

# Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych.

---

## Posiedzenie

z dnia 20 Czerwca 1918 r.

Rok XI. № 6.

Obecni:

Przewodniczący Wydziału p. St. J. Thugutt.  
Sekretarz p. J. Tur.

Członkowie Towarzystwa pp.: K. Białaszewicz, A. Czartkowski, E. Flatau, Wł. Gorczyński, M. Jakowski, W. Janowski, L. Kryński, E. Loth, St. Orłowski, K. Rzętkowski, J. Sosnowski, K. Stołyhwo, Z. Wóycicki.

## Komunikaty.

---

1. M. Erlichówna:

### Badania anatomiczno-patologiczne nad myastenją.

Z Pracowni Neurobiologicznej Tow. Nauk. Warsz.

Komunikat zgłoszony d. 7 Marca 1918 r.

Przedstawił E. Flatau.

Demonstrowane preparaty i rysunki dotyczą, sekcyjnie badanych, dwu przypadków myastenji. Były to dwie kobiety,

Sprawozdania Tow. Nauk. Warsz. Rok XI, 1918. Zeszyt 6.

1

z których pierwsza — 38-letnia, zmarła w niespełna 2 lata po wystąpieniu objawów chorobnych w napadzie duszności; u drugiej 41-letniej sprawa ciągnęła się lat 11, śmierć nastąpiła w kilka dni po wystąpieniu nierozpoznanej sprawy gorączkowej. W obydwu przypadkach stwierdziliśmy obecność złośliwych guzów grasicy — w pierwszym raka płaskokomórkowego, w drugim mięsaka, — oraz ognisk drobnokomórkowych w mięśniach prążkowanych i w sercu.

W przypadku z rakiem grasicy, prócz zmian wyżej wymienionych, uderza znaczny niedorozwój serca oraz tętnicy głównej, których wszystkie wymiary są znacznie mniejsze od norm przeciętnych.

Pochodzenia obydwu guzów złośliwych z grasicy dowodziło typowe ich umiejscowienie w przednim śródpiersiu pod mostkiem, stosunek ich do otaczających narządów, zwłaszcza do poszczególnych odcinków serca i osierdza; przede wszystkim jednak o pochodzeniu guzów decydowała ich budowa: w przypadku mięsaka można było, już makroskopowo, odróżnić część górną guza, złożoną z dwóch podłużnych płatów z cechami normalnej, zrazikowatej tkanki grasicy, oraz część dolną o wyglądzie nowotworu. Mikroskopowo można było tu stwierdzić stopniowe przejście od zupełnie normalnej tkanki grasicy, złożonej z istoty korowej i istoty rdzennej z ciałkami Hassal'a, — do tkanki nowotworowej. Tkanka ta składająca się z komórek mięsaka, przeważnie wrzecionowatych, usiana jest mniej lub więcej gęsto małymi okrągłymi komórkami grasicy. W przypadku raka guz na całej przestrzeni i na przekroju ma charakter nowotworu; mikroskopowo składa się z ognisk komórek rakowatych, wśród których rozsiane są, podobnie jak w mięsaku, małe okrągłe komórki grasicy. Dopiero po długim i mozolnym szukaniu udało się wykryć w górnej tylnej części guza nieliczne maleńkie wysepki tkanki normalnej grasicy z typowymi ciałkami Hassal'a.

W obydwu guzach stwierdzono skłonność do tworzenia się grubych warstw tkanki łącznej zwłaszcza na powierzchni guza, — oraz niezbyt ich wielką złośliwość. Brak było, w obydwu przypadkach, zrostów z otaczającymi narządami i tkankami, guzy leżały zupełnie luźno w śródpiersiu i dały się swobodnie unosić ku przodowi i w górę. Przytem w przypadku mięsaka nie wykryliśmy wcale przerzutów, w przypadku zaś raka były one nie-



liczne w postaci małych guziczków do powierzchni płuc i do jednego gruczołu chłonnego śródpiersia.

Ogniska w mięśniach i w sercu składają się z małych okrągłych komórek z intensywnie barwiącym się jądrem i wązkim rąbkim zarodki, oraz z komórek nieco większych z jądrem podłużnym, pęcherzykowatym. Ogniska te leżą pomiędzy włóknami mięsnymi, często wzdłuż naczyń. Niektóre włókna mięsne znajdujące się w bliskości ognisk są ścięte, rysunek ich prądkowany — zatarty. Najwięcej takich ognisk znaleźliśmy w mięśniach szyi, zwłaszcza w przypadku mięsaka, w mięśniach pozostałych były one nieliczne, lub też brak ich było zupełnie.

Z piśmiennictwa, dotyczącego anatomopatologii myastenji widać, że najstalej, a może nawet stale występującą zmianą w tym cierpieniu są ogniska drobnokomórkowe w mięśniach; niewiadomo jednak dotąd jaki istnieje związek przyczynowy pomiędzy zmianami histologicznymi, a samą sprawą chorobową. Jest to pytanie, które wymaga dalszego przestudjowania. Na drugim miejscu pod względem częstości należy postawić zmiany wyraźne w grasicy. Mniej więcej w połowie przypadków spotykamy opisy grasicy stałej (*thymus persistens*) grasicy powiększonej, przerośniętej; najrzadziej spotykają się złośliwe guzy śródpiersia (grasicy?). Prócz naszych dwu przypadków opisano ich dotąd cztery w myastenji. Należy sądzić, że w powstawaniu myastenji odgrywają rolę zaburzenia w czynności tego narządu o wewnętrznym wydzielaniu, nie ustalono jednak dotąd, na czym polega ta wadliwa czynność grasicy i jaki jest jej wpływ na wyczerpywanie się siły mięśniowej. Według innych autorów istnieje związek pomiędzy przytarczycą a myastenją — inni szukają przyczyny tego cierpienia w kombinacji kilku gruczołów, wzajemnie na siebie oddziałujących.

Dodaję, że guzy złośliwe grasicy należą wogóle do rzadkości, nawet poza myastenją; najczęściej stosunkowo spotykają się mięsaki limfatyczne, rzadko — mięsaki zwyczajne, raki grasicy należą do unikatów anatomo-patologicznych.

W końcu muszę podkreślić niedorozwój układu krwionosnego w przypadku raka: podobne zбочenia rozwojowe stwierdzano już kilkakrotnie w myastenji — z drugiej strony widzimy, że są one właściwe t. zw. stanom limfatycznym (*status lymph-*

*ticus, status thymico-lymphaticus, status thymicus*). Między temi tak powikłanemi sprawami istnieje niewątpliwie związek, który wyjaśnić powinny dalsze badania anatomopatologiczne i doświadczalne.

RÉSUMÉ.

M. Erlich:

**L'étude anatomopathologique de la  
myasthénie.**

Travail du Laboratoire de Neurobiologie de la Société des Sciences de Varsovie.

Communication annoncée le 7 Mars 1918.

Présentée par E. Flatau.

Les préparations et les dessins présentés ici proviennent des deux malades, frappées par la myasthénie. L'une d'elles âgée de 38 ans, mourut à peu près deux ans après le début de sa maladie au cours d'un accès d'étouffement, une autre femme, âgée de 41 ans, était malade pendant 11 ans, la mort est intervenue par suite d'une affection infectieuse qui donna une haute élévation de la température; la nature de cette affection ne pouvait pas être précisée. Dans tous les deux cas nous pouvions constater la présence des tumeurs malignes du thymus; dans l'un d'eux il s'agissait d'un cancer à cellules plates, dans l'autre — d'un sarcome, dans les deux il y avait des foyers d'infiltration cellulaire dans les muscles striés et le muscle cardiaque.

La malade atteinte du carcinome du thymus avait le système cardio-vasculaire peu développé, tous les diamètres du coeur et de l'aorte étaient moindres qu'à l'état normal.

L'origine thymique de ces tumeurs fut prouvée par leur localisation dans le médiastin antérieur au dessous du sternum, de même que par leur rapport avec les organes environnants surtout avec les différents segments du coeur et du péricarde, mais avant tout leur structure histologique, qui nous disait de quelles tumeurs s'agit-il. Dans le cas de sarcome nous pouvions distinguer même à l'oeil nu une partie supérieure, constituée par deux longs lobes formés par le tissu thymique normal à lobules, et une partie inférieure d'aspect néoplasique. L'examen microscopique nous a permis de suivre la transition du tissu normal du



thymus, formé par la substance corticale et la médullaire avec les corpuscules de Hassal vers le tissu néoplasique. Ce dernier était composé des cellules sarcomateuses (fusiformes pour la plupart) et parsemé plus ou moins abondamment de petites cellules rondes du thymus. Dans le cas de carcinome la tumeur dans toute son étendue présentait le caractère d'un néoplasme; l'examen microscopique décèle des foyers de cellules carcinomateuses parmi lesquelles on voit, de même que dans le cas précédent, des petites cellules rondes thymiques. Ce n'est qu'après de longues et minutieuses recherches qu'on pouvait constater dans la partie supérieure et postérieure de la tumeur des petits îlots de tissu thymique normal avec les corpuscules de Hassal.

Les deux tumeurs montraient une tendance à produire des couches épaisses du tissu conjonctif surtout à leur superficie, elles étaient peu malignes et ne présentaient point d'adhérences avec les organes et les tissus environnants, elles restaient libres dans le médiastin et se laissaient facilement soulever vers le haut et en avant. Le sarcome n'a pas donné de métastases, le carcinome les a donnés en petit nombre sous forme de petits noyaux dispersés sur la surface des poumons et dans une glande lymphatique.

Les foyers cellulaires disposés dans les muscles et le cœur se composaient: de petites cellules rondes munies des noyaux fortement colorés et d'un liseré étroit de protoplasme, et de cellules plus grandes avec le noyau allongé vésiculaire. Ces foyers sont disposés entre les faisceaux musculaires souvent le long des vaisseaux. Quelques faisceaux musculaires situés dans le voisinage de foyers sont amincis, leurs stries sont effacées.

Le plus grand nombre de ces foyers se trouvait dans les muscles du cou surtout dans le cas de sarcome, dans d'autres muscles ils étaient peu nombreux ou manquaient complètement.

La littérature concernant l'anatomie pathologique de la myasthénie nous enseigne que la lésion la plus stable, peut être même constante, est l'infiltration cellulaire des muscles, il n'est pas pourtant connu quel rapport existe entre la lésion histologique et la maladie même. La question reste à étudier. Seconde place au point de vue de la fréquence appartient à la lésion du thymus. Dans la moitié de cas

à peu près nous trouvons le thymus persistant, trop grand, hypertrophié; beaucoup plus rares sont les tumeurs malignes du médiastin (du thymus?). Outre nos deux cas on trouve dans la littérature la description de quatre tumeurs pareilles dans la myasthénie. Il faut croire que dans la pathogénèse de la myasthénie joue un certain rôle le trouble de la fonction de cet organe à secretion interne, on ne sait pas pourtant encore en quoi consiste ce trouble, et en quel rapport se trouve-t-il avec l'épuisement de la force musculaire. D'après quelques auteurs la myasthénie dépend de la glande parathyroïdienne, d'autres croient que cette affection dépend de plusieurs glandes à secretion interne qui agissent réciproquement l'une sur l'autre.

Il faut ajouter que les tumeurs malignes du thymus sont en général rares même en dehors de la myasthénie; le plus souvent rencontre-t-on les lympho-sarcomes, plus rarement les sarcomes simples, quand aux carcinomes ils constituent une rareté anatomo-pathologique. Il faut souligner l'absence de tous symptômes myasthéniques dans ces cas, à part quatre cas cités plus haut.

Il est nécessaire encore d'attirer attention sur l'arrêt de développement du système cardio-vasculaire dans le cas de carcinome: des pareilles anomalies a-t-on constaté déjà quelques fois dans la myasthénie—d'autre part nous voyons qu'elles sont propres à des états ainsi nommés lymphatiques (*status lymphaticus*, *status thymico-lymphaticus*, *status thymicus*). Entre ces affections bien compliquées doit exister un rapport indubitable, qui sera peut être une fois révélé par l'étude anatomopathologique et expérimentale.

---



2. Janusz Domaniewski:

**Nowe i mało znane formy**  
***Cynchramus schoeniclus* (Linn.).**

Komunikat zgłoszony dnia 10 Maja 1918 r.

Przedstawił B. Dybowski.

Geograficzne formy *Cynchramus schoeniclus* należy uważać za bardzo niedostatecznie znane, co tembardziej nas dziwić powinno, że zdobycie materiału dla pracy nad tym gatunkiem jest stosunkowo łatwe. Ostatnim, który krytycznie zajmował się geograficznymi formami tego gatunku był Hartert (1), który wprawdzie bardzo znacznie posunął naprzód ich znajomość, jednak z powodu braku dostatecznej ilości materiału sprawy ostatecznie nie wyjaśnił.

Po wyjściu wspomnianej pracy Hartert'a opisano jeszcze kilka nowych form potrzosa, monograficznie jednak nikt się nim do ostatnich czasów nie zajmował. Przejrzawszy ciekawy materiał, znajdujący się w muzeach warszawskich, stwierdzić mogę ogromną zmienność geograficzną tego gatunku, wyrażającą się zarówno w ubarwieniu, jak i w formie dzioba. Z pośród całego szeregu podgatunków, z którymi miałem do czynienia, dwa opisuję jako nowe, na innych odrębność zwracam jedynie uwagę, powstrzymując się narazie od nadawania im nazw z powodu małej ilości okazów, którymi rozporządzałem.

***Cynchramus schoeniclus pyrrhulinus* (Swinhoe) ?**

*Emberiza pyrrhulinus* Swinhoe, Ibis 1876 p. 333 (Hakodate, Japonja).

Swojego czasu Buturlin (2) podał wzmiankę o znalezieniu tego potrzosa w kraju Amurskim, mianowicie na jeziorze Chanka. W Muzeum hr. Branickich znajduje się siedem ptaków (bitych w marcu i początkach kwietnia) z rzeki Sungucz, wpadającej do jeziora Chanka, oraz z Sidemi (okolice Władywostoku), które, o ile sądzić mogę bez porównania z topotypowym *C. pyrrhulinus*, należą do tej formy. Formę dzioba tych ptaków



1. Dziób *C. sch. pyrrhuliius*.
2. Dziób *C. sch. parvirostris*.
3. Dziób *C. sch. curvirostris*.
4. Dziób *C. sch. canneti*.

ilustruje figura 1-sza. Wymiary sześciu samców i jednej samicy są następujące: skrzydło: ♂ 81,5—83,0 mm., ♀ 77,0 mm.; ogon: ♂ 65,0—71,0 mm., ♀ 65,0 mm.; dziób od nozdrzy: ♂ 6,8 — 7,5 mm., ♀ 6,4 mm. Wymiary te zgadają się najzupełniej z wymiarami podanymi przez Buturlina, są natomiast mniejsze od tych, które podał Hartert (l. c.). Zdaje się nie ulegać wątpliwości, że Buturlin miał do czynienia z tą samą formą, co i ja. Czy forma ta jest jednak

identyczną z *pyrrhulinus* Swinhoe stwierdzić można będzie jedynie przez porównanie.

### *Cynchramus schoenictus* subsp. nov.?

Trzy ptaki z Kamczatki, znajdujące się w Muzeum hr. Braniczich, są bardzo podobne do powyżej wspomnianych ptaków z kraju Amurskiego, różnią się jednak od nich ciemniejszym ubarwieniem wierzchu ciała oraz większymi wymiarami.

Wymiary te są następujące:

	skrzydło	ogon	dziób od nozdrzy
♂ 30.V. Kamczatka coll. B. Dybowski	85,0 mm.	70,0 mm.	7,5 mm.
♂ 19.V. Kamczatka coll. B. Dybowski	86,0 mm.	75,0 mm.	7,5 mm.
♂ (juv.) 19.V. Kamczatka coll. B. Dybowski	83,0 mm.	67,0 mm.	7,0 mm.

Ptaki te tworzą zapewne nową formę, co jednak stwierdzić można będzie ostatecznie jedynie przez porównanie z typowym *C. sch. pyrrhulinus*.



