łatwych przekształceń :

$$\int \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \operatorname{gr}_{\Delta c=0} \left\{ \frac{(-1)^n [f(c) - (n)_1 f(c+\Delta c) + (n)_2 f(c+2\Delta c) - \ldots\ldots + (-1)^n f(c+n\Delta c)]}{\Delta c^n} \right\},$$

gdzie $(n)_1, (n)_2 \ldots$ oznaczają współczynniki liczbowe w rozwinięciu dwumianu Newton'a. Zważywszy zaś, że licznik na stronie drugiéj (wraz z czynnikiem $(-1)^n$) przedstawia różnicę skończoną rzędu n^{tego} dla funkcyi f, odpowiadającą wartości c i przyrostowi Δc, napiszemy :

$$\int \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \operatorname{gr}_{\Delta c=0} \left(\frac{\Delta^n f(c)}{\Delta c^n} \right) = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(c) \text{ c. b. d. o.}$$

§ 33. Wrócimy się teraz do rozwijania funkcyj na szeregi potęgowe i podamy kilka ogólnych prawideł rozwijania funkcyj według wzoru Mac-Laurin'a. — I tak :

1) Ułamki algebraiczne wymierne nieskracalne rozwijają się na szeregi dla tych wartości zmiennéj, których moduł zmienny jest, jak moduł najmniejszego pierwiastku wielomianu stojącego w mianowniku, a niebędącego zarazem pierwiastkiem licznika w tym samym lub wyższym stopniu.

2) Funkcye algebraiczne niewymierne rozwijają się na szereg dla tych wartości zmiennéj, których moduł mniejszy jest, jak moduł najmniejszéj wartości zmiennéj takiéj, przy któréj uważana wartość funkcyi staje się równą drugiéj wartości.

Np. : $(a+bz)^n$, gdzie n ułamkowe, rozwija się na szereg dla tych wartości z, dla których $\operatorname{mod}[z] < \operatorname{mod}\left(\frac{a}{b}\right)$, gdy więc pod a, b i z rozumiemy ilości rzeczywiste, rozwinięcie będzie miało miejsce dla wartości zmiennéj zawartéj między $+\frac{a}{b}$ i $-\frac{a}{b}$.

Funkcya np. : $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)+\sqrt{z-a}}$, gdzie $f(z)$ i $\varphi(z)$ są wielomiany wymierne, i gdzie nadto $\varphi(z)$ nie ma pierwiastku, którego moduł mniejszy jest od modułu a; funkcya ta rozwinie się dla wartości z takich że : $\mathrm{mod}[z] < \mathrm{mod}[a]$.

3) Funkcye przestępne ciągłe jednowartościowe rozwijają się na szereg dla wartości z, których moduł jest mniejszy od modułu najmniejszéj nieskończoności funkcyi.

Uważmy funkcyę jednowartościową : $\dfrac{1}{1-e^{-z}}-\dfrac{1}{z}$; przy $z=0$, funkcya ta przyjmuje wartość oznaczoną $\dfrac{1}{2}$ i staje się nieskończoną dopiero przy $z=2\pi i$, rozwija się więc na szereg dla wartości takich że : $\mathrm{mod}[z] < 2\pi$.

Gdy uważać będziemy zmienną rzeczywistą, funkcya ta będzie skończoną dla wszelkich wartości zmiennéj, rozwijać się jednak będzie na szereg tylko dla wartości zawartych między $+2\pi$ i -2π, czego bez wprowadzenia zmiennéj złożonéj objaśnić sobie nie możemy, bo ani jedna wartość, ani druga nie jest żadną szczególną dla uważanéj funkcyi.

4) Co się tycze funkcyj przestępnych wielowartościowych, możemy na teraz tyle tylko powiedzieć, że te z nich, których pochodna jest funkcyą algebraiczną, rozwijają się w tych samych granicach co ich pochodne.

Np. pewna wartość funkcyi łuk st z, któréj pochodną jest $\dfrac{1}{1+z^2}$, rozwija się dla wartości takich że $\mathrm{mod}[z] < 1$.

Zróbmy tu jeszcze jedną ważną uwagę. Pytamy się, jak rozumieć poprzednio poznany wzór :

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \mathrm{F}(z_2) - \mathrm{F}(z_1),$$

w przypadku gdy analityczne wyrażenie funkcyi F nie jest nam znane? Funkcya $f(z)$ da się w obrębie swojéj doskonałości rozwinąć na szereg; otóż pod $\mathrm{F}(z)$ rozumieć będziemy funkcyę określoną przez szereg otrzymany przez zcałkowanie każdego wyrazu szeregu poprzedniego.

Zawsze więc znaleźć możemy przybliżoną wartość całki określonéj, choćby bowiem jeden okrąg

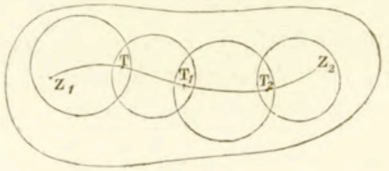

Fig. 17.

nie objął całéj drogi całkowania, to można ją podzielić na części Z, T, T_1, T_2, i t. d. i zsumować wartości całek odpowiadające drogom częściowym.

Jeżeli teraz w górnéj granicy napiszemy z, rozumiejąc pod tém z zmienną, a w dolnéj napiszemy z_0 dowolną stałą wartość téj zmiennéj, to wówczas przez symbol $\int_{z}^{z_0} f(z)\,dz$, uważamy jako funkcya granicy wyższéj z, rozumieć będzie można funkcyę zmiennéj z z taką, której pochodną jest $f(z)$. Zastępuje więc ten symbol inny, uważany poprzednio : $\int f(z)dz$, z tą tylko różnicą, że tu stała dowolna jest przez granicę niższą oznaczona. Dowiedzione poprzednio twierdzenie, że całka określona na różnych drogach całkowania ma tę samą wartość, tutaj przybiera takie znaczenie że funkcya : $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ jest jednowartościową, t. j. że w punkcie z ma zawsze jedną i tę samą wartość, jakąkolwiek drogą do niej dojdziemy. Zresztą jednowartościowość podobnie jak ciągłość i skończoność téj funkcyi, wywnioskować wprost można z rozwinięcia funkcyi $f(z)$ na szereg, który można całkować, tak że ostatecznie możemy wypowiedzieć twierdzenie :

Funkcya $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ *jest funkcyą doskonałą na téj części płaszczyzny, na której* $f(z)$ *jest doskonałą.*

§ **37. Niektóre ogólne własności funkcyj.** Z rozwinięcia funkcyi na szereg nieskończony :

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z - c) + \dots + \frac{1}{n!.} f^{(n)}(c)(z - c)^n + \dots$$

wywnioskować łatwo że : *wszystkie pochodne funkcyi doskonałéj nie mogą w jednym punkcie być równe zeru*, funkcya bowiem sprowadzałaby się do ilości stałéj. Ztąd zaś wynika że : *funkcya doskonała nie może na pewnéj, choćby najmnieszéj części płaszczyzny mieć wartości stałéj*, wszystkie bowiem jéj pochodne by-

Fig. 18.

łyby zerami w każdym punkcie na téj części płaszczyzny leżącym. Ażeby to jasno wykazać, uważmy szereg punktów dowolnie blizko siebie leżących : Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, i odpowiadające im wartości funkcyi :

$$f_1, f_2, f_3, f_4,$$

wtedy jest :

$$f_1' = \text{gr}\left(\frac{f_2 - f_1}{z_2 - z_1}\right), \quad f_2' = \text{gr}\left(\frac{f_3 - f_2}{z_3 - z_2}\right) \text{ i. t. d.,}$$

$$f_1'' = \text{gr}\left(\frac{f_2' - f_1'}{z_2 - z_1}\right), \quad f_2'' = \text{gr}\left(\frac{f_3' - f_2'}{z_3 - z_2}\right) \text{ i. t. d.;}$$

a jeśli przypuścimy, że funkcya na linii AB ma wartość stałą, widocznem jest, że wszystkie pochodne będą stale równe zeru.

Jeżeli przy wartości $z=c$, funkcya staje się zerem, to wówczas $f(z)$ jest podzielną przez $z-c$, jest :

$$\mathrm{gr}_{z=c}\left(\frac{f(z)}{z-c}\right)=f'(c).$$

Jeżeli $f'(c)$ jest także zerem, to $f(z)$ jest podzielną przez $(z-c)^2$, i :

$$\mathrm{gr}_{z=c}\left[\frac{f(z)}{z-c}\right]^2=\frac{1}{2!}f''(c).$$

W ogólności jeżeli pochodna n^{ta} jest pierwszą niezamieniającą się na zero przy wartości $z=c$, $f(z)$ jest podzielną przez $(z-c)^n$, i :

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathrm{gr}_{z=c}\left[\dfrac{f(z)}{(z-c)^\lambda}\right]=0, \text{ gdy } \lambda<n \\ \mathrm{gr}_{z=c}\left[\dfrac{f(z)}{z(-c)^n}\right]+\dfrac{1}{n!}f^n(c), \text{ t. j. ilości skończonéj.} \end{cases}$$

Gdy równania (11) mają miejsce powiadamy, że funkcya $f(z)$ staje się w punkcie c zerem n razy, czyli, że punkt c jest zerem rzędu n^{tego}.

Z natury rzeczy wynika, że rzęd zera funkcyi doskonałéj nie może być ułamkowym. Łatwo także widzieć, że punkt będący zerem rzędu 1^{tego} dla funkcyi, jest zerem rzędu $(n-1)^{go}$ dla jéj pochodnéj.

Dowiedziemy teraz, *że funkcya jednowartościowa nie może w pewnym punkcie przybierać kilku wartości albo doznawać przerwy w ciągłości nie stając się nieskończoną*, albo inaczej : *funkcya doskonała w okolicy punktu C, a w punkcie C mająca wartość skończoną, jest i w punkcie C doskonałą.*

W tym celu uważmy najpierw, że jeżeli funkcya $f(z)$ jest w punkcie C skończoną, to ma miejsce równanie :

$$(12)\qquad \mathrm{gr}_{z=c}[f(z)(z-c)]=0.$$

Wiedząc to uważmy krzywą (A) i krzywą dowolnie małą (C), tak że $f(z)$ pozostaje doskonałą w obrębie między temi krzywemi zawartym. Funkcya $\dfrac{f(z)-f(t)}{z-t}$ będzie także doskonałą w tym obrębie (*), i

$$\int_{(A)}\frac{f(z)-f(t)}{z-t}dz=\int_{(C)}\frac{f(z)-f(t)}{z-t}dz;$$

co się da pisać :

$$f(t)\left\{\int_{(A)}\frac{1}{z-t}dz-\int_{(C)}\frac{1}{z-t}dz\right\}=\int_{(A)}\frac{f(z)}{z-t}dz-\int_{(C)}\frac{f(z)}{z-t}dz.$$

(*) Tę ciągłość rozumieć tak należy, że funkcya w punkcie C nie przybiera wartości różnéj o ilość skończoną od wartości w punktach punktowi C przyległych, co przy geometryczném przedstawieniu przez powierzchnie (u) i (v) (§ 26) odpowiada odosobnionemu punktowi.

Na pierwszéj stronie całka pierwsza znanym sposobem sprowadzi się do $2\pi i$, druga jest zerem bo edyny punkt krytyczny, t. j. punkt T leży zewnątrz krzywéj (C), będzie więc :

$$(\alpha) \qquad f(t)\, \frac{1}{2\pi i}\int_{(A)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz,$$

Drugą całkę na stronie drugiéj możemy napisać :

$$\int_{(C)} \frac{\dfrac{f(z)(z-c)}{z-t}}{(z-c)}\,dz.$$

Ponieważ zaś na mocy wzoru (12) funkcya $\dfrac{f(z)(z-c)}{z-t}$ jest wewnątrz krzywéj (C) doskonałą, przeto na

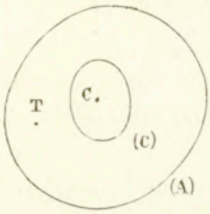

Fig. 19.

mocy wzoru (2) będzie :

$$\int_{(C)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz = \mathrm{gr}_{z=c}\left[\frac{f(z)(z-c)}{z-t}\right] = 0;$$

i wzór (α) zamieni się na :

$$(\beta) \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(A)} \frac{f(z)}{z-t}\,dz,$$

na mocy zaś tego wzoru, można funkcyę uważaną rozwinąć na szereg w okręgu leżącym w obrębie krzywą (A) ograniczonym, i tak dobranym aby punkt C leżał wewnątrz tego okręgu, a ponieważ szereg pozostaje jednowartościowym w punkcie C, więc i funkcya nią być musi. Ostatnie dowiedzione twierdzenia możemy jeszcze w ten sposób wysłowić :

Funkcya jednowartościowa nie może mieć innych punktów krytycznych jak tylko nieskończoności.

Zauważymy tu jeszcze, że gdyby punkt C był rzeczywiście punktem krytycznym funkcyi, wzór (α) utrzymywałby się tak jak jest napisanym i wyrażałby własność funkcyi podobną do własności wyrażonej równaniem (2). Łatwo rozciągnąć to do przypadku, gdy więcej jest takich punktów jak C; a po-

(*) W uważanym przypadku istnienie równania odpowiadającego równaniu (2) jest dowodem, że funkcya nasza jest wewnątrz krzywéj (A) doskonałą; w ogólności jednak równanie takie nie jest dostatecznym warunkiem doskonałości funkcyi, ma ono np. miejsce, gdy krzywa obejmuje dwa punkta krytyczne takie, że całki po krzywych, z których każda jeden z tych punktów obejmuje, wzięte w jednakowych kierunkach są sobie równe ze znakami przeciwnymi, choć funkcya oczywiście nie jest wtedy doskonałą.

nieważ nadto pochodna jakiegokolwiek rzędu funkcyi doskonałéj, jest w tym samym obrębie doskonałą możemy więc wypowiedzieć ogólne twierdzenie :

Jeżeli w ograniczeniu (K) *złożoném z ilukolwiek krzywych funkcya* $f(z)$ *jest doskonałą, to jest :*

$$f^{(n)} = \int_{(K)} \frac{f(z)}{(z-t)^{n+1}}\, dz, \tag{13}$$

który to wzór utrzymuje się i dla $n=0$.

Wychodząc ze wzoru (2) można jeszcze dowieść, że *funkcya doskonała na całéj płaszczyznie w punkcie nieskończenie odległym musi się stawać nieskończoną.* Gdyby bowiem tak nie było, to napisawszy wzór (2) w kształcie :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(R)} \frac{f\ (z)}{1-\frac{t}{z}}\,\frac{dz}{z}\,.$$

i przypuszczając że krzywa (R) leży w nieskończonéj odległości, t. j. że z na niéj ma wartości nieskończenie wielkie, wypadłoby, że $f(t)$ zupełnie od t nie zależy, t. j. jest ilością stałą. Wiedzieliśmy w saméj rzeczy, że wielomian algebraiczny całkowity i wymierny, funkcya wykładnicza, wstawa i dostawa, stają się nieskończonymi w punkcie nieskończenie odległym. Łącząc z sobą dwa ostatnio dowiedzione twierdzenia, możemy powiedzieć :

Funkcya jednowartościowa na całej płaszczyznie (*) *musi w jednym lub kilku punktach stawać się nieskończoną.*

Ztąd zaś wynika, że taka funkcya musi także stawać się zerem ponieważ odwrotność jéj $\frac{1}{f(z)}$ będąca także funkcyą jednowartościową, musi stawać się nieskończonością, a nawet w ogólności :

Funkcya jednowartościowa na całéj płaszczyznie musi w jednym lub kilku punktach przyjmować dowolnie daną wartość A, *gdyż* $f(z)$A musi się stawać w pewnych punktach zerem.

Pozostaje nam jeszcze określić bliżéj nieskończoności funkcyi. Jeżeli punkt C jest nieskończonością funkcyi $f(z)$ pierwszego rodzaju, to $\frac{1}{f(z)}$ w obrębie punktu C pozostaje doskonałą, a w samym punkcie C staje się zerem, i powiadamy, że *punkt* C *jest nieskończonością rzędu* n^{tego} *dla funkcyi* $f(z)$, *gdy on jest zerem tegoż rzędu dla* $\frac{1}{f(z)}$; *mają wtedy miejsce równania :*

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{gr}_{z=c}[(z-c)^{\lambda} f(z)] = \infty, \quad \text{gdy} \quad \lambda < n, \\ &\mathrm{gr}_{z=c}[(z-c)^{n} f(z)] = n!\,\frac{1}{\dfrac{d^n\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)}{dz}}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

t. j. ilości skończonéj różnicy od zera.

(*) Funkcya, która przestaje być jednowartościową tylko w punktach krytycznych, nazywa się jednak jednowartościową, co innego jest bowiem funkcya wielowartościowa, która w każdym punkcie ma kilka różnych wartości, i dla któréj punktami krytycznymi są te punkta, w których liczba różnych wartości jest mniejszą jak w innych.

Gdy punkt C jest nieskończonością drugiego rodzaju, t. j. gdy w tym punkcie $f(z)$ przestaje być jednowartościową, wtedy $\frac{1}{f(z)}$ nie jest w tym punkcie doskonałą, nie rozwija się na szereg, i dlatego nie możemy stosować do tych punktów powyżéj podanéj teoryi; łatwo przytém przewidzieć z góry, że nieskończoność taka nie może być żadnego określonego stopnia, i że nie istnieją dla niej równania odpowiednie równaniom (11'), pierwsze bowiem strony takich równań przybierają różne wartości, gdyż $f(z)$ w tym punkcie ma różne wartości.

Z powyższego możemy wyciągnąć ten ważny wniosek: *dwie funkcye jednowartościowe na całéj płaszczyznie mające jednakowe zera i nieskończoności* (t. j. w tych samych punktach i takiego samego stopnia) *mogą się różnić tylko o ilość stałą, występującą jako czynnik mnożący.* Iloraz bowiem tych dwóch funkcyj, nie stając się nigdzie nieskończonym, jest ilością stałą.

§ 38. **Inne szeregi potęgowe.** Dowiedziemy tu najwpierw twierdzenia: *funkcya doskonała zewnątrz okręgu zakreślonego z punktu C, rozwija się w obrębie doskonałości na szereg uporządkowany według odjemnych potęg:* $(z-c)$.

Chociaż rozwinięcie to zawiera się jako szczególny przypadek w rozwinięciu na szereg w dwie strony nieskończony, udowodnimy je jednak oddzielnie przez wprowadzenie płaszczyzny (Z').

Niech będzie funkcya doskonała na części płaszczyzny ograniczonéj wewnątrz przez krzywą MNPQ. Można rozwijać ją na szeregi według rosnących potęg w okręgach zakreślonych z punktów leżących zewnątrz téj linii, ale jeżeli chcemy mieć rozwinięcie odniesione do punktu C wewnątrz

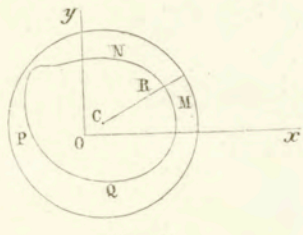

Fig. 20.

linii, należy zakreślić okrąg promieniem R takim aby on objął linię MNPQ: funkcya zewnątrz tego okręgu będzie doskonałą. Odnieśmy się do płaszczyzny (Z') określonéj podstawieniem: $z'=\frac{1}{z-c}$ i połóżmy:

$$f\left(c+\frac{1}{z'}\right)=\varphi(z'), \qquad t-c=\frac{1}{t'}, \qquad R=\frac{1}{R'},$$

gdzie t odpowiada punktowi zewnątrz okręgu (R) leżącego, a R' jest promieniem okręgu zakreślonego z początku na płaszczyznie (Z'), odpowiadającego okręgowi (R): t' odpowiada punktowi wewnątrz okręgu (R') leżącemu.

Ponieważ $\varphi(z')$ jest wewnątrz okręgu (R')doskonałą; zatém na mocy poprzedniego:

$$\varphi(t')=A'_0+A'_1t'+\ldots A'_nt'^n+\ldots$$

gdzie

$$A'_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{(R')}\frac{\varphi(z')}{z'^{n+1}}dz', \qquad A'_0=\varphi(o),$$

a uskuteczniając tu podstawienie odwrotne i zamiast A'_n pisząc dla symetryi A_n, otrzymamy:

(14) $$f(t) = A_0 + A_{-}(t-c)^{-1} + \ldots + A_{-n}(t-c)^{-n} + \ldots$$

(15) gdzie $$A_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(R)} f(z)(z-c)^{n-1}dz, \qquad A_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(R)} f(z)dz = f(\infty);$$

pamiętać należy, że tu $\int_{(R)}$ rozumiemy wziętą w kierunku odjemnym ograniczenia, które jest wewnętrzne, a więc w kierunku dodatnym okręgu (R), jako krzywéj saméj w sobie. Na szereg taki rozwinąć można np. ułamek algebraiczny właściwy, funkcye jak: $e^{\frac{1}{z-c}}$, $\operatorname{wst}\left(\frac{1}{z-c}\right)$ i t. p.

Przejdziemy teraz do rozwinięcia na szereg w dwie strony nieskończony. Niech dana funkcya $f(z)$ będzie doskonałą w ograniczeniu złożoném z krzywych (A) i (B).

Zakreślmy z punktu C dwa okręgi (R) i (R_1) tak, aby między nimi funkcya była doskonałą. Uwa-

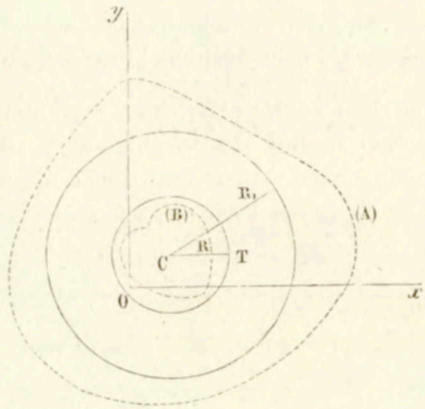

Fig. 21.

żając układ tych dwóch okręgów za ograniczenie, możemy napisać na mocy wzoru (13):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{(R_1)} \frac{f(z)}{z-t}dz - \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-t}dz\right\}.$$

Dla pierwszéj całki $\operatorname{mod}[z-c] > \operatorname{mod}[t-c]$, można więc ją przekształcić na szereg podobnym sposobem jak w § 34. Dla drugiéj całki $\operatorname{mod}[t-c] > \operatorname{mod}[z-c]$, zważywszy zatém, że można napisać:

$$-\frac{1}{z-t} = \frac{\frac{1}{t-c}}{1-\frac{z-c}{t-c}} = \frac{1}{t-c} + \frac{z-c}{(t-c)^2} + \frac{(z-c)^2}{(t-c)^3} + \ldots$$

pomnożywszy wyrazy tego szeregu przez $f(z)$ i zcałkowawszy, otrzymamy ostatecznie żądane rozwinięcie:

(16) $$f(t) = \begin{cases} A_0 + A_1(t-c) + \ldots + A_n(t-c)^n + \ldots \\ \quad + A_{-1}(t-c)^{-1} + \ldots + A_{-n}(t-c)^{-n} + \ldots \end{cases}$$

gdzie tak dla n dodatnych jak i odjemnych:

(17)
$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(K)} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz,$$

pod K rozumiemy tu dowolną krzywą zamkniętą między (A) i (B) leżącą, nawet jedną z nich.

Rozwinięcie (3) i (14) zawierają się jako szczególne przypadki w rozwinięciu (16). Dla rozwinięcia (3) jest to rzeczą widoczną, wykażemy to dla rozwinięcia (14).

W tym celu uważmy funkcyę doskonałą zewnątrz okręgu (R); nie możemy napisać: $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-r} dz$, ponieważ wzór ten wyprowadzony został z wzoru: $\int \frac{f(z)-f(t)}{z-t} dz = 0$, a według twierdzenia w § 32 wypowiedzianego, ograniczenie pojedyńcze wewnętrzne jest wyjątkowym przypadkiem, i aby można było całkę funkcyi doskonałéj przyrównać do zera należy dołączyć krzywą ograniczającą zewnętrznie.