*Cynchromus schoeniclus parvirostris* (But.) ?

*Emberiza schoeniclus parvirostris* Buturlin, Messenger Ornithol. 1910, p. 262 (Północna Syberja).

Hartert (l. c.) przypuszcza, że ptaki gnieźdzące się nad jeziorem Bajkalskim należą do *C. schoeniclus pallidior*. Nie-stety, pewnych ptaków gniazdowych z Bajkału nie posiadam, tak, że sprawy tej przesądzać nie mogę; natomiast posiadam ze wspomnianej okolicy ptaki wiosenne, które z największą pewnością do *C. sch. pallidior* nie należą. Ptaki te są niemal zupełnie podobne do *C. sch. schoeniclus*, różnią się od nich jednak tem, że posiadają ciemne plamy wzdłuż stosin piór grzbietowych daleko węższe; pod tym względem zbliżają się one do *C. sch. pallidior*, od których jednak są bezporównania ciemniejsze. Sądząc z opisu Buturlina (3), ptaki te należą do opisanej przez niego formy. Jak to widać z poniżej przytoczonych wymiarów i pod tym względem ptaki Bajkalskie odpowiadają opisowi Buturlina. Kształt dziobu owych ptaków wskazuje ry-cina 2-ga.

	skrzydło	ogon	dziób od nozdrzy
♂ 26.IV.1869. Koultouk coll. Dybowski et Godlewski	83,5 mm.	71,5 mm.	7,0 mm.
♂ 26.IV.1869. Koultouk coll. Dybowski et Godlewski	85,0 mm.	74,0 mm.	7,1 mm.
♂ 26.IV.1869. Koultouk coll. Dybowski et Godlewski	82,0 mm.	71,1 mm.	7,0 mm.
♀ 22.IV.1869. Koultouk coll. Dybowski et Godlewski	74,0 mm.	65,0 mm.	6,1 mm.
♀ 16.V.1877. Koultouk coll. Dybowski et Godlewski	78,0 mm.	68,0 mm.	6,3 mm.
♀ 24.IV.1877. Koultouk coll. Dybowski et Godlewski	74,0 mm.	65,3 mm.	6,5 mm.

Niemal identyczny z temi ptakami jest ptak z Fergany:

♂ 6.III.1892. Kokand coll. T. Barey	83,0 mm.	68,0 mm.	6,5 mm.
--	----------	----------	---------

*Cynhramus schoeniclus pallidior* Hart.

*Emberiza schoeniclus pallidior* Hartert, Vög. paläark. Fauna, I B., 2 Heft., 1904, p. 197 (Bajkał—Turkiestan).

Do tej formy bezwątpienia należą ptaki z Zakaspijskiego kraju i Fergany. Ptaki te Sztolcman w pracach swoich nazywa *Emberiza schoeniclus*.

Wymiary ich są następujące:

	skrzydło	ogon	dziób od nozdrzy
♂ 14.II.1890. Tedjend <sup>1)</sup> coll. T. Barey	82,0 mm.	72,0 mm.	6,9 mm.
♂ (juv.) 30.X.1889. Soultan-Bent coll. T. Barey	79,0 mm.	70,8 mm.	6,8 mm.
♂ 7.II.1889. Aschabad coll. T. Barey	81,0 mm.	71,5 mm.	6,9 mm.
♀ 3.X.1889. Aschabad coll. T. Barey	77,0 mm.	69,0 mm.	6,9 mm.
♂ (juv.) 1.XI.1888. Aschabad coll. T. Barey	80,0 mm.	70,0 mm.	7,0 mm.
♂ 15.II.1894. Marguelane coll. T. Barey	86,0 mm.	75,0 mm.	7,0 mm.
♀ 20.I.1894. Marguelane coll. T. Barey	76,0 mm.	70,0 mm.	6,3 mm.
♀ 5.II.1892. Kokand coll. T. Barey	74,0 mm.	64,9 mm.	6,9 mm.

Blizko do *pallidior* stoi jeden ptak przelotny z okolic Saratowa, którego opis podałem na innym miejscu (4). Do niego podobny jest ptak w Muzeum Branickich oznaczony „Syberja“.

*Cynhramus schoeniclus* subsp. nov. ?

W Muzeum Branickich znajdują się trzy okazy potrzosa ze wschodniego Kaukazu, które należą prawdopodobnie do nieo-

<sup>1)</sup> Miejscowości Tedjend, Soultan-Bent i Aschabad leżą w Zakaspijskim kraju; miejscowości Margelane i Kokand w Ferganie.



pisanej dotychczas formy. Ptaki te wykazują ubarwienie ciemniejsze aniżeli *C. sch. pallidior* (Hart.) są jednak wyraźnie jaśniejsze aniżeli *C. sch. schoeniclus* (Linn.). Bliższe są w każdym razie *C. sch. pallidior*, od których mają dziób nieco mniejszy.

Wymiary:

	skrzydło	ogon	dziób od nozdrzy
♂ 14.XII.1887. Surichani coll. Młokosiewicz	77,0 mm.	70,0 mm.	6,3 mm.
♂ 13.XII.1887. Bał. step coll. Młokosiewicz	82,0 mm.	73,7 mm.	6,5 mm.
♀ 2.III.1888. Szachagaczy coll. Barey	75,0 mm.	67,1 mm.	6,5 mm.

*Cynhramus schoeniclus curvirostris* subsp. nov.

*Embertza schoeniclus canneti* Domaniewski, Trav. Soc. Sc. Varsovie 1916, № 18, p. 43 (Saratów).

*Emberiza schoeniclus canneti* Domaniewski, Pam. Fizyograf. 1918, XXV, p. 3 (Polesie).

Ptaki te, które dotychczas, opierając się na rysunku i opisie Harterta (l. c.), uważałem za *C. sch. canneti* (Brehm), okazały się po porównaniu z *C. sch. canneti* z Hercegowiny nową formą. *C. sch. curvirostris* różni się od *C. sch. canneti* nieco niższym, bardziej wydłużonym i zagiętym dziobem (patrz. ryc. 3). Wierzch ciała jest bardzo ciemny. Plamy wzdłuż stosin piór grzbietowych są niemal czarne, bardzo duże, tak że zaledwie na brzegach każdego pióra występuje wąskie obrzeżenie koloru rdzawo-brunatnego. Forma ta jest najciemniejszą ze wszystkich, jakie widziałem. Dziób jest prawie czarny. Jako krainę typową tej formy oznaczam dolinę Wołgi w okolicach Saratowa. Ptaki z pow. Pińskiego gub. Mińskiej należą do tej samej formy, tak więc należy przypuszczać, iż *C. sch. curvirostris* gnieździ się począwszy od gub. Mińskiej aż po Wołgę.

Wymiary 5 ♂♂ są następujące: skrzydło 80,0—83,0 mm.; ogon 69,0—75,0 mm.; dziób od nozdrzy 7,5—8,0 mm.

*Cynchramus schoeniclus goplanae* subsp. nov.

Ptaki gniazdowe Królestwa Polskiego są bardzo zbliżone do *C. sch. curvirostris*, różnią się jednak od tej formy zaledwie szczuplejszym dziobem oraz nieco jaśniejszym ubarwieniem. Jako typową krainę *Cynchramus schoeniclus goplanae* oznaczam okolice Warszawy.

Wymiary 5 ♂♂ są następujące: skrzydło 80,0—86,0 mm.; ogon 68,0—75,0 mm.; dziób od nozdrzy 7,0—7,8 mm.

*Cynchramus schoeniclus schoeniclus* (Linn.).

*Fringilla Schoeniclus* Linnaeus, Syst. Nat. Ed. X, I, 1758, p. 182 (Europa).

Forma ta, różniąca się od *C. sch. goplanae* daleko szczuplejszym dziobem, bywa w Polsce jedynie przelotem. Długość dzioba od nozdrzy u *C. sch. schoeniclus* wynosi zwykle mniej aniżeli 7,0 mm., sam dziób jest naogół daleko szczuplejszy i prostszy, aniżeli dziób *C. sch. goplanae*. Muszę tu zauważyć, iż mam wrażenie, że okazy *Cynchramus schoeniclus schoeniclus*, które strzelałem w okolicach Saratowa, mają dziób nieco mniejszy aniżeli ptaki zabijane na przelocie w Polsce. Być może, że północno-europejskie potrzosy, uważane dotychczas za jedną formę, są właściwie dwiema formami, z których jedna zamieszkuje północno-zachodnie, druga północno-wschodnie okolice Europy.

---

L I T E R A T U R A.

---

1. E. Hartert: Die Vögel der paläarktischen Fauna, Heft 2, 1904.
2. S. A. Buturlin: A new Russian form *Emberiza schoeniclus pyrrhulinus* Swinh. *Messenger Ornithologique*. Moskwa, 1910.
3. S. A. Buturlin: *Emberiza schoeniclus parvirostris* subsp. nov. *Messenger Ornithologique*, Moskwa, 1910.
4. J. Domaniewski: Passeriformes der Umgegend von Saratov. *Travaux de la Société de Sciences de Varsovie*. № 18, 1916.
5. J. Domaniewski: Sprawozdanie z wycieczki ornitologicznej odbytej na Polesie w r. 1913. *Pamiętnik Fizygraficzny* T. XXV, 1918.



6. M. Härms: *Emberiza schoeniclus zarudnyi* subsp. nov. *Ornithologische Monatsberichte* XVII Jahrg. 1909.
7. S. A. Buturlin: A forgotten bird. *Messenger Ornithologique*-Moskva, 1910.
8. J. Stolzmann: Contribution à l'ornithologie de la Transcaspie. *Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou*, № 3, 1892.
9. J. Stolzmann: Oiseaux de la Ferghana. *Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou*, 1897.

RÉSUMÉ.

Janusz Domaniewski:

**Formes nouvelles ou peu connues**  
**de *Cynchramus schoeniclus* (Linn.).**

Communication annoncée le 10. V. 1918.

Présentée par B. Dybowski.

Les formes géographiques de *Cynchramus schoeniclus* doivent être regardées comme bien incomplètement connues, ce qui est d'autant plus étonnant que le matériel nécessaire à l'étude de cette espèce est relativement facile à obtenir. Hartert (1) fut le dernier qui s'appliqua à l'étude critique des formes géographiques de cette espèce; il faut avouer aussi qu'il avança considérablement cette question, mais faute de matériel ne put l'élucider définitivement. Plus tard après l'ouvrage de Hartert quelques-unes formes nouvelles de bruant des roseaux étaient encore décrites, mais jusqu'ici personne n'avait entrepris d'en présenter une monographie complète. Après l'examen du matériel très intéressant se trouvant dans les musées de Varsovie — j'ai pu me convaincre de l'extrême variabilité des caractères géographiques de cette espèce, variabilité s'exprimant tant dans la coloration que dans la forme du bec. Deux du nombre des sous-espèces auxquelles j'ai eu l'affaire sont décrites par moi comme sous-espèces nouvelles, quant aux autres — je n'en souligne que les traits distinctifs en m'abstenant pour le moment de leur donner des noms spéciaux à cause du petit nombre d'exemplaires dont je disposais.

*Cynchramus schoeniclus pyrrhulinus* (Swinhoe) ? [fig. 1]

*Emberiza pyrrhulinus* Swinhoe, Ibis 1876, p. 333 (Hakodate, Japon).

Buturlin (2) avait publié en son temps que ce bruant des roseaux était trouvé dans le pays d'Amour, notamment sur le lac Khanka. Au Musée Branicki il y a sept oiseaux tués au cours du mois de mars et d'avril sur la rivière Soungoutscha, affluent du lac Khanka, ainsi qu'à Sidemi (environs de Vladivostok) qui, s'il m'est permis d'en juger sans les comparer avec les exemplaires typiques de *C. pyrrhulinus*, appartiennent à cette forme. La forme du bec de ces oiseaux est présentée sur la fig. 1. Les dimensions des six mâles et de l'unique femelle sont les suivantes: aile: ♂ 81,5—83,0 mm., ♀ 77,0 mm.; queue: ♂ 65,0—71,0 mm., ♀ 65,0 mm.; bec en partant des narines: ♂ 6,8—7,5 mm., ♀ 6,4 mm. Ces dimensions concordent parfaitement avec celles qui ont été données par Buturlin mais par contre elles n'atteignent pas celles de Hartert (l. c.). Il semble d'être hors de doute que Buturlin a dû avoir affaire à la même forme. Cette forme serait-elle identique avec le *pyrrhulinus* Swinhoe—on ne pourra le décider que si on en fait la comparaison.

*Cynchramus schoeniclus* subsp. nov. ?

Trois oiseaux du Musée Branicki provenant de Kamtschatka ressemblent beaucoup à ceux du pays d'Amour tantôt décrits; cependant ils en diffèrent par la coloration plus foncée du dessus du corps et par leurs dimensions plus grandes.

Ces dimensions sont suivantes:

	aile	queue	bec à partir des narines
♂ 19.IV Kamtschatka coll. B. Dybowski	85,0 mm.	70,0 mm.	7,5 mm.
♂ 19.V Komtschatka coll. B. Dybowski	86,0 mm.	75,0 mm.	7,5 mm.
♂ (juv.) 19.V Kamtschatka coll. B. Dybowski	83,0 mm.	67,0 mm.	7,0 mm.



Ces oiseaux-là constituent sans doute une forme nouvelle; on ne pourra cependant le constater définitivement que par la comparaison avec les *C. sch. pyrrhulinus* typiques.

*Cynchramus schoeniclus parvirostris* (But.) ? [fig. 2.]

*Emberiza schoeniclus parvirostris* Buturlin, Messenger Ornithol. 1910 p. 262 (Sibérie sept.).

Hartert (l. c.) suppose que les oiseaux nidifiant sur le lac de Baïcal appartiennent au *C. sch. pallidior*. Malheureusement — certains oiseaux de ces régions me manquent, par suite de quoi je ne puis me prononcer sur cette question; par contre je possède de ce pays-là des oiseaux printaniers, qui n'appartiennent pas sûrement au *C. sch. pallidior*. Ces oiseaux sont presque tout à fait semblables au *C. sch. schoeniclus*, mais ils en diffèrent par ce que les taches sombres le long des rachis des plumes dorsales y sont beaucoup plus minces; sous ce rapport ils se rapprochent à *C. sch. pallidior* mais leur teint est beaucoup plus sombre que chez ces derniers. A en juger d'après la description de Buturlin (3) ces oiseaux appartiennent à la forme décrite par lui. Comme on le voit des dimensions données dans le texte polonais, les oiseaux du Baïcal concordent en ce point aussi avec la forme décrite par Buturlin. La forme du bec de mes oiseaux est représentée sur la figure 2. Un oiseau de Ferghana (♂ 6 III.1892. Kokand., coll. T. Barey) est presque identique avec ces oiseaux de Baïcal. Leurs dimensions: aile 83,0 mm., queue 68,0 mm., bec à partir des narines 6,5 mm.

*Cynchramus schoeniclus pallidior* (Hart.).

*Emberiza schoeniclus pallidior* Hartert, Vög. paläarkt. Fauna I B. 2 Heft., 1904, p. 197 (Baïcal-Tourkestan).

A cette forme appartiennent sans nul doute les oiseaux de la province Transcaspienne et de Ferghana. Stolzmann (8, 9) dans ses ouvrages appelle ces oiseaux *Emberiza schoeniclus*. Leurs dimensions sont citées dans le texte polonais. Dans mes collections il y a encore un oiseau très rapproché de *palli-*

*dior*, notamment un oiseau de passage des environs de Saratoff, dont j'ai donné la description à une autre place (4). L'oiseau du Musée Branicki, portant la désignation „Sibérie“ lui ressemble beaucoup.

*Cynchramus schoeniclus* subsp. nov. ?

Le Musée Branicki renferme trois exemplaires de bruant des roseaux provenant du Caucase oriental. Ces oiseaux appartiennent sans doute à une forme non encore décrite. Ils ont une coloration plus foncée que *C. sch. pallidior* (Hart.) mais par contre moins foncée que *C. sch. schoeniclus* (Linn). En tout cas ils se rapprochent plutôt des *C. sch. pallidior* desquels ils diffèrent par un bec un peu plus petit. Les dimensions de ces oiseaux sont donnée dans le texte polonais.

*Cynchramus schoeniclus curvirostris* subsp. nov.

*Emberiza schoeniclus canneti* Domaniewski, Trav. Soc. Sc. Varsovie 1916, № 18, p. 43.

*Emberiza schoeniclus canneti* Domaniewski, Pam. Fizyograf. 1918, XXV, p. 3

En me basant sur le dessin et la description de Hartert (l. c.) je prenais ces oiseaux pour *C. sch. canneti*, mais après comparaison avec *C. sch. canneti* de l'Hercegovine je suis arrivé à la conviction qu'ils forment une sous-espèce nouvelle. *C. schoeniclus curvirostris* diffère de *C. schoeniclus canneti* par son bec un peu plus bas, plus allongé et crochu (voir le dess. № 3). Le dessus du corps est très foncé. Les taches le long des rachis des plumes dorsales sont presque noires et très grandes, de sorte que ce n'est que sur les bords de chaque plume qu'on peut voir une bordure mince de couleur brun-roussâtre. Cette forme est la plus foncée d'entre celles qu'il m'a été donné de voir. Le bec est presque noir. J'indique comme pays typique pour cette forme la vallée de Volga aux environs de Saratoff. Les oiseaux du district de Pinsk (gouv. de Minsk) appartiennent à la même forme; il est donc à croire que *C. sch. curvirostris* nidifie à partir du gouv. Minsk jusqu'à la Volga.



Les dimension des 5 ♂♂ sont les suivantes: aile 80,0—83,0 mm.; queue 69,0—75,0 mm.; bec à partir des narines 7,5—8,0 mm.

*Cynchramus schoeniclus goplanae* subsp. nov.

Les oiseaux nidifiant dans le Royaume de Pologne sont très rapprochées de *C. sch. curvirostris*, mais ils en diffèrent toutefois par un bec un peu moins large, et par une coloration quelque peu plus claire. J'indique comme pays typique de *Cynchramus schoeniclus goplanae* les environs de Varsovie. Les dimensions des 5 ♂♂ sont les suivantes: aile 80,0—86,0 mm.; queue 68,0—75,0 mm.; bec à partir des narines 7,0—7,8 mm.

*Cynchramus schoeniclus schoeniclus* (Linn.).

*Bringilla Schoeniclus* Linnaeus, Syst. Nat. Ed. X, I, 1758, p. 182 (Europa).

Cette forme qui se distingue de *C. sch. goplanae* par un bec beaucoup plus mince ne se montre en Pologne que de passage. La longueur du bec chez *C. sch. schoeniclus* en comptant à partir des narines comporte généralement moins de 7,0 mm.; le bec est généralement plus mince et plus droit que celui de *C. sch. goplanae*. Je dois remarquer ici que selon mon impression, les exemplaires de *Cynchramus schoeniclus schoeniclus* que je tuais aux environs de Saratoff ont un bec un peu plus petit que les oiseaux que je tuais au passage en Pologne. Il se peut que les bruants de roseaux de l'Europe septentrionale qui passaient jusque là pour une seule forme, constituent en réalité deux formes distinctes dont l'une habite les contrées nord-occidentales, l'autre les contrées nord-orientales de l'Europe.



3. St. J. Przyłęcki:

### Warunki powstawania periwitelinu w jajach niezapłodnionych żaby płowej (*Rana temporaria*).

Z pracowni Chemii Fizjologicznej Uniwersytetu Warszawskiego № 2.

Komunikat zgłoszony dn. 10 Grudnia 1917 r.

Przedstawił K. Białaszewicz.

Badania moje <sup>1)</sup>, nad przyczyną niżki ciśnienia osmotycznego w jajach płazów potwierdziły zaobserwowane przez Backmann'a <sup>2)</sup>, Backmann'a i Runnström'a <sup>3)</sup>, Białaszewicza <sup>4)</sup>, nagłe obniżenie ciśnienia osmotycznego w rozwoju początkowym trąszki i żaby. Zjawisko to okazało się niezależnym od aktu zapłodnienia: niezapłodnione i nierozwijające się jaja tych zwierząt wydobyte w okresie godowym z rozszerzonych części jajowodu wykazują w zetknięciu z wodą destylowaną taką samą redukcję ciśnienia osmotycznego.

Występuje ona równocześnie z tworzeniem się cieczy periwitelinarnej.

Współczesność tych dwu zjawisk, mianowicie niżki ciśnienia osmotycznego i tworzenie się periwitelinu nasunęła Białaszewiczowi <sup>4)</sup> przypuszczenie, że obniżenie ciśnienia osmotycznego w jajku jest skutkiem wydzielania periwitelinu.

W celu sprawdzenia powyższego przypuszczenia, należało zapoznać się z warunkami powstawania niżki i periwitelinu, i w ten sposób stwierdzić, czy zaobserwowana współczesność jest rzeczywiście wynikiem zależności.

<sup>1)</sup> St. J. Przyłęcki. Spadek ciśnienia osmotycznego i rola periwitelinu w jajach płazów. Odbitka ze sprawozdań III Wydziału T. N. W. Rok X. Z. 3. 1917.

<sup>2)</sup> Backmann L. E. u. Runnström J. Der osmotische Druck während der Embryonalentwicklung von *Rana temporaria*. Arch. f. d. ges. Physiol. T. 144. 1912.

<sup>3)</sup> Backmann L. E. Die Einwirkung der Befruchtung auf den osmot. Druck der Eier von *Bufo vulgaris* u. *Triton cristatus*. Pflüger's Arch. Bd. 148. 1912.

<sup>4)</sup> Białaszewicz K. Ueber das Verhalten d. osmotischen Druckes während der Entwicklung d. Wirbeltierembryonen. Arch. f. Entwimech. T. 34. 1912.



Celem niniejszej pracy jest zapoznanie się z warunkami powstawania periwitelinu w jajach niezapłodnionych żaby płowej. Badania nad warunkami w jakich zachodzi redukcja ciśnienia osmotycznego będzie tematem dalszych badań.

Studja nad periwitelinem zapoczątkował O. Schultze<sup>1)</sup> opisem tworzenia się jego w jajach zapłodnionych żaby. Według tego autora w półtorej godziny po zapłodnieniu jajo spłaszcza się w okolicy bieguna zwierzęcego, a wolne miejsce, powstałe między jajem i błoną żółtkową wypełnia ciecz zwana periwitelinową.

Białaszewicz<sup>2)</sup> potwierdza zaobserwowane przez Schultze'ego tworzenie się periwitelinu w jajach zapłodnionych. Wykazuje on, mierząc obie osi równikowe jaja, że procesowi temu towarzyszy nagłe zmniejszenie się objętości jaja, co autor tłumaczy wydzieleniem cieczy do przestrzeni periwitelinarnej. Ponieważ jaja niezapłodnione w tym czasie nie ulegają zmianie wielkości, Białaszewicz wyprowadza ztąd wniosek, że zmniejszenie objętości jaja oraz związane z tem wytworzenie periwitelinu znajduje się w ścisłym związku ze zmianami zachodzącymi w rozwijającym się jajku.

W poprzedniej mojej pracy wykazałem, że periwitelin powstaje zarówno w jajach zapłodnionych jak i niezapłodnionych, wyjętych z rozszerzonych części jajowodów i włożonych do wody dystylowanej. Mierząc wszystkie trzy osi jaja przekonałem się: 1) że jajo przed rozpoczęciem się tworzenia periwitelinu pobiera wodę i dzięki temu powiększa swą objętość mniej więcej o 1.8%—2.1% początkowej objętości. 2) Pomiary osi biegunowej wykazały, że spłaszczenie się jaja w okolicy bieguna zwierzęcego nie jest raptowne i trwa średnio od 45—60 minut. 3) Początek spłaszczenia ma miejsce po 90—105 minutach pobytu w wodzie—koniec po 150 m. 4) Największe zmniejszenie się objętości jaja w stosunku do pierwotnej objętości wynosi przeciętnie 14.5%.

<sup>1)</sup> O. Schultze. Untersuchungen ueber die Reifung u. Befruchtung des Amphibieneis. Zeitschr. für wiss. Zool. XLV 1887.

<sup>2)</sup> K. Białaszewicz. Beiträge zur Kenntnis der Wachstumsvorgänge bei Amphibienembryonen. Bull. intern. de l'Acad. des Sc. Cracovie 1908



Wreszcie 5) periwitelin jaj zapłodnionych i niezapłodnionych wydaje się zupełnie jednakowym pod względem wielkości, kształtu i czasu występowania.

Rezultaty powyższe wykluczają tłumaczenie tworzenia się periwitelinu pod wpływem zmian wywołanych aktem zapłodnienia.

Przyczyn występowania periwitelinu w jajach żaby można się dopatrywać w zmianie bądź wewnętrznych własności jaja, bądź czynników zewnętrznych, bądź też w połączeniu ich obu. Czas, jaki jaja przebywają w rozszerzonej części jajowodów przed umieszczeniem ich do wody, nie wpływa na szybkość powstawania periwitelinu. Fakt ten świadczy, że wewnętrzne czynniki nie są wyłączną przyczyną powstawania periwitelinu, że czynniki zewnętrzne, przynajmniej pośrednio — przez wpływ na procesy wewnętrzne, muszą tu odgrywać rolę. Praca niniejsza ogranicza się do zbadania warunków zewnętrznych, koniecznych do powstawania periwitelinu. Jak wiadomo z poprzednich badań tworzy się on w wodzie zwykłej i dystylowanej. W stosunku do warunków istniejących w rozszerzonej części jajowodu zmianie ulegają następujące czynniki:

1) Ciśnienie osmotyczne, 2) Warunki chemiczne, 3) Warunki oddechowe, wreszcie kilka czynników mniej ważnych, jak światło, temperatura i inne.

Każdy z tych poszczególnych czynników może mieć wpływ na powstawanie periwitelinu. Każdy więc należało zanalizować oddzielnie.

## I. Rola ciśnienia osmotycznego.

### 1. Znaczenie stężenia płynnego środowiska.

Jaja, opuszczając rozszerzoną część jajowodów, czyli środowisko o ciśnieniu osmotycznie równym z ich ciśnieniem (około  $\Delta = 0.48^0$ ), przeniesione do wody dystylowanej, dostają się nagle do środowiska znacznie hypotonicznego. Prawdopodobnym jest przeto przypuszczenie Białaszewicza, że przyczyną powstawania periwitelinu jest zmiana osmotyczna środowiska. W celu sprawdzenia tego przypuszczenia umieszczałem



równe części jaj jednej samicy do różnych roztworów cukru gronowego, cukru trzcinowego i mocznika, a więc nieelektrolitów, oraz do komory wilgotnej (t. j. szczelnie zamkniętego naczynia, na dnie którego znajduje się nieco wody dystylowanej). Zarówno w komorze wilgotnej, jak i w innych warunkach umieszczałem jaja dla dogodniejszego sprawdzania lupą obecności periwitelinu w jednej warstwie na ściankach naczyń. Resztę jaj tej samej samicy przenosiłem jako kontrolę do wody dystylowanej. Działanie poszczególnych roztworów na jaja w każdej obserwacji badałem w dwóch naczynkach.

Wynik pięciu kolejnych obserwacji, wykonanych na 5 samiczkach, jest następujący. (Tabl. I).

Jaja umieszczone do wody dystylowanej po upływie 2 — 3 godzin posiadały wszystkie periwitelin (w jajach samicy z 1-szej obserwacji występował on znacznie wcześniej niż w innych).

W tym samym zupełnie czasie wytwarzał się periwitelin w jajach włożonych do roztworów hypotonicznych cukrów gronowego i trzcinowego, oraz mocznika do  $\Delta = 0.47^{\circ}$  włącznie.

Wszystkie jaja traktowane w powyższy sposób już po 3 godzinach posiadały taki sam periwitelin jak te, które pozostawały w wodzie dystylowanej.

I tu zauważamy wcześniejsze występowanie periwitelinu u samicy z pierwszej obserwacji. Natomiast jaja umieszczone do roztworów hipertonicznych cukru gronowego  $\Delta = 0.55^{\circ}$  i  $0.60^{\circ}$ , lub trzymane w komorze wilgotnej, periwitelinu nie wytwarzały. W roztworach bardziej hipertonicznych więc w  $\Delta = 0.95^{\circ}$  i  $\Delta = -1.25^{\circ}$  periwitelin się nie wytworzył, natomiast jaja uległy spłaszczeniom.

Działanie cukrów gronowego i trzcinowego, oraz mocznika okazało się tu zupełnie zgodne.

Powyżej otrzymane dane wykazują, że przynajmniej jednym z warunków występowania periwitelinu w jajach niezapłodnionych żaby jest przejście jaj do środowiska hypotonicznego, zaś fakt tworzenia się periwitelinu w jajach umieszczonych do roztworów o  $\Delta = 0.47$  wskazuje, że nie jest tu niezbędna wielka różnica ciśnień, wystarczy słaba bardzo hypotonja.

Wpływ środowiska na powstawanie periwitelinu polega prawdopodobnie na przenikaniu do

T A

Działanie koncentracji płynnego

№ doświadczenia		nazwa naczynia		Czas od początku doświadczenia w g.		ROZTWORY CUKRU																								
						$\Delta = 0.10^{\circ}$					$\Delta = 0.20^{\circ}$					$\Delta = 0.30^{\circ}$					$\Delta = 0.40^{\circ}$					$\Delta = 0.47^{\circ}$				
						№ S A																								
						1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
S T A N																														
1	a.	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-				
	b.		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
2	a.	2	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-				
	b.		+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-			
3	a.	3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+				
	b.		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			
4	a.	4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+				
	b.		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			
5	a.	5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+				
	b.		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			
6	a.	12	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+				
	b.		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			
7	a.	24	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+				
	b.		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+			



B L I C A I.

środowniska na tworzenie się periwitelinu.

GRONOWEGO			roztwór cukru trzcinowego	roztwór mocznika	woda dystylowana
$\Delta=0.55^\circ$	$\Delta=0.60$	$\Delta=0.90$	$\Delta=0.47^\circ$	$\Delta=0.46^\circ$	

M I C Y

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

P E R I V I T E L I N U


T A B L I C A II.

Czas działania hypotonji środowiska na jajo, potrzebny do wy-  
 tworzenia periwitelinu.

№ porządkowy	Czas pobytu w ko- morze wilg w godz.	Długość pobytu w wodzie.																				Kontrola w wodzie					
		15 m.					30 m.					45 m.					60 m.										
		№ S A M I C Y																									
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
—																											
1	1																										
2																											
3	2																										
4																											
5	3					+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
6						+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
7	4					+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
8						+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
9	6					+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
10						+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
11	8					+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
12						+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
13	12					+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
14						+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
15	24					+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
16						+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	

wnętrza jaja pewnej ilości wody. Przyjęcie takie jest tem prawdopodobniejsze, że, jak to już poprzednio wykaza-  
łem, niezapłodnione jaja żabie, zarówno jak zapłodnione, po  
umieszczeniu do wody dystylowanej zwiększają swą objętość  
o 1,8% już przed zapoczątkowaniem tworzenia się periwitelinu.  
Przyrost ten w wodzie dystylowanej odbywać się może oczywiście  
wyłącznie kosztem wody.



## 2. Czas działania hypotonji.

Aby oznaczyć czas, przez jaki jaja muszą przebywać w wodzie dla wytworzenia periwitelinu, umieszczałem je, czerpiąc z jednej i tej samej samicy, do kilku naczyń z wodą, pozostawiałem następnie jedno naczynie jako kontrolę, a z pozostałych wylewałem kolejno co piętnaście minut wodę (Tablica II).

Badanie przeprowadzone na pięciu serjach jaj, pochodzących z pięciu samic przekonało mię, że już po 30—45 minutach jaja wyjęte z wody i umieszczone następnie do komory wilgotnej po upływie 2—3 godzin wydzielają periwitelin, tak jak te, które stale przebywały w wodzie dystylowanej.