Będzie zatém w tym przypadku:

(α)
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{(\rho)} \frac{f(z)}{z-t} dz - \int_{(R)} \frac{f(z)}{z-t} dz \right\},$$

gdzie (ρ) oznacza wielkość dowolną w granicy równą nieskończenie wielkiej (*).

Druga całka przekształcona na szereg daje nam część z wykładnikami odjemnymi, pierwsza ze względu nat o, że można w niéj pod (ρ) rozumieć okrąg zakreślony z punktu T*i* założyć $\rho = \infty$, sprowadzi się do $f(\infty)$, jak w tym przypadku być powinno.

We wzorze (α) wartość funkcyi wyrażoną jest przez dwie całki, gdybyśmy jednak odnieśli się do płaszczyzny (Z') i zachowując poprzednie oznaczenia przekształcali równanie:

$$\varphi(t') = \int_{(R')} \frac{f(z')}{z'-t'} dz'$$

otrzymalibyśmy wyrażenie téj wartości przez jednę całkę następujące:

(β)
$$f(t) = -\int_{(R)} \frac{f(z)}{(t-c)-(z-c)} \frac{t-c}{z-c} dz,$$

we wzorach (α) i (β) pod $\int_{(R)}$ rozumiemy całkę wziętą po krzywéj (niejako po ograniczeniu) w kierunku dodatnym. Zgodność tych wzorów łatwo spostrzedz gdy zauważymy, że jest tożsamościowo:

$$\frac{1}{(t-c)-(z-c)} \frac{t-c}{z-c} = \frac{1}{z-c} + \frac{1}{(z-c)-(t-c)} = \frac{1}{z-c} + \frac{1}{z-c}$$

podstawiamy to we wzór (β) i otrzymujemy dwie całki, druga pozostaje bez zmiany, w pierwszej zamiast okręgu (R) bierzemy okrąg (ρ), a zamiast $z-c$ piszemy $z-t$, co jest rzeczą obojętną, bo zawsze okrąg (ρ) możemy wyobrazić sobie takim, że obejmuje i punkt C i punkt T.

(*) Gdyby punkt nieskończenie odległym był punktem krytycznym, wówczas przypuściwszy, że w okręgu (R) leżą wszystkie inne punkta krytyczne, ρ byłoby także ilością dowolną, ale nie mogłoby być równe nieskończenie wielkiéj.

§ **39.** Gdyby w okręgu (R) leżała jedna tylko nieskończoność funkcyi rzędu n^{go}, i ta nieskończoność właśnie obraną była za środek okręgu, wówczas:

$$\int_{(R)} f(z)(z-c)^{\lambda} dz = 0 \qquad \text{gdy} \quad \lambda \overline{\gtrless} n,$$

a szereg (16) przyjąłby kształt:

$$f(t) = \frac{A - n}{(t-c)^n} + \ldots A_0 + A_1(t-c) + \ldots \tag{18}$$

ponieważ nadto okrąg (R) może być dowolnie mały, przeszedłszy więc do granicy możemy uważać, że rozwinięcie (18) stosuje się do każdego punktu w okręgu (R_1). Dowieść nadto ściśle można że stosuje się ono i do samego punktu C, t. j. że funkcya w punkcie C staje się tak nieskończoną jak wyrażenie:

$$\frac{A_{-n}}{(t-c)^n} + \ldots + \frac{A - 1}{(t-c)} + A_0. \tag{γ}$$

W tym celu uważmy, że jeżeli funkcya w punkcie C staje się nieskończoną rzędu n^{go}, to wartość jéj składa się w ogólności z części pewnéj skończonèj, z części nieskończonych rzędu niższego jak n^{ty}, i nakoniec z części nieskończonéj rzędu n^{go}. W szeregu który oznaczymy przez S, jest w punkcie C część nieskończona rzędu n^{go} i inne, należy tylko dowieść, że te części są odpowiednio jednakowe w funkcyi i w szeregu.

Ażeby tego dowieść dla części nieskończonych rzędu n^{go}, należy okazać że:

$$\mathrm{gr}_{t=c}[f(t)(t-c)^n] = \mathrm{gr}_{t=c}[S(t-c)^n],$$

wartości bowiem tych granic zależą tylko od części nieskończonych rzędu n^{go}. Jest:

$$\mathrm{gr}_{t=c}[S(t-c)^n] = A_{-n},$$

a z drugiéj strony, ponieważ funkcya: $f(t)(t-c)^n$ jest doskonałą w punkcie C i jego okolicy, przeto na mocy wzoru (2) jest:

$$[f(t)(t-c)^n]_{t=c} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{[f(t)(t-c)^n]}{t-c} dt = \frac{1}{2\pi i}\int f(t)(t-c)^{n-1} dt = A_{-n}.$$

Tak więc dowiedliśmy, że części nieskończone rzędu n^{go} w funkcyi i w szeregu są jednakowe. Uważmy następującą część nieskończoną w funkcyi, nie może ona być rzędu ułamkowego, bo funkcya $f(t) - \frac{A_{-n}}{(t-c)^n}$ rozwija się na szereg: $D - \frac{A_{-n}}{(t-c)^n}$; gdyby zaś w punkcie C była nieskończoną rzędu ułamkowego, liczba wyrazów zawierająca potęgi odjemne $(t-c)$ nie mogłaby być skończoną. Tak więc w funkcyi część następująca po części nieskończonéj rzędu n^{go} będzie w ogólności rzędu $(n-1)^{go}$, i łatwo dowieść, że będzie równą części nieskończonéj tegoż rzędu w szeregu. W ogólności wartość funkcyi w punkcie C mieć będzie ten sam skład co wyrażenie (γ), i każda po szczególe część w funkcyi będzie równa odpowiedniéj części w (γ), przypuściwszy bowiem, żeśmy dowiedli tożsamości rzędu $(n-\lambda)^{go}$, a chcemy dowieść tożsamości rzędu $(n-\lambda-1)^{go}$, uważamy funkcyę:

$$f(t) - \frac{A_{-n}}{(t-c)^n} - \ldots - \frac{A_{-n+\lambda}}{(t-c)^{n-\lambda}} = \varphi(t),$$

rozwijającą się na szereg; którego pierwszym wyrazem jest $\frac{A_{-n+\lambda+1}}{(t-c)^{n-\lambda-1}}$, i dowodzimy podobnie jak poprzednio, współczynnik bowiem $A_{-n+\lambda+1}$, łatwo przekształcić do naszego przypadku, uważając że:

$$A_{-n+\lambda+1} = \frac{1}{2\pi i}\int \left\{\varphi(t) + \frac{A_{-n}}{(t-c)^n} + \dots + \frac{A_{-n+\lambda}}{(t-c)^{n-\lambda}}\right\}(t-c)^{n-\lambda-2}dt$$

albo:

$$A_{-1+\lambda+1} = \frac{1}{2\pi i}\int \varphi(t)(t-c)^{n-\lambda-2}dt,$$

inne bowiem całki sprowadzają się do kształtu:

$$\int \frac{B\,dt}{(t-c)^{\mu}}, \qquad \text{gdzie } B = \text{stałéj}, \qquad \text{a } \mu \geqq 2,$$

kładąc zaś $(t-c) = re^{\theta i}$, i za krzywą całkowania przyjmując okrąg (r), widzimy że jest:

$$\frac{Bi}{r^{\mu-1}}\int_0^{2\pi} e^{-(\mu-1)\theta i}d\theta = 0.$$

Rozwinięcia: (16) i (18) zawierają się w inném ogólniejszém rozwinięciu, które potém poznamy:

Niech funkcya będzie doskonałą na części płaszczyzny ograniczonéj zewnętrznie przez krzywą (A), a wewnętrznie przez krzywe (C_1), (C_2) ... (C_m), z których każda niech będzie okręgiem obejmującym jedną nieskończoność funkcyi, i zakreślonym z tejże nieskończoności jako ze środka. Wtedy:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(A)} \frac{f(z)}{(z-t)}dz - \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}\int_{(C_\lambda)} \frac{f(z)}{z-t}dz.$$

Zakreśliwszy z punktu dowolnego C, okrąg (R) wewnątrz krzywéj (A), i każdą z całek zamieniwszy na szereg, otrzymamy rozwinięcie:

$$(19) \qquad f(t) = \left\{\begin{array}{l} A_0 + A_1(t-c) + \dots + A_n(t-c)^n + \dots \\ \quad + A^{(1)}_{-1}(t-c_1)^{-1} + \dots + A^{(1)}_{-n}(t-c_1)^{-n} + \dots \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad + A^{(m)}_{-1}(t-c_m)^{-1} + \dots + A^{(m)}_{-n}(t-c_m)^{-n} + \dots \end{array}\right.$$

stosujące się do punktów wewnątrz okręgu (R).

Jeżeli pod n_λ rozumieć będziemy stopień nieskończoności odpowiadający punktowi C_λ, to szeregi potęg odjemnych będą każdy zatrzymywać się na wyrazie:

$$A_{-n_\lambda}^{(\lambda)}(t-c_\lambda)^{-n_\lambda}.$$

Z rozwinięcia (19) przechodzimy do rozwinięcia (16) przypuszczając, że jeden jest tylko punkt krytyczny C_λ, i że ten punkt właśnie jest środkiem okręgu (R).

Uwaga. Widzieliśmy powyżéj, że pochodna jest skończoną w punktach, w których funkcya jest skończoną; różniczkowanie rozwinięcia (18), (które różniczkować można: szereg bowiem potęg dodatnych jest zbieżny, a wyrazów zawierających potęgi odjemne jest liczba skończona), pokazuje nam że w punkcie, w którym funkcya jest nieskończonością rzędu n^{go}, pochodna jest nieskończoną rzędu $(n+1)^{go}$.

III. O INNYCH ROZWINIĘCIACH FUNKCYJ JEDNOWARTOŚCIOWYCH.

§ 40. **O pozostałościach.** Widzieliśmy powyżéj, że całka wzięta po krzywéj, niezawierającéj żadnego punktu krytycznego funkcyi, jest równą zeru. Jeżeli zaś wewnątrz krzywéj leżą punkta krytyczne, wartość całki nie jest w ogólności zerem: wartość ta (*) podzielona przez $2\pi i$ nazywa się *pozostałością względem téj krzywéj* i znaczy się:

(1) $$\mathrm{Poz}_{(\mathrm{K})}[\mathrm{F}(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathrm{K})} \mathrm{F}(z)\,dz.$$

Pozostałości pierwszy uważał Cauchy i nazwał je *résidu intégral*, i my wprowadzamy je tutaj, zastrzegając jednak, że uważanie ich nie jest niezbędném, bo wszystkie twierdzenia jakie tu dowiedziemy, mogłyby być dowiedzione i bez uważania pozostałości, gdyż, jak to widać od razu, pozostałości są tylko przedstawieniem całek w odmiennym nieco kształcie, w niektórych rachunkach dogodniejszym do użycia. Jeżeli wewnątrz krzywéj (K) leży jeden tylko punkt krytyczny funkcyi γ, to pozostałość względem tej krzywéj możemy nazwać pozostałością względem punktu γ. W ogólnym przypadku, gdy krzywa (K) zawiera kilka punktów krytycznych będzie na mocy ogólnych własności całek:

(2) $$\mathrm{Poz}_{(\mathrm{K})}[\mathrm{F}(z)] = \Sigma \mathrm{Poz}_{(\gamma)}[\mathrm{F}(z)],$$

gdzie znak summy odnosi się do wszystkich punktów krytycznych γ, wewnątrz krzywéj (K) leżących.

Pod symbolem:

$$\mathrm{Poz}_{(\mathrm{K})} f(z)[\varphi(z)],$$

rozumieć będziemy summę pozostałości funkcyi $f(z).\varphi(z)$, względem wszystkich punktów krytycznych do funkcyi $\varphi(z)$ należących i wewnątrz krzywéj (K) leżących.

Łatwo widzieć, że jest:

(3) $$\mathrm{Poz}_{(\mathrm{K})}[f(z)\varphi(z)] = \mathrm{Poz}_{(\mathrm{K})}[f(z)]\varphi(z) + \mathrm{Poz}_{(\mathrm{K})}(z)[\varphi(z)],$$

jeżeli tylko wewnątrz krzywéj (K) nie mają funkcye $f(z)$ i $\varphi(z)$ wspólnego punktu krytycznego.

Jeżeli odniesiemy się do wzoru (16, § 38) spostrzeżemy, że *pozostałość funkcyi względem pewnego punktu krytycznego jest współczynnikiem przy potędze pierwszéj odjemnéj w rozwinięciu do tego punktu odniesioném.* To określenie jest czasami dogodném dla znalezienia wyrażenia na pozostałość. W przypadku, gdy uważana funkcya w punkcie krytycznym ma nieskończoność rodzaju 1^{go}, pozostałość można jeszcze inaczéj wyrazić. Niech nieskończoność będzie rzędu n^{tego}, wtedy $\mathrm{F}(z)(z-\gamma)^n$ będzie

(*) Wartość ta jest wartością całki wziętéj w kierunku dodatnym ograniczenia.

funkcyą doskonałą w punkcie C i jego okolicy, i będzie :

(4) $$\text{Poz}_{\gamma}[F(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(z)(z-\gamma)^n}{(z-\gamma)^n}dz = \frac{1}{(n-1)!}D^{(n-1)}_{z=\gamma}[F(z)(z-\gamma)^n].$$

Gdy nieskończoność jest rzędu 1^{go}, wtedy :

(5) $$\text{Poz}_{\gamma}[F(z)] = \text{gr}_{\varepsilon=0}[F(\gamma+\varepsilon)\varepsilon].$$

Np. funkcya $\frac{1}{1+z^2}$ którą pisać także można $\frac{1}{(z+i)(z-i)}$, ma dwie nieskończoności stopnia 1^{go}, i będzie :

$$\text{Poz}_{(+i)}\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = \frac{1}{2i}, \quad \text{Poz}_{(-i)}\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = -\frac{1}{2i}.$$

Zrobimy tu jeszcze kilka uwag o pozostałości odnoszącéj się do punktu nieskończenie odległego. Ponieważ, jak widzieliśmy poprzednio, całka po ograniczeniu wewnętrzném tylko ten punkt obejmującém, nie jest w ogólności zerem, chociażby punkt nieskończenie odległy nie był punktem krytycznym, przeto w każdym razie uważać należy pozostałość względem tego punktu. Aby poznać jéj wartość należy odnieść się do płaszczyzny (z'), określonéj przez podstawienie $z' = \frac{1}{z}$, a odwołując się przy przekształceniu pozostałości do poprzednio poznanego przekształcenia całek, położywszy $f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z')$, napiszemy :

$$\text{Poz}_{(\infty)}[f(z)] = \text{Poz}_{(0)}\left(\frac{\varphi(z')}{z'^2}\right).$$

W najogólniejszym przypadku, $\varphi(z')$ w okolicy punktu zero rozwija się na szereg :

(α) $$\varphi(z') = \ldots + A'_{-n}z'^{-n} + \ldots + A'_{-1}z'^{-1} + A'_0 + A'_1 z' + \ldots$$

ztąd :

$$\frac{\varphi(z')}{z'^2} = \ldots + A'_{-1}z'^{-3} + A'_0 z'^{-2} + A'_1 z'^{-1} + \ldots$$

a ostatecznie :

$$\text{Poz}_{(\infty)}[f(z)] = A'_1.$$

Widzimy więc że ta pozostałość równa się współczynnikowi przy pierwszéj potędze dodatnéj w rozwinięciu (α) ; gdybyśmy jednak w témże rozwinięciu wprowadzili zmienną z, (przez co otrzymalibyśmy rozwinięcie funkcyi $f(z)$ odniesione do punktu nieskończenie odległego) spostrzeglibyśmy, że pozostałość względem tego punktu, zgodnie z poprzednio podaném prawidłem jest współczynnikiem przy pierwszéj potędze odjemnéj.

Jeżeli krzywa (K) obejmuje wszystkie punkta krytyczne funkcyi leżące w odległości skończonéj, to :

(6) $$\text{Poz}_{(K)}[F(z)] = -\text{Poz}_{(\infty)}[F(z)].$$

Ze wzoru tego wyprowadzimy ciekawą własność : *Liczba nieskończoności funkcyi jednowartościowéj na* *całéj płaszczyznie, nie wyłączając punktów krytycznych* (*), *jest równa liczbie zer téj funkcyi*. Prawo to rozumieć należy w ten sposób, że jeżeli funkcya w pewnym punkcie jest zerem lub nieskończonością rzędu n^{tego}, uważamy, że w tym punkcie staje się funkcya n razy zerem lub odpowiednio nieskończonością. Własność tę łatwo uogólnić i powiedzieć : *funkcya jednowartościowa na całéj płaszczyznie, nie wyłączając punktów krytycznych, tyle razy przyjmuje każdą wartość, ile razy staje się nieskończoną ;* albowiem niech tą wartością będzie M, funkcya $f(z)-M$, także jednowartościowa na całéj płaszczyznie, a tyleż razy nieskończona co $f(z)$, musi taką samą liczbę razy stawać się zerem.

Niech taką funkcyą będzie $f(z)$, funkcya : $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ będzie miała tylko nieskończoności rodzaju pierwszego, w każdym punkcie będącym zerem lub nieskończonością dla funkcyi $f(z)$. Pozostałość względem takiego punktu łatwo znaleźć, i tak : jeżeli punkt c jest zerem rzędu n^{tego} dla funkcyi $f(z)$, to będzie :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{nA_n(z-c)^{n-1}+\ldots}{A_n(z-c)^n+A_{n+1}(z-c)^{n+1}+\ldots}=\frac{n}{z-c}+\Sigma B_\lambda(z-c)^\lambda\ (^{**}),$$

zatém pozostałość będzie n.

Gdy punkt γ jest nieskończonością rzędu m^{tego} dla $f(z)$, to :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{(-m)A_{-m}(z-\gamma)^{-m+1}+\ldots}{A_{-m}(z-\gamma)^{-m}+\ldots}=\frac{-m}{z-\gamma}+\Sigma B_\lambda(z-\gamma)^\lambda,$$

Pozostałością będzie tu $-m$.

Uwzględniając równanie (2) i podstawiając znalezione wartości w równanie (6) :

$$(\beta)\qquad \Sigma n-\Sigma m=-\,\mathrm{Poz}_{(\infty)}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

Zajmiemy się teraz pozostałością występującą w równaniu (β). Przekształcamy ją dla płaszczyzny (z'), odnosząc się do całki, będzie :

$$\mathrm{Poz}_{(\infty)}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(K)}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_{(K')}\left(-\frac{\varphi'(z').z'^2}{\varphi(z')}\right)\frac{dz'}{z'^2}=\mathrm{Poz}_{(0)}\left(\frac{\varphi'(z')}{\varphi(z')}\right).$$

Jeżeli $f(z)$ w punkcie nieskończenie odległym jest skończoną różną od zera, wtedy równanie (β) przyjmuje kształt :

$$(\beta_1)\qquad \Sigma n-\Sigma m=0,\qquad \Sigma n=\Sigma m.$$

Jeżeli $f(z)$ jest zerem rzędu n_0, to :

$$(\beta_2)\qquad \Sigma n-\Sigma m=-n_0,\qquad n_0+\Sigma n=\Sigma m.$$

(*) Funkcya taka nie ma nieskończoności rodzaju drugiego.

(**) Iloraz przedstawiamy w tym kształcie na mocy prawa na dzielenie wielomianów uporządkowanych według rosnących potęg : nie dążymy tu do rozwinięcia na szereg, chodzi nam tylko o wskazanie téj części funkcyi która staje się nieskończoną, dlatego szeregi możemy przedstawić w kształcie : $\dfrac{n+\Phi.(z-c)}{(z-c)+\Psi.(z-c)^2}$ gdzie Φ i Ψ uważamy jako współczynniki.

Jeżeli nakoniec $f(z)$ jest nieskończonością rzędu m_0, to :

$$(\beta_3) \qquad \Sigma n - \Sigma m = m_0, \qquad \Sigma n = m_0 + \Sigma m.$$

Równania (β_1), (β_2), (β_3) dowodzą naszego twierdzenia.

§ 41. Rozwinięcie funkcyi jednowartościowéj na szereg nieskończony ułamków. Kładąc więc we wzorze (3) $\varphi(z) = \frac{1}{z-t}$, otrzymamy :

$$\mathrm{Poz}_{(K)}\left(\frac{f(z)}{z-t}\right) = \mathrm{Poz}_{(K)}\frac{[f(z)]}{z-t} + \mathrm{Poz}_{(K)}\frac{f(z)}{(z-t)}.$$

Jeżeli punkt t leży wewnątrz krzywéj (K), ostatni wyraz na mocy wzoru (5) równa się $f(t)$, i będzie

$$(7) \qquad f(t) = \mathrm{Poz}_{(K)}\frac{[f(z)]}{t-z} + \mathrm{Poz}_{(K)}\left(\frac{f(z)}{z-t}\right).$$

Z tego wzoru wyprowadzić można rozwinięcie funkcyi na szereg ułamków. Odróżniamy tu tylko dwa przypadki, gdy liczba nieskończoności jest skończona, i gdy liczba ich jest nieskończona.