Jaja samicy piątej wytwarzały już periwitelin po 15 minutowym pobycie w wodzie. W jednym naczyniu z jajami tej samicy, zawierającym 24 jaja, 8 posiadało periwitelin, w drugim na 30—15 jaj wytworzyło periwitelin.

Wskazuje to, że w ciągu 30—45 minut jajko dostatecznie pobrało wody i że od tego czasu obecność środowiska hypotonicznego jest już zbyteczna.

## 3. Wpływ przebywania w komorze wilgotnej.

Pragnąłem przekonać się, czy jaja początkowo trzymane w komorze wilgotnej zdolne są po następnym przeniesieniu ich do wody wytworzyć periwitelin.

W tym celu wykonałem 5 seryj obserwacyj (Tablica III) na jajach pięciu samic. Za wyjątkiem świadka trzymanego w wodzie dystylowanej, trzymałem jaja w komórkach wilgotnych i w odstępach godzinnych wlewałem do nich kolejno wodę. Okazało się, że jeszcze po 5—7 godzinnym pobycie w komorze wilgotnej jaja umieszczone następnie w wodzie dystylowanej wytwarzają periwitelin, zupełnie podobnie jak jaja trzymane od początku w wodzie.

Rozpatrując szybkość powstawania periwitelinu w jajach pozostających w komorze wilgotnej, zauważyłem ciekawy fakt, a mia-



№ porządkowy	Czas od chwili włożenia jaj do wody	Długość pobytu w komorze wilgotnej przed																			
		1					2					3					4				
		№ S A																			
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
2	30 m.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
3		-	-	-	-	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	+	+	
4	45 m.	-	-	-	-	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	+	+	
5		-	-	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
6	60 m.	-	-	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
7		-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
8	75 m.	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
9		+	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
10	90 m.	+	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
11		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
12	120 m.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
13		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
14	180 m.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
15		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
16	240 m.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
17		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
18	300 m.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
19		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
20	8 g.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
21		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
22	12 g.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
23		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
24	24 g.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	



### BLICA III

włożeniem jaj do wody wyrażona w godzinach				Kontrola w H <sub>2</sub> O
5	6	7	8	

M I C Y

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
+	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-



nowicie: Jaja umieszczone pierwotnie w komorze wilgotnej na więcej niż jedną godzinę i przeniesione następnie do wody wytwarzają periwitelin znacznie wcześniej (licząc od chwili zanurzenia), aniżeli takie, które od początku trzymane były w wodzie. Periwitelin zamiast po 3 godzinach (kontrola) występuje już po 50—90 minutach, zależnie od indywidualnych własności jaj poszczególnych samic.

Okres poprzedzający powstanie periwitelinu wynosi więc w wodzie u jaj trzymanyh uprzednio w komorze wilgotnej średnio  $\frac{1}{3}$  okresu normalnego.

Obserwacje te świadczą o udziale w powstawaniu periwitelinu i innych czynników, oprócz hypotonji środowiska. Czynniki te, wyzwolone po przejściu jaj z rozszerzonych części jajowodów do komory wilgotnej, działają na jaja, umożliwiając wcześniejsze występowanie periwitelinu po przeniesieniu do wody.

Trzygodzinny okres utajenia periwitelinu nie jest, jak widzimy, spowodowany jedynie faktem pęcznienia, czyli pobierania wody: można go bowiem zredukować średnio do 60 minut. Muszą tu w grę wchodzić i inne czynniki.

---

Pewną ilość jaj żaby umieściłem w surowicy krwi żabiej i przekonałem się, że w tem środowisku izosmotycznym periwitelin się nie wytwarza, natomiast jaja posiadają napęczniałą galarete. Ponieważ to samo zjawisko zachodzi w jajach umieszczonych w rozcieńczonej do podwójnej objętości surowicy, obserwacja powyższa z dwóch powodów zasługuje na uwagę.

Wykazuje ona, że błona rozszerzonej części jajowodów jest nieprzepuszczalna dla cieczy powodujących pęcznienie galarety (która w jajowodach jest nienapęczniała). W celu sprawdzenia powyższego umieszczałem całe rozszerzone części jajowodów po uprzednim odpreparowaniu ich i przewiązaniu kanałów, bacząc aby nie rozerwać błony, do różnych roztworów: Lock'e'a, 0.7% NaCl, a także do tych samych roztworów rozcieńczonych podwójnie i do wody. Jako kontrolę używałem jaja wyjęte z jajowodów i włożone do tychże płynów.



Jajowody umieszczone w wodzie przez pierwsze 4 — 8 godzin zupełnie nie powiększają swej objętości, później bardzo powoli. Wtórne zjawisko powiększania objętości przypisać należy prawdopodobnie zamieraniu znajdujących się w anormalnych warunkach błon jajowodów. Na jajach znajdujących się wewnątrz jajowodów umieszczonych w fizjologicznym roztworze Locke'a, 0.7% NaCl, oraz do tych płynów podwójnie rozcieńczonych, żadne zmiany nie dają się zauważyć w okresie 24 godzin; jaja wyjęte z jajowodów w roztworach tych pęcznieją.

## II. Działanie czynników chemicznych.

Z dwu roztworów o jednakowym ciśnieniu osmotycznym, mianowicie rozcieńczonej do połowy surowicy krwi żaby, i roztworu cukru gronowego, tylko ostatni wywołuje tworzenie się periwitelinu; świadczy to wyraźnie o tem, że sam stan osmotyczny środowiska nie jest w tym procesie decydującym.

Brak periwitelinu w rozcieńczonej surowicy krwi wytlomaczyć się daje działaniem hamującym obecnych w surowicy soli. Ażeby sprawdzić powyższe przypuszczenie umieściłem jaja do izosmotycznych roztworów płynu Locke'a i soli kuchennej, oraz ich podwójnych rozcieńczeń. W żadnym z tych płynów periwitelin nie wystąpił: wskazuje to na hamujące działanie jonów soli. Ponieważ połączenie kilku soli w tych stężeniach, w jakich występują w organizmie, działa hamująco na tworzenie się periwitelinu, przeto działanie powyższe nie jest związane z zatruciem lub swoistem działaniem pewnych jonów, lecz zależne tylko od stężenia jonów. Świadczy o tem działanie różnych soli na tworzenie się periwitelinu.

Różne stężenia cząsteczkowe soli NaCl, KCl, CaCl<sub>2</sub>, NH<sub>4</sub>Cl Na<sub>2</sub>So<sup>4</sup> działały jednakowo hamująco. (Tablica IV).

Już stężenie soli odpowiadające oznaczenia punktu tajania  $\Delta = -0.1 - 0.085$  hamują powstawaniu periwitelinu.

Jaja trzymane w wymienionych roztworach soli wykazały znacznie słabsze pęcznienie galarety, niż w wodzie lub roztworach nieelektrolitów. Pęcznieniu nie ulega tu wewnętrzna część galarety otaczające chorion, stąd odległość od środków dwu jaj



TABLICA IV.

N <sup>o</sup> porządkowy	Rodzaj soli	Koncentracja wyrażona w $\Delta$ wywołująca zahamowanie powstania periwitelinu.
1.	KCl	0.100 <sup>o</sup>
2.	NaCl	0.095 <sup>o</sup>
3.	NH <sub>4</sub> Cl	0.090 <sup>o</sup>
4.	CaCl <sub>2</sub>	0.085 <sup>o</sup>
5.	Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	0.090 <sup>o</sup>

TABLICA V.

N <sup>o</sup> porządkowy	Rodzaj soli	Odległość od dwóch centrów jaj w cm.
1.	KCl	0.65
2.	NaCl	0.60
3.	NH <sub>4</sub> Cl	0.55
4.	CaCl <sub>2</sub>	0.50
5.	Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	0.50
6.	H <sub>2</sub> O	0.85

wynosi nie jak w wodzie 0.8 — 1 cm.<sup>2</sup>, lecz, jak to wskazuje tablica V, zaledwie  $\frac{2}{3}$ — $\frac{1}{2}$  tej odległości.

I tu znowu spotykamy się z bardzo słabą różnicą działania poszczególnych jonów, wskazującą jednak na uporządkowanie tych jonów w szereg odpowiadający hamowaniu przez różne sole pęcznienia koloidów.

Z powyższego widzimy, że dla powstania periwitelinu oprócz pewnej różnicy ciśnienia między jajem i środowiskiem konieczna jest nieobecność lub przynajmniej duże rozcieńczenie elektrolitów.

Działanie hamujące soli polega, być może, na utrudnieniu przenikania wody do wnętrza jaja: za tem przemawia brak pęcznienia wewnętrznej warstwy galarety. Sole zmieniają przepuszczalność samego jaja, i działają hamująco na powstawanie periwitelinu.



### III. Warunki oddechowe.

Oprócz dwu powyżej rozpatrywanych czynników: ciśnienia osmotycznego i warunków chemicznych, musi istnieć jeszcze inny czynnik, wynikający ze zmiany warunków oddechowych. Wykazały to obserwacje nad jajami trzymanymi w wilgotnej komorze a potem przeniesionymi do wody.

Białaszewicz i Błędowski<sup>1)</sup> stwierdzili, że jaja żabie w rozszerzonych częściach jajowodów znajdują się w atmosferze nader ubogiej w tlen.

Z przejściem jaj do wody powyższe warunki ulegają zasadniczej zmianie. Ażeby się przekonać o roli tlenu w procesie tworzenia się periwitelinu, umieszczałem jaja w różnych warunkach w atmosferze wodoru odpowiednio oczyszczonego. (Tablica VI).

Jajazymane stale w wodzie i atmosferze wodoru periwitelinu nie wytwarzały. Podobnie zachowywały się jajazymane w tem środowisku przez 2 godziny, co przemawia za trującym działaniem wodoru. O błędności tego przypuszczenia przekonały mię obserwacje wykonane na jajach umieszczonych w komorze wilgotnej i atmosferze wodoru. Jaja te przeniesione następnie po 2 i 4 godzinach do wody i atmosfery tlenu, wytwarzały periwitelin normalnie i w czasie zwykłym (licząc od zanurzenia w wodzie).

Dalsze doświadczenia przekonały mnie, że jajazymane przez  $\frac{1}{2}$  — 1 g. w wodzie i tlenie, następnie umieszczone do wody w atmosferze wodoru, wytwarzały zupełnie normalny periwitelin.

Tak samo zachowywały się jaja umieszczone na  $\frac{1}{2}$  godz. w komorze wilgotnej, następnie w wodzie i w atmosferze wodorowej.

Wyniki powyższe wykazują więc, że jaja które przebywały przez pewien czas w atmosferze wodoru nie tracą zdolności wytwarzania periwitelinu

---

<sup>1)</sup> K. Białaszewicz i R. Błędowski. Wpływ zapłodnienia na oddychanie jaj. Odbitka z posiedzeń T. N. W. Wydział III. Rok VIII. Zeszyt 6. 1915.



№ porządkowy	Czas trwania doświadc. w g.	Jaja w wodzie i środowisku wodoru					Jaja w wodzie i 2 godziny w środowisku wodoru, potem tlen					Jaja w wodzie i tlenie					
		№ S A															
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		
3		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	+		
4	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	+		
5		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+	
6	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+	
7		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+	
8	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+	
9		—	—	+	—	—	+	—	—	—	—	+	+	+	+	+	
10	5	—	—	+	—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+	
11		—	—	+	—	—	+	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+
12	6	—	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+
13		—	—	+	—	—	+	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+
14	7	—	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+
15		—	—	+	—	—	+	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+
16	8	—	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+
17		—	—	+	—	—	+	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+
18	12	—	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+
19		—	—	+	—	—	+	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+
20	24	—	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+	+

1) Na 50 jaj 2 jaja posiadały słabo rozwinięty periwitelin.

2) „ 46 „ 1 jajo posiadało „ „ „

3) Połowa jaj posiadała już periwitelin.



## B L I C A VI

Jaja w wodorze i komorze wilgotnej, po 2 g. woda i tlen	Jaja w śr. wodoru i komorze wilgotnej, po 4 g. woda i tlen	Jaja w tlenie i wodzie, po 1/4 g. woda i wodór	Jaja w tlenie i komorze wilgotnej, po 1/2 g. wodór i woda
---	--	--	---

### M I C Y

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+ <sup>3)</sup>	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+	+	+ <sup>3)</sup>	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+
+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

(jaja w komorze wilgotnej i wodorze, potem woda i tlen). Periwitelinu natomiast nie tworzą, jeżeli pęczniają bez dostępu tlenu (jaja od początku trzymane w wodzie i wodorze). Dla wytworzenia periwitelinu wystarcza już pobyt  $\frac{1}{4}$  — 1 g. w atmosferze tlenu (Tabl. VI kolumna 6). Obydwa czynniki: pęcznienie i obecność tlenu niekoniecznie działać muszą na jajo jednocześnie, ale działanie tlenu musi poprzedzać przenikanie wody do wnętrza jaja. (Tablica VI kolumna 1, 2, 7).

Dane powyższe wskazują również, że znacznie szybsze występowanie periwitelinu w wodzie w jajach, przebywających początkowo w komorze wilgotnej przypisać należy działaniu tlenu, ujawnienie tego działania wymaga około 3 godzin czasu.

Temperatura wpływa na szybkość tworzenia się periwitelinu. W celu sprawdzenia tej zależności umieściłem jaja tej samej samicy w różnych temperaturach. Wyniki otrzymane wykazują, że jaja w temperaturze 12°C wytwarzały periwitelin dwa razy szybciej niż w temperaturze 2°C; przyrost szybkości procesów, których wynikiem jest tworzenie periwitelinu odpowiada regule Vant-Hoffa.

Co się tyczy działania światła, to nie wywiera ono żadnego wpływu na powstawanie periwitelinu. Jaja jednej i tej samej samicy wytwarzały periwitelin równocześnie, niezależnie od tego czy szklane naczynie, w którym były umieszczone, znajdowało się w ciemności czy też w jasnym pokoju na białym podłożu.

Powyżej otrzymane wyniki pozwalają scharakteryzować procesy powodujące tworzenie się periwitelinu.

Badania Białaszewicza i Błędowskiego<sup>1)</sup> wykazały, że jaja żaby w jajowodach znajdują się w środowisku bardzo ubogim w tlen, że w jajach niezapłodnionych nagromadzone są znaczne ilości, od 35 — 52% objętościowych, dwutlenku węgla.

Wnosić tedy można, że jaja żaby w jajowodach znajdują się w stanie duszności, wzgl. narkozy; brak tlenu i nadmiar dwutlenku węgla hamuje czynności życiowe jaja.

<sup>1)</sup> Białaszewicz i Błędowski, loc. cit. str. 765.



W tym stanie jaja przez dłuższy czas (do miesiąca) przebywać mogą w jajowodach bez znaczniejszych zmian. Bardzo być może, że przejrzenie, jak to przyjmują Białaszewicz i Błęadowski, wynika ze zbytniego zwiększenia ciśnienia cząsteczkowego  $\text{CO}_2$ . Przemawia za tem fakt, że jaja poddane działaniu czystego  $\text{CO}_2$ , już po 2 godzinach tracą zdolność rozwojową. Niewiadomo, czy chodzi tu o swoiste działanie dwutlenku węgla, czy o wytworzenie warunków bezwzględnie bez-tlenowych.

Działanie asfiksj — zahamowanie zupełne lub przynajmniej znaczne zmniejszenie szybkości procesów życiowych w jajach w jajowodach tłumaczy się brakiem dostatecznej ilości tlenu. Jaja wyrzucone nazewnątrz dostają się do środowiska płynnego zawierającego tlen i wtedy ulegają zmianom, które w pierwszym rzędzie spowodowane są procesami utleniania.

Badania O. Warburg'a i innych<sup>1)</sup> wykazały jak ważną rolę w procesach rozwojowych odgrywa utlenianie i zużycie tlenu.

Działanie tych procesów zaznacza się przy tworzeniu periwitelinu. Świadczą o tem doświadczenia nad jajami przebywającymi w środowisku wodoru. Nie tylko obecność dwutlenku węgla i brak środowiska hypotonicznego, lecz i brak tlenu hamuje tworzenie się periwitelinu.

Obecność tlenu nie jest konieczna przez cały trzygodzinny okres przygotowawczy. Prawdopodobnie tlen wyzwala w jajach procesy, których skutki nastąpić mogą i bez dopływu tlenu.

Sprawy zachodzące w jajach w obecności tlenu są niezależne od innych warunków, w jakich się jajo znajduje, w szczególności od obecności środowiska hypotonicznego.

Procesy utleniania same przez się nie są w stanie wywołać zmian prowadzących do wytworzenia się periwitelinu. Wywołują one tylko zmiany, umożliwiające w odpowiednich warunkach powstanie periwitelinu.

---

<sup>1)</sup> Ergebnisse der Physiologie. T. XIV.

Takim warunkiem jest obecność środowiska hypotonicznego. W środowisku hypertonicznem jajo żabie w atmosferze tlenu ulega dalszym zmianom, które czynią je po pewnym czasie (po 7 godzinach) niezdolnem do wytworzenia periwitelinu. W środowisku hypotonicznem następuje pobranie wody i fizyko-chemiczne zmiany, głównie zmiany ciekłości. Ich wynikiem jest powstanie periwitelinu.

Na proces ten elektrolity działają hamująco. Działanie ich jest trudne do zdefiniowania. Być może, że zmniejszają one przepuszczalność jaja dla wody, jak również dla tlenu.

Oksydacje poprzedzać muszą przenikanie wody do jaja. Jajo, które w anoksybiozie pobrało wodę, traci zdolność tworzenia periwitelinu. Powyższy fakt przemawia za tem, że dopiero procesy utleniania wprowadzają jajo w stan, w którym zdolne jest do wytworzenia periwitelinu.

Jajko które przez powyższy okres przygotowawczy nie przeszło, ulega innym zmianom, jeżeli pobiera wodę.

Procesy przygotowujące tworzenie się periwitelinu są procesami chemicznymi. Wykazuje to działanie temperatury. Równoległe odbywać się muszą w jaju procesy fizyczno-chemiczne, prowadzące bezpośrednio do tworzenia się periwitelinu.

Powstawanie periwitelinu jest więc procesem życiowym złączonym z przemianą materji. Jajo wydobyte z jajowodów dla wytworzenia periwitelinu przejść musi przez okres przygotowawczy, wymagający obecności tlenu. Tak uprzednio zmienne jajo może na bodziec środowiska hypotonicznego, zawierającego mało elektrolitów, odpowiedzieć wytworzeniem periwitelinu.



St. J. Przyłęcki:

## **Les conditions de la formation du périvitellin dans les oeufs vierges de *Rana temporaria*.**

Communication annoncée le 10.XII. 1917.

Présentée par K. Białasiewicz.

Les observations faites sur les conditions extérieures, nécessaires à la production du périvitellin des oeufs vierges de grenouille ont conduit aux conclusions suivantes.

Il est nécessaire que l'oeuf reste dans un milieu hypotonique. La différence de la pression osmotique entre le milieu ambiant et l'oeuf, indispensable à la production du périvitellin, n'est que quelques centièmes de grade.

L'action de l'hypotonie peut être expliquée par la pénétration de l'eau qui produit le gonflement de l'oeuf.

Pour produire le périvitellin l'oeuf doit rester au moins 30—45 minutes dans le milieu hypotonique.

Après un séjour de 5 à 7 heures dans une chambre humide les oeufs mis dans de l'eau peuvent encore produire le périvitellin.

L'oeuf qui a resté plus qu'une heure dans une chambre humide produit le liquide périvitellinique déjà après 50—90 minutes, tandis que d'habitude cela ne se fait pas qu'après 2—3 h.

La période préparatoire est donc ici limitée à  $\frac{1}{3}$ . La durée de 3 h. n'est donc pas provoquée par l'action de l'hypotonie du milieu.

La membrane des oviductes n'est pas perméable pour l'eau, la gelée des oeufs qui s'y trouvent ne peut donc pas gonfler, bien que les oviductes sont entourés d'un liquide.

Le sels de NaCl, KCl, CaCl<sub>2</sub>, NH<sub>4</sub>Cl, Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> arrêtent la production du périvitellin de même que leur combinaison, p. ex. le sang de la grenouille.

L'action de tous ces sels est presque identique. Une concentration exprimée en point de congélation  $\Delta = 0.1 - 0.08$  suffit déjà pour empêcher la production du périvitellin. Les oeufs

sortis des oviductes et mis immédiatement dans l'atmosphère de l'hydrogène persistent quelque temps sans changement visible pour la production du périvitellin.

Les oeufs mis dans de l'hydrogène et de l'eau gonflent sans produire le périvitellin.

Une action de  $\frac{1}{9}$  — 1 h. de l'atmosphère de l'oxygène suffit à la production du périvitellin, pourvu que cette action précède celle du milieu hypotonique.

La température règle la vitesse des processus nécessaires à la production du périvitellin. Une agmentation de  $10^{\circ}$  redouble la vitesse de ces réactions.



4. St. J. Przyłęcki:

## O sposobie ilościowego oznaczania glikogenu w drobnych ilościach tkanki.

Z pracowni Chemji Fizjologicznej Uniwersytetu Warszawskiego, № 1.

Komunikat zgłoszony dnia 10 Grudnia 1917 r.

Przedstawił K. Białaszewicz.

Fizjologja stosuje w ostatnich czasach sposoby chemiczne, wymagające bardzo małych ilości materiału. Metody takie rozwinęły się przedewszystkiem w *serologii*, *analizie elementarnej substancji organicznych*, (Pregl<sup>1)</sup>), *chemicznem badaniu krwi* (Bang<sup>2)</sup>, Folin<sup>3</sup>) i *moczu* (Folin<sup>3</sup>) *przemiany gazowej* (Krogh<sup>4</sup>), Barcroft<sup>5</sup>), Warburg<sup>6</sup>), Thunberg<sup>7</sup>), Winterstein<sup>8</sup>) *kalorymetrji* (Parnas<sup>9</sup>).

W badaniach nad przemianą materji w mięśniach, gdzie przemiana węglowodanów odgrywa dominującą rolę, stosujemy sposoby oznaczania kwasu mlecznego, przemiany gazowej i ciepła wytworzonego, wymagające nie więcej jak jeden gram tkanki. Dla zbadania całokształtu przemiany cukrów brak jeszcze podobnie opracowanej metody.

Pierwotny przepis Pflüger'a<sup>10</sup>) wymaga dla oznaczenia glikogenu 100 gramów tkanki, czyli materiału z kilkudziesię-

<sup>1</sup>) F. Pregl. Die Quantitative organische Microanalyse. Berlin 1917

<sup>2</sup>) I. Bang. Methoden zur Mikrobestimmung einiger Blutbestandteile. Wiesbaden 1916.

<sup>3</sup>) O. Folin. Einige für Blut u. Harnanalyse bestimmte Schnellmethoden. Handb. der biochem. Arbeitsmeth. T. 7. 1913.

<sup>4</sup>) A. Krogh. Ueber Mikrorespirometrie. Ibidem. T. 8. 1915.

<sup>5</sup>) Barcroft. The respirator function of the Blood Cambridge 1914. Apendix.

<sup>6</sup>) O. Warburg, Zeitschr. f. physiol. Chemie. Bd. 81. 1912.

<sup>7</sup>) Thunberg. Ein Mikrorespirometer. Skand. Arch. Physiol Bd 17. 1905.

<sup>8</sup>) H. Winterstein. Ein Mikrorespirationsapparat. Zeitschr. f. biol. Technik u. Methodik. Bd. 3. 1913.

<sup>9</sup>) J. Parnas. Ueber das Wesen der Muskelerholung. Zentrbl. f. Physiol. Bd. XXX № 1 1914.

<sup>10</sup>) E. Pflüger. Nachtrag zur quantitativen Glykogenanalyse. Handbuch der biochem. Arbeitsmeth. 2 Bd. 1910.

sięciu zab, jeśli się ma na względzie pewne ściśle określone mięśnie<sup>1)</sup>.

Próbowałem sprawdzić czy można zastosować zasadę metody Pflüger'a do oznaczania glikogenu w ilościach materiału zawierającego od 1 — 0·5 miligramów tej substancji.

Operując ilościami pomiędzy 1·5 — 0·5 miligramów glikogenu, unikałem przedewszystkiem przenoszenia substancji z naczynia do naczynia. W tym celu przeprowadzałem cały szereg rękoczynów mianowicie: 1) rozpuszczenie tkanki 2) strącenie glikogenu, 3) wymywanie, 4) rozpuszczenie i 5) inwertowanie glikogenu w jednej i tej samej próbówce wirówkowej. Zachowywałem przytem skład i stosunek odczynników oraz następstwa rękoczynów metody Pflüger'a, tylko zastępowałem sączenie przez wirowanie i odlewanie klarownego płynu przez sączek. Sączenie okazało się później zbyt bezużyteczne.

Izolowanie glikogenu odbywa się w następujący sposób:

- 1) Rozpuszcza się tkankę w równej ilości ługu potasowego 60%, ogrzewając ją przez 2 godziny w łaźni wodnej wrzącej,
  - 2) otrzymany roztwór rozcieńcza się równą ilością wody i
  - 3) strąca podwójną ilością alkoholu,
  - 4) osad oddziela się na wirówce i płyn odlewa.
  - 5) Dodaje się tyle alkoholu 60%, ażeby osad był na 1 cm. płynem pokryty, miesza się, wiruje, płyn odlewa i
  - 6, 7 i 8) wykonywa się tak samo kolejno z alkoholem 80%, 96% i alkoholem absolutnym, potem eterem; eter odparowuje się ostrożnie, pozostaje suchy biały glikogen.
  - 9) Glikogen rozpuszcza się w 5 cm<sup>3</sup> wody, dodaje 0·25 cm.<sup>3</sup> kwasu solnego 35% i inwertuje przez 3 godziny w wrzącej wodzie.
- Płyn zobojętnia się i oznacza cukier metodą Bertrand'a i Michaelis'a<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Analiza materiału, zawierającego bardzo małe ilości glikogenu (I. Athanasiu, Pflüger's Archiv. Bd. 74. Str. 561) lub [wykonana w małych ilościach (I. Bang. Biochemische Zeitschrift Bd 56. 1913 Ueber die Zuckerbildung der Froschleber str. 153) wykonane były bez uprzedniego sprawdzenia, czy metoda Pflüger'a dla tak małych ilości glikogenu pozostaje ściśłą.

<sup>2)</sup> Michaelis. Biochemische Zeitschrift Bd 59. 1914. Mikroanalyse des Zuckers im Blut str. 166, albo Parnas. Wskazówki i objaśnienia do ćwiczeń z chemji lekarskiej. Warszawa 1918.



Podany sposób sprawdzałem na roztworach glikogenu czystego i na mięśniach żaby, określając na tym samym materiale w małych ilościach, zawierających około 1 mgr. glikogenu, metodą tu opisaną i równolegle w ilościach wielkich, zawierających kilkaset mgr. glikogenu metodą Pflüger'a — Bertrand'a<sup>1)</sup> Wyniki podaję w tablicach I i II, które poniżej objaśniam.

#### a. Oznaczenie glikogenu czystego.

Rozpuszczono 3·6000 gr. glikogenu w 250 cm<sup>3</sup> wody. Z tego materiału brałem (po każdorazowym skłóceniu): I Dwie próbki zawierające 360 mgr. glikogenu. Do nich dodawałem po 1·5 cm<sup>3</sup> kwasu solnego 1·19, inwertowałem przez 3<sup>15</sup> godziny, rozcieńczałem do 250 cm<sup>3</sup> i w próbkach po 20 cm<sup>3</sup> oznaczałem cukier metodą Bertrand'a.

II i III. 2 próbki po 25 cm<sup>3</sup> zawierające po 360 mgr. glikogenu, postępując z nimi w analogiczny sposób za wyjątkiem oznaczania cukru, które wykonywałem mikrometodą Michaelis'a. W tym celu całą zawartość po inwersji rozcieńczałem do 100 cm<sup>3</sup>. Z dwu 10 cm<sup>3</sup> próbek rozcieńczałem pierwszą do 250 cm<sup>3</sup>, drugą do 500. Z nich brałem po 10 cm<sup>3</sup> płynu dodając 2 cm<sup>3</sup> wody dystylowanej.

IV. 2 próbki po 1 cm<sup>3</sup>, więc 14·4 mgr. glikogenu, z którymi postępowałem według wyżej podanego przepisu, począwszy od dwugodzinnego gotowania z ługiem. Po 3 godzinnem inwertowaniu płyn zobojętniałem i doprowadzałem do objętości 200 cm<sup>3</sup>. Cukier oznaczałem metodą Bertrand'a.

V. 5 próbek po 10 cm<sup>3</sup> tego płynu do oznaczeń cukru metodą Michaelis'a.

VI. 6 próbek po 10 cm<sup>3</sup> rozcieńczałem do 100 cm<sup>3</sup>.

Z nich brałem po 1 cm<sup>3</sup>, więc próbki zawierające po 0·72 mgr. glikogenu, gotowałem 2 g. z ługiem, przemywałem alkoholem, inwertowałem, zobojętniałem i po doprowadzeniu do 12 cm<sup>3</sup> oznaczałem cukier metodą Michaelis'a.

VII. 7 próbek po 1 cm<sup>3</sup> rozcieńczałem do 25 cm<sup>3</sup> Z tych próbek brałem po 0·9 cm<sup>3</sup>, więc 0·515 mgr. glikogenu i postępowałem tak jak z serją VI.

<sup>1)</sup> S. Bertrand. Bull. soc. chim. Paris (2) 35. 1906, oraz Neubauer Huppert Analyse des Harnes 1912 str. 406.

TABLICA I.

Metoda oryginalna Pflüger'a										Mikrometoda			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
№ porząd- kowy	Metoda do oznaczania cukru	Typ oznaczeń	№ porząd- kowy jed- nego typu	Ilość glikog. użyta do I oznaczenia	Ilość glikog- nu otrzyma- na z jednego oznaczenia	Średnia z jedn. typu oznaczeń	Metoda do oznaczania cukru	Typ oznaczeń	№ porząd- kowy jed- nego typu	Ilość glikog. użyta do I oznaczenia	Ilość glikog- nu otrzyma- na z jednego oznaczenia	Średnia z jedn. typu oznaczeń	
1	Bertrand	I	1	0.3600 gr.	0.3534 gr.		Michaelis	V	1	1.440	1.423		
2	"	"	2	"	0.3528 "	0.3532	"	"	2	"	1.416		
3	"	"	3	"	0.3534 "		"	"	3	"	1.414	14.20	
4	"	"	4	"	0.3528 "		"	"	4	"	1.427		
5	"	"	5	"	0.3534 "		"	VI	1	0.720	0.712		
6	Michaelis	II	1	"	0.3547 "		"	"	2	"	0.710		
7	"	"	2	"	0.3550 "		"	"	3	"	0.707		
8	"	"	3	"	0.3543 "	0.3548	"	"	4	"	0.705		
9	"	"	4	"	0.3550 "		"	"	5	"	0.716		
10	"	"	5	"	0.3550 "		"	"	6	"	0.710		
11	"	III	1	"	0.3540 "	0.3545	"	VII	1	0.515	0.508		
12	"	IV	2	"	0.3550 "		"	"	2	"	0.506		
13	"	"	1	14.4 mgr.	14.18		"	"	3	"	0.511		
14	"	"	2	"	14.20	14.18	"	"	4	"	0.501	0.508	
15	"	"	3	"	14.17		"	"	5	"	0.512		
16	"	"	4	"	14.18		"	"	6	"	0.510		
17	"	"	5	"	14.19		"	"	7	"	0.509		



*Próby powyższe wykazały, że metoda Pflüger'a zastosować się daje do analizy ilości tkanek, zawierających od 0.5 miligramów glikogenu wzwyż.*

#### b. Oznaczanie glikogenu w mięśniach.

Aby przekonać się, czy wyniki otrzymane na czystym glikogenie mogą być zastosowane do materiału zwierzęcego, sprawdziłem metodę na mięśniach żaby.