W pierwszym przypadku, możemy krzywą (K) nakreślić w ten sposób, aby ona objęła wszystkie nieskończoności funkcyi uważanéj, wtedy :

$$(8) \qquad f(t) = \Sigma_\gamma \,\mathrm{Poz}_{(\gamma)}\left(\frac{f(z)}{t-z}\right) - \mathrm{Poz}_{(\infty)}\left(\frac{f(z)}{z-t}\right).$$

Uważmy teraz, że wyraz $\mathrm{Poz}_{(\gamma)}\left(\frac{f(z)}{t-z}\right)$, w przypadku gdy γ jest nieskończonością rzędu 1go, sprowadza się do :

$$\frac{A\gamma}{t-\gamma}, \quad \text{gdzie } A_\gamma = \mathrm{gr}_{\varepsilon=0}\,[f(\gamma+\varepsilon)\varepsilon] = \text{stałéj}.$$

Gdy γ jest w ogólności nieskończonością rzędu n^{tego} dla funkcyi $f(z)$ to :

$$\mathrm{Poz}_\gamma\left(\frac{f(z)}{t-z}\right) = \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{D}^{(n-1)}_{z=\gamma}\left[\frac{f(z)(z-\gamma)^n}{t-z}\right].$$

Różniczkując iloczyn dwóch funkcyj $f(z)(z-\gamma)^n$ i $\frac{1}{t-z}$, podług symbolicznego wzoru Leibnitz'a (*), zważywszy że jest :

$$\mathrm{D}^{(\lambda-1)}\left[\frac{1}{t-z}\right] = (\lambda-1)!\,\frac{1}{(t-z)^\lambda},$$

(*) Wzór ten polega na upodobnieniu drugiéj strony rozwinięcia dwumianu Newton'a, do wyrażenia pochodnéj iloczynu dwóch funkcyi jest on następujący :

$$\mathrm{D}^{(n)}_z(w.w_1) = w^0 w_1{}^n + (n)_1 w_1 w^{n-1} + (n)_2 w^2 w_1{}^{n-2} + \ldots\ldots,$$

gdzie pod w^λ rozumieć należy pochodną rzędu λ, a $(n)_1$, $(n)_2$ ... są współczynniki w rozwinięciu Newton'a.

otrzymamy po przerobieniu współczynników liczbowych :

$$(9) \qquad \mathrm{Poz}_{(\gamma)}\left(\frac{f(z)}{t-z}\right)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{\frac{1}{(n-\lambda)!}\,\mathrm{D}^{(n-\lambda)}_{(z=\gamma)}[f(z)(z-\gamma)^n]}{(t-\gamma)^\lambda}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{\mathrm{A}_\gamma^{(\lambda)}}{(t-\gamma)},$$

zkąd widzimy, że w ogólności każda pozostałość sprowadza się do summy ułamków, których liczniki są ilościami stałemi, a mianowniki potęgami z różnicy między uważaną wartością zmiennéj, a tą, przy któréj funkcya staje się nieskończoną. Część ta nie różni się niczém od części ułamkowéj rozwinięcia (19, § 39), i gdybyśmy przypuścili, że w punkcie γ_0 funkcya jest nieskończoną nieokreślonego rzędu, t. j. że punkt γ_0 jest nieskończonością rodzaju drugiego, odpowiadająca pozostałość wyrażałaby się szeregiem nieskończonym. Uważając bowiem rozwinięcie w okolicy γ_0 :

$$f(z)=\ldots\ \mathrm{A}_{-1}(z-\gamma_0)^{-1}+\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1(z-\gamma_0)+\ldots$$

i zważywszy, że można zawsze z uważać tak blizkie punktu γ_0, że t, jakkolwiek byłoby tegoż punktu blizkie, dalsze jednak będzie jak z, napiszemy :

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{(t-\gamma_0)-(z-\gamma_0)}=\frac{1}{t-\gamma_0}+\frac{z-\gamma_0}{(t-\gamma_0)^2}+\ldots$$

mnożąc zaś te szeregi przez siebie, otrzymamy rozwinięcie funkcyi $\frac{f(z)}{t-z}$, współczynnikiem przy pierwszéj potędze odjemnéj będzie szereg nieskończony zbieżny :

$$\frac{\mathrm{A}-1}{t-\gamma_0}+\frac{\mathrm{A}-2}{(t-\gamma_0)^2}+\ldots,\ \text{c.b.d.o.}$$

Zajmiemy się teraz drugą częścią rozwinięcia (8), t. j. pozostałością odnoszącą się do punktu nieskończenie odległego. W tym celu odnieśmy się do płaszczyzny (z'), będzie :

$$\mathrm{Poz}_{(\infty}\left(\frac{f(z)}{z-t}\right)=-\mathrm{Poz}_{(0)}\left(\frac{t'\varphi(z')}{(t'-z')z'}\right).$$

Przypuśćmy najpierw, że zero jest niekończonością rzędu n^{tego} ; wtedy będzie :

$$\varphi(z')=\mathrm{A}'_{-n}z'^{-n}+\ldots+\mathrm{A}'_{-1}z'^{-1}+\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1z+\ldots$$

nadto można zawsze przypuścić t' dalsze jak z', i będzie :

$$\frac{t'}{t'-z'}=1+\frac{z'}{t'}+\frac{z'^2}{t'^2}+\ldots$$

Ztąd znajdziemy rozwinięcie, a biorąc współczynnik :

$$\mathrm{A}_{-n}t'^{-n}+\ldots+\mathrm{A}_{-1}t'^{-1}+\mathrm{A}_0,$$

i pisząc w nim t zamiast t', otrzymamy ostatecznie :

$$(10) \qquad f(t)=\Sigma_\gamma\left(\frac{\mathrm{A}_\gamma^{(1)}}{t-\gamma}+\ldots+\frac{\mathrm{A}_\gamma{}^n}{(t-\gamma^n)}\right)+\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_{-1}t+\ldots\mathrm{A}_{-n}t^n.$$

Gdy punkt nieskończenie odległy jest nieskończonością rodzaju drugiego, szereg potęg całkowitych jest nieskończony.

Z rozwinięcia (10) czytamy, że funkcya jednowartościowa w każdym punkcie krytycznym i mająca punktów tych liczbę skończoną jest algebraiczną wymierną.

Łatwo zastosować te kilka prostych przykładów jak : ułamki algebraiczne, i znane funkcye przestępne.

§ **42**. Przystępujemy teraz do drugiego, bardziéj dla nas interesującego przypadku, gdy liczba nieskończoności funkcyi jest nieskończenie wielką. Uważmy znowu równanie (7) :

$$f(t) = \mathrm{Poz}_{(K)} \frac{[f(z)]}{t-z} + \mathrm{Poz}_{(K)} \left(\frac{f(z)}{z-t}\right).$$

Wyobraźmy sobie pewną krzywą (K) nakreśloną, i pierwszy wyraz strony drugiéj rozwińmy tak, jak to było pokazano w poprzednim § : każda nieskończoność da nam wtedy jeden lub kilka ułamków znanego kształtu; następnie wyobraźmy sobie drugą krzywą (K_1) obejmującą krzywą (K) : do poprzednio otrzymanéj summy ułamków dołączymy te ułamki, które odnoszą się do nieskończoności między krzywemi (K) i (K_1) leżących; daléj wyobraźmy sobie krzywą (K_2) obejmującą krzywą (K_1), dołączmy odpowiadający szereg ułamków, i t. d. aż do nieskończoności. Z tego widzimy, że otrzymany w ten sposób szereg nieskończony ułamków, możemy uważać szereg, w którym pojedyńczym wyrazem jest summa ułamków odnoszących się do nieskończoności między krzywemi (K_λ) i $(K_{\lambda+1})$ leżących (*). Aby więc rozstrzygnąć czy szereg ułamków będzie zbieżny, dość jest przekonać się czy drugi wyraz w równaniu (7), przedstawiający niejako resztę szeregu, będzie miał za granicę zero, gdy krzywa (K_n) rosnąć będzie nieograniczenie. Oczywiście kształt krzywych (K_λ) nie jest tu rzeczą obojętną, od niego bowiem zależy wartość pojedynczych wyrazów szeregu. Widzimy więc, że rozwinięcie funkcyi na szereg ułamków sprowadza się do znalezienia takiego kształtu krzywych (K_λ), ażeby

$$\mathrm{Poz}_{(K_n)} \left(\frac{f(z)}{z-t}\right) \quad \text{albo} \quad \int_{(K_n)} \frac{f(z)}{z-t}\, dz$$

miały za granicę zero.

Zawsze możemy przypuścić, że t leży wewnątrz krzywéj (K_n); niech nadto $f(z)$ na téj krzywéj pozostaje skończoną, wtedy szereg :

$$\frac{f(z)}{z-t} = \frac{f(z)}{z} + t\frac{f(z)}{z^2} + t^2\frac{f(z)}{z^3} + \ldots$$

można na krzywéj (K_n) całkować, i będzie :

$$\int_{(K_n)} \frac{f(z)}{z-t}\, dz = \int_{(K_n)} \frac{f(z)}{z}\, dz + t\int_{(K_n)} \frac{f(z)}{z^2}\, dz + \ldots$$

W granicy można z przypuścić nieskończenie wielkie, zatém :

$$\mathrm{gr}\left[\int \frac{f(z)}{z^\lambda}\, dz\right] = 0, \text{ gdy } \lambda \gtreqless 2,$$

(*) Tak należy także summować szereg taki ułamków, i jeżeli np. między krzywemi (k_λ) i $(k_{\lambda+1})$ leży dwie nieskończoności, nie można summując szereg wziąć ułamki do jednéj z nich odnoszące; moglibyśmy się bowiem wtedy nie zbliżać do granicy.

o czém naocznie przekonać się można kładąc $z = re^{\theta i}$, wtedy:

$$\int \frac{f(z)}{z^\lambda}\, dz = \int \frac{f(re^{\theta i})}{r^\lambda e^{(\lambda-1)\theta i}}\, dr + i\int \frac{f(re^{\theta i})}{r^{\lambda-1}e^{(\lambda-1)\theta i}}\, d\theta,$$

w granicy, przy r nieskończenie wielkiém, a $\lambda \geqq 2$, każdy element w obu całkach staje się zerem.

Ostatecznie zatém widzimy, że *krzywe* (K_λ) *dobrać należy w ten sposób aby na nich* $f(z)$ *pozostawała skończoną, a* $\int \frac{f(z)}{z}\, dz$ *miała za granicę zero.*

Zastosujemy tę ogólną teoryę do kilku przykładów: — Uważmy funkcyę: dosie $z = \frac{1}{\text{wst}\, z}$. Nieskończoności jéj zawarte są w ogólnym wzorze $z = m\pi$, leżą na osi ox, i oznaczone są krzyżykami. Za krzywą (K_γ) weźmy prostokąt symetrycznie względem środka położony, — dwa boki równoległe od osi y niech będą od niéj odległe na $(m+\varepsilon)\pi$, gdzie $0 < \varepsilon < 1$, a drugie dwa będą leżeć w odległości

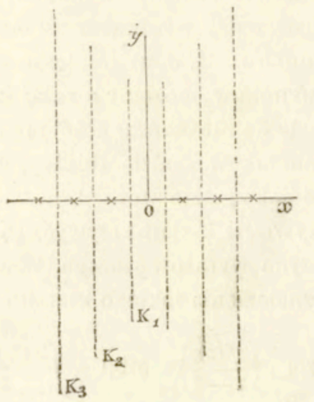

Fig. 22.

dowolnéj. Uważana funkcya jest na takich krzywych skończoną, a całka będzie stale zerem, gdyż funkcya podcałkowa jest parzystą. We wszystkich tych punktach dosieczna jest nieskończoną rzędu 1^{go}, szukane zatém rozwinięcie będzie:

$$\text{dosie}\, z = \frac{\text{Poz}_{(0)}(dsz)}{z} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left\{ \frac{\text{Poz}_{(m\pi)}(dsz)}{z - m\pi} + \frac{\text{Poz}_{(-m\pi)}\, dsz}{z + m\pi} \right\}.$$

Dla znalezienia pozostałości, uważmy że:

$$\text{Poz}_{(\lambda)}(dsz) = \text{gr}^{\varepsilon=0} \left\{ \frac{\varepsilon}{\text{wst}\,(\lambda\pi + \varepsilon)} \right\} = \text{gr}^{\varepsilon=0} \left\{ \frac{1}{(-1)^\lambda \frac{\text{wst}_\varepsilon}{\varepsilon}} \right\} = (-1)^\lambda,$$

będzie więc:

$$\text{dosie}\, z = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left\{ \frac{(-1)^m}{z - m\pi} + \frac{(-1)^m}{z + m\pi} \right\} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{z^2 - m^2\pi^2}.$$

Dla dotycznéj obralibyśmy ten sam prostokąt, i znaleźlibyśmy:

$$\text{dot}\, z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{z^2 - 1 m^2\pi^2}.$$

§ 43. Rozwinięcie funkcyi jednowartościowéj na iloczyn nieskończony. Zrobimy wprzódy uwagę o iloczynach nieskończonych tyczącą się warunku ich zbieżności. Z natury rzeczy wynika, że aby iloczyn nieskończony był zbieżnym, (t. j. aby w miarę zwiększania liczby mnożonych przez siebie czynników, iloczyn ich coraz bardziej zbliżał się do pewnéj oznaczonéj ilości, zwanéj granicą iloczynu), koniecznèm jest, żeby nietylko każdy czynnik pojedyńczo, ale także iloczyn dowolnéj liczby następujących po sobie czynników, zaczynając od czynnika na dostatecznie dalekiém miejscu stojącego, miał za granicę jedność. Warunek ten jest zarazem wystarczającym, jeżeli bowiem w iloczynie nieskończonym:

$$w_0 . w_1 . w_2 \ldots w_{n-1} . w_n . w_{n+1} \ldots$$

$$\mathrm{gr}_{n=\infty}(k_n) = 1, \quad \text{gdzie} \quad k_n = w_n . w_{n+1} \ldots$$

to uważając logarytm tego iloczynu, który będzie szeregiem nieskończonym:

$$\lg w_0 + \lg w_1 + \ldots + \lg w_{n-1} + \lg w_n \ldots\ldots$$

widzimy że szereg ten będzie zbieżny, jeżeli zatém granicą tego szeregu będzie S to e^s będzie granicą uważanego iloczynu.

Żądane rozwinięcie funkcyi jednowartościowéj łatwo można przewidzieć, jeżeli bowiem zera téj funkcyi oznaczymy przez c_λ, nieskończoności przez $\gamma\mu$, a stopień ich odpowiednio przez λ i μ, i utworzymy iloczyn:

$$\frac{\Omega(z - c_\gamma)^\lambda}{\Omega(z - \gamma\mu)^\mu},$$

to iloczyn ten, jako mający te same zera i nieskończoności co dana funkcya, może od niéj różnić się tylko czynnikiem mnożącym. Nie możemy tu jednak bez bliższego zbadania rzeczy twierdzić, że uważany tu iloczyn (właściwie iloraz iloczynów) jest zbieżny (t. j. że każdy z iloczynów jest zbieżny). Ażeby podać ścisłą teoryę rozwijania funkcyi jednowartościowéj, uważmy funkcyę $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Stosując do niéj wzór (7, § 41) i uwzględniając to, cośmy o pozostałościach takiéj funkcyi w § 40 powiedzieli, otrzymamy:

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \Sigma_{(k)} \frac{\lambda}{t - c_\lambda} - \Sigma_{(k)} \frac{\mu}{t - \gamma\mu} + \frac{1}{2\pi i} \int_{(K)} \frac{f'(z)}{(z - t) f(z)} dz,$$

gdzie krzywa (k) jest dowolną, a znaki summy odnoszą się do wszystkich zer i nieskończoności wewnątrz téj krzywéj leżących.

Całkujemy ostatnie równanie względem zmiennéj t od stałéj dowolnéj granicy t_0 do t, po linii nieprzechodzącéj przez żaden z punktów c_λ lub γ_μ, będzie:

$$\lg \frac{f(t)}{f(t_0)} = \Sigma_{(k)} \lambda \lg \left(\frac{t - c_\lambda}{t_0 - c_\lambda}\right) - \Sigma_{(k)} \mu \lg \left(\frac{t - \gamma\mu}{t_0 - \gamma\mu}\right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{(K)} \frac{f'(z)}{f(z)} \lg \left(\frac{z - t}{z - t_0}\right) dz,$$

a przechodząc od logarytmów do ilości, otrzymamy:

$$\frac{f(t)}{f(t_0)} = \frac{\Omega_{(k)} \left(\frac{t - c_\lambda}{t_0 - c}\right)^\lambda}{\Omega_{(k)} \left(\frac{t - \gamma\mu}{t_0 - \gamma\mu}\right)^\mu} . e^{-\frac{1}{2\pi i} \int_{(K)} \frac{f'(z)}{f(z)} \lg \left(\frac{z - t}{z - t_0}\right) dz}. \tag{1}$$

Ze wzoru (1) wyprowadza się rozwinięcie funkcyi na iloczyn. W roztrząsaniu jednak tego wzoru rozróżniamy dwa przypadki, podobnie jak przy rozwijaniu na ułamki. W przypadku gdy liczba zer i nieskończoności jest skończoną, krzywą (k) wyobrazić sobie możemy jako obejmującą wszystkie nieskończoności: pierwsza część strony drugiéj równania (1) jest wtedy iloczynem skończonym, należy nam tylko zbadać drugą część a w szczególności wykładnik nad e. Odnosząc się do płaszczyzny (Z'), wykładnik ten sprowadzi się do całki:

$$\int \frac{\varphi'(z')}{\varphi(z')} \lg \left(\frac{1-z't}{1-z't_0}\right) dz,$$

po krzywéj obejmującéj punkt zero na płaszczyznie (Z'). Otóż jeżeli $f(z)$ w punkcie nieskończenie odległym jest jednowartościową, to uważana całka jest zerem, wtedy bowiem $\frac{\varphi'(z')}{\varphi(z')}$ w punkcie zero, jeżeli jest nieskończoną, to rzędu 1go, i będzie:

$$\frac{\varphi'(z')}{\varphi(z')} = A\frac{1}{z'} + B + Cz' + \dots$$

$$\lg\left(\frac{1-z't}{1-z't_0}\right) = Mz' + Nz'^2 + \dots$$

W szeregu, wypadającym z pomnożenia dwóch szeregów powyżéj napisanych, nie będzie zupełnie potęg odjemnych, całka zatém będzie zerem.

Pod ten przypadek podciąga się rozkład ułamków algebraicznych wymiernych.

§ **44**. W przypadku, gdy liczba nieskończoności funkcyi jest nieskończoną, rozumujemy podobnie jak przy rozkładzie na ułamki, i dojdziemy do wypadku, że dla rozwinięcia funkcyi na iloczyn zbieżny potrzeba tylko znaleźć taki kształt krzywych (k), aby w granicy ilość wykładnicza była jednością, a więc całka była w granicy zerem. Rozwijając logarytm na szereg:

$$\lg\left(\frac{z-t}{z-t_0}\right) = \lg\left[\frac{1-\frac{t}{z}}{1-\frac{t_0}{z}}\right] = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \dots$$

znajdziemy:

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)} \lg\left[\frac{z-t}{z-t_0}\right] dz = A\int \frac{f'(z)}{f(z)z}dz + B\int \frac{f'(z)}{f(z)z^2}dz + \dots$$

Jeżeli krzywe (k) będą tak wybrane, że $\frac{f'(z)}{f(z)}$ pozostaje na nich skończoną, to każdy z wyrazów ostatniego szeregu poczynając od drugiego będzie zerem, potrzeba tylko, ażeby i pierwszy był zerem w granicy (*). Widzimy, że warunek rozwinięcia $f(z)$ na zbieżny iloczyn jest zarazem warunkiem rozwinięcia $\frac{f'(z)}{f(z)}$ na zbieżny szereg ułamków, co łatwo można było przewidzieć, rozwinięcie bowiem $\frac{f'(z)}{f(z)}$ na szereg ułamków było naszym punktem wyjścia.

(*) Gdy $f(z)$ jest funkcyą parzystą lub nieparzystą stosunek $\frac{f'(z)}{f(z)}$ jest zawsze nieparzysty, całka zatém uważana, wzięta po krzywéj symetrycznie względem początku położonéj jest zerem.

Rozwinięcie (1) napisze się wtedy :

(2) $$\frac{f(t)}{f(t_0)} = \Omega_{(k)}\,\Omega_{\lambda\mu}\frac{\left(\frac{t-c_\lambda}{t-c_\lambda}\right)^\lambda}{\left(\frac{t-\gamma_\mu}{t_0-\gamma_\mu}\right)^\mu}.$$

Pierwszy znak iloczynu, oraz znaczek (k), odnosi się do przestrzeni między jedną krzywą (k), a drugą ją obejmującą, drugi zaś znak iloczynu oraz znaczki λ i μ odnoszą się do zer i nieskończoności między dwiema krzywemi (k) leżących.

W przypadku, gdy $f(0)$ nie jest zerem, najdogodniéj jest założyć $t_0 = 0$, i wtedy :

(3) $$f(t) = f(o)\,\Omega_{(k)}\,\Omega_{\lambda\mu}\frac{\left[1-\frac{t}{c}\right]^\lambda}{\left[1-\frac{t}{\gamma_\mu}\right]^\mu},$$

Jako jeden przykład rozwińmy na iloczyn wstawę; ponieważ ta funkcya staje się zerem przy $z=0$, uważmy funkcyę $\frac{\text{wst}\,z}{z}$, która jest parzystą, nieskończoności w odległości skończonéj nie ma zupełnie a zera jéj objęte są wyrażeniem $m\pi$, gdzie m całkowite, nadto w punkcie zero funkcya ta przyjmuje wartość oznaczoną 1. Obrawszy za krzywą (k) prostokąt, którego dwa boki równoległe od osi y, leżą od niéj w odległości $m\pi + \varepsilon$ (gdzie $0 < \varepsilon < \pi$), a dwa drugie w odległości dowolnéj, i zauważywszy, że nieparzysta funkcya dot $z - \frac{1}{2}$ pozostaje na téj krzywéj skończonéj, otrzymamy :

$$\frac{\text{wst}\,z}{z} = \Omega_{m=1}^{m=\infty}\left[\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)\left(1+\frac{z}{m\pi}\right)\right],$$

albo inaczéj :

$$\text{wst}\,z = z\,\Omega_{m=1}^{m=\infty}\left(1-\frac{z^2}{m^2\pi^2}\right).$$

Podobnym sposobem znaleźlibyśmy rozwinięcie dostawy :

$$\text{dos}\,z = \Omega_{m=1}^{m=\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2m-1)^2\pi^2}\right),$$

z podzielenia zaś odpowiednio tych dwóch iloczynów otrzymalibyśmy rozwinięcia na styczną i dotyczną.

§ **45. Rozwinięcie funkcyi na szereg według rosnących potęg innéj funkcyi.** Rozwinięcie to otrzymujemy z dwóch zupełnie odmiennych sposobów uważania rzeczy; poznamy obydwa dla wzajemnego porównania.

Niech będą dwie funkcye $f(z)$ i $\varphi(z)$, oczywistą jest rzeczą, że $f(z)$ uważać można za funkcyę $\varphi(z)$, kładąc bowiem :

$$w = \varphi f(z), \qquad \text{zkąd} \quad z = \psi f(w),$$

a podstawiając to w daną funkcyę, otrzymamy :

$$f(z) = f[\psi(w)] = \mathrm{F}[w] = \mathrm{F}[\varphi(z)].$$

Kwestya rozwinięcia $f(z)$ na szereg według potęg $\varphi(z)$, sprowadza się do oznaczenia w jakich granicach symbol F oznacza funkcyę doskonałą; rozwiążemy to zagadnienie dla przypadku szczególnego (*): $f(z)$ wewnątrz krzywéj (A) jest doskonałą uważając ją jako funkcyę z, pytanie w jakich granicach $F[\varphi(z)]$ jest doskonałą uważana jako funkcya $\varphi(z)$.

Oczywiście, ma to miejsce w takich tylko granicach, w jakich $\varphi(z)$, o któréj dla uproszczenia rzeczy przypuszczamy, że w punkcie zero jest zerem, wychodząc z punktu zero zachowuje się tak samo jak zmienna z, t. j. jest jednowartościową, ciągłą, skończoną i w dwóch różnych punktach nie przyjmuje téj saméj wartości (**). Nakreślmy krzywą (B), wewnątrz któréj $\varphi(z)$ jest doskonałą, należy jeszcze zbadać czy wewnątrz niéj nie przyjmuje dwa lub więcéj razy téj saméj wartości. Odnieśmy się w tym celu do modułu funkcyi, uważając jeżeli ten nie przyjmuje wewnątrz pewnéj krzywéj dwa razy téj saméj wartości, tém bardziéj ma to miejsce dla saméj funkcyi. Uważmy, że w punkcie wyjścia moduł funkcyi jest zero, wyprowadźmy z tego punktu w dowolnym kierunku prostą; posuwając się po téj prostéj moduł wciąż będzie rosnąć i nie będzie mógł przybrać téj saméj wartości, póki poprzednio nie przejdzie przez największość. Jeżeli więc oznaczymy największości modułu i wybierzemy najmniejszą z nich, to oczywiście, na każdéj z prostych znajdziemy punkt w którym moduł przyjmuje tę samą wartość, t. j. wybraną poprzednio największość, miejsce zaś geometryczne tych punktów, będzie krzywą taką, że wewnątrz niéj funkcya nie będzie przyjmować dwa razy téj saméj wartości. W ogólnym przypadku krzywa ta składa się z kilku gałęzi, obejmujących każda punkt, w którym $\varphi(z)$ staje się zerem, i odpowiadających okręgowi opisanemu na płaszczyznie (W) promieniem równym uważanéj największości modułu; my uważamy tu tę gałęź, która obejmuje punkt zero na płaszczyznie (Z), i którą nazwiemy krzywą (C). Część płaszczyzny wspólna wszystkim trzem krzywym (A), (B) i (C), a ograniczona krzywą (C), lub wewnątrz jéj leżącą a jéj podobną i podobnie położoną, t. j. odpowiadającą okręgowi na płaszczyznie (W), będzie szukaną granicą. Dla takiéj krzywéj na mocy poprzedniego będziemy mogli napisać rozwinięcie:

$$f(z)=f(c)+\left\{\frac{d[f(z)]}{d[\varphi(z)]}\right\}_{z=c}\varphi(z)+\frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2[f(z)]}{d[\varphi(z)]^2}\right\}_{z=c}[\varphi(z)]^2+\dots \tag{1}$$

gdzie granica określoną jest równaniem:

$$\operatorname{mod}[\varphi(z)]=\text{stałéj}.$$

Rozwinięcie to nazywa się szeregiem Bührmann'a.

Oczywiście napisane jest ono w kształcie najogólniejszym, odnosząc się do naszego roztrząsania należałoby przenieść początek na płaszczyznie (Z) do punktu C.