Roztworzyłem 125 g. mięśni żabich podług Pflüger'a i na tym materiale oznaczałem glikogen metodą Pflüger'a, stosując do oznaczeń cukru metodę Bertrand'a i Michaelis'a.

Wyniki podane są na tablicy II gdzie:

Dla typu I i II doświadczeń brałem po 37.5 gr. mięśni więc 75 cm.<sup>3</sup> mieszaniny równych ilości 60% ługu i mięśni.

Dla typu III po 10 cm.<sup>3</sup> teje mieszaniny, to jest 5 gr. mięśni.

Dla typu IV i V po 10 cm.<sup>3</sup>, które rozcieńczałem do 40 cm.<sup>3</sup> (IV) i 80 cm.<sup>3</sup> (V), biorąc następnie do analizy po 1 cm.<sup>3</sup>, więc 0.125 gr. (IV) i 0.0625 (V) gr. mięśnia.

Wyniki te potwierdzają w zupełności rezultaty otrzymane przy badaniu glikogenu czystego.

Analizy przedstawione powyżej świadczą że metoda Pflüger'a przy zachowaniu składu i stosunku odczynników, podanych w metodzie oryginalnej może być stosowana do oznaczeń glikogenu w tkankach zawierających go powyżej 0.5 mgr. Przytem wszystkie reakcje wykonywać należy w jednym naczyniu, unikając przenoszenia osadzonego glikogenu, wirując i odlewając klarowną ciecz. Zinwertowany glikogen oznaczać można jako cukier metodą Bertrand'a-Michaelis'a.

TABLICA II.

Metoda oryginalna Pflüger'a										Mikrometoda				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
№ porządkowy	Metoda do oznaczenia cukru	№ typu oznaczeń	№ porządkowy jednego typu	Ilość gr. mięśni użyta do 1-go oznaczenia glikog.	Ilość glik. otrzymana z jed. oznacz.	% glikogenu w mięśniach	Średnia z oznaczeń jedn. typu	Metoda do oznaczenia cukru	№ typu oznaczeń	№ porządkowy jednego typu	Ilość gr. mięśni użyta do jednego oznaczenia glikog.	Ilość glik. otrzymana z jed. oznacz.	% glikogenu w mięśniach	Średnia z oznaczeń jedn. typu
1	Bertrand	I	1	37-500 gr.	340-5	0-908	0-912	Michaelis	IV	1	0-125 gr.	1-14	0-912	
2	"	"	2	"	342-8	0-914	0-912	"	"	2	"	1-135	0-908	
3	"	"	3	"	342-8	0-914		"	"	3	"	1-14	0-912	
4	Michaelis	II	1	"	342-0	0-912		"	"	4	"	1-14	0-912	
5	"	"	2	"	339-8	0-906		"	"	5	"	1-14	0-912	
6	"	"	3	"	342-0	0-912	0-911	"	"	6	"	1-14	0-916	0-912
7	"	"	4	"	342-0	0-912		"	"	7	"	1-14	0-912	
8	"	"	5	"	342-0	0-912		"	"	8	"	0-57	0-912	
9	Bertrand	III	1	5-000 "	45-4	0-908		"	V	1	0-0625 "	0-57	0-912	
10	"	"	2	"	45-6	0-912		"	"	2	"	0-575	0-920	
11	"	"	3	"	45-7	0-914	0-911	"	"	3	"	0-565	0-904	
12	"	"	4	"	45-5	0-910		"	"	4	"	0-568	0-909	
13	"	"						"	"	5	"	0-574	0-918	
14	"	"						"	"	6	"	0-566	0-906	
15	"	"						"	"	7	"	0-570	0-912	
16	"	"						"	"	8	"	0-570	0-912	



St. J. Przyłęcki:

**Une méthode quantitative pour déterminer le glicogène dans de petites quantités de tissus.**

Communication annoncée le 10. XII. 1917.

Présentée par K. Białaszewicz.

L'auteur se propose de vérifier si la méthode de Pflüger peut être employée pour déterminer le glicogène dans des quantités du tissu qui en contient de 1·5—0·5 mgr.

Les analyses présentées sur les tables I (exécutées sur le glicogène pure) et II (sur les muscles de grenouille) prouvent que la méthode de Pflüger peut être bien appliquée dans ces conditions sans changer des réactifs ni de leurs proportions. Toutes les réactions doivent être exécutées dans la même éprouvette pour n'avoir pas de pertes en transportant le précipité du glicogène, ce qu'on réalise par sédimentation du précipité en centrifugeur, et enlevant le liquide clair. Le glicogène après l'inversion est déterminé par la méthode de Michaelis.

---

5. Feliks Joachim Wiśniewski:

## Próba teorii absorbcji wtórnych promieni Röntgen'a.

Komunikat zgłoszony dn. 25 Maja 1918 r.

Przedstawił J. Wierusz-Kowalski.

### WSTĘP.

W niniejszym artykule podaję próbę wytłomaczenia mechanizmu absorbcji promieni wtórnych Röntgen'a oraz nieciągłości, jakie mają miejsce dla pewnych długości fal w absorbowanej energii.

Jako podstawę przyjmę model atomu identyczny z modelem Debye'a, jaki ten autor podał dla wytłomaczenia powstawania widma K. Zatem przyjęty tu model atomu składa się z jądra i M pierścieni go otaczających koncentrycznie, po których krążą elektrony.

Liczby elektronów krążących po pierścieniach nie znamy, jak również i liczby elektronów na każdym, za wyłączeniem pierwszego, dla którego Debye znalazł liczbę trzech elektronów.

Oznaczając przez  $n_i$  liczbę elektronów na pierścieniu  $i$ , licząc od jądra na zewnątrz, otrzymamy dla częstości obrotu  $\nu_{oi}$  elektronu tego pierścienia w atomie pierwiastku stojącego na Z-em miejscu układu Mendelejewa następujące wyrażenie:

$$\nu_{oi} = 4 \left\{ Z - \sum_{j=1}^{j=(i-1)} n_j - S_{ni} \right\} \pi^2 \cdot \frac{\varepsilon^4 \cdot \mu}{h^3},$$

które można otrzymać przez uogólnienie dowodów podanych przez Debye'a dla pierwszego pierścienia.

Suma  $\sum_{j=1}^{j=(i-1)} n_j$  jest to suma elektronów, zawartą na pierścieniach, znajdujących się we wnętrzu pierścienia  $s$ .



Wyraz  $S_{n_i}$  jest:

$$S_{n_i} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{p=(n_i-1)} \frac{1}{\sin p \frac{\pi}{n_i}},$$

dla pierwszego pierścienia równa się on  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  gdyż  $n_i = 3$ .

Wielkości tu używane mają następujące znaczenie:

- $\mu$  — masa elektronu,
- $\varepsilon$  — ładunek elementarny,
- $h$  — stała Planck'a.

Z wyrażenia  $v_{oi}$  wynika, że czem odleglejszy pierścień od jądra, tem mniejsza będzie częstość  $v_{oi}$ , a to ze względu na rosnącą sumę  $\sum_{j=1}^{j=(i-1)} n_i$  elektronów, zawartych wewnątrz pierścienia  $i$  wraz z odległością pierścienia od jądra.

Ograniczając się do tych kilku uwag, przechodzę do samej teorii.

### Absorbcja energii wtórnych przez elektron.

Promienie wtórne Röntgen'a uważamy zgodnie z wynikami prac Laue'go nad ich interferencją jako zjawisko perjo-dyczne. Natężenie tego pola elektrycznego jest więc stałe co do kierunku, lecz zmienne co do wielkości.

Założymy poniżej, że natężenie pola promieni wtórnych wyrazi się wzorem:

$$E = C \cdot e^{2\pi \cdot i \cdot \nu \cdot t},$$

gdzie  $C$  — amplituda, a  $\nu$  — częstość drgań elektromagne-tycznych.

Zakładając, że środek osi  $(x, y, z)$  leży na jądrze, oraz że siła mechaniczna pola ma kierunek osi  $z$ , otrzymamy po-wtarzając rozumowanie jakie podałem w mym artykule „O bu-dowie atomu helu“, przy obliczaniu stałej dielektrycznej, nastę-

pujące równanie różniczkowe ruchu elektronu pod wpływem siły  $-\varepsilon E$ :

$$(a) \quad \mu \ddot{z} + 4\pi^2 \cdot \mu \cdot \nu_0^2 \cdot z = -\varepsilon C \cdot e^{2\pi \cdot i \cdot \nu \cdot t}$$

gdzie  $\mu$  — masa elektronu,

„  $\varepsilon$  — ładunek elementarny,

„  $\nu_0$  — częstość obrotu elektronu po orbicie kolistej.

Współczędna  $z$  jest sumą 1<sup>o</sup> ze współrzędnej  $z_0$  elektronu na orbicie niezdeformowanej zewnętrznym polem i czyniącej zadość równaniu:

$$(b) \quad \mu \ddot{z}_0 + 4\pi^2 \cdot \mu \cdot \nu_0^2 \cdot z_0 = 0,$$

oraz 2<sup>o</sup> z odczylenia  $z'$  elektronu pod wpływem zewnętrznego pola  $E$  z jego właściwej orbity.

A więc

$$z = z_0 + z'.$$

Podstawiając  $z$  w równanie różniczkowe (a) i biorąc pod uwagę równanie (b) otrzymamy dla  $z'$  równanie ruchu:

$$\mu \ddot{z}' + 4\pi^2 \cdot \mu \cdot \nu_0^2 \cdot z' = -\varepsilon C e^{2\pi i \nu t}.$$

Przyjmując, że siła quasi-elastyczna

$$4\pi^2 \cdot \mu \cdot \nu_0^2 \cdot z'$$

jest bardzo mała względem siły

$$\varepsilon C e^{2\pi i \nu t}$$

otrzymamy przybliżone równanie ruchu elektronu:

$$\ddot{z}' \mu = -\varepsilon \cdot C e^{2\pi i \nu t}.$$

Zakładając dalej, że ruch elektronu pod wpływem pola jest ruchem drgającym synchronicznym z polem elektrycznym zewnętrznym, a więc, że

$$z' = b \cdot e^{2\pi i \nu t}$$

gdzie  $b$  jest amplitudą ruchu otrzymujemy dla  $b$  następujące wyrażenie:



$$b = \frac{\varepsilon C}{4 \pi^2 \cdot \mu \cdot \nu^2}.$$

Po przejściu fali elektron będzie drgał z częstością  $\nu_0$ , a amplituda drgania będzie  $b$ . Energia więc jego (elektronu) będzie:

$$\frac{1}{2} 4 \pi^2 \cdot \mu \cdot \nu_0^2 \cdot b^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{\varepsilon^2 \cdot C^2 \cdot \nu_0^2}{\pi^2 \cdot \mu \cdot \nu^4}.$$

Podstawiając:

$$C^2 = 8 \pi \cdot u,$$

otrzymamy:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon^2 \cdot \nu_0^2 \cdot u}{\mu \cdot \nu^4},$$

dla wyrażenia energii elektronu drgającego.

Kładąc  $\nu = c/\lambda$  mieć będziemy dla poprzedniego:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon^2 \cdot \nu_0^2 \cdot u}{\mu \cdot b^4} \cdot \lambda^4.$$

Podstawiając teraz:

$$\nu_0 = \frac{4 \pi^2 \cdot \mu \cdot \varepsilon^4}{h^3} \cdot \left\{ Z - \sum_{j=1}^{j=(i-1)} n_j - S_{ni} \right\}^2,$$

mieć będziemy dla energii pochłoniętej przez elektron, krążący po pierścieniu z częstością  $\nu_0$ :

$$\frac{16 \cdot \pi^3 \cdot \varepsilon^{11}}{h^6 \cdot c^4 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)} \cdot \left\{ Z - \sum_{j=1}^{j=(i-1)} n_j - S_{ni} \right\}^4 \cdot u \cdot \lambda^4.$$

Podstawiając liczebne wartości na  $\varepsilon_1 \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right) \cdot h \cdot c$  mamy:

$$4,8 \cdot 10^{-3} \cdot \left\{ Z - \sum_{j=1}^{j=(i-1)} n_j - S_{ni} \right\}^4 \cdot u \cdot \lambda^4.$$

Zwracając uwagę na to, że energia zaofiarowana elektronowi rośnie proporcjonalnie do kwadratu długości fali, a energia pochłonięta proporcjonalnie do czwartej potęgi z długości fali

i to tak jedno jak i drugie w czasie równym  $\lambda/c$  wnosimy, że elektrony danego pierścienia i są w stanie pochłoniąć fale krótsze i co najwyżej równe  $\lambda_i$ , dla której to długości energia zaofiarowana w czasie  $\lambda_i/c$  równa się energii pochłoniętej w tym czasie. Fal o długości  $\lambda > \lambda_i$  elektrony pierścienia i nie są w stanie pochłoniąć z braku zaofiarowanej energii w dostatecznej ilości.

### Absorbja cząsteczki.

Energja zaabsorbowana przez cząsteczkę jest sumą energii pochłoniętych przez zawarte w niej elektrony.

Elektrony, znajdujące się na jednym pierścieniu, pochłaniają każdy tę samą ilość energii, gdyż krążą po orbicie z tą samą częstością.

Jeżeli więc na  $i$ -tem pierścieniu od jądra znajduje się  $n_i$  elektronów, to pierścień ten pochłonie w czasie  $\frac{\lambda}{c}$ , który potrzebuje fala do przesunięcia się przez elektron, energję:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\epsilon^2 \cdot v_{oi}^2 \cdot u}{\mu \cdot c^4} \cdot \lambda^4 \cdot n_i.$$

przyczem

$$\lambda \leq \lambda_i.$$

Jeżeli cząsteczka posiada  $M$  pierścieni, to energja pochłonięta przez cząsteczkę będzie:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\epsilon^2 \cdot \lambda^4 \cdot u}{\mu \cdot c^4} \left\{ \sum_{i=1}^{i=M} n_i v_{oi}^2 \right\},$$

przyczem każdy pierścień  $i$  pochłania tylko te fale, które czynią zadość warunkowi:

$$\lambda \leq \lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots M).$$

### Współczynnik absorbcji.

Wyobraźmy sobie warstwę środowiska pochłaniającego, o wysokości  $ds$  i przekroju równym jedności, oraz falę pada-



jąca normalnie na tę warstwę. Jeżeli przez  $N_0$  oznaczymy gęstość cząsteczek, to powyższa warstwa zawierać ich będzie  $N_0 \cdot ds$ . Pochłonie ona w czasie  $\lambda/c$  energję:

$$\frac{N_0}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^2 \cdot u \cdot \lambda^4}{\mu \cdot c^4} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{i=M} n_i \cdot v_{oi}^2 \right\} ds.$$

Energja pochłonięta dostarczona była warstwie  $ds$  przez falę Röntgen'a niosącą energję  $u \cdot \lambda$ . Ubytek energji  $u \cdot \lambda$  w warstwie  $ds$  dzięki absorbcji jest:

$$- \frac{d(u \cdot \lambda)}{ds} \cdot ds.$$

Ubytek ten musi się równać energji zaabsorbowanej w tej warstwie, a więc musimy mieć:

$$\frac{d(u \cdot \lambda)}{ds} ds = - \frac{N_0}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^2 \cdot u \cdot \lambda^4}{\mu \cdot c^4} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{i=M} n_i \cdot v_{oi}^2 \right\} \cdot ds.$$

Co całkując otrzymamy:

$$u = u_0 \cdot e^{- \frac{N_0}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^2 \cdot \lambda^3}{\mu \cdot c^4} \left\{ \sum_{i=1}^{i=M} n_i \cdot v_{oi}^2 \right\} \cdot s},$$

gdzie  $u_0$  — stała.

Wyraz w wykładniku:

$$(A) \quad z = \frac{N_0}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^2 \cdot \lambda^3}{\mu \cdot c^4} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{i=M} n_i \cdot v_{oi}^2 \right\},$$

nazywamy współczynnikiem absorbcji.

Wyrażenie  $\frac{z}{N_0}$  nazywane jest współczynnikiem absorbcji atomowej, mamy więc:

$$\frac{z}{N_0} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^2 \cdot \lambda^3}{\mu \cdot c^4} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{i=M} n_i \cdot v_{oi}^2 \right\}.$$

Ażeby móc pójść dalej, umówimy się co do znaczenia  $\nu_{oi}$ .

Otóż przyjmuję, że  $\nu_{o1}$  jest częstością obrotu elektronów na pierwszym pierścieniu, licząc począwszy od jądra na zewnątrz;  $\nu_{o2}$  — częstością obrotu elektronów na drugim pierścieniu od jądra i t. d., a ostatecznie  $\nu_{oM}$  częstością obrotu elektronów po  $M$ -tym pierścieniu, to jest po zewnętrznym.

Ze względu, że  $\nu_{oi}$  zmniejsza się wraz z odleganiem od jądra pierścieni, mamy nierówność:

$$\nu_{o1} > \nu_{o2} > \nu_{o3} > \dots > \nu_{oM}.$$

Powyższa nierówność wraz z nierównością  $\lambda \leq \lambda_i$  wskazują, że czem odleglejszy pierścień od jądra, tem o dłuższych falach promieniowanie pochłaniają jego elektrony. Jeżeli fale są odpowiednio długie, np.  $\lambda > \lambda_s$ , to elektrony znajdujące się na pierścieniach o częstości  $\nu_{oi} > \nu_{os}$  nie mogą pochłaniać tych fal.

Jeżeli:  $\lambda \leq \lambda_1$ , to współczynnik absorpcji wyraża się wzorem (A).

Jeżeli zaś:  $\lambda_{s-1} \leq \lambda \leq \lambda_s$ ,  
to:

$$\kappa_s = N_0 \cdot \frac{\epsilon^2 \cdot \lambda^3}{\pi \mu \cdot c^4} \cdot \left\{ \sum_{i=s}^{i=M} \pi_i \nu_{oi}^2 \right\}.$$

Dla  $\lambda = \lambda_s$  mamy nieciągłość współczynnika  $\kappa$ , którą oznaczamy przez

$$[\kappa_s] = \kappa_s - \kappa_{s+1}.$$

Wartość tej nieciągłości wyraża się:

$$[\kappa_s] = \frac{N_0}{\pi} \cdot \frac{\epsilon^2 \cdot \lambda^3}{\mu \cdot c^4} \cdot \nu_{os}^2 \cdot \pi_s.$$

A więc dla długości fali  $\lambda_s$  będącej maksymalną długością fali promieni, jakie pierścień  $s$ -ty licząc od jądra na zewnątrz może przez swe elektrony pochłoniąć, współczynnik absorpcji



$\varkappa$  jest nieciągły, a skok tej nieciągłości jest proporcjonalny do liczby elektronów na  $s$ -tym pierścieniu oraz do kwadratu częstotliwości obrotu elektronów po tym pierścieniu.

Podstawiając wartość  $\nu_{os}^2$  w wyrażenie skoku  $[\varkappa_s]$ , otrzymamy:

$$(B) \quad [\varkappa_s] = 16 \pi^3 \cdot N_0 \cdot \frac{\varepsilon^{11}}{h^6 \cdot c^4 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)} \cdot n_s \cdot \left\{ Z - \sum_{j=1}^{j=(i-1)} n_j - S_{ni} \right\}^4 \cdot \lambda_s^3,$$

lub:

$$[\varkappa_s] = 435 \cdot 10^{-3} \cdot N_0 \cdot n_s \cdot \left\{ Z - \sum_{j=1}^{j=(i-1)} n_j - S_{ni} \right\}^4 \cdot \lambda_s^3,$$

jeśli podstawimy wartości liczebne stałych:

$$\varepsilon, \quad h, \quad \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right), \quad c.$$

W poszczególnym przypadku pierwszego pierścienia, dla którego według Debye'a mamy:

$$n_1 = 3; \quad \sum_{j=1}^{j=(i-1)} n_j = 0; \quad S_{ni} = 0,577.$$

$$[\varkappa_1] = 48 \cdot \pi^3 \cdot N_0 \cdot \frac{\varepsilon''}{h^6 \cdot c^4 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)} \cdot \left\{ Z - 0,577 \right\}^4 \cdot \lambda_1^3,$$

lub:

$$[\varkappa_1] = 1,31 \cdot 10^{-2} \cdot N_0 \cdot \left\{ Z - 0,577 \right\}^4 \cdot \lambda_1^3.$$

Dla stosunku  $\frac{[\varkappa_1]}{N_0}$  mieć będziemy:

$$(B') \quad \frac{[\varkappa_1]}{N_0} = 1,3 \cdot 10^{-2} \cdot \left\{ Z - 0,577 \right\}^4 \cdot \lambda_1^3.$$

Poniżej obliczymy skoki nieciągłości według tego wzoru i porównamy je z wartościami otrzymanymi doświadczalnie:

ŻELAZO.

$$Z = 26. \quad \lambda_1 = 1,76 \cdot 10^{-8}.$$

Z danych doświadczalnych mamy:

$$\frac{[z_1]}{N_0} = 3,25 \cdot 10^{-20}.$$

Ze wzoru (B') zaś:

$$\frac{[z_1]}{N_0} = 2,96 \cdot 10^{-20}.$$

NIKEL.

$$Z = 28; \quad \lambda_1 = 1,5 \cdot 10^{-8}.$$

Z danych doświadczalnych mamy:

$$\frac{[z_1]}{N_0} = 2,58 \cdot 10^{-20}.$$

Ze wzoru (B') zaś:

$$\frac{[z_1]}{N_0} = 2,49 \cdot 10^{-20}.$$

SREBRO.

$$Z = 47; \quad \lambda_1 = 0,49 \cdot 10^{-8}.$$

Z danych doświadczalnych mamy:

$$\frac{[z_1]}{N_0} = 8,38 \cdot 10^{-21}.$$

Ze wzoru (B') zaś:

$$\frac{[z_1]}{N_0} = 7,46 \cdot 10^{-21}.$$



O Ł Ó W.

$$Z = 82; \quad \lambda_1 = 0,13 \cdot 10^{-8}.$$

Z danych doświadczalnych mamy:

$$\frac{[\alpha_1]}{N_0} = 0,95 \cdot 10^{-21}.$$

Ze wzoru (B') zaś:

$$\frac{[\alpha_1]}{N_0} = 1,29 \cdot 10^{-21}.$$

M I E D Ź.

$$Z = 29; \quad \lambda_1 = 1,39 \cdot 10^{-8}.$$

Z danych doświadczalnych mamy:

$$\frac{[\alpha_1]}{N_0} = 2,61 \cdot 10^{-20}.$$

Ze wzoru (B') zaś:

$$\frac{[\alpha_1]}{N_0} = 2,27 \cdot 10^{-20}.$$

Muszę tu nadmienić, że wartości skoku, podane w rubryce „Z danych doświadczalnych“ obliczyłem ze wzorów empirycznych, podanych przez Glocker'a<sup>1)</sup>, w braku bezpośrednich danych.

Widzimy zatem, że nasz wzór teoretyczny daje na wartość liczebną skoku liczby będące w zupełnie zadawalającej zgodności z liczbami otrzymanymi dla tegoż skoku drogą empiryczną.

Jeżeli więc znamy długość fali, dla której skok ma miejsce, oraz numer porządkowy skoku, licząc zawsze w widmie

<sup>1)</sup> Glocker: „Absorbtionsgesetze für Röntgenstrahlen“. Physik. Zeit. XIV, 1918.

absorbcyjnym od fal krótkich ku długim, oraz liczbę elektronów zawartych wewnątrz danego pierścienia, możemy obliczyć liczbę elektronów na danym pierścieniu. Rezultaty tu otrzymane dają więc możliwość badania budowy atomu na drodze empirycznej.

### Krańce pasm widma absorbcyjnego.

Przechodzę teraz do teorii nieciągłości widma absorbcyjnego ujawniających się w tem, że dla pewnych fal współczynnik absorpcji doznaje skoków, które poprzednio już obliczyliśmy. Teraz chodzi nam o podanie przyczyny tych nieciągłości, a mianowicie przyjmuję, że każdy elektron o tyle pochłania energję, o ile przyrost jego energii w danym czasie pod wpływem danego pola elektrycznego nie przerasta energii, jaką to pole może mu w tym czasie zaofiarować. Jeśli więc energja, jaka powinna być pochłonięta w czasie  $\lambda/c$  na zasadzie praw dynamiki jest większa niż energja w tym czasie przez pole dostarczona, to proces pochłaniania jest wogóle niemożliwy. Jeżeli więc elektron krążący z częstością  $\nu_{os}$  po pierścieniu  $s$  pochłania energję fali proporcjonalnie do czwartej potęgi długości fali w czasie  $\lambda/c$ , a energja zaofiarowana temu elektronowi w czasie również równym  $\lambda/c$  jest proporcjonalna do niższej niż czwarta potęgi  $\lambda$ , to ilość pochłaniana będzie szybciej rosła wraz z długością fali, niż energja zaofiarowana.

Dla pewnej długości, którą dla elektronów na pierścieniu  $s$  oznaczam będę przez  $\lambda_s$ , obydwie energie, to jest pochłonięta i zaofiarowana, zrównają się, a dla  $\lambda > \lambda_s$  energja, jaką elektron powinien pochłoniąć byłaby większa od energii dostarczonej, co jest niemożliwe, a więc niemożliwym jest akt absorpcji tych fal przez dane elektrony.

Ilość energii absorbowanej w funkcji długości fal znamy, pozostaje więc do znalezienia wielkość energii zaofiarowanej.

Otóż założę, że energja zaofiarowana w czasie  $\lambda/c$  jest proporcjonalna do kwadratu długości fali, do promienia elektronu i gęstości energii, a więc równa się:

$$2 \cdot \rho \cdot u \cdot \lambda^2,$$

gdzie 2 jest to współczynnik liczebny.



Pokażemy poniżej, że założenie powyższe zdaje zupełnie sprawę z wymagań rezultatów doświadczalnych, oraz postaramy się dać interpretację tego apriorycznego założenia.

Między tą energją zaofiarowaną elektronowi, a energją przez niego pochłoniętą zachodzi następująca nierówność:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^2 \cdot \nu_{os}^2 \cdot u \cdot \lambda^4}{\mu \cdot c^4} \leq 2 \rho \cdot u \lambda^2,$$

skąd dla maksymalnej długości fali  $\lambda_s$ , czyniącej zadość tej nierówności otrzymujemy:

$$\lambda_s = \frac{\sqrt{2 \pi \cdot \rho^{1/2} \cdot \mu^{1/2} \cdot c^2}}{\varepsilon^2 \cdot \nu_{os}};$$

podstawiając:

$$\rho = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon^2}{\mu \cdot c^2},$$

otrzymujemy:

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{4 \pi}{3}} \cdot \frac{c}{\nu_{os}}.$$

Po wstawieniu wyrażenia na  $\nu_{os}$  da nam wzór powyższy następujące wyrażenie dla długości fali krańca danego widma absorbcyjnego:

$$(C) \quad \lambda_s = \sqrt{\frac{1}{12 \pi^3}} \cdot \frac{c \cdot h^3 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)}{\varepsilon^5} \left\{ Z - \sum_{j=1}^{j=(s-1)} n_j - S_{ni} \right\}^{-2}$$

lub

$$\lambda_s = 9,29 \cdot 10^{-6} \cdot \left\{ Z - \sum_{j=1}^{j=(s-1)} n_j - S_{ni} \right\}^{-2}.$$

Równość ta wykazuje, że:

$$\lambda_s \cdot \left\{ Z - \sum_{j=1}^{j=(s-1)} n_j - S_{ni} \right\}^2 = 9,29 \cdot 10^{-6} = \text{cte.}$$

W przypadku pierwszego pierścienia od jądra, to jest dla  $s = 1$  równość ostatnia redukuje się do następującej:

$$\lambda_s \cdot \{ Z - 0,577 \}^2 = 9,29 \cdot 10^{-6},$$

gdyż wówczas:

$$\sum_{j=1}^{j=(s-1)} n_j = 0, \quad \text{a } S_{ni} = 0,577.$$

Równanie ostatnie jesteśmy w stanie poddać sprawdzeniu, gdyż dla promieni  $\alpha$  odpowiadających pierwszemu pierścieniowi, znamy długości fal  $\lambda_s$ .

Poniższa tablica daje nam wartości

$$\lambda_1 \{ Z - 0,577 \}^2$$

obliczone dla różnych pierwiastków:

Pierwiastek:	Z	$\lambda_1 10^8$	$\lambda_1 \{ Z - 0,577 \}^2$
Żelazo	26	1,75	$11,10^{-6}$
Nikiel	28	1,5	$11,2 \cdot 10^{-6}$
Pallad	46	0,503	$10,3 \cdot 10^{-6}$
Srebro	47	0,479	$10,3 \cdot 10^{-6}$
Jod	53	0,366	$10 \cdot 10^{-6}$
Bar	55	0,33	$9,76 \cdot 10^{-6}$
Platyna	78	0,15	$9,12 \cdot 10^{-6}$
Złoto	79	0,146	$9,11 \cdot 10^{-6}$
Ołów	82	0,135	$9,07 \cdot 10^{-6}$

Z tablicy tej widzimy, że w samej rzeczy

$$\lambda_1 \{ Z - 0,577 \}^2$$

ma wartość liczebną jeśli nie zupełnie stałą, to w każdym razie słabo ulegającą zmianie.

Wnosimy więc, że nasze założenie co do energii zaofiarowanej czyni w pewnym stopniu żądość wymogom rzeczywistości, wymaga jednak zreformowania i ulepszenia.



Przechodzę teraz do interpretacji założenia o energii zaofiarowanej. Otóż, jeżeli sobie wyobrazimy elektron o średnicy  $2\rho$  oraz sześcian o bokach równych  $2\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda$  wewnątrz którego ten elektron się znajduje, będąc stycznym z dwiema ścianami sześcianu, równoległymi do siebie i oddległymi od siebie o długość  $2\rho$ , przyczem przyjmujemy, że jedna z krawędzi sześcianu o długości  $\lambda$  jest równoległa do kierunku propagacji zaburzenia, to energia zawarta w tym sześcianie przesuwanym się przez elektron w czasie  $\lambda/c$  jest energią zaofiarowaną elektronowi w czasie  $\lambda/c$ .

Że ta budowa nie jest zupełnie sztuczna i obca fizyce, wskazuje fakt np. energii pochłoniętej przez elektron synchronicznie drgający z zewnętrznym polem elektrycznym w czasie równym przejściu jednej fali.

W samej rzeczy, energia pochłonięta przez taki elektron w czasie  $\lambda/c$  jest:

$$\pi \cdot \frac{\varepsilon^2 \cdot u}{\mu \cdot c^2} \cdot \lambda^2 = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot \rho \cdot u \lambda^3,$$

który wzór możemy interpretować w sposób następujący:

Energja, pochłonięta przez elektron synchronicznie drgający z polem zewnętrznym fali równa się energii zawartej w sześcianie o wysokości  $2\rho$  i dwóch drugich krawędziach równych odpowiednio  $\pi\lambda$  i  $\frac{3}{4}\lambda$ , z których jedna jest równoległa do osi kierunku propagacji fali. Widzimy zatem, że struktura przez nas użyta ma miejsce w zjawiskach fizycznych, choć wyraźnie wyrażoną nie była.

### Prawo Stokes'a.

Dla częstości  $\nu_1$  fali, odpowiadającej krańcowi widma absorbcyjnego promieni K otrzymujemy ze wzorów poprzednich paragrafów:

$$\nu_1 = R \left\{ \sqrt{\frac{3}{\pi}} Z^2 - 2Z - \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}^{1/2},$$

<sup>1)</sup> R — stała Rydberga.

a dla częstości  $\nu_{01}$  promieniowania  $\alpha$  mamy według Debye'a:

$$\nu_{01} = R \left\{ \frac{3}{4} Z^2 - 1,464 \cdot Z - 0,125 \right\},$$

skąd dla różnicy  $(\nu_1 - \nu)$ :

$$\nu_1 - \nu_{01} = R \{ 0,73 \cdot Z^2 - 0,536 \cdot Z - 0,45 \}.$$

Ze względu, że wyrażenie w nawiasach dla  $Z > 3$  jest dodatnie, więc dla wszystkich pierwiastków przysyłających promienie serji K oraz absorbujących promienie Röntgen'a będziemy mieli:

$$\nu_1 > \nu_{01},$$

a więc prawo Stokes'a jest spełnione.