Podamy teraz prosty sposób znalezienia największości modułu. W tym celu uważmy funkcyę $\varphi(z)$ w kształcie normalnym $u+vi$, moduł jéj $\sqrt{u^2+v^2}$ jest funkcyą dwóch zmiennych rzeczywistych; wartości tych zmiennych odpowiadające największościom i najmniejszościom funkcyi określone są równaniami:

$$\left\{\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}&=0\\ u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}&=0\end{aligned}\right.$$

(*) W przypadku ogólnym zawiera się i taki, że $f(z)$ jest niedoskonałą, a $F[\varphi(z)]$ będzie doskonałą.

(**) Funkcyą któraby na całéj płaszczyznie czyniła zadość temu warunkowi jest: $az+b$, gdzie a i b są stałe.

co można zastąpić jedném równaniem :

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)-i\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0,$$

które, gdy uwzględnimy wzory (3, § 23), napisze się :

$$(u-iv)\left(\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0;$$

pierwszy czynnik daje $u=0$ i $v=0$, co odpowiada punktowi zero; pozostaje drugi czynnik, który, uwzględniając drugi ze wzorów (6, § 24) sprowadza się do $\varphi'(z)$. Należy więc znaleźć wartość z sprowadzające pochodną danéj funkcyi do zera, obliczyć moduły danéj funkcyi dla tych wartości i wybrać najmniejszy z nich. Jeżeli go oznaczymy przez N, równanie krzywéj (C) będzie :

$$u^2+v^2=\mathrm{N}^2.$$

Zastosujemy tę teoryę do przykładu : chcemy rozwijać według potęg funkcyi $z(z-\gamma)$. Ponieważ funkcya ta jest doskonałą na całéj płaszczyznie, krzywa więc (B) dla tego przypadku nie istnieje. Największość jest tylko jedna $\left(z=\frac{\gamma}{2}\right)$, równanie krzywéj C, gdy wprowadzimy współrzędne biegunowe i położymy $\gamma=he^{\sigma i}$, będzie :

$$r^4-2r^3h\cos[\theta+\sigma]+r^2h^2=\frac{1}{4}h^2,$$

krzywa więc ta będzie lemniskatą któréj jedno ognisko leży w początku a drugie w punkcie Γ, a oś ogniskowa pochylona jest ku osi Ox na kąt σ. Granica więc rozwijalności zależeć będzie od rodzaju funkcyi danéj do rozwinięcia; gdy nią będzie $(1-z)^\mu$, gdzie μ ułamkowe, granicą będzie taż lemniskata w przypadku gdy punkt jedność leży zewnątrz niéj, w przypadku przeciwnym należy tę gałęź lemniskaty, wewnątrz któréj leży punkt jedność, zastąpić gałęzią innéj lemniskaty, podobnéj do poprzedniéj i podobnie z nią położonéj, niezawierającą punktu jedność. Rozwinięcie wychodzące z punktu zero byłoby :

$$(1-z)^\mu=1=\frac{\mu}{1}z(z-\gamma)+\frac{\mu(\mu-2)}{1.2}z^2(z-\gamma)^2-\frac{\mu(\mu-2)(\mu-4)}{1.2.3}z^3(z-\gamma)^3+\ldots$$

i szereg ten byłby zbieżny w gałęzi lemniskaty obejmującéj punkt zero. Wyszedłszy z punktu Γ otrzymalibyśmy rozwinięcie odnoszące się do drugiéj gałęzi.

Gdybyśmy chcieli wyjść z punktu np. D, należałoby rozwijać według potęg różnicy :

$$z(z-\gamma)-d(d-\gamma).$$

Wychodząc z punktu zero, nie można rozwijać funkcyi doskonałéj według potęg $\sqrt{z}$, bo funkcya ta ma w punkcie zero punkt zejścia: według potęg $z\sqrt{z-c}$, można rozwijać funkcyę doskonałą wychodząc z punktu zero, nie można wychodząc z punktu C.

§ 46. Pochodne rzędów wyższych funkcyi względem innej funkcyi, szereg Lagrange'a. Widzieliśmy, że współczynniki w rozwinięciu (1) były wyrażenia :

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{d^m[f(z)]}{d[\varphi(z)]^m}\right)_{z=c}.$$

Jeżeli zdołamy $f(z)$ wyrazić w funkcyi $\varphi(z)$, łatwo znaleźć te pochodne: w przeciwnym razie używamy innego kształtu współczynników, który zaraz poznamy.

Uważmy w tym celu wzór (8, § 35):

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{d^m[f(z)]}{dz^m}\right)_{z=c} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}}\,dz,$$

we wzorze tym wyobraźmy sobie zamiast zmiennéj z, podstawioną jako zmienną niezależną $\varphi(z)$ co uczynić można, albowiem $f(z)$ jest według naszego założenia doskonałą względem $\varphi(z)$ w okolicy punktu C. Otrzymamy wtedy:

$$(2)\qquad \frac{1}{m!}\left(\frac{d^m[f(z)]}{d[\varphi(z)]^m}\right)_{z=c} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)^{m+1}}\,dz,$$

Uważmy dalej, że funkcya podcałkowa w przypadku gdy $f(c)$ nie jest zerem, jest nieskończoną w punkcie C, rzędu $(m+1)^{go}$, funkcya bowiem $\varphi(z)$ w tym punkcie jest zerem pierwszego stopnia (*), możemy więc napisać:

$$(3)\qquad \left(\frac{d^m[f(z)]}{d[\varphi(z)]^m}\right)_{z=c} = \mathrm{D}^{(m)}_{z=c}\left(\frac{f(z)\varphi'(z)(z-c)^{m+1}}{\varphi(z)^{m+1}}\right).$$

Drugą stronę równania (3) możemy przekształcić: połóżmy w niej $\varphi(z) = (z-c)\psi(z)$, będzie ona:

$$\mathrm{D}^{(m)}_{z=c}\left(\frac{f(z)}{\psi(z)^m} + (z-c)\frac{f(z)\psi'(z)}{\psi(z)^{m+1}}\right),$$

albo zróżniczkowawszy pierwszą część raz, potem $(m-1)$ razy:

$$(\alpha)\qquad \mathrm{D}^{(m-1)}_{z=c}\left(\frac{f'(z)}{\psi(z)^m}\right) - m\,\mathrm{D}^{(m-1)}_{z=c}\left(\frac{f(z)\psi'(z)}{\psi(z)^{m+1}}\right) + \mathrm{D}^{(m)}_{z=c}\left((z-c)\frac{f(z)\psi'(z)}{\psi(z)^{m+1}}\right).$$

Uważmy teraz, że rozwijając $m^{tą}$ pochodną iloczynu dwóch funkcyj: $(z-c)\mathrm{F}(z)$ podług wzoru Leibnitz'a i podstawiając w to rozwinięcie $z=c$, otrzymamy: $m\mathrm{D}^{(m-1)}_{z=c}[\mathrm{F}(z)]$, w naszym przypadku: $m\,\mathrm{D}^{(m-1)}_{z=c}\left(\frac{f(z)\psi'(z)}{\psi(z)^{m+1}}\right)$, ostatecznie więc strona druga równania (3) sprowadzi się do pierwszego wyrazu wyrażenia (α), a podstawiając napowrót zamiast $\psi(z)$ wyrażenie $\frac{\varphi(z)}{z-c}$, otrzymamy:

$$(4)\qquad \left(\frac{d^m[f(z)]}{d[\varphi(z)]^m}\right)_{z=c} = \mathrm{D}^{(m-1)}_{z=c}\left(\frac{f'(z)(z-c)^m}{\varphi(z)^m}\right).$$

W przypadku gdy $f(c)$ jest zerem, we wzorze (2) możemy napisać $\mathrm{F}(z)$ zamiast $f(z)$, gdzie $\mathrm{F}(z) = f(z) +$ stała, ostatecznie dojdziemy do wzoru (4).

Zajmiemy się teraz zastosowaniem rozwinięcia (1) do rozwiązania następującego zagadnienia:

(*) Że punkt c dla funkcyi $\varphi(z)$ nie może być zerem rzędu wyższego jak pierwszy wynika to z upodobnienia téj funkcyi do zmiennéj z, która w każdym punkcie przyjmuje jednokrotną wartość; nadto funkcya $\varphi(z)$ byłaby w takim razie granicą funkcyj, które w punkcie c i w drugim dowolnie blizkim przyjmują wartość zero, krzywe w poprzednim § przez (c) oznaczone corazby bardziéj malały, w miarę zbliżania się do granicy, w samejże granicy redukowaćby się powinny do punktu, jak to nawet rozwiązanie równania $\varphi'(z) = 0$ wskazuje, pierwiastkowi bowiem c odpowiada najmniejszy moduł funkcyi.

Dane jest równanie:

(5) $$\varphi(z) = w,$$

wyrazić $f(z)$ w funkcyi w.

Jeżeli równanie (5) jest rozwiązalne względem z, łatwo to uskutecznić, w przypadku przeciwnym należy uciec się do rozwinięcia $f(z)$ na szereg uporządkowany według potęg $\varphi(z)$, i w szeregu tym napisać w zamiat $\varphi(z)$. W przypadku gdy $f(z)$ sprowadza się do z, rozwinięcie także jest rozwiązaniem równania (5).

Przy tém rozwijaniu trzeba zwrócić uwagę na to, że równanie (5) ma w ogólności więcéj jak jedno rozwiązanie, i że każdemu rozwiązaniu odpowiada jeden pierwiastek równania liczbowego:

(6) $$\varphi(z) = 0.$$

W rozwinięciu pod z rozumieć należy to rozwiązanie równania (5), któremu odpowiada pierwiastek równania (6) wzięty za punkt wyjścia. Jeżeli kilku rozwiązaniom równania (5) odpowiada jeden i ten sam pierwiastek równania (6), rozwinięcie względem tych rozwiązań jest niemożliwém, wtedy bowiem $\varphi(z)$ w punkcie wyjścia jest zerem rzędu wyższego jak pierwszy.

Stosując tę teoryę do równania:

(7) $$c = z - w\psi(z) \qquad \text{albo} \qquad \frac{z-c}{\psi(z)} = w,$$

otrzymalibyśmy rozwinięcie:

(8) $$f(z) = f(c) + w[f'(z)\psi(z)]_{z=c} + \frac{w^2}{2!}\,\mathrm{D}^{(1)}_{z=c}[f'(z)\psi^2(z)] + \dots$$

Warunki, pod którymi to rozwinięcie utrzymuje się są następujące: $f(z)$ i $\psi(z)$ powinny być w okolicy punktu C doskonałe (*), a nadto $\psi(z)$ nie może być w tym obrębie zerem, granica zaś zbieżności określa się tu ogólnym sposobem. Rozwinięcie to nazywa się szeregiem Lagrange'a, znane jest jego zastosowanie w zagadnieniu Kepler'a o ruchu planetarnym.

§ **47**. Poznamy teraz drugi sposób rozwinięcia, odpowiadający poprzednio (§ 34) poznanemu, i spostrzeżemy że dwiema różnemi zupełnie drogami do tych samych warunków dochodzimy. Jeżeli $f(z)$ chcemy rozwinąć według potęg $\varphi(z)$, uważmy funkcyę:

(9) $$\frac{f(z) - f(t)}{\varphi(z) - \varphi(t)};$$

ażeby ona była doskonałą potrzeba aby $f(z)$ i $\varphi(z)$ były funkcyami doskonałemi w okolicy punktu C, i aby w tej okolicy mianownik nie stawał się zerem, to jest równość $\varphi(z) = \varphi(z_1)$ była niemożliwą dla różnych z i z_1. Podobnym jak poprzednio sposobem, przypuściwszy, że $\varphi(z)$ w punkcie C staje się zerem, określamy krzywą (K), wewnątrz której funkcya (9) jest doskonałą, a dla t wewnątrz krzywéj (K) leżących jest:

(β) $$\mathrm{mod}[\varphi(t)] < \mathrm{mod}[\varphi(z)].$$

(*) $\Psi(z)$ nie może być nieskończoną, bo w stawałoby się drugi raz zerem.

Wtedy całka funkcyi (9) po krzywéj (K) będzie zerem, i:

$$f(t)\int\frac{dz}{\varphi(z)-\varphi(t)}=\int\frac{f(z)}{\varphi(z)-\varphi(t)}dz.$$

Funkcya podcałkowa na stronie pierwszéj ma jeden tylko punkt krytyczny: łatwo obliczyć pozostałość względem tego punktu która będzie $\frac{1}{\varphi'(t)}$.

W drugiéj całce, uwzględniając równanie (β), możemy napisać:

$$\frac{1}{\varphi(z)-\varphi(t)}=\frac{1}{\varphi(z)}+\frac{\varphi(t)}{\varphi(z)^2}+\dots$$

tak że ostatecznie:

(10) $$f(t)=\frac{\varphi'(t)}{2\pi i}\left\{\int\frac{f(z)}{\varphi(z)}dz+\varphi(t)\int\frac{f(z)}{\varphi(z)^2}dz+\dots\right\}$$

a znacząc krócéj:

$$\text{Poz}_{(c)}\left(\frac{f(z)}{\varphi(z)^m}\right)=\text{P}_m,$$

napiszemy szukane rozwinięcie:

(10') $$f(t)=\varphi'(t)\{\text{P}_1+\text{P}_2\varphi(t)+\text{P}_3\varphi(t)^2+\dots\}.$$

Rozwinięcie to godne jest uwagi ze względu, że występujący na stronie drugiéj czynnik $\varphi'(t)$ pozwala łatwo użyć go da całkowania, będzie bowiem wogólności:

$$\int_{t_0}^{t_1}f(t)dt=\text{P}_1[\varphi(t)-\varphi(t_0)]+\frac{1}{2}\text{P}_2[\varphi(t)^2-\varphi(t_0)^2]+\dots$$

Podstawiając we wzorze (10') zamiast $f(t)$ funkcyę także doskonałą $f(t).\varphi'(t)$, otrzymamy:

$$f(t)=\text{P}'_1+\text{P}'_2\varphi(t)+\text{P}'_3\varphi(t^2)+\dots$$

a różniczkując ten szereg podług $\varphi(t)$ otrzymalibyśmy wzór (2): współczynniki $\text{P}'_1, \text{P}'_2, \dots$ tém się różnią od $\text{P}_1, \text{P}_2, \dots$ że w pierwszych stoi $f(z)\varphi'(z)$ zamiast $f(z)$.

IV. O FUNKCYACH WIELOWARTOŚCIOWYCH MAJĄCYCH SKOŃCZONĄ LICZBĘ WARTOŚCI (*).

§ 48. **Pierwiastki równań algebraicznych.** Widzieliśmy że funkcye wielowartościowe są dwojakie, jedne mają skończoną liczbę wartości, inne są nieskończenie wielowartościowe, pokazaliśmy

(*) Teorya tych funkcyj zbadaną została przez Puiseux'go w rozprawie: Recherches sur les racines des fonct. algébr. (*Journal de l'Ecole Polytech.*, tome XV). Niemcy przywiązują wielką wagę do prac Riemann'a w tym kierunku, poznać je można z rozprawy samego Riemann'a: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie einer veränderlichen complexen Grösse*, albo z przystępnie napisanego dziełka Durège'a: *Elemente des Th. der Fun. einer compl. ver. Grösse*. Dzieło Neumann'a: *Th. der Abel'schen Integralen* grzeszy zbytnią rozwlekłością, nieprzyczyniającą się do rozjaśnienia rzeczy.

nadto na przykładach ich własność, że przez okrążenie pewnych szczególnych punktów, zwanych punktami zejścia, jedne wartości przechodzą na drugie. W rozdziale tym podamy ogólną teoryę funkcyj mających skończoną liczbę wartości.

Dowiedziemy najpierw twierdzenia: *Funkcya mająca w każdym punkcie m wartości wzajemnie na siebie przechodzących, mająca nadto skończoną liczbę nieskończoności rodzaju pierwszego, jest pierwiastkiem równania algebraicznego, wymiernego, nieskracalnego, stopnia m*^{go}.

Albowiem uważając te m wartości za pierwiastki pewnego równania, i utworzywszy z nich wiadomym sposobem współczynniki, łatwo widzieć, że te ostatnie jako funkcye symetryczne danych m wartości, będą jednowartościowemi względem zmiennéj niezależnéj, ponieważ nadto będą one miały tylko nieskończoności rodzaju pierwszego i w liczbie skończonéj, na mocy więc poprzedniego (§ 41) będą one ułamkami algebraicznymi wymiernymi. Równanie to będzie nieskracalne, bo gdyby dało się rozłożyć np. na dwa równania jedne stopnia p, drugie stopnia $m-p$, to funkcya określona przez pierwsze równanie, nie mogłaby przybierać więcéj jak p różnych wartości, podobnież funkcya określona przez drugie równanie miałaby tylko $m-p$ wartości, a założyliśmy, że wszystkie m wartości wzajemnie na siebie przechodzą.

Ma także miejsce twierdzenie odwrotne: *Funkcya określona przez równanie algebraiczne, wymierne, nieskracalne, stopnia m*^{go}, *ma m wartości wzajemnie na siebie przechodzących*. Gdybyśmy bowiem przypuścili że m pierwiastków danego równania nie przechodzą wszystkie wzajemnie na siebie, ale dają się podzielić na kilka grup tak, że pierwiastki należące do jednéj grupy przechodzą wzajemnie na siebie, ale nie przechodzą nigdy na pierwiastki do innéj grupy należące, wówczas dla każdéj takiéj grupy utworzyć by można równanie zawierające się w daném, co być nie może, dane bowiem równanie jest z założenia nieskracalne.

Widzimy więc, że badanie funkcyi m wartościowych sprowadza się do badania pierwiastków równania algebraicznego ogólnego kształtu:

$$F(z, w) = Nw^m + N_1 w^{m-1} + \ldots + N_{m-1} w + N_m = 0, \tag{1}$$

gdzie N i N_λ są wielomianami całkowitymi, względem z wymiernymi.

Rozumieć tu możemy, że równanie (1) określa funkcyę mającą w każdym punkcie płaszczyzny (Z) m różnych wartości, albo też, że określa ono m różnych funcyj, każda m wartościowa.

Łatwo widzieć, że funkcya m wartościowa mająca nieskończoną liczbę nieskończoności określićby się dała podobném równaniém, w którémby tylko N i N_λ były w ogólności szeregami nieskończonemi, w szczególności pewnemi funkcyami postępnemi jednowartościowemi.

§ **49. Punkta zejścia w przypadku** $N=1$. Zajmiemy się najpierw równaniém (1) w przypuszczeniu, że współczynnik N jest jednością: wtedy funkcya w staje się nieskończoną tylko w punkcie nieskończenie odległym, na płaszczyznie więc (Z) nie doznaje przerwy w ciągłości. Ażeby zaś nie doznając przerwy w ciągłości, funkcya ta mogła być m wartościową w ten sposób, żeby wyszedłszy z punktu Z_0 z pewną oznaczoną wartością, można było, stosownie do drogi, dojść do punktu Z_1 z m różnemi wartościami, to muszą koniecznie na płaszczyznie (Z) być takie punkta, w których wszystkie lub kilka wartości funkcyi stają się równemi sobie; gdyby bowiem w każdym punkcie te m wartości różniły się pomiędzy sobą o ilości skończone, funkcya musiałaby przeskakiwać z jednéj wartości na drugą, nie byłaby zatém ciągłą. Punkta takie widzieliśmy już na przykładach szczególnych i nazwaliśmy je punktami zejścia.

Punkta te otrzymujemy przez rozwiązanie równań:

$$F(z, w) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial w} = 0,$$

względem z po wyrugowaniu w. Nie umiemy w ogólności wykonać tego w praktyce, ale do przeprowadzenia badań ogólnych znajomość tych punktów jest niepotrzebną, a w przypadkach szczególnych do których tę ogólną teoryę stosować będziemy, łatwo ich będzie znaleźć.

Zwracamy tu tylko uwagę, że drugie z powyżéj napisanych równań wskazuje, że *funkcya wielowartościowa ma w punkcie zejścia pochodną nieskończenie wielką, choćby sama pozostawała w nim skończoną.*

Uważmy teraz, że jeżeli prowadzimy pierwiastek, mając oznaczoną jego wartość w punkcie wyjścia, po drodze nieprzechodzącéj i nieobejmującéj żadnego punktu zejścia, możemy za pomocą szeregu potęgowego oznaczyć z żądaném przybliżeniem wartość pierwiastku w każdym punkcie téj drogi; jeżeli droga przechodzi przez punkt zejścia, ma miejsce nieoznaczoność, dowolną jest bowiem rzeczą z jaką wartością wyjdziemy z punktu zejścia (wyłącza się tylko przypadek, gdy drogę tę uważamy za granicę dróg coraz bardziéj do punktu zejścia się zbliżających); należy nam tylko zbadać jak zachowują się pierwiastki przy okrążaniu punktu zejścia; poprzedzić jednak te badania musimy kilkoma uwagami.

§ 50. O równaniach mających nieskończenie małe pierwiastki. Jeżeli równanie liczbowe

$$X^m + A_1X^{m-1} + \ldots + A_{m-p}X^p + \ldots + A_m = 0, \qquad \text{gdzie} \qquad A_m \gtrless 0\ (*)$$

ma p pierwiastków nieskończenie małych, to p ostatnich współczynników są ilościami nieskończenie małemi albo zerami. Współczynnik $(p+1)^y$ od końca, t. j. A_{m-p} jest ilością skończoną różną od zera, pozostałe zaś mogą być jakiekolwiek, nawet nieskończenie małe; wynika to z kształtu współczynników wyrażonych w funkcyi pierwiastków.

Uważmy teraz równanie:

$$(\alpha) \qquad Aw'^p + \Sigma Bz'^\alpha w'^\beta = 0,$$

w którem zakładamy że α nie może być zerem, jeżeli $\beta < p$, a współczynniki A i B są ilościami skończonemi: jeżeli w niem w' uważać będziemy jako funkcyę z', i założymy z' nieskończenie małém stopnia pierwszego, to równanie to będzie miało p pierwiastków nieskończenie małych, t. j. p wartości na w' będą nieskończenie małemi.

Niech kilka z tych pierwiastków będzie stopnia ρ; wyrazy równania (α) podzielmy na dwie grupy: w pierwszéj Ω będą te które przy uważanym stopniu funkcyi w' są stopnia najwyższego, w drugiéj Ω_1 wszystkie pozostałe; tak, że oznaczywszy ten stopień najniższy przez n, do grupy Ω należeć będą wyrazy dla których: $\alpha + \beta\rho = n$, do grupy Ω_1 te dla których: $\alpha + \beta\rho > n$.

Uważmy równanie: $\Omega = 0$, a pierwiastki jego oznaczmy przez w': dowiedziemy, że te ilości w' są pierwszemi przybliżeniami pierwiastków w', t. j. że:

$$w' = w' + \varepsilon,$$

(*) Przypuszczamy odłączony pierwiastek zero.

gdzie ε oznacza summę ilości nieskończenie małych stopnia wyższego jak ρ. Gdyby, bowiem było :

$$w' = \omega + \varepsilon_1,$$

gdzie ω jest stopnia ρ, a ε_1 stopnia wyższego, to podstawiwszy tę wartość w równanie $\Omega + \Omega_1 = 0$ otrzymamy :

$$\Omega_\omega + \Omega_{1\omega} + \Omega_{\varepsilon_1} + \Omega_{1\varepsilon_1} = 0,$$

gdzie Δ_ω oznacza wypadek podstawienia za w' ilości ω w wielomianie Ω i. t. p. W części Ω_ω wyrazy będą stopnia n^{tego}, we wszystkich pozostałych częściach stopnia wyższego jak n, a ponieważ summa nieskończenie małych różnego stopnia wtedy jest zerem gdy summy ilości jednakowego stopnia, każda oddzielnie są zerem, przeto Ω_ω musi być zerem, co wtedy tylko jest możliwém, gdy $\omega = w'$, c. b. d. o.

§ **51. Przypadek jednego układu kołowego.** Przystępujemy teraz do badania jak zachowują się pierwiastki w blizkości puntu zejścia. Niech w punkcie Z_0. p pierwiastków równania :

(1) $$F(z, w) = 0,$$

stają się równymi sobie, przyjmując wartość w_0. Oczywiście pozostałe $m - p$ pierwiastków w blizkości punktu z_0 zachowywać się będą jak funkcye jednowartościowe, ponieważ ten punkt nie jest dla nich punktem krytycznym, należy zająć się tylko wyżéj wymienionymi p pierwiastkami ; połóżmy :

(2) $$z = z_0 + z', \qquad w = w_0 + w'.$$

Znajdziemy w' w funkcyi z', z równania :

(3) $$F(z_0 + z', \; w_0 + w') = 0$$

które rozwinięte według wzoru Taylor'a z uwzględnieniem :

$$F(z_0, w_0) = 0, \quad \left(\frac{\partial^\lambda F}{\partial w^\lambda}\right)_{z_0, w_0} = 0 \quad \text{gdy} \quad \lambda <= p - 1,$$

przyjmie kształt :

(4) $$Aw'^p + \Sigma Bz'^\alpha w'^\beta = 0,$$

gdzie

$$A = \frac{1}{p!}\left(\frac{\partial^p F}{\partial w^p}\right)_{z_0, w_0},$$

co nie może być zerém, a

$$B = \frac{1}{\alpha!} \cdot \frac{1}{\beta!}\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} F}{\partial z^\alpha \partial w^\beta}\right)_{z_0, w_0}.$$

Jeżeli równanie (4) określa nam pierwiastki w bezpośredniéj blizkości punktu zejścia, możemy w niém z' uważać za ilość nieskończenie małą, a wtedy widzimy, że ma ono p pierwiastków nieskończenie małych jak łatwo było przewidzieć.

Znajdziemy teraz pierwsze przybliżenia tych pierwiastków; przypuśćmy najpierw że $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{z_0, w_0}$ nie jest zerém, t. j. że między wyrazami $Bz'^\alpha w'^\beta$ znajdzie się wyraz Cz'. Wtedy dwa wyrazy : Aw'^p i Cz' będą stopnia najniższego, jakikolwiek byśmy założyli stopień pierwiastków w' : pierwsze zatém przybliżenia znajdziemy z równania :

$$Aw'^p + Cz' = 0,$$

które określa p pierwiastków stopnia $\frac{1}{p}$.

Kładąc $-\frac{C}{A} = \delta e^{\tau i}$, i przedstawiając zmienną w kształcie trygonometrycznym $re^{\theta i}$, przybliżenia będą :

$$w'_1 = (\delta r)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau+\theta}{p} i}, \qquad w'_2 = (\delta r)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\tau+\theta+2\pi}{p} i}, \ldots\ldots$$

Widzimy, że gdy z' okrąża punkt zero, a z punktu z_0, te przybliżenia przechodzą jedne na drugie w ten sposób że w'_λ przechodzi na $w'_{\lambda+1}$ przy okrążeniu w kierunku dodatnym, a na $w'_{\lambda-1}$ w kierunku odjemnym. Dowieść łatwo, że tak samo przechodzą jedne na drugie i same pierwiastki, t. j. że $w'_\lambda = w'_\lambda + \varepsilon_\lambda$ przechodzi na $w'_{\lambda+1} = w'_\lambda + \varepsilon_{\lambda+1}$ $\left(\text{są stopnia wyższego jak } \frac{1}{p}\right)$. Przypuśćmy, że po okrążeniu w'_λ nie przechodzi na $w'_{\lambda+1}$, ale na $w'_\mu = w'_\mu + \varepsilon_\mu$: ponieważ w'_λ przechodzi na $w'_{\lambda+1}$ przy témże okrążeniu, potrzeba więc aby ε_λ po okrężeniu przyjęło wartość : $w'_\mu - w'_{\lambda+1} + \varepsilon_\mu$, która jest stopnia $\frac{1}{p}$; to zaś być nie może, bo tak ε_λ jak i wartość na którą ono przechodzi są pierwiastkami równania, które otrzymamy z równania (4) podstawiając : $w = w' + \varepsilon$, uważając ε za zmienną a w' za stałą, a które to równanie określa p wartości na ε stopnia wyższego jak $\frac{1}{p}$.

Takie same przechodzenie ma miejsce dla pierwiastków równania (1), które wyrażają się :

$$w_\lambda = w_0 + w'_\lambda,$$

i nietylko dla krzywych nieskończenie małych, ale dla wszelkich krzywych obejmujących tylko jeden punkt zejścia z_0, bo wtedy jednę krzywą możemy przekształcić na drugą nie przechodząc przez żaden punkt krytyczny.

Zamiast mówić, że p pierwiastków przechodzą porządkiem jeden na drugi, przy okrążeniu odpowiadającego im punktu zejścia, po krzywéj nie obejmującéj żadnego innego punktu krytycznego, mówimy : że te p pierwiastków tworzą *układ kołowy p znakowy* około tego punktu.

§ 52. **Przypadek ogólny**. Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego, zakładając, że $\frac{\partial^m F}{\partial z^m}$ jest pierwszą pochodną względem z niezmieniającą się na zero przy wartościach z_0 i w_0. Dla uproszczenia oddzielmy od pierwszéj strony równania (4) te wyrazy, które będą stopnia niższego jak pozostałe w każdym razie, t. j. jakikolwiek byśmy przypuścili stopień pierwiastków. Każdy więc wyraz mający wykładnik nad z' taki sam albo większy, a wykładnik nad w' większy, albo nad z' większy, a nad w' taki sam lub większy, jak inny wyraz tego równania, zostanie odrzucony, pozostaną zaś tylko te wyrazy, z których dla żadnego nie znajdziemy wyrazu mającego nad jedną z głosek lub nad obydwiema wykładniki niższe. Wielomian z tych wyrazów złożony niech będzie :

$$Aw'^p + \Sigma Bz'^\alpha w'^\beta + Cz'^m, \tag{5}$$

oczywiście w nim α i β nie mogą być zerami, i muszą być odpowiednio mniejsze od m i p; nadto jeżeli wyrazy tego wielomianu ustawimy podług malejących potęg w', będą one zerem ustawione według rosnących potęg z'.

Ponieważ w wielomianie (5) znajdują się wszystkie wyrazy, które *mogą być* stopnia najwyższego, przeto z wyrazów tego wielomianu utworzyć się dadzą równania jak $\Omega = 0$ (§ 50) określające pierwsze przybliżenie pierwiastku, tak, że do równania $\Omega = 0$, odpowiadającego pewnéj liczbie pierwiastków stopnia ρ, wejdą wyrazy dla których : $\alpha + \beta\rho$ jest jednakowe, dla wszystkich zaś innych wyrazów wielomianu (5) $\alpha + \beta\rho$ będzie większe. Ażeby jaśniéj przedstawić utworzenie tych grup Ω, użyjemy następującéj metody graficznéj.

Nakreślmy układ dwóch osi prostokątnych Ox i Oy, i każdy wyraz wielomianu przedstawmy przez punkt którego odciętą jest β, rzędną α. Niech będą te punkta : M_1, M_2, ... : punkt M_1 odpowiada

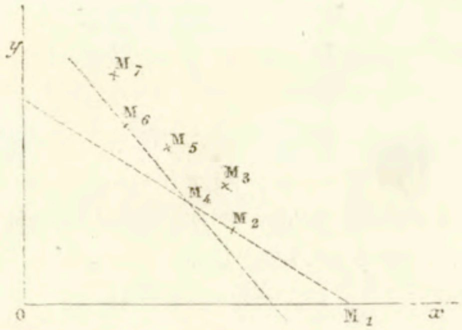

Fig. 23.

wyrazowi Aw'^p; ostatni punkt leżący na osi rzędnych odpowiadałby wyrazowi Cz'^m. Punkta te będą tak leżeć, że każdy następny będzie miał rzędną większą, a odciętą mniejszą jak poprzedzający.

Jeżeli teraz przeprowadzimy prostą, tak, że przechodzić ona będzie przez dwa przynajmniéj punkta M_λ, a wszystkie pozostałe mieć będzie ze strony przeciwnéj jak początek, i równanie jéj napiszemy w kształcie :

$$x\rho + y = n,$$

to wyrazy odpowiadające punktom na téj prostéj leżącym dadzą nam grupę Ω należącą do pierwiastków stopnia ρ (*), ile więc takich prostych będzie można nakreślić, na tyle grup podzielą się wyrazy wielomianu (5).

W przedstawionym na figurze przypadku, pierwsza grupa zawiera wyrazy odpowiadające punktom : M_1, M_2, M_4, druga grupa M_4, M_6, jeżeli prosta (M_4, M_6) nie przejdzie przez żaden więcéj punkt M_λ, pierwszym wyrazem trzeciéj grupy będzie M_6.

Niech w ogólności grupy te będą :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = Aw'^p + B_1 z'^{\alpha_1} w'^{\beta_1} + \ldots\ldots + B_k z'^{\alpha_k} w'^{\beta_k} \\ \Omega_2 = B_k z'^{\alpha_k} w'^{\beta_k} + \ldots\ldots\ldots\ldots + B_\nu z'^{\alpha_\nu} w'^{\beta_\nu} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_q = B_\psi z'^{\alpha_\psi} w'^{\beta_\psi} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Cz'^m \end{array} \right.$$

(*) To ρ będzie dodatne, przecinające obie osi po stronie dodatnéj, bo prosta taka ma współczynnik kątowy $\left(-\frac{1}{\rho}\right)$ odjemny.

Przyrównajmy każdą z tych grup do zera, i uważmy że pierwsza grupa da nam $p-\beta_\nu$ pierwiastków różnych od zera, druga da $\beta_\nu-\beta_\nu$, i t. d., ostatnia da $\rho\psi$; ostatecznie wszystkie razem dadzą p przybliżeń jak i być powinno.

Pokażemy teraz jak znaleźć te przybliżenia: uważmy równanie $\Omega_2=0$, jako kształtu ogólnego (grupy Ω i Ω_q zawierają się w tym ogólnym kształcie) dzieląc przez $z'^{\alpha_k} w'^{\beta_\nu}$ otrzymujemy:

(7) $$B_k w'^{\beta_k-\beta_\nu} + B_{k+1} z'^{\alpha_{k+1}-\alpha_k} w'^{\beta_{k+1}-\beta_\nu} + \ldots + B_\nu z'^{\alpha_\nu-\alpha_k} = 0$$

a jeśli ρ oznacza stopień nieskończenie małości pierwiastków to:

$$\rho = \frac{\alpha_\nu-\alpha_k}{\beta_k-\beta_\nu} = \frac{S\varphi}{t\varphi} = \frac{S}{t},$$

gdzie $\frac{S}{t}$ jest ułamkiem nieskracalnym.

Uważmy dalej, że z równości:

$$\rho(\beta_k-\beta_\nu) = \rho(\beta_{k+1}-\beta_\nu) + \alpha_{k+1} \cdot \alpha_k,$$

którą można napisać:

$$st\varphi = s(\beta_{k+1}-\beta_\nu) + ts(\alpha_{k+1}-\alpha_k),$$

i w której t i s są liczbami pierwszemi między sobą, wypada, że $\beta_{k+1}-\beta_\nu$, jest podzielne przez t. Napisawszy $t\psi$ zamiast $\beta_{k+1}-\beta_\nu$, zważywszy, że wtedy:

$$\alpha_{k+1}-\alpha_k = s(\varphi-\psi),$$

i stosując to do każdego wyrazu otrzymamy:

$$B_k w'^{t\varphi} + B_{k+1} z'^{s(\varphi-\psi)} w'^{t\psi} + \ldots\ldots B_\nu{}^s z'^{\varphi} = 0,$$

a podstawiając tu:

(8) $$w'^t = z'^s x,$$

gdzie x oznacza ilość skończoną, otrzymamy ostatecznie:

(9) $$B_k x^\varphi + B_{k+1} x^\psi + \ldots\ldots + B_\nu = 0.$$

Jest to równanie liczbowe, z którego otrzymamy φ wartości na x, niech one będą:

$$h_1, \quad h_2, \ldots\ldots, h_\varphi, \qquad \text{gdzie} \qquad h_\lambda = \delta_\lambda e^{\tau_\lambda i},$$

podstawiając je kolejno w równanie (9) otrzymamy $t\varphi$, t. j. właśnie $\beta_k-\beta_\lambda$ żądanych przybliżeń, gdy $z'=re^{\theta i}$, będą one:

$$w'_1 (\delta_1 r)^{\frac{1}{t}} e^{\frac{s\theta+\tau_1}{t} i}, \qquad w'_2 = (\delta_1 r)^{\frac{1}{t}} e^{\frac{s(\theta+2\pi)+\tau_1}{t} i},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w_{t+1} = (\delta_2 r)^{\frac{1}{t}} e^{\frac{s\theta+\tau_2}{t} i}, \qquad w'_{t+2} = (\delta_2 r)\, e^{\frac{s(\theta+2\pi)+\tau_1}{t}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w'_{t(\varphi-1)+1} = (\delta_2 r)^{\frac{1}{t}} e^{\frac{s\theta+\tau_\varphi}{t} i}, \qquad \ldots\ldots \qquad w'_{t\varphi} = (\delta_\varphi r)^{\frac{1}{t}} e^{\frac{s(\theta+\tau-1\pi)=\tau_\varphi}{t} i}$$

Zkąd widzimy, że te przybliżenia układają się w φ układów kołowych, każdy t znakowy, podobnie jak poprzednio dowodzi się, że to samo ma miejsce dla pierwiastków w'.

Widzimy że w ogólności w uważanym przypadku pierwiastki są różnego stopnia nieskończenie małości; gdyby jednak prosta łącząca punkt na osi x z punktem na osi y nie miała pod sobą żadnego z punktów M_λ, wówczas wszystkie pierwiastki byłyby jednakowego stopnia, gdyby zaś nadto żaden z tych punktów na téj prostéj nie leżał, a m i p były pierwszemi między sobą wszystkie pierwiastki tworzyłyby jeden układ kołowy, równanie bowiem (9) byłoby wówczas pierwszego stopnia względem x.

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie:

Pierwiastki równania algebraicznego w okolicy punktu zejścia tworzą układy kołowe.

W szczególnym przypadku układ może być jednakowy, wtedy $t=1$ i ten pierwiastek jest pierwszego stopnia nieskończenie małości.

§ **53**. Rozwiązując uważane poprzednio równanie (9), przypuściliśmy, że ma ono wszystkie pierwiastki różne. Należy nam jeszcze rozebrać przypadek gdy np. μ pierwiastków tego równania ma wspólną wartość h_1. Wówczas otrzymamy μt wartości na w' odpowiadających tym pierwiastkom, między któremi będzie t różnych a każda powtarzać się będzie μ razy. Aby więc zbadać jak odpowiające tym przybliżeniom pierwiastki równania (4) kołowo się układają, należy szukać przybliżeń wyższego stopnia. W tym celu używamy podstawienia:

(10) $$z' = z''^t, \qquad w' = h^{\frac{1}{t}} z''^s + w'',$$

gdzie w'' zawierać będzie wyrazy stopnia wyższego jak $\frac{s}{t}$ względem z', a więc wyższego jak s względem z''. Uskutecznia się to podstawienie w równaniu pierwotném (4), równanie bowiem (7) daje tylko przybliżenia stopnia $\frac{s}{t}$, a równanie którebyśmy otrzymali przyrównywując wielomian (5) do zera, jeszcze mogłoby nie wystarczyć, w niém bowiém mogłyby się nie znaleźć wszystkie wyrazy do obliczenia przybliżeń w'' potrzebne. Otrzymane ztąd równanie między z'' i w'' będzie nam dawać p nieskończenie małych pierwiastków, ale tylko te wartości w'', które odpowiadają uważanym tu μt pierwiastkom będą w pierwszem przybliżeniu stopnia wyższego jak s względem z'', inne będą stopnia niższego lub równego s muszą bowiem redukować wyraz $h^{\frac{1}{t}} z'^{\frac{s}{t}}$, należący tylko do uważanych μt pierwiastków. Jeżeli więc stosując powyżéj opisaną metodę do tego nowego równania, utworzymy z jego wyrazów grupy odpowiadające grupom (6), i wybierzemy te z nich, które przyrównane do zera dają pierwiastki stopnia wyższego jak s, to otrzymamy μt żądanych przybliżeń. Gdyby zaś i tu w jednéj z grup dających pierwiastki stopnia $\frac{s'}{t}$ względem z'', było kilka pierwiastków liczbowych równych h', należałoby szukać jeszcze dalszych przybliżeń, ku czemu służyłyby podstawienia:

$$z' = z'''^{t'}, \quad w' = h^{\frac{1}{t}} z'''^{st'} + h'^{\frac{1}{t'}} z'''^{s'} + w''',$$

uskutecznione znowu w równaniu pierwotném (4).

§ **54**. **Rozwinięcie pierwiastków na szeregi potęgowe w okolicy punktu zejścia.** Ażeby dojść do tego rozwinięcia, uważmy najpierw, że każdy pierwiastek w' z grupy t pierwiastków tworzących układ kołowy około punktu $z'=0$, jest w okolicy tego punktu funkcyą doskonałą względem $z'^{\frac{1}{t}}$ zostaje bowiem względem téj funkcyi skończony, ciągły, i jednowartościowy; gdyż, podobnie jak funkcya $z'^{\frac{1}{t}}$ po t okrążeniach powraca do swojéj pierwotnéj wartości, można więc go w tejże okolicy rozwinąć na szereg potęgowy zbieżny :

$$w' = A_1 z'^{\frac{1}{t}} + A_2 z'^{\frac{2}{t}} + \ldots\ldots, \text{ gdzie } \quad A_\lambda = \frac{v}{\lambda!} \left(\frac{d^\lambda w'}{d\left(z'^{\frac{1}{t}}\right)^\lambda} \right)_{z'=0,\ w'=0}$$

Zdawałoby się, że te pochodne najłatwiéj będzie znaleźć uskuteczniając w równaniu (4) podstawienie :

$$(\alpha) \qquad z' = \zeta^t,$$

przez co otrzymamy :

$$A w'^p + \Sigma B \zeta^{\alpha t} w'^\beta = 0,$$

ponieważ jednak różniczkowanie cząstkowe tego równania daje przy $\zeta=0$ i $w'=0$, wartość na pochodną kształtu $\frac{0}{0}$, dla uniknięcia przeto téj nieoznaczoności, oprócz podstawienia (α) uskuteczniamy drugie :

$$(\beta) \qquad w' = \zeta^s \omega,$$

Ponieważ w' jest stopnia nieskończenie małości $\frac{s}{t}$ względem z' przeto ω jest w tém podstawieniu ilością skończoną. Rozwijamy ω według potęg ζ. Uważmy najpierw przypadek w § 51 zbadany : wtedy $s=1$, $t=p$, pamiętając że α nie może być zerem gdy $\beta < p$, i uskuteczniając skrócenie przez ζ^p otrzymamy :

$$A\omega^p + C + \Sigma B \zeta^{(\alpha-1)p+\beta} \omega^\beta = 0.$$

Uważanym p pierwiastkom w' odpowiada te p pierwiastków ω, które przy $\zeta=0$, otrzymują p różnych wartości $h_1, h_2 \ldots h_p$ wyrażenia $\left(-\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{p}}$, szukane więc rozwinięcia będą :

$$\omega_\lambda = h_\lambda + x_{\lambda,1}\zeta + \ldots + x_{\lambda,\mu}\zeta^\mu + \ldots,$$

$$\text{gdzie} \qquad x_{\lambda,\mu} = \left(\frac{d^\mu \omega}{d\zeta^\mu}\right)_{\zeta=0,\ \omega=h_\lambda},$$

Ztąd łatwo przejść do rozwinięcia :

$$w'_\lambda = h_\lambda z'^{\frac{1}{s}} + \alpha_{\lambda,1} z'^{\frac{2}{s}} + \ldots\ldots,$$

zkąd ostatecznie otrzymamy :

$$(11) \qquad w_\lambda = w_0 + h_\lambda (z-z_0)^{\frac{1}{s}} + \alpha_{\lambda,1}(z-z_0)^{\frac{2}{s}} + \ldots\ldots$$

Wróćmy się teraz do przypadku ogólnego. Uskuteczniajmy podstawienia (α) i (β) w równanie (4) napisane w kształcie :

$$\Omega_2 + \Sigma B z'^\gamma w'^\delta = 0,$$

gdzie Ω_2 jest grupa wyrazów dająca przybliżenia uważanych pierwiastków. Pamiętając, że jest :

$$t\alpha_k + s\beta_k = \ldots\ldots = t\alpha_\nu + s\beta_\nu,$$

a zarazem

$$\gamma + \frac{s}{t}\delta > \alpha_k + \frac{s}{t}\beta_k,$$

czyli :

$$t\gamma + s\delta > t\alpha_k + s\beta_k,$$

widzimy, że można skrócić równanie po podstawieniu otrzymaném, przez $\zeta^{t\alpha_k + s\beta_k}$, i będzie :

$$B_k\omega^{\beta_k} + \ldots\ldots + B_\nu\omega^{\beta_\nu} + \Sigma B\omega^\delta\zeta^{t(\gamma-\alpha_k)+s(\delta-\beta_k)} = 0,$$

co zatrzymując oznaczenia w § 52 użyte, można pisać

$$\omega^{\beta_\nu}(B_k\omega^{t\varphi} + B_{k+1}\omega^{t\psi} + \ldots\ldots + B_\nu) + \Sigma = 0.$$

Pierwiastki, które chcemy rozwinąć na szereg, odpowiadają tym pierwiastkom ω, które gdy w ostatniém równaniu położymy $\zeta = 0$, przyjmują wartości pierwiastków równania liczbowego :

$$(\gamma) \qquad B_k\omega^{t\varphi} + \ldots\ldots + B_\nu = 0,$$

te zaś pierwiastki będą to różne wartości wyrażeń $\sqrt[t]{h_1} \ldots \sqrt[t]{h_\varrho}$, gdzie $h_1 \ldots h_\varrho$ oznaczają pierwiastki równania (9, § 52). Mając na względzie tę odpowiedność, i oznaczywszy pierwiastki równania (γ) przez $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{t\varphi}$, łatwo z rozwinięcia :

$$\omega_\lambda = \mu_\lambda + x_{\lambda,1}\zeta + \ldots\ldots,$$

dojść ostatecznie do rozwinięcia :

$$(12) \qquad w_\lambda = w_0 + \mu_\lambda(z - z_0)^{\frac{r}{s}} + x_{\lambda,1}(z - z_0)^{\frac{r+1}{s}} + \ldots\ldots$$

Zbytecznémby było zajmować się oddzielnie rozwinięciem pierwiastków, odpowiadających szczególnemu przypadkowi w § 53 opisanemu, dość będzie nadmienić, że należałoby wówczas rozwinąć najpierw w'' czy w''', odpowiednio, według potęg z'' czy z'''.

§ **55**. Całą powyżéj podaną teoryę najlepiéj objaśni następujący przykład przez Puiseux'go podany. Niech będzie równanie :

$$A(w-b)^7 + B(w-b)^5(z-a) + C(w-b)^4(z-a)^4 + D(w-b)^2(z-a)^5 + E(w-b)(z-a)^7 +$$
$$+ F(z-a)^9 + G(w-b)^8 + H(w-b)^4(z-a)^5 + I(z-a)^{10} = 0,$$

gdzie współczynniki A, B, D, E, F są różne od zera.

Zakładając $z = a$, otrzymujemy siedem pierwiastków w równych b. Dla zbadania, jak zachowują się pierwiastki w okolicy punktu A, podstawiamy $z = a + z'$, $w = b + w'$, i, ponieważ w tym przypadku pochodna względem z staje się zerém przy $z = a$, $w = b$, tworzymy powyżéj opisanym sposobem grupy, których tu będzie 3 :

$$\Omega_1 \qquad Aw'^7 + Bw'^5z'$$
$$\Omega_2 \qquad Bw'^5z' + Dw'^2z'^5$$
$$\Omega_3 \qquad Dw'^2z'^5 + Ew'z'^7 + Fz'^9.$$

Pierwszéj grupie odpowiadają dwa pierwiastki stopnia $\frac{1}{2}$, jest tu $s=1$, $t=2$, $\varphi=1$, i równanie odpowiadające równaniu (9, § 52) będzie w tym przypadku :

$$Ax+B=0,$$

zkąd widzimy, że dwa te pierwiastki tworzą układ kołowy dwuznakowy względem punktu A, i dają się rozwinąć na szeregi :

$$w_1=b+\sqrt{-\frac{B}{A}}\,(z-a)^{\frac{1}{2}}+\Sigma a_{\lambda,1}(z-a,)^{\frac{\lambda}{2}},$$

$$w_2=b-\sqrt{-\frac{B}{A}}\,(z-a)^{\frac{1}{2}}+\Sigma a_{\lambda,2}(z-a)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Drugiéj grupie znowuż odpowiadają trzy pierwiastki tworzące układ kołowy trzyznakowy, i rozwijające się na szeregi podług potęg $(z-a)^{\frac{1}{3}}$. Co się tyczy pierwiastków odpowiadających trzeciéj grupie, to zajść mogą rozmaite przypadki, uskuteczniwszy bowiem podstawienie

$$w'=z'^2x,$$

otrzymamy równanie :

$$Dx^2+Ex+F=0\,;$$

jeżeli to równanie daje dwa pierwiastki różne h_1 i h_2, to uważane pierwiastki w_6 i w_7 tworzą dwa układy kołowe jednakowe, t. j. każdy z nich okrążywszy punkt A wraca do swojéj pierwotnéj wartości, i rozwijają się one na szeregi podług całkowitych potęg $(z-a)$ następujące :

$$w_6=b+h_1(z-a)^2+\Sigma a_{\lambda,6}(z-a)^{\lambda},\quad w_7=b+h_2(z-a)^2+\Sigma a_{\lambda,7}(z-a)^{\lambda}.$$

Jeżeli jednak równanie to ma dwa pierwiastki równe h, wówczas znajdujemy się w przypadku w § 53 opisanym, i dla zbadania jak pierwiastki w_6 i w_7 zachowują się w okolicy punktu A, należy powrócić do pierwotnego równania, uskuteczniając w niem podstawienia :

$$z'=z',\qquad w'=hz'^2+w'',$$

odpowiednio podstawieniom (10, § 53).

Uskuteczniając to podstawienie w równaniu przedstawioném w kształcie :

$$\alpha z'^5(Dw'^2+Ew'z'^2+Fz'^4)+Aw'^7+\ldots\ldots+Iz'^{10}=0$$

i zważywszy, że w uważanym przypadku :

$$Dh^2+Eh+F=0 \qquad \text{i} \qquad 2Dh+E=0,$$

otrzymamy ostatecznie :

$$Dw''^2z''^5+A(h^7z''^{14}+\ldots\ldots)+B(h^5z''^{11}\ldots\ldots)+$$

$$+C(h^4z''^{12}+\ldots\ldots)+G(h^8z''^{16}.+\ldots\ldots)+H(h^4z''^{13}\ldots\ldots)+Iz''^{15}=0;$$

gdzie wyrazy nienapisane w nawiasach, są stopnia nieskończenie małości wyższego jak wypisane, nie będą więc nam potrzebne.

Otrzymujemy tu tylko jedną grupę wyrazów :

$$Dw''^2z''^5+Iz''^{10},$$

w któréj kładąc :

$$w''=x'z'^{\frac{5}{2}}$$

otrzymujemy równanie :

$$Dx'+I=0,$$

a ztąd czytamy, że w_6 i w_7 tworzą system kołowy dwuznakowy, i rozwijają się na szeregi według otęg $(z-a)^{\frac{1}{2}}$ następujące :

$$w_6=b+h(z-a)^2+\sqrt{\left(-\frac{I}{D}\right)^5}(z-a)^{\frac{5}{2}}+\Sigma_{\lambda,6}(z-a)^{\frac{\lambda}{2}},$$

$$w_7=b+h(z-a)^2+\sqrt{\left(-\frac{I}{D}\right)^5}(z-a)^{\frac{5}{2}}+\Sigma a_{\lambda,7}(z-a)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Gdybyśmy przypuścili $I=0$, otrzymalibyśmy także jedną grupę wyrazów :

$$Dw''^2z''^5+Bh^5z''^{11},$$

a przez podstawienie :

$$w''=x'z''^3,$$

doszlibyśmy do równania :

$$Dx'^2+Bh^5=0,$$

które daje dwa pierwiastki nierówne, w tym więc przypadku, pierwiastki w_6 i w_7 przez okrążenie punktu A wracałyby do swéj pierwotnéj wartości i rozwijałyby się na szeregi według potęg $(z-a)$. Będą tu więc dwa układy kołowe, co wiedzieć można odrazu, tu bowiem :

$$\mu=\frac{11-5}{2}=\frac{3.2}{1.2}=3,$$

liczba więc φ (§ 52) wskazująca liczbę układów kołowych równa się w tym przypadku 2.

§ 56. **Nieskończoności pierwiastków.** Dotychczas przeprowadzone badanie pierwiastków w okolicy punktów, w których kilka różnych pierwiastków stają się sobie równymi, odnosiło się do przypadków, gdy ta wspólna wartość pierwiastków jest ilością skończoną, co ma miejsce dla pierwiastków równania :

$$w^m+f_1(z)w^{m-1}+\ldots\ldots+f_m(z)=0,$$

gdzie wielomiany $f_1 \ldots\ldots f_m$ są całkowite, pierwiastki bowiem takiego równania są skończone dla wszelkich skończonych z, a nieskończonymi stają się tylko w punkcie nieskończenie odległym.

Jeżeli zaś weźmiemy równanie ogólne :

$$f_0(z)w^m+f_1(z)^{m-1}+\ldots\ldots\ f_{(m)}(z)=0,$$

to pierwiastki tego równania oprócz powyżéj poznanych punktów krytycznych, t. j. takich w których kilka różnych pierwiastków przyjmować będzie jednakową skończoną wartość będą miały jeszcze inne, w których kilka pierwiastków lub jeden stawać się będą nieskończenie wielkie, a które wyznaczają się z równania :

$$f_0(z)=0.$$

Ażeby zbadać zachowanie się pierwiastków w tych punktach podstawiamy :

$$w=\frac{\omega}{f(0)}\cdot$$

i otrzymujemy równanie :

$$\omega^m+f_1\omega^{m-1}+f_2.\, f_0\omega^{m-2}+f_3.\, f_0^2\omega^{m-3}+\ldots\ldots+f_0^{m-1}f_m=0,$$

z którego czytamy że w ogólności (*) $m-1$ pierwiastków ω, w tych punktach stawać się będą równe zero, a jeden odpowiadający nieskończenie wielkiemu pierwiastkowi w zachowywać będzie wartość skończoną.

Ponieważ zaś pierwiastki w z pierwiastkami ω związane są równaniem algebraicznem względem z wymierném, a względem w i ω pierwszego stopnia, przeto *pierwiastki w w ten sam sposób układają się kołowo co pierwiastki* ω.

Co do rozwinięcia na szeregi pierwiastków w w okolicy takiego punktu z_0, to łatwo je otrzymać z rozwinięcia odpowiedniego pierwiastku ω. Położywszy bowiem :

$$f(0)=(z-z_0)^\nu\,\varphi(z),$$

możemy napisać :

$$(z-z_0)^\nu w_\lambda=\omega_\lambda\frac{1}{\varphi(z)}\cdot$$

Według powyższego pierwiastek ω_λ rozwija się na szereg według ułamkowych potęg $(z-z_0)$, a $\frac{1}{\varphi(z)}$ w okolicy tegoż punktu Z_0 rozwija się według całkowitych potęg ilości $(z-z_0)$, jako funkcya doskonała. Mnożąc te dwa szeregi przez siebie, otrzymamy :

$$(z-z_0)^\nu w_\lambda=A_{\lambda,1}(z-z_0)^{\frac{1}{\lambda}}+\ldots$$

zkąd :

$$w_\lambda=A_{\lambda,1}(z-z_0)^{\frac{1}{\lambda}-\nu}+\ldots,$$

w ogólności kilka pierwszych wyrazów ma wykładniki odjemne, jak i być powinno.

Jako przykład uważmy równanie :

$$(z-c_1)(z-c_2)\ldots w^m-1=0,$$

(*) Szczególny przypadek ma miejsce dla tych wartości z przy których i f_1 staje się zerem.

w punktach krytycznych $c_1, c_2, \ldots$ wszystkie m wartości funkcyi w stają się nieskończone. Podstawienie :

$$w = \frac{\omega}{(z-c_1)(z-c_2)\ldots},$$

daje nam równanie :

$$\omega^m = (z-c_1)^{m-1}(z-c_2)^{m-2}\ldots,$$

do którego stosując ogólną metodę, podstawiamy w nie :

$$\omega = \omega', \qquad z = c_1 + z',$$

i otrzymujemy :

$$\omega'^m = (c_1-c_2)^{m-1}(c_1-c_3)^{m-1}\ldots z'^{m-1} + \Sigma B_\lambda z'^{m+\lambda},$$

gdzie λ może być zerem, ale nie może być odjemne.

Wyrazy stopnia najniższego będą dwa, ponieważ zaś m i $m-1$ są pierwsze między sobą, odrazu zatém czytamy, że pierwiastki ω będą stopnia $\frac{m-1}{m}$ i tworzyć będą względem punktu c_1 układ kołowy m znakowy. To samo się stosuje do punktów $c_2, \ldots$

W rozwinięciu na szereg byłby wyraz z odjemnym wykładnikiem jeden tylko, następujący :

$$\frac{1}{\sqrt[m]{(c_1-c_2)(c_1-c_3)\ldots}}(z-c_1)^{-\frac{1}{m}}.$$

Dodamy tu jeszcze, że aby zbadać zachowanie się pierwiastków w punkcie nieskończenie odległym, należy w równaniu uskutecznić podstawienie : $z = \frac{1}{z'}$, i badać pierwiastki w punkcie $z' = 0$. W równaniach, których pierwiastki nie stają się nieskończone w odległości skończonéj, ten punkt nieskończenie odległy jest w każdym razie nieskończonością pierwiastków, w równaniach mających nieskończoności w odległości skończonéj jest on nieskończonością także, wyjąwszy gdy f_0 jest stopnia wyższego jak każdy współczynnik f_λ; w ostatnio uważaném równaniu punkt nieskończenie odległy nie jest nieskończonością, jest jednak punktem zejścia. Gdy liczba ilości $c_1, c_2 \ldots$ jest m, każdy pierwiastek w punkcie nieskończenie odległym tworzy układ jednoznakowy, i wtedy, jak łatwo zawnioskować, każdy pierwiastek obiegłszy krzywą obejmującą punkta $c_1, c_2, \ldots c_m$, powraca do swojéj pierwotnéj wartości.

§ 57. **Kontury elementarne.** Pamiętając, że funkcya wielowartościowa na części płaszczyzny niezawierającéj żadnego punktu krytycznego funkcyi, jest doskonałą i rozwija się na szereg potęg całkowitych, możemy zawsze oznaczyć wartość jaką ona przyjmie, przebiegłszy pewną drogę nieprzechodzącą przez żaden punkt krytyczny; drogę tę bowiem pokryć można szeregiem okręgów, w których funkcya będzie rozwijalną. Poprzednio jednakowoż poznana teorya pozwala nam ułatwić to oznaczenie wartości przez wprowadzenie tak zwanych konturów elementarnych.

Uważmy punkt wyjścia c, i punkt zejścia c_1, obejmijmy punkt c_1 dowolnie małą krzywą zamkniętą, i dołączmy do niéj drogę prostolinijną CM (albo o tyle od kierunku prostéj odstępującą, o ile to jest potrzebne do ominięcia punktu krytycznego). Drogę zamkniętą : CMNPMC nazywamy konturem elementarnym i oznaczamy (C_1), drogę : CMPNMC oznaczymy $(-C_1)$.

Uważmy początkową wartość w_λ w punkcie C; wartość, którą to w_λ przyjmuje w punkcie M, po drodze CM, oznaczmy także w_λ (*) : jeżeli punkt C_1 nie jest punktem zejścia dla w_λ, albo jeżeli ten

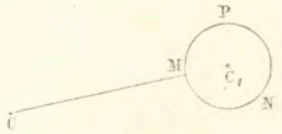

Fig. 24.

pierwiastek odnośnie do punktu C_1 tworzy układ kołowy jednoznakowy, wówczas po przebieżeniu konturu elementarnego, wraca on do punktu wyjścia C ze swoją pierwotną wartością. Jeżeli zaś jest on jednym z wyrazów φ znakowego układu kołowego : ... w_k, w_λ, w_μ, w_r, ..., wówczas powróci do punktu C z wartością w_μ, gdy pod w_μ w punkcie C rozumiemy wartość odpowiadającą wartości w_μ w punkcie M. Dwukrotne przebieżenie konturu elementarnego daje pierwiastkowi wartość w_r i. t. d; przebieżenie drogi $(-C_1)$ daje mu wartość w_k.

Jeżeli teraz dla każdego punktu krytycznego nakreślimy kontur elementarny, i oznaczymy odnoszące się do niego układy kołowe, łatwo będziemy mogli oznaczyć wartość z jaką powraca pierwiastek przebiegłszy krzywą zamkniętą. I tak wszelka krzywa pojedyńcza obejmująca jeden punkt

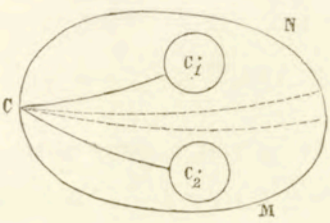

Fig. 25.

krytyczny równoważną jest konturowi elementarnemu, podobnież krzywa pojedyńcza obejmująca kilka punktów krytycznych, równoważną jest kolejno przebieżonym odpowiednim konturom, bezpośrednio bowiem można tę drogę graficznie na kontury elementarne przekształcić.

Droga np. CMNC da się zastąpić przez (C_2) (C_1), a droga CNMC przez $(-C_1)$ $(-C_2)$: wypisany tu rozkład drogi na kontury elementarne nazywa się charakterystyką drogi.

Jeżeli krzywa nie jest pojedyńczą, wówczas zamiast graficznie przekształcać ją na inną złożoną z kilku konturów elementarnych, możemy dojść do napisania charakterystyki następującym spo-

(*) W ogólnéj teoryi znaczkowanie symbolów w_λ nie znaczy zupełnie tego, co w przykładach szczególnych, gdy równanie jest rozwiązane i oznaczone są granice w których należy czytać rozwartości, tutaj nie możemy np. powiedzieć, że pierwiastek przeszedłszy od punktu C do M zatrzymał swoją wartość, lub przyjął inną, bo zupełnie nie wiemy która wartość w punkcie M, niezależnie od drogi, odpowiada pewnéj wartości w punkcie C, i to, żeśmy wartość w punkcie M tym samym porządkowym znaczkiem λ oznaczyli, co pierwotną wartość w C, nie znaczy że w przypadku rozwiązanego równania i oznaczonych granic czytania rozwartości, prostą CM tak prowadzić należy, aby wartości w C i w M odpowiadały temu samemu symbolowi algebraicznemu.

sobem. Z punktów krytycznych C_1, C_2, . . ., w jedną stronę, w dowolnym zresztą kierunku (*), wyprowadzamy proste, i następnie posuwając się po krzywéj danéj, zaznaczamy kolejne przejścia przez te proste : przejście przez prostą z C_1 wychodzącą, odpowiadające kierunkowi dodatnemu (**), da do charakterystyki znak (C_1), odpowiadające kierunkowi odjemnemu, da znak $(-C_1)$ i t. p.

Dajemy tu kilka graficznych przykładów, oznaczając strzałką kierunek w którym krzywą przebiegamy :

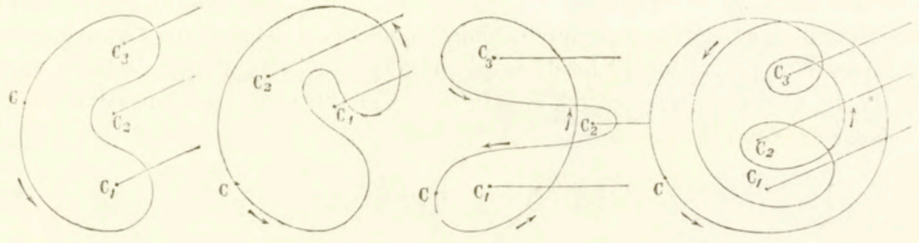

Fig. 26.

Dodamy tu jeszcze, że wszelką drogę między dwoma punktami C i K możemy przez dołączenie prostolinijnéj drogi CK, przebieżonéj dwa razy w kierunkach przeciwnych, zamienić na krzywą zamkniętą i na drogę prostolinijną CK.

Uważmy teraz przykład szczególny : niech będzie równanie piątego stopnia, któremu odpowiadają trzy punkta krytyczne C_1, C_2, C_3. Oznaczywszy wartości pierwiastków w punkcie wyjścia przez w_1, w_2, w_3, w_4 w_5; w punkcie kończącym część prostolinijnego konturu elementarnego dla punktu C_1, przez w_λ oznaczmy tę wartość, którą przyjmie pierwiastek poprzednio przez w_λ oznaczony, przebiegłszy też część konturu. Podobnie oznaczamy dla punktów C_2 i C_3. Niech układy kołowe będą :

$$\text{w } C_1 \left\{ w_1 w_3, \quad w_2 w_4 w_5, \right.$$

$$\text{w } C_2 \left\{ w_1 w_2 w_5, \right.$$

$$\text{w } C_3 \left\{ w_2 w_1, \quad w_4 w_3 w_5. \right.$$

Oznaczmy wartość pierwiastku po przebieżeniu krzywéj, któréj charakterystyką jest :

$$(C_2)(-C_1)(C_3)(C_1)(-C_2)(C_3),$$

(*) Należy obrać pewien punkt na krzywéj np. C, za punkt wyjścia i proste prowadzić w kierunku prostolinijnych przedłużeń linij CC_1, CC_2, ... Jeżeli zaś to jest niemożliwe, co ma miejsce gdy dwa punkty krytyczne leżą na jednéj prostéj z punktem c, wówczas te proste prowadzić należy odpowiednio wzajemnemu położeniu części prostolinijnych do konturów należących, jak to objaśnia figura :

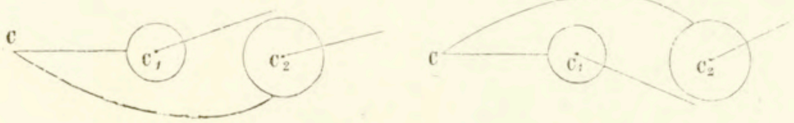

Fig. 27.

w pierwszym przypadku prosta z C_2 wyprowadzona leży nad prostą z C_1, w drugim przeciwnie.

(**) Jeżeli proste idą od ręki lewéj ku prawéj, przejście z pod prostéj nad prostą odpowiada kierunkowi dodatnemu i na odwrót.

wychodząc z wartością początkowo w_1. Ta wartość w_1 przejdzie kolejno na :

$$w_2,\ w_3,\ w_4,\ w_5,\ w_2,\ w_1,$$

powrócimy więc do punktu wyjścia z niezmienioną wartością funkcyi.

§ **58**. Pokażemy tu jeszcze, odnosząc się do geometrycznego przedstawienia funkcyi, jakim sposobem dwie drogi między C i K przeprowadzone, a jeden punkt zejścia obejmujące, prowadzą do różnych wartości funkcyi. Uwzględniając tu jednak to, cośmy poprzednio powiedzieli o związku między pierwiastkami, a ich pierwszemi przybliżeniami, będziemy mogli zamiast samych pierwiastków uważać tylko pierwsze przybliżenia. Jeżeli w pewnym punkcie Z_0, t pierwiastków tworzy układ kołowy t znakowy, to przeniosły początek układu osi do punktu Z_0, i napisawszy zmienną w kształcie $re^{\theta i}$, przybliżenia te wyrażą się :

$$(\delta r)^{\frac{1}{t}} e^{\left(\tau+\frac{\theta}{t}\right)i}, \quad (\delta r)^{\frac{1}{t}} e^{\left(\tau+\frac{\theta+2\pi}{t}\right)i}, \ldots$$

gdzie δ jest rzeczywiste i dodatne, a δ i τ są ilościami od r i θ niezależnemi.

Uważmy najpierw przypadek gdy $t=2$, wtedy :

$$w_1 = (\delta r)^{\frac{1}{2}} e^{\left(\tau+\frac{\theta}{2}\right)i}, \quad w_2 = (\delta r)^{\frac{1}{2}} e^{\left(\pi+\tau+\frac{\theta}{2}\right)i},$$

rozwartości θ należy w tych wyrażeniach czytać w granicach 0 i 2π.

Uważmy teraz trzy drogi na płaszczyznie (Z), drogę CZ_0K równoległą od osi x, i dwie inne CMK i CNK. Odnieśmy się do płaszczyzny (W) i niech punkt W_0 odpowiada Z_0, C_1 niech oznacza

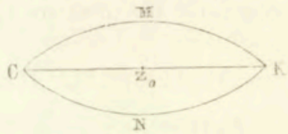

Fig. 28.

wartość w punkcie C pierwiastku w_1, a C_2 wartość w tymże punkcie pierwiastku w_2, K_λ i K_μ niech przedstawiają wartości tychże pierwiastków w punkcie K. [Kierunek $K_\lambda K_\mu$ jest kierunkiem τ na płaszczyznie (W)].

Gdy z punktu C wyjdziemy z wartością w_1 i posuwać się będziemy drodze CZ_0K, to części CZ_0 odpowiadać będzie prosta C_1W_0, części zaś drogi Z_0K odpowiadać będzie W_0K_λ lub W_0K_μ stosownie do

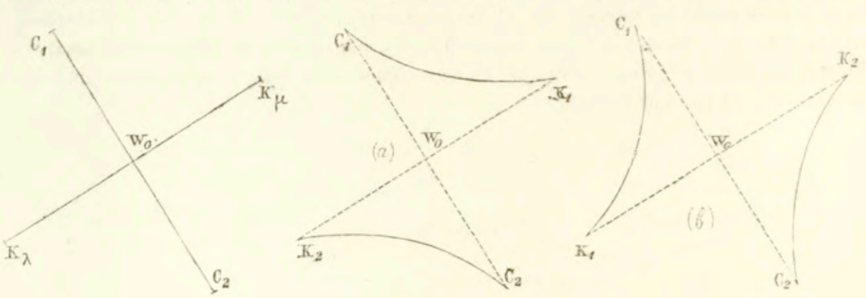

Fig. 29.

tego, czy kierunek Z_0K uważać będziemy za odpowiadający rozwartości zero czy 2π, co zależy od tego czy droga CZ_0K jest granicą dróg takich jak CMK, czy takich jak CNK. Gdy z punktu C wyjdziemy z wartością w_2 znajdziemy drogi ^{r}: $C_2W_0K_\mu$ lub $C_2W_0K_\lambda$, odpowiednio poprzedzającemu. Figury (a) i (b) przedstawiają drogi pierwiastków odpowiadające drogom zmiennéj CMK i CNK: widzimy że pierwsza z tych dróg zostawia pierwiastkowi jego wartość, t. j. wartość temu samemu symbolowi odpowiadającą (*), druga nadaje mu inną.

Łatwo uważanie to rozciągnąć do przypadku ogólnego: w nim linie W_0C_1, W_0C_2, $W_0C_3, \ldots$ byłyby od siebie odchylone o wielkość kątową $\frac{2\pi}{t}$, a linie W_0K_λ, $W_0K_\mu \ldots$ byłyby dwójsiecznemi kątów między poprzedzającemi zawartych.

§ 59. **Całki pierwiastków równań algebraicznych.** — Pod symbolem $\int_{(K)} w_\lambda dz$, gdzie w_λ jest jednym z pierwiastków równania, a (CK) jest drogą całkowania punkt C z punktem K łączącą, rozumieć będziemy zgodnie z poprzedzającém, granicę szeregu:

$$w_\lambda(\zeta_1 - z_0) + w_{\lambda,1}(\zeta_2 - \zeta_1) + \ldots + w_{\lambda,n}(z_1 - \zeta_n),$$

gdzie z_0, z_1 odpowiadają końcowym punktom drogi, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ są wartości pośrednie, w_λ oznacza wartość pierwiastku z którą wychodzimy a $w_{\lambda,1} \ldots w_{\lambda,n}$ są wartości, jakie pierwiastek w_λ kolejno w pośrednich punktach drogi przyjmuje.

Dla każdéj drogi, łączącéj dwa dowolne punkta na płaszczyznie (Z), byle tylko nieprzechodzącéj przez żaden z punktów krytycznych, można oznaczyć wartość całki, całkując w odpowiednich granicach szeregi, na które rozwija się uważamy pierwiastek na rozmaitych kolejno po sobie następujących częściach drogi, a następnie summując te całki. Możemy tu także używać rozkładu drogi na kontury elementarne, przyczém wartośći całki odpowiadającéj pierwiastkowi w_λ, a wziętéj po konturze elementarnym (C_λ), oznacza się całkując najpierw po części prostolinijnéj konturu, następnie po okręgu o dowolnie małym promieniu z punktu C_λ opisanym, a wewnątrz którego pierwiastek się także na szereg rozwija. Uważmy teraz na płaszczyznie (Z) dwa punkta C i K, i zobaczmy jak zmienia się wartość całki $\int_{(K)} w_1 dz$, gdy zmieniać się będą drogi punkta C i K łączące. Ponieważ w tém uważaniu punkta C i K są zupełnie dowolne, a w_1 oznacza którykolwiek z pierwiastków uważanego równania, będziemy więc mogli z badań tych wyciągnąć ogólne wnioski o całkach pierwiastków równań algebraicznych.

Uważmy najwpierw drogę prostolinijną (CK), i oznaczmy dla krótkości:

$$\int_{(CK)} w_\lambda dz = V_\lambda,$$

uważmy następnie $(m-1)$ krzywych zamkniętych: $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots \Sigma_m$, tak dobranych, że pierwiastek w_1 przebiegłszy krzywą Σ_λ wraca do punktu C z wartością w_λ (**). Krzywe takie rozkładają się na kontury elementarne, a $\int_{(\Sigma_\lambda)} w_1 dz$, będzie odpowiednio summą całek po konturach elementarnych, którą oznaczymy przez S_λ. Dołączając do każdéj z drog Σ_λ prostolinijną drogę CK, otrzymamy odpo-

(*) Możemy tu się tak wyrazić bośmy już oznaczyli granice w których czytamy rozwartości.

(**) Krzywe takie zawsze znaleźć można, bo pierwiastek równania m^{tego} stopnia, musi w każdym przybierać wszystkie m wartości, muszą więc istnieć dlań odpowiednie drogi.

wiednio m różnym drogom całkowania, m różnych wartości całki $\int_{(CK)} w_1 dz$, a mianowicie:

wartość V_1	po drodze	(CK),
$S_2 + V_2$	»	$(\Sigma_2 + CK)$,
. . . .	. . . .	. . . .
$S_m + V_m$	»	$(\Sigma_m + CK)$.

Uważmy teraz szereg krzywych zamkniętych D_λ, takich, że pierwiastek w_1 przebiegłszy krzywą D_λ powraca do punktu C z pierwotną swoją wartością, wartość całki $\int_{(D_\lambda)} w_1 dz$ oznaczmy przez P_λ, następnie przyłączając dowolną liczbę dróg D_λ do każdéj z dróg $\Sigma_\mu + CK$ otrzymamy szereg dróg:

$$n_1 D_1 + n_2 D_2 + \ldots\ldots + n_\lambda D_\lambda + \ldots + \Sigma_\mu + CK$$

(gdzie n_λ oznacza dowolną liczbę całkowitą, dodatną lub odjemną, stosownie do tego, czy krzywą D_λ przebiegamy w kierunku dodatnym czy odjemnym) i odpowiednio szereg wartości całek:

$$n_1 P_1 + n_2 P_2 + \ldots + n_\lambda P_\lambda + \ldots + V_1$$
$$n_1 P_1 + n_2 P_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + S_2 + V_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n_1 P_1 + n_2 P_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + S_m + V_m.$$

Nadto jeżeli uwzględnimy wszystkie drogi takie, po przebieżeniu których w_1 powraca do swojéj pierwotnéj wartości, w powyżéj wypisanym szeregu zawarte będą wszystkie możliwe wartości całki: $\int_{(CK)} w_1 dz$, czego łatwo dowieść, jak następuje:

Wyobraźmy sobie jakąkolwiek drogę (M) punkt C z punktem K łączącą: wartość całki $\int_{(M)} w_1 dz$ znajdziemy w powyżéj wypisanym szeregu; albowiem jeżeli w_λ oznacza wartość, jaką przybiera w_1 przebiegłszy drogę (M), możemy napisać:

$$\int_{(M)} = \int \text{po drodze: } M + KC + (-\Sigma_\lambda) + (\Sigma_\lambda) + CK,$$

albo:

$$\int_{(M)} = \int \text{po drodze: } M + KC + (-\Sigma_\lambda) + S_\lambda + V_\lambda,$$

droga zaś $M + KC + (-\Sigma_\lambda)$ jest taką, że w_1 po niéj powraca do swojéj pierwotnéj wartości.

Widzimy więc, że *całka funkcyi m-wartościowéj jest w ogólności funkcyą nieskończenie-wielowartościową: wartości te można podzielić na m grup tak, że wszystkie wartości do jednej grupy należące, różnią się pomiędzy sobą o summę wielokrotności ilości stałych, które nazwiemy okresami.*

Oczywiście, dość tu uważać te tylko okresy, które nie dają się przedstawić jako summa wielokrotności innych okresów, jeżeli więc:

$$P_\lambda = \alpha P_\mu + \beta P_\nu + \ldots,$$

gdzie $\alpha, \beta, \ldots$ są liczbami całkowitemi, to P_λ nie stanowi samoistnego okresu.

Ażeby więc oznaczyć wszystkie wartości całki $\int_{(CK)} w_1 dz$, należy tylko oznaczyć wartości $V_1, V_2, \ldots V_m, S_2, S_3 \ldots S_m$, i wszystkie okresy, które znajdujemy w sposób następujący: szukamy dróg które pierwiastek w_1 doprowadzają do pierwotnéj wartości, a po których wartość całki nie jest zerem, ale do już wynalezionych dróg przyłączamy te tylko, które nie są jako drogi złożonę z kilkakrotnie powtórzonych dróg już uważanych, i które nadto nie dają całce wartości będącéj summą wielokrotności już znalezionych okresów.

Dowiedziemy tu jeszcze, że okresy odpowiadające pierwiastkowi w_1, należą do każdego innego pierwiastku w_λ. Jeżeli bowiem droga D odpowiada pierwiastkowi w_1, to droga:

$$(-\Sigma_\lambda) + D + (\Sigma_\lambda)$$

odpowiadać będzie pierwiastkowi w_λ, a:

$$\int_{(-\Sigma_\lambda + D + (\Sigma_\lambda)} w_\lambda dz = \int_{(D)} w_1 dz.$$

Ponieważ tu w_1 i w_λ oznaczają dwa którekolwiek pierwiastki, tém samém więcéj, już jest dowiedzione i twierdzenie odwrotne, t. j. że pierwiastkowi w_λ nie odpowiadają już żadne inne okresy, tylko te które odpowiadają pierwiastkowi w_1.

§ 60. **Kilka uwag o okresach.** Zrobimy tu jeszcze kilka uwag, tyczących się liczebnéj wartości okresów w szczególnych przypadkach.

Jeżeli pierwiastek w_1 względem punktu C_μ tworzy układ kołowy jednoznakowy, to zauważywszy, że część prostolinijna konturu elementarnego, dwa razy przez ten sam pierwiastek w przeciwnych kierunkach przebieżona, daje w całce wartość zero, dość będzie znaleźć wartość po krzywéj obejmującéj punkt C_μ. Opisawszy okrąg z punktu C_λ promieniem r i rozwinąwszy pierwiastek na szereg potęgowy:

$$A_{-s}(z - c_\lambda)^{-s} + A_{-s+1}(z - c_\lambda)^{-s+1} + \ldots + A_{-1}(z - c_\lambda)^{-1} + A_0 + \ldots$$

kładąc w nim $z - c_\lambda = re^{\theta i}$, i całkując po okręgu powyżéj opisanym, znajdziemy wartość okresu:

$$A_{-s} r^{-s+1} i \int_0^{2\pi} e^{(-s+1)\theta i} d\theta + \ldots + A_{-1} i \int_0^{2\pi} d\theta + A_0 r i \int_0^{2\pi} e^{\theta i} d\theta + \ldots$$

co sprowadzi się do jednego wyrazu:

$$A_{-1} 2\pi i.$$

Widzimy więc że okres odpowiadający takiemu punktowi krytycznemu jest zero, gdy pierwiastek pozostaje w nim skończony, albo jest tak nieskończony, że w rozwinięciu nie występuje pierwsza potęga odjemna; w przeciwnym zaś razie, jest równy pozostałości pierwiastku względem tegoż punktu pomnożonéj przez $2\pi i$.

Uważmy jeszcze przypadek, gdy pierwiastek w_1 po przebieżeniu krzywéj obejmującéj dwa punkta krytyczne C_λ i C_μ wraca do swojéj pierwotnéj wartości. Jest to wtedy tylko możliwe, gdy pierwiastek w_1 okrążywszy punkt C_λ przybiera wartość np. w_2, a znowu w_2 okrążywszy punkt C_μ przy

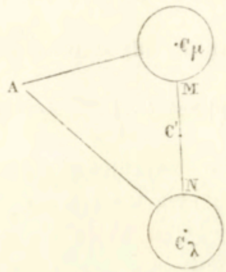

Fig. 30.

biera wartość w_1. Okres wtedy równy jest sumie całek po konturach elementarnych (C_λ) i (C_μ). Opiszmy z punktów C_λ i C_μ okręgi odpowiednio promieniami r_λ i r_μ, dowolnie wybieralnemu punktowi wyjścia C dajmy położenie C′, wtedy okres będzie:

$$\int_{C'N} w_1 dz + \int_{(r_\lambda)} w_1 dz + \int_{NM} w_2 dz + \int_{(r_\mu)} w_2 dz + \int_{MC'} w_1 dz,$$

albo:

$$\int_{MN} (w_1 - w_2) dz + \int_{(r_\lambda)} w_1 dz + \int_{(r_\mu)} w_2 dz.$$

Uważmy teraz rozwinięcie:

$$w_1 = A_{-s}(z - c_\lambda)^{-\frac{s}{t}} + A_{-s+1}(z - c_\lambda)^{\frac{-s+1}{t}} + \ldots$$

całkując je dla okręgu (r_λ), znajdziemy:

$$\int_{(r_\lambda)} w_1 dz = i A_{-s} r_\lambda^{\frac{t-s}{t}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{t-s}{t} \theta i} d\theta + \ldots$$

Na stronie drugiéj wtedy tylko znajdzie się wyraz od r_λ niezależny, gdy, w rozwinięciu był wyraz:

$$A_{-t}(z - c_\lambda)^{-1},$$

to samo stosuje się do pierwiastku w_2 odnośnie do punktu C_μ.

Jeżeli pierwiastki w_1 w C_λ i w_2 w C_μ będą skończone, albo tak nieskończenie wielkie, że w rozwinięciu nie będzie wyrazu stopnia pierwszego, to przeszedłszy do granicy $(r_\lambda = r_\mu = 0)$, znajdziemy wartość okresu wyrażoną przez całkę prostolinijną:

$$\int_{c_1}^{c_2} (w_1 - w_2) dz.$$

V. O FUNKCYACH OKREŚLONYCH RÓWNANIAMI RÓŻNICZKOWEMI RZĘDU PIERWSZEGO.

§ 61. **Określenie rozwiązania równania różniczkowego.** Równanie ogólnego kształtu:

$$F\left(z, w, \frac{dw}{dz}, \ldots \frac{d^m w}{dz^m}\right) = 0 \tag{1}$$

określa nam w jako funkcyę z, w sposób:

$$w = \varphi(z, c_1, c_2, \ldots c_m), \tag{2}$$

gdzie $c_1, c_2, \ldots, c_m$ są stałe dowolne.

Równanie (2) nazywa się rozwiązaniem równania (1).

Pytanie teraz, kiedy możemy napisać równanie (2), to jest kiedy znamy rozwiązanie równania (1)? Ażeby odpowiedzieć na to pytanie, musimy się wrócić do ogólnego pojęcia funkcyi. Ilość zmienną w [któréj obrazem jest płaszczyzna (W)], uważać możemy za funkcyę ilości zmiennéj z [któréj obrazem jest płaszczyzna (Z)], analitycznie przez tęż zmienną z dającą się wyrazić; gdy każdéj wartości z odpowiada jedna lub więcéj ściśle określonych wartości w, i gdy granica odpowiadających sobie przyrostów ma jedną tylko wartość dla danych wartości w i z, to jest gdy pochodna jest funkcyą ściśle określoną (*). Drugi warunek jest przy analitycznie daném równaniu (1) wypełniony, jeżeli więc potrafimy oznaczyć wartości ilości w (**), odpowiadające pewnéj danéj wartości z, znamy w jako funkcyę z, i możemy napisać równanie (2) jako rozwiązanie równania (1); symbol zaś φ (jeżeli nie sprowadza się bezpośrednio do znanych symbolów funkcyi) oznacza nowy, istniejący i znajomy nam rodzaj zależności między dwiema ilościami, innemi słowy, ma takie same naukowe znaczenie, jak symbol: wst, dos, i t. p.

Tak więc rozwiązać równanie różniczkowe niekoniecznie znaczy to wyrazić w przez z; za pomocą znanych nam symbolów algebraicznych, możemy odkryć tu nowy rodzaj zależności, który będzie nam znajomy, gdy będziemy w stanie ułożyć tablicę odpowiadających sobie wartości w i z, i który oznaczyć wówczas możemy takim symbolem, jakiego nam się użyć podoba.

Rzecz to bardzo naturalna, bo odłączywszy od znanych nam funkcyj funkcye algebraiczne wymierne (których wyrażenie algebraiczne jest uzmysłowieniem rodzaju zależności), cóż na przykład mówi nam sam przez się symbol wst? Jeżeli ta funkcya (nie w ogólnem swém znaczeniu, to jest rozciągnięta do zmiennéj złożonéj, ale w czczególnych przypadkach) wydaje nam się doskonale znaną, to dlatego tylko, że mamy z nią wiele do czynienia, i że się uzmysławia przez swoje łatwe geometryczne przed-

---

(*) W § 24 widzieliśmy, że istnienie jednéj pochodnéj jest dowodem, że jedna ilość zmienna od drugiéj analitycznie zależy.

(**) Właściwie niesame wartości w, ale ich dowolne przybliżenia, t. j. wartości tak mało różniące się od rzeczywistych wartości, jak sami zechcemy. Niemożność oznaczenia w ogólności ścisłych wartości nie oznacza nieznajomości funkcyi, bo ogólną ilością jest ilość niewymierna, i nie możemy ścisle oznaczyć jéj wartości. Tak samo zresztą rzecz się ma ze znanemi nam najprostszemi funkcyami: pierwiastkiem, wstawą i t. p., których tylko dowolnie przybliżone wartości w ogólności oznaczać umiemy.

stawienie, w równaniu zaś: $w = wstz$, zupełnie nie widzimy jaki jest związek między w i z, to jest jak w urabia się z z, podobnie jak w równaniu (2).

Tak określiwszy rozwiązanie równania różniczkowego, zajmiemy się bliżéj równaniami rzędu pierwszego takiemi w których, gdy uporządkujemy wyrazy według potęg pochodnéj, współczynnikami będą funkcye ilości w; zgodnie jednak z poprzedzającém, przedewszystkiem szukać będziemy sposobów oznaczenia wartości w odpowiadających danym wartościom z.

§ **62. Oznaczenie wartości przez szereg potęgowy.** Niech będzie równanie różniczkowe:

$$F\left(w, \frac{dw}{dz}\right) = 0, \tag{1}$$

które przypuszczamy rozwiązane względem $\frac{dw}{dz}$.

$$\frac{dw}{dz} = f(w), \tag{2}$$

i niech w_0 oznacza nam wartość funkcyi w odpowiadającą pewnéj wartości z_0 na z. Dowolnie wybrana wartość w_0 odpowiada stałéj dowolnéj. Dla uproszczenia przypuśćmy, że w_0 i z_0 są zerami, do czego zawsze dojść możemy uskuteczniając w równaniach (1) i (2) podstawienia liniowe.

Dowiedziemy twierdzenia:

Jeżeli druga strona równania (2) *jest funkcyą doskonałą zmiennéj w w okręgu na płaszczyźnie* (W) *promieniem r z punktu W_0 zapisanym, to funkcya:*

$$w = \varphi(z) \tag{3}$$

będąca rozwiązaniem równania (2) *jest w okolicy punktu Z_0 na płaszczyźnie* (Z) *doskonałą, i rozwija się na szereg według potęg z,* dla którego to szeregu granica zbieżności będzie wyznaczoną w ciągu dowodzenia, a współczynniki znajdują się przez różniczkowanie rownania (2) lub (1).

Uważmy szereg:

$$w = \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_0 z + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)_0 z^2 + \ldots \tag{4}$$

którego współczynniki obliczone są z układu równań zwrotnych:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dz} = f(w) \\ &\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{df}{dw}\frac{dw}{dz} \\ &\frac{d^3\varphi}{dz^3} = \frac{d^2f}{dw^2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \frac{df}{dw}\frac{d^2w}{dz^2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{5}$$

gdy w nich podstawimy $z = 0$ i $w = 0$.

Szereg ten podstawiony w równanie (2) sprawdza je, jeżeli więc ma on jakieś istotne znaczenie, to jest jeżeli jest zbieżnym, to przedstawia w granicach zbieżności szukaną funkcyę w: wszystko zatém sprowadza się do wyznaczenia granicy zbieżności szeregu (4).

Uważmy najpierw, że ponieważ $f(w)$ jest doskonałą w okręgu o promieniu r, przeto na mocy wzoru (9, § 35) będzie:

$$\left(\frac{d^n f}{dw^n}\right)_0 = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})e^{-n\theta i}d\theta,$$

jeżeli więc przez M oznaczymy największy moduł funkcyi $f(w)$ na uważanym okręgu, to:

$$\operatorname{mod}\left[\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})e^{-n\theta i}d\theta\right] < \int_0^{2\pi} \mathrm{M}d\theta,$$

zkąd wypada:

$$\operatorname{mod}\left[\left(\frac{d^n f}{dw^n}\right)_0\right] < n!\,\frac{\mathrm{M}}{r^n}.$$

Ponieważ zaś dla funkcyi

$$\psi(\omega) = \frac{\mathrm{M}}{1-\frac{\omega}{r}}$$

pochodna przy wartości $\omega = 0$, wyraża się ogólnym wzorem:

$$\left(\frac{d^n\psi}{d\omega^n}\right)_0 = n!\,\frac{\mathrm{M}}{r^n},$$

przeto:

(6) $$\operatorname{mod}\left[\left(\frac{d^n f}{d\omega^n}\right)_0\right] < \left(\frac{d^n\psi}{d\omega^n}\right)_0.$$

Uważmy teraz równanie różniczkowe:

(2') $$\frac{d\omega}{dz} = \psi(\omega);$$

niech wartości $z=0$ odpowiada $\omega=0$, i niech równanie:

(3') $$\omega = \chi(z)$$

będzie rozwiązaniem równania (2').

Szereg:

(4') $$\omega = \left(\frac{d\chi}{dz}\right)_0 z + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\chi}{az^2}\right)_0 z^2 + \dots$$

którego współczynniki otrzymujemy z równań:

$$(5') \qquad \begin{cases} \dfrac{d\chi}{dz} = \psi(\omega) \\[2ex] \dfrac{d^2\chi}{dz^2} = \dfrac{d\psi}{d\omega}\,\dfrac{d\omega}{dz} \\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

w granicy zbieżności przedstawiać będzie rozwiązanie (3').

Porównywając układ równań (5') z układem (5), i pamiętając o nierówności (6), spostrzegamy, że moduły współczynników w szeregu (4) są mniejsze od odpowiednich współczynników w szeregu (4'): jeżeli więc szereg (4') jest zbieżnym w pewnych granicach, szereg (4) będzie w tychże granicach zbieżnym.

Granice zaś zbieżności szeregu (4') oznaczyć możemy, bo równanie

$$(2') \qquad \frac{d\omega}{dz} = \frac{M}{1 - \dfrac{\omega}{r}}$$

łatwo się całkuje; zkąd otrzymujemy:

$$(3'') \qquad \omega - \frac{\omega^2}{2r} = Mz.$$

Z ostatniego równania widzimy, że ω jest funkcyą względem z doskonałą, dopóki równanie (3'') n ma dwóch pierwiastków równych sobie, co ma miejsce dla wartości:

$$z = \frac{r}{2M}, \qquad \text{przyczém} \quad \omega = r.$$

Ztąd zaś bezpośrednio wnosimy, że szeregi (4') i (4) są zbieżne w okręgu na płaszczyznie (Z) promieniem $\dfrac{r}{2M}$ opisanym. Nadto wartości funkcyi w przez szereg (4) określone zawarte będą w powyżéj opisanym okręgu (r) na płaszczyznie (W), bo z porównania szeregów (4) i (4') wypada:

$$\mathrm{mod}[w] < \mathrm{mod}[\omega],$$

a w okręgu zbieżności funkcya ω przyjmuje wartości mniejsze od r. Uważmy teraz, że wyszedłszy z punktu Z_0, i przyjąwszy dlań dowolną wartość w_0, rozwinęliśmy w na szereg potęgowy, którego granice zbieżności musimy oznaczyć; obrawszy teraz wewnątrz okręgu zbieżności punkt Z_1, i wyznaczywszy odpowiadającą mu wartość w_1 przez szereg określoną, postępując podobnym sposobem znowuż w pewnych granicach rozwiniemy w na szereg; tak, że ostatecznie określimy przez szeregi: w jako funkcyę z na tych częściach płaszczyzny, na których w nie przybiera wartości, które są wartościami krytycznemi dla $f(w)$.

Nadmieniamy tu jeszcze, że powyżéj podane twierdzenie zostało przez Cauchy'ego udowodnione dla ogólnego równania różniczkowego rzędu 1go.

§ 63. **Funkcye okresowe.** Zanim przystąpimy do badania funkcyi w w tych punktach, w których $f(w)$ przestaje być doskonałą, podamy ogólne cechy funkcyj określonych równaniem różniczkowém rzędu pierwszego.

$$(\alpha) \qquad F\left(w, \frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

w przypadku, gdy F jest symbolem wielomianu algebraicznego.

Przypuśćmy równanie (α) rozwiązane:

$$(\beta) \qquad \frac{dw}{dz} = f(w),$$

i oznaczmy zeń z w funkcyi w: będzie:

$$(\gamma) \qquad z = \int_{w_0}^{w} dw.$$

Uskutecznijmy teraz podstawienia:

$$(\delta) \qquad w = \zeta, \qquad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\omega},$$

otrzymamy równanie algebraiczne:

$$(\alpha') \qquad F(\zeta, \omega) = 0,$$

a równanie (γ) zastąpimy przez:

$$(\gamma') \qquad z = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \omega_1 d\zeta,$$

gdzie ω_1 oznacza pierwiastek równania (α'), odpowiadający wartości $f(w)$ w równaniach (β) i (γ) uważanéj.

Z ostatniego równania czytamy, że funkcya odwrotna szukanéj funkcyi w jest funkcyą tego rodzaju co zbadana poprzednio całka pierwiastku równania algebraicznego, to jest jednéj i téj saméj wartości w odpowiada m różnych wartości z, z których każda może być jeszcze zwiększoną o dowolną wielokrotność okresów. Te zaś okresy będą, na mocy poprzedniego, całki po drogach doprowadzających którykolwiek pierwiastek równania (α') do jego pierwotnéj wartości.

Ztąd bezpośrednio wnosimy, że funkcya w będzie w ogólności względem z okresową (*) i w każdym obrębie okresowym (t. j. takiéj części płaszczyzny (Z), na której funkcya zupełnie i tożsamościowo się powtarza) przyjmować będzie tyle razy jedną i tę samą wartość, jakiego stopnia jest równanie (α) względem pochodnéj $\frac{dw}{dz}$.

(*) Równanie $F\left[w, \frac{dw}{dz}, z\right] = 0$, gdy F jest symbolem skończonego wielomianu algebraicznego, nie może określać funkcyi okresowéj, bo przy pewnych oznaczonych wartościach na w i $\frac{dw}{dz}$, liczba odpowiednich wartości na z jest skończoną.

Funkcye nieokresowe odpowiadają tu szczególnemu przypadkowi, gdy liczba okresów równą jest zeru.

Funkcye pojedynczo okresowe poznaliśmy już w części 1[ej], przyczém widzieliśmy, że obrębem okresowym są dla nich pasy w jednym kierunku nieskończone, ograniczone dwiema liniami równoległemi.

Funkcye podwójnie okresowe tém się od poprzednich różnią, że dla nich obrębem okresowym jest część płaszczyzny ze wszystkich stron ograniczona, a mianowicie równoległobok wystawiony na modułach okresów co do wielkości i kierunku uważanych.

Przyczém odróżnić należy układy okresów zasadnicze, to jest takie, dla których w odpowiadającym równoległoboku funkcya przyjmuje tę samą wartość tylko taką liczbę razy, jaką określa równanie, od innych, gdzie liczba jednakowych wartości jest wielokrotnością poprzedniéj. I tak układy okresów odpowiadające równoległobokom *oabc*, *oaeb*, *oacd*, są zasadnicze; równoległobokowi *oafg* nie odpo-

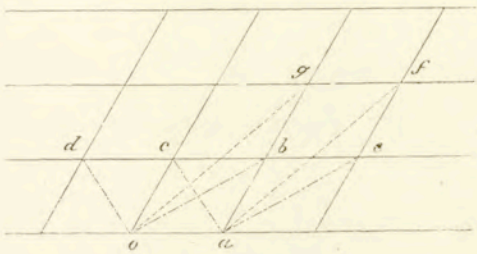

Fig. 31.

wiada zasadniczy układ okresów. Widzimy tu także, że równoległoboki odpowiadające zasadniczym układom są sobie równoważne, inne zaś są co do powierzchni wielokrotnością poprzednich; nadto wewnątrz równoległoboku rodzaju drugiego leży przynajmniéj jeden punkt okresowo wierzchołkowi odpowiadający: w równoległoboku *oafg* punktem takim jak punkt *b*.

Między zasadniczymi układami odróżniamy układ okresów najmniejszych: w naszym przypadku odpowiada mu równoległobok *oabc*.

Pozostaje nam zbadać szczególny przypadek, gdy moduły dwóch okresów są co do kierunku jednakie, czemu analitycznie odpowiada przypadek, gdy ilości przedstawiające okresy, są z sobą w stosunku rzeczywistym, wymiernym lub niewymiernym.

Aby ten przypadek zbadać, zauważmy najpierw, że linia łącząca którekolwiek dwa punkta okresowo sobie odpowiadające, przedstawia co do kierunku i wielkości moduł nowego okresu uważanéj funkcyi. Wiedząc to przypuśćmy, że szukamy wiadomym z geometryi sposobem, wspólnéj miary dwóch prostych, przedstawiających w uważanym przypadku moduły okresów. Stopniowo zmniejszające się długości, przez które przy tém poszukiwaniu przechodzimy, a łączące zawsze dwa punkta okresowo sobie odpowiadające, będą, każda, przedstawiać moduł nowego okresu; jeżeli więc stosunek między pierwotnie danymi okresami jest wymierny, to wspólna miara będzie rzeczywiście jednym najmniejszym okresem, tak, że jeżeli funkcya ma okresy $\alpha+\beta i$ i $\alpha'+\beta' i$, takie, że:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i}=\frac{m}{n},$$

gdzie m i n są całkowite pierwsze między sobą, to w rzeczywistości będzie ona pojedyńczo okresową, a okresem jéj będzie:

$$\frac{\alpha + \beta i}{n} \text{ lub równe jemu } \frac{\alpha + \beta i}{m}.$$

Gdy zaś stosunek jest niewymierny, to, jak łatwo spostrzedz, otrzymywać możemy nieograniczenie małe okresy; szukany zaś zasadniczy najmniejszy okres, mniejszy od wszelkiéj dowolnie małéj ilości, jest w granicy zerem: pasy okresowe sprowadzają się wtedy do prostéj prostopadłéj i do kierunku okresu, wzdłuż któréj funkcya przyjmować będzie wszystkie swoje wartości.

Zanim przystąpimy do funkcyj, mających trzy zasadnicze okresy, zauważymy najpierw, że w każdym równoległoboku, punkt wewnątrz leżący jest przynajmniéj od jednego z wierzchołków mniéj odległy, jak długość *większego* boku, albowiem odległość takiego punktu od najbliższego wierzchołka nie może być większą jak połowa którejkolwiek przekątnéj; połowa zaś przekątnéj jest mniejszą od boku większego, co bezpośrednio z porównania odpowiednich kątów wynika. Nadto w równoległoboku, w którym bok mniejszy o dostatecznie małą długość różni się od boku większego, punkt wewnątrz leżący jest przynajmniéj od jednego wierzchołka mniéj odległy, jak długość boku *mniejszego*, o czém przekonać się można opisując z każdego wierzchołka okrąg promieniem równym długości boku mniejszego. Uważmy teraz funkcyę mającą trzy niezależne od siebie okresy, ustawmy je w porządku rosnącym P_1, P_2 P_3 ... Uważmy na płaszczyznie (Z) układ równoległoboków, odpowiadających okresom P_1 i P_2, i wyprowadźmy z początku prostą odpowiadającą okresowi P_3. Koniec téj prostéj nie może upaść w żadnym z wierzchółków uważanych równoległoboków, boby okres P_3 nie był niezależnym, upadnie więc wewnątrz któregoś równoległoboku, a łącząc ten koniec ze stosownie wybranym wierzchołkiem tego równoległoboku, otrzymamy nowy okres P' mniejszy od P_2. Do okresów P_1, P', dołączając okres P_2 lub P_3, i postępując jak poprzednio, otrzymamy okres P'' mniejszy jak P'. Powtarzając znowuż poprzednio opisaną konstrukcyę, dojdziemy nakoniec do okresu P dostatecznie mało różniącego się w wielkości od P_1, tak, że z układu P_1, P, już znajdziemy okres mniejszy od najmniejszego z danych, t. j. od P_1.

W przypadku więc trzech niezależnych od siebie okresów, możemy otrzymywać nowe okresy dowolnie małe, w granicy więc zasadnicze okresy są zerami: równoległobok okresowy sprowadzi się do punktu, co pokazuje że funkcya jest albo ilością stałą, albo w ten sposób nieskończenie wielowartościową, iż w każdym punkcie przyjmuje wszystkie swoje wartości.

Tém bardzéj ma to miejsce w przypadku większéj liczby niezależnych od siebie okresów.

§ 64. **Punkta krytyczne funkcyi:** $f(w)$. Przystępujemy teraz do badania funkcyi w, dla tych wartości, które są punktami krytycznymi dla $f(w)$, to jest oznaczymy odpowiadające im punkta na płaszczyznie (Z), i zbadamy je w okolicy tego punktu, przyczém badania nasze ograniczymy do tych tylko przypadków, w których równanie:

$$(1) \qquad \frac{dw}{dz} = f(w)$$

określa funkcyę w jednowartościową względem z.

Te punkta krytyczne mogą być trojakiego rodzaju: 1) $f(w)$ staje się nieskończoną przy wartości na w skończonéj, 2) $f(w)$ jest nieskończoną przy w także nieskończonem, 3) pewna wartość w jest punktem zejścia dla $f(w)$.

Jeżeli znajdują się punkta rodzaju pierwszego, to już bezpośrednio wnioskujemy, że funkcya w jest wielowartościową (*), i że punkta na płaszczyznie (Z), odpowiadające téj wartości w, są jéj punktami zejścia, widzieliśmy bowiem, że pochodna funkcyi doskonałéj skończonéj jest skończoną.

Co się tyczy punktów drugiego rodzaju, to przedewszystkiém zbadać należy, czy funkcya w staje się nieskończonością rodzaju pierwszego, to jest czy $\frac{1}{w}$ w okolicy tego punktu jest doskonałą. W tym celu w równanie różniczkowe rozwinięte, które, jak to z powyżéj powiedzianego wynika musi być kształtu :

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^m + f_1\left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-1} + \ldots + f_m = 0,$$

gdzie $f_1, f_2, \ldots f_m$ są wielomiany całkowite, w równanie to podstawiamy:

$$w = \frac{1}{w'}\cdot$$

Otrzymujemy nowe równanie funkcyę w' określające:

$$\left(\frac{dw'}{dz}\right)^m - w'^2 f_1\left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-1} + \ldots \pm w'^{2m} f_m = 0.$$

Aby funkcya w' była jednowartościowa odpowiednio wartości $w'=0$, potrzeba aby współczynniki tego równania były całkowite, co wtedy tylko ma miejsce, gdy stopień wielomianów $f_1, f_2, \ldots f_m$, względem $\frac{1}{w'}$, a więc i względem w, nie jest wyższy jak odpowiednio $2, 4, \ldots 2m$.

Stopień nieskończoności funkcyi w, łatwo oznaczyć, pamiętając, że pochodna funkcyi jednowartościowéj jest nieskończoną stopnia o jedność wyższego jak funkcya; równanie bowiem różniczkowe gdy w niém nieoznaczony jeszcze stopień w oznaczymy przez n, pozwoli nam oznaczyć stopień $\frac{dw}{dz}$ w funkcyi n, np. $\varphi(n)$, równanie zaś

$$\varphi(n) = n + 1,$$

da nam wartość na n.

Odpowiadająca wartość z dana będzie przez całkę:

$$\int_{w_0}^{\infty} \frac{dw}{f(w)},$$

gdzie całkowanie uskutecznić należy na m różnych drogach całkowania, i dopiero do każdéj z tak otrzymanych wartości dodać dowolną liczbę okresów.

Pozostaje nam zbadać punkta zejścia dla $f(w)$: poszukiwać tu mianowicie będzieme warunków, pod któremi w odnośnie do tych punktów pozostaje funkcyą jednowartościową względem z (**).

(*) Za przykład mogą tu służyć równania $w\frac{dw}{dz} - 1 = 0$, lub $4w^2\left[\frac{dw}{dz}\right]^2 + z^4 - 1 = 0$, z których pierwsze oznacza logarytm, funkcyę nieskończenie wielowartościową, a drugie $\sqrt{\text{wst}\, z}$, funkcyę dwuwartościową.

(**) Pochodna może być wielowartościową względem saméj funkcyi, choć taż funkcya, a więc i pochodna jest jednowartościową względem z, np. : $\cos z = \frac{d[\text{wst}\, z]}{dz} = \sqrt{1 - \text{wst}^2 z}$.

Niech w punkcie w_1, któremu odpowiada wartość z_1, dana przez całkę $\int_w^{w_1} \frac{dw}{f(w)}$, kilka różnych wartości funkcyi $f(w)$ przyjmuje wartość f_1: uważmy tu dwa przypadki:

a) gdy f_1 jest różne od zera: wtedy na mocy powyżéj podanéj teoryi rozwinięcia pierwiastków w okolicy punktu zejścia, położywszy $w = w_1 + w'$, $z = z_1 + z'$, otrzymamy:

$$(\alpha) \qquad \frac{dw'}{dz} = f_1 + Aw'^{\frac{s}{r}} + Bw'^{\frac{s+1}{r}} + \ldots,$$

gdzie r i s są pierwsze między sobą, a r oznacza liczbę elementów układu kołowego, do którego uważana przez nas wartość $f(w)$ należy.

Z drugiéj strony, jeżeli w' jest jednowartościową względem z', to ma miejsce rozwinięcie:

$$(\beta) \qquad w' = f_1 z' + Az'^2 + Bz'^3 + \ldots,$$

ztąd wypada:

$$(\gamma) \qquad \frac{dw'}{dz'} = f_1 + 2Az' + 3Bz'^2 + \ldots$$

Aby (β) podstawione w (α), doprowadziło do równania (γ), przedewszystkiém być musi, aby $\frac{s}{r} = 1$, zkąd $r = 1$, co już pokazuje, że w punkcie tym pochodna pozostaje jednowartościową względem w.

b) gdy $f_1 = 0$, wtedy:

$$(\alpha') \qquad \frac{dw'}{dz'} = Aw'^{\frac{s}{r}} + Bw'^{\frac{s+1}{r}} + \ldots,$$

z drugiéj zaś strony:

$$(\beta') \qquad w' = Az'^q + Bz'^{q+1} + \ldots,$$

zkąd:

$$(\gamma') \qquad \frac{dw'}{dz'} = qAz'^{q-1} + (q+1)Bz'^q + \ldots$$

wartość q jest tu nieoznaczona, bezpośrednio jednak widzimy, że nie może być mniejszą od 2.

Aby (β') podstawione w (α'), doprowadziło do (γ'), przedewszystkiém być powinno, aby $\frac{sq}{r} = q - 1$, zkąd $r = q$, $s = q - 1$. Dowieść możemy, że warunek ten będąc koniecznym jest zarazem wystarczającym, albowiem, gdy:

$$\frac{dw'}{dz'} = Aw'^{\frac{q-1}{q}} + Bw' + Cw'^{\frac{q+1}{q}} + \ldots,$$

to położywszy $w' = w''^q$, będzie:

$$\frac{dw''}{dz'} = \frac{A}{q} + \frac{B}{q} w'' + \frac{C}{q} w''^2 + \ldots,$$

ostatnie równanie pokazuje, że w'' jest doskonałą względem z, ma więc to miejsce i dla w'.

Widzimy więc, że gdy pochodna w punkcie zejścia staje się zerem, może przestać być jednowartościową względem w, a być jednowartościową względem z, jeśli tylko pierwszy wyraz w rozwinięciu na potęgi ułamkowe ma wykładnik, w którym licznik mniejszy jest od mianownika o jedność.

§ 65. Przykłady funkcyj okresowych. Równanie różniczkowe:

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{1 - w^2},$$

w którém dla $z = 0$, przypuszczamy $w = 0$, a wartość pochodnéj równą $+1$, czyni, jak łatwo o tém się przekonać, zadość wszystkim powyżéj wymienionym warunkom jednowartowości.

Aby zbadać jéj rodzaj pod względem okresowości, uważmy równanie:

$$(1 - \zeta^2)\omega^2 = 1 \qquad \text{albo} \qquad (1 - \zeta)(1 + \zeta)\omega^2 = 1;$$

w dwóch punktach zejścia a zarazem nieskończoności, pierwiastki ω_1 i ω_2 tworzą układ kołowy dwuznakowy, ale w odpowiadających im rozwinięciach nie ma wyrazu z odjemnym wykładnikiem równym -1.

Uważmy drogę prostolinijną punkt o łączącą z punktem ζ, wartość całki będzie: $\int_0^\zeta \omega_1 d\zeta$: następnie uważmy drogę zamkniętą punkt $+1$ obejmującą, oznaczmy ją przez (Σ), wartość całki po drodze: $(\Sigma) + o\zeta$, będzie

$$\int_{(\Sigma)} \omega_1 dz + \int_0^\zeta \omega_2 d\zeta,$$

albo zastępując drogę (Σ) przez kontur elementarny, i pamiętając że: $\omega_2 = -\omega_1$, wartość tę będziemy mogli napisać:

$$= \qquad 2\int_0^1 \omega_1 d\zeta - \int_0^\zeta \omega_1 d\zeta.$$

Drogą taką, która ω_1 doprowadza do jéj pierwotnéj wartości, będzie tu krzywa, oba punkta $(+1)$ i (-1) obejmująca: okresem będzie więc w tym przypadku granica całki prostolinijnéj:

$$\int_{-1}^{+1} (\omega_1 - \omega_2) d\zeta,$$

albo:

$$2\int_{-1}^{+1} \omega_1 d\zeta.$$

Okres ten będzie jedynym.

Odnosząc się teraz do funkcyi w, widzimy, że będzie ona pojedynczo okresową, i że w każdym pasie przybierać będzie dwa razy jedną i tę samą wartość, odpowiednio wyrażeniom:

$$z \quad \text{i} \quad 2\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\zeta - z.$$

Całkę tu wchodzącą możemy obliczyć, jest albowiem:

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{2};$$

podobnież, łatwo znajdziemy wartość okresu; bo:

$$2\int_{-1}^{+1} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 4\int_0^{+1} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 2\pi.$$

Znalezione tu własności zupełnie są zgodne ze znanemi nam już własnościami wstawy, którą właśnie dane równanie różniczkowe określa.

Nadmienimy tu jeszcze, że poszukując dróg, których przebieżenie doprowadza pierwiastek ω_1 do jego pierwotnéj wartości, nie braliśmy pod uwagę dróg powstających przez dwukrotne okrążenie jednego z punktów $(+1)$ lub (-1), bo całki odpowiadające okrążeniu takiego punktu są w granicy zerem, na mocy poprzednio zrobionéj uwagi o potęgach odjemnych w rozwinięciu; a nadto w tym szczególnym przypadku, choćby i ten warunek nie był zachowany, okres takiéj drodze odpowiadający sprowadziłby się do zera w skutek równości:

$$\omega_1 = -\omega_2.$$

Uważmy teraz równanie różniczkowe:

$$\frac{dw}{dz} = \sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)},$$

w którém dla $z=0$, przypuszczamy $w=0$, a $\frac{dw}{dz} = (+1)$. Funkcya w tém równaniem określona jest jednowartościową: aby zbadać ją pod względem okresowym, uważmy równanie:

$$(1-\zeta)(1+\zeta)(1-k\zeta)(1+k\zeta)\omega^2 - 1 = 0.$$

Przedewszystkiém widzimy, że $\int \omega_1 d\zeta$ przybiera inną wartość przez przebieżenie drogi punkt np. $(+1)$ obejmującéj, wartość różniącą się od poprzedniéj o wartość całki prostolinijnéj:

$$(\alpha)\qquad \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} = \mathrm{K},$$

z powodu bowiem, że pierwiastek w rozwinięciu nie zawiera pierwszéj potęgi odjemnéj, całka po krzywéj zamkniętéj punkt $(+1)$ obejmującéj, staje się w granicy zerem.

Poszukajmy teraz dróg doprowadzających pierwiastek ω_1 do wartości pierwotnéj. Drogi odpowiadające dwukrotnemu okrążeniu któregokolwiek z uważanych 4ch punktów nie dają okresów, dla téj saméj co powyżéj przyczyny. Pozostają więc tylko drogi odpowiadające okrążeniu dwóch którychkolwiek z istniejących 4 punktów krytycznych. Znaczkując te punkta po porządku: 1, 2, 3, 4, znajdziemy sześć następujących okresów:

$\int_{(1)} \omega_1 d\zeta + \int_{(2)} \omega_2 d\zeta$	$\int_{(2)} \omega_1 d\zeta + \int_{(3)} \omega_2 d\zeta$	$\int_{(3)} \omega_1 d\zeta + \int_{(4)} \omega_2 d\zeta$
$\int_{(1)} \omega_1 d\zeta + \int_{(3)} \omega_2 d\zeta$	$\int_{(2)} \omega_1 d\zeta + \int_{(4)} \omega_2 d\zeta$	
$\int_{(1)} \omega_1 d\zeta + \int_{(4)} \omega_2 d\zeta$		

Ze względu, że funkcya w jest jednowartościową, możemy zgóry przewidzieć, że z wypisanych 6ciu okresów dwa tylko są niezależne : dla większéj jednak oczywistości bezpośrednio to okażemy :

Z równości bowiem :

$$\omega_1 = -\omega_2,$$

wypada :

$$\int_{(2)} \omega_1 d\zeta = -\int_{(2)} \omega_2 d\zeta,$$

$$\int_{(3)} \omega_1 d\zeta = -\int_{(3)} \omega_2 d\zeta,$$

$$\int_{(4)} \omega_1 d\zeta = -\int_{(4)} \omega_2 d\zeta.$$

Do tych trzech równań dołączamy czwarte :

$$\int_{(} \omega_1 d\zeta + \int_{(2)} \omega_2 d\zeta + \int_{(3)} \omega_1 d\zeta + \int_{(4)} \omega_2 d\zeta = 0,$$

które ma miejsce dla uważanego równania punkt bowiem $\zeta = \infty$, jakkolwiek jest punktem zejścia, ale takim, że każdy z pierwiastków tworzy układ kołowy jednoznakowy, a w rozwinięciu jego odniesioném do punktu zero, na płaszczyznie określonéj przez podstawienie $\zeta = \frac{1}{\zeta'}$, nie wchodzi pierwsza potęga ζ' (*), całka zatém po krzywéj obejmującéj poprzednio uważane cztery punkta krytyczne, a uważanéj za ograniczenie punktu nieskończenie odległego jest zerem.

Cztery powyżéj napisane równania sprowadzają uważanych sześć okresów do dwóch rzeczywiście niezależnych : wybór tu jest dowolny.

Widzimy więc, że funkcya w jest podwójnie okresową, a w każdym obrębie okresowym przyjmuje jednę i tę samą wartość dla dwóch wartości zmiennéj niezależnéj :

$$z \qquad \text{i} \qquad z + K,$$

gdzie (K) jest określone równaniem (α).

Przypuśćmy teraz, że k jest ilością rzeczywistą mniejszą od jedności : wtedy K będzie ilością rzeczywistą; nadto przyjmując za okresy wartości całek prostolinijnych :

$$2\int_{-1}^{+1} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \quad \text{i} \quad 2\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}},$$

(*) Przekonać się łatwo o tém można badając według ogólnéj teoryi pierwiastki równania :

$$(\zeta'^2 - 1)(\zeta'^2 - k^2)\omega^2 - \zeta'^4 = 0$$

odnośnie do punktu $\zeta' = 0$, na pierwsze przybliżenia znajdziemy wartości :

$$\omega_1 = \frac{1}{k}\zeta'^2, \qquad \omega_2 = -\frac{1}{k}\zeta'^2.$$

odpowiadających poprzednio uważanym :

$$\int_{(1)} \omega_1 d\zeta + \int_{(2)} \omega_2 d\zeta \quad \text{i} \quad \int_{(2)} \omega_1 d\zeta + \int_{(3)} \omega_2 d\zeta,$$

widzimy bezpośrednio, że pierwszy okres jest ilością rzeczywistą równą 4K, drugi zaś przez podstawienie :

$$z = \frac{1}{k}\sqrt{1 - k'^2 z'^2}, \qquad k^2 + k'^2 = 1$$

przedstawi się w kształcie :

$$2i \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k'^2\zeta'^2)}}.$$

kładąc zaś odpowiednio równaniu (α) :

$$(\beta) \qquad \int_0^1 \frac{d\zeta'}{\sqrt{(1-\zeta'^2)(1-k'^2\zeta'^2)}} = \mathrm{K}',$$

widzimy ostatecznie że jest on równy ilości urojonéj $2\mathrm{K}'i$.

Zbadana tu funkcya jest jedną z funkcyi zwanych eliptycznemi ; znaczy się :

$$\sin am(z) \qquad \text{lub} \qquad \lambda(z).$$

Teorya tych funkcyi jest specaylnie traktowaną w dziele Briot et Bouquet : *Théorie des fonctions doublement périodiques, et en particulier des fonctions elliptiques.*

Funkcya odwrotna :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

któréj szczególnemi wartościami są uważane powyżéj ilości K i K′, odniesiona tylko do zmiennéj rzeczywistéj nazywa się całką eliptyczną, do tego bowiem kształtu sprowadza się wyrażenie na długość łuku elipsy. Zachodzi tu odpowiedniość z funkcyą odwrotną wstawie, którą pisać można :

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

a która przedstawia długość łuku okręgu koła.