Dla stosunku  $\frac{\nu_1}{\nu}$  otrzymujemy:

$$\frac{\nu_1}{\nu_{01}} = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_1} \leq 1,3,$$

a więc wartość stosunkowo bliska tej, jaką otrzymano eksperymentalnie i która równa się 1,19.

RÉSUMÉ.

F. J. de Wiśniewski:

**Recherche d'une théorie d'absorbtion  
des rayons de Roentgen.**

Communication annoncée le 25.V. 1918.

Présentée par J. Wierusz-Kowalski.

Cette communication contient la recherche d'une théorie d'absorbtion des rayons de Roentgen. Je prends comme modèle d'atome la construction suivante: autour d'un noyau positif, contenant autant de charges élémentaires qu'est le numero d'ordre de l'atome dans la série de Mendelejeff, cir-



culent des électrons sur des anneaux concentriques ayant au centre le noyau positif.

En appliquant ce modèle je trouve la loi d'absorbtion pour les rayons secondaires, dont le coefficient d'absorbtion est exprimé par l'équation (A) du texte polonais.

Le coefficient d'absorbtion est discontinu comme fonction de la longueur d'onde. Comme cause de ces discontinuités je propose d'admettre le mécanisme qui consiste dans la non-possibilité d'absorber plus d'énergie qu'il est offert. A cause de ceci, les électrons circulant sur divers anneaux ne sont pas en état d'absorber l'énergie des ondes, dont la longueur surpasse une certaine longueur d'onde bien définie, différente pour chaque anneau.

Pour l'expression de cette longueur limite je trouve l'équation (C) du texte polonais. La grandeur de la discontinuité du coefficient d'absorbtion correspondant à chaque anneau est donnée par l'équation (B) du texte polonais.

La comparaison des valeurs numériques de la longueur d'onde limite pour la bande d'absorbtion pour la série K, ainsi que de la valeur numérique de la grandeur de discontinuité du coefficient d'absorbtion pour cette onde limite avec les données expérimentales, sont satisfaisantes. Enfin, je retrouve la loi de Stokes.

---

6. Jan Krassowski:

## O zmianach wiekowych elementów (279) Thule.

Komunikat zgłoszony dn. 1 Lutego 1918 r.

Przedstawił St. Mazurkiewicz.

Przy rozważaniu ruchu planetoidy (279) Thule, pragnąłem poznać zmiany wiekowe elementów tej ciekawej planetoidy. Ponieważ droga (279), będąc prawie kołową nie ma jak się zdaje, w stosunku do Jowisza, miejsc krytycznych, które uniemożliwiałyby użycie bardzo praktycznej i prędko prowadzącej do celu metody Charlier'a<sup>1)</sup>, przeto zastosowałem w uważanym przypadku powyższą metodę.

Jak wiemy, ta metoda polega na wprowadzaniu do równań podstawowych, dających perturbacje wiekowe, współrzędnych używanych przez Poincaré'go

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \Lambda = \sqrt{a}; \quad \lambda = 1 + \pi = \text{średnia długość } ^2); \\ \xi = \sqrt{2 \Lambda (1 - \sqrt{1 - e^2})} \cdot \cos \pi, \\ \eta = -\sqrt{2 \Lambda (1 - \sqrt{1 - e^2})} \cdot \sin \pi, \\ p = \sqrt{2 \Lambda \sqrt{1 - e^2} (1 - \cos i)} \cdot \cos \Omega, \\ q = -\sqrt{2 \Lambda \sqrt{1 - e^2} (1 - \cos i)} \cdot \sin \Omega. \end{array} \right.$$

<sup>1)</sup> Ch. Charlier. *Mechanik des Himmels* Bd. I, pg. 335, 399. *Meddelanden från Lunds observatorium* № 12.

<sup>2)</sup> Wszędzie we wzorach zachowuję znakowanie Charlier'a.



skąd znajdziemy następujące równania różniczkowe:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial [F]}{\partial \eta}; & \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial \xi}; \\ \frac{dp}{dt} = \frac{\partial [F]}{\partial q}; & \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial p}, \end{cases}$$

gdzie:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} [F] = & \frac{\beta}{\mu \Lambda^2} + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^n k m_i \left\{ \frac{1}{2} A_0 (a, a_i) + \right. \\ & + \frac{1}{8} B_1 (a, a_i) \left( \frac{\xi^2 + \eta^2}{\Lambda} + \frac{\xi^2_i + \eta^2_i}{\Lambda_i} \right) - \\ & - \frac{1}{4} B_2 (a, a_i) \frac{\xi \xi_i + \eta \eta_i}{\sqrt{\Lambda \Lambda_i}} - \\ & - \frac{1}{8} B_1 (a, a_i) \left( \frac{p^2 + q^2}{\Lambda} + \frac{p^2_i + q^2_i}{\Lambda_i} \right) - \\ & \left. - \frac{1}{4} B_1 (a, a_i) \frac{pp_i + qq_i}{\sqrt{\Lambda \Lambda_i}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

W (3)  $M$  oznacza masę słońca,  $m, \dots, m_n$  masy planet;  $\beta$  i  $\mu$  zależą od wyboru początku układu współrzędnych,  $B_1$  i  $B_2$  zależą tylko od stosunku  $a$  i  $a_i$ ; powyższe wyrażenia pozwolą nam znaleźć szukane perturbacje wiekowe.

Dalej wprowadzimy, idąc za *Charlie'em* następujące wielkości przybliżone:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} [\xi_r] &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda_r}} \cdot \xi_r = e_r \cos \pi_r; \\ [\eta_r] &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda_r}} \cdot \eta_r = -e_r \sin \pi_r; \\ [p_r] &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda_r}} \cdot p_r = \sin i_r \cos \Omega_r; \\ [q_r] &= \frac{1}{\sqrt{\Lambda_r}} \cdot q_r = -\sin i_r \sin \Omega_r; \end{aligned} \right.$$

gdzie  $r = 0, 1, \dots, n$ , oraz

$$\Lambda_0 = \Lambda; \quad \xi_0 = \xi; \quad \eta_0 = \eta; \quad p_0 = p; \quad q_0 = q.$$

Po uwzględnieniu powyższych oznaczeń znajdziemy następujące równania różniczkowe:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d[\xi]}{dt} = [\eta] \sum_{i=1}^n (0, 1) - \sum_{i=1}^n [0, 1] [\eta_i]; \\ \frac{d[\eta]}{dt} = -[\xi] \sum_{i=1}^n (0, 1) + \sum_{i=1}^n [0, 1] [\xi_i]; \\ \frac{d[p]}{dt} = -[q] \sum_{i=1}^n (0, 1) + \sum_{i=1}^n [0, 1] [q_i]; \\ \frac{d[q]}{dt} = [p] \sum_{i=1}^n (0, 1) - \sum_{i=1}^n (0, 1) [p_i]; \end{array} \right. \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Symbole w nawiasach ( ) i [ ] oznaczają wielkości następujące:

$$(0, i) = \frac{m_i}{\sqrt{1+m_i}} n_i \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot a_i \cdot B_1,$$

$$[0, i] = \frac{m_i}{\sqrt{1+m_i}} n_i \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot a_i \cdot B_2,$$

gdzie

$$\alpha = \frac{a}{a_i}; \quad n = n_i \left( \frac{a_i}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m_i}};$$

$$\frac{\pi}{4} a_i B = - \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} F(\alpha) + \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} E(\alpha);$$

$$\frac{\pi}{4} a_i a B_2 = - \frac{2-\alpha^2}{1-\alpha^2} F(\alpha) + \frac{2(1+\alpha^2)^2 - 6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} \cdot E(\alpha).$$

$E(\alpha)$  i  $F(\alpha)$  są to całki eliptyczne zupełne.



Perturbacje wiekowe wielkich planet dla 1850.0 możemy obliczyć z pracy J. N. Stockwell'a: Memoir on the secular variations of the elements of the orbits of the eight principal planets <sup>1)</sup>, przeto po uwzględnieniu tych wielkości znajdziemy następujące równania różniczkowe:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d[\xi]}{dt} = b[\eta] + \sum_1^n E_r \sin(s_r t + \beta_r), \\ \frac{d[\eta]}{dt} = -b[\xi] + \sum_1^n E_r \cos(s_r t + \beta_r), \\ \frac{d[p]}{dt} = -b[q] + \sum_1^n F_r \sin(\sigma_r t + \delta_r), \\ \frac{d[q]}{dt} = -b[p] - \sum_1^n F_r \cos(\sigma_r t + \delta_r), \end{array} \right.$$

gdzie

$$b = \sum_1^n (0, i); \quad E_r = \sum_1^n [0, i] M_r^{(i)}; \quad F_r = \sum_1^n (0, i) N_r^{(i)}.$$

Spółczynniki  $M_r^{(i)}$ ,  $N_r^{(i)}$ , a także wartości  $s_r$ ,  $\sigma_r$ ,  $\beta_r$ ,  $\delta_r$  znajdujemy w wyżej wymienionej pracy Stockwell'a.

Całki równań (6) będą szukanymi perturbacjami poszczególnych elementów; są one następujące:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\xi] = A \cos(bt + B) + \sum_1^n G_r \cos(s_r t + \beta_r), \\ -[\eta] = A \sin(bt + B) + \sum_1^n G_r \sin(s_r t + \beta_r), \end{array} \right.$$

<sup>1)</sup> Smithsonian contribution to Knowledge № 232, 1870.

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} [p] = C \cos(-bt + D) + \sum_1^n H_r \cos(\sigma_r t + \delta_r), \\ -[q] = D \sin(-bt + D) + \sum_1^n H_r \sin(\sigma_r t + \delta_r), \end{array} \right.$$

gdzie

$$G_r = \frac{E_r}{b - s_r}; \quad H = \frac{F_r}{b + \sigma_r}; \quad A, B, C, D$$

są to stałe całkowania, które wyznaczymy dla 1850.0, kładąc  $t = 0$ , ze wzorów: \*

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cos B = e_0 \cos \pi_0 - \sum_1^n G_r \cos \beta_r, \\ A \sin B = e_0 \sin \pi_0 - \sum_1^n G_r \sin \beta_r, \\ C \cos D = \sin i_0 \cos \Omega_0 - \sum_1^n H_r \cos \delta_r, \\ C \sin D = \sin i_0 \sin \Omega_0 - \sum_1^n H_r \sin \delta_r. \end{array} \right.$$

Spółczynniki  $G_r$  i  $H_r$ , jak to zauważył Charlier, dla przeważnej części planetoid są rzędu mimośrodu i nachylenia planet wielkich, zaś  $A$  i  $C$  są rzędu mimośrodu i nachylenia małej planety. Ogólnie dla przeważnej liczby planetoid zachodzić będzie związek następujący:

$$A > \sum |G_r|.$$

O ile ten związek nie zachodzi — wtedy gdy są jeszcze spełnione pewne kryteria dodatkowe <sup>1)</sup> — zachodzi jak wiemy

<sup>1)</sup> Meddelanden etc. № 12, pg. 19.



libracja w perihelium z jedną z wielkich planet, najczęściej z Jowiszem. W naszym przypadku powyższa nierówność jest spełnioną, także nie są spełnione i dodatkowe kryteria, warunkujące librację, wskutek tego Thule libracji w perihelium ani z Jowiszem, ani z Saturnem nie podlega.

Podstawą naszych rachunków są elementy (279) podane przez Viljev'a <sup>1)</sup> jako najlepiej przedstawiające ostatnią serję obserwacji Thule. Elementy te zostały odniesione do średniej równonocy 1850.0. Elementy wielkich planet są podane według Leverrier'a i odniesione także do tej samej średniej równonocy.

Na zasadzie poprzednich wzorów znaleźliśmy następujące wartości stałych:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log G_5 = 5.74486 \quad \log G_6 = 7.24974 \quad \log G_7 = \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = 8.54757 \quad \log G_8 = 8.17617, \\ \log H_5 = 7.11016 \quad \log H_6 = 6.95044 \quad \log H_7 = 7.80846, \\ \log A = 8.83521 \quad B = 256^{\circ}4'50'' \quad \log C = \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = 8.64430, \quad D = 81^{\circ}45'5''. \end{array} \right.$$

Obliczmy granice zmian, spowodowanych przez perturbacje wiekowe w mimośrodku i nachyleniu (279). W tym celu równania (7) po uwzględnieniu wartości stałych będzie można napisać w postaci następującej: <sup>2)</sup>

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} e \cos \pi = A \cos (bt + B) + \sum G_r \cos (s_r t + \beta_r), \\ e \sin \pi = A \sin (bt + B) + \sum G_r \sin (s_r t + \beta_r), \\ \sin i \cos \Omega = C \cos (-bt + D) + \sum H_r \cos (\sigma_r t + \delta_r), \\ \sin i \sin \Omega = C \sin (-bt + D) + \sum H_r \sin (\sigma_r t + \delta_r). \end{array} \right.$$

<sup>1)</sup> Astr. Nachr. 4661.

<sup>2)</sup> Charlier, l. c. pg. 419.

Z (10) znajdziemy z łatwością w odniesieniu do ekliptyki 1850.0, uważanej za stałą, następujące największe i najmniejsze wartości nachylenia i minośrodu Thule (279):

$$\begin{aligned} \text{mimośród największy} &: e_{\max.} = 7^{\circ} 10' 8'', \\ \text{mimośród najmniejszy} &: e_{\min.} = 0^{\circ} 41' 26'', \\ \text{nachylenie największe} &: i_{\max.} = 3^{\circ} 1' 15'', \\ \text{nachylenie najmniejsze} &: i_{\min.} = 2^{\circ} 1' 58''. \end{aligned}$$

Obliczmy obecnie zmiany chwilowe roczne wszystkich elementów Thule, w odniesieniu do epoki  $t_0=1850.0$ . W tym celu idąc za Charlier'em położmy:

$$(11) \quad \begin{cases} r = e \cos \pi, & r' = e' \cos \pi, \\ s = e \sin \pi, & s' = e' \sin \pi', \end{cases}$$

gdzie kreskowane litery odnoszą się do planety zakłócającej. Uwzględniając (11) związki (1) będziemy mogli napisać w przybliżeniu w postaci następującej:

$$(12) \quad \begin{cases} \xi = \sqrt{\Lambda} \cdot r, & p = u \sqrt{\Lambda}, \\ \eta = -\sqrt{\Lambda} \cdot s, & q = -v \sqrt{\Lambda}, \end{cases}$$

a ponieważ  $\Lambda$  nie zależy od czasu, przeto:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial [F]}{\partial s}; & \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial [F]}{\partial r}; \\ \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial [F]}{\partial v}; & \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial [F]}{\partial u}; \end{cases}$$

i wtedy na zasadzie (12) [F] mieć będzie postać następującą:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} [F] = & \frac{\beta}{\mu \cdot \Lambda^2} + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^n K m_i \left\{ \frac{1}{2} A_0 + \right. \\ & \frac{1}{8} B_1 (r^2 + s^2 + r'^2 + s'^2) - \frac{1}{4} B_2 (rr' + ss') - \\ & \left. \frac{1}{8} B_1 (u^2 + v^2 + u'^2 + v'^2) + \frac{1}{4} B_1 (uu' + vv') \right\}. \end{aligned} \right.$$



Oznaczmy następnie stałe:

$$(15) \quad \begin{cases} k_1 = \frac{m_i}{\sqrt{1+m_i}} n_i P_1(\alpha), \\ k_2 = \frac{m_i}{\sqrt{1+m_i}} n_i P_2(\alpha), \end{cases}$$

gdzie

$$P_1(\alpha) = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a_1 B_1,$$

oraz

$$P_2(\alpha) = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a_1 B_2,$$

i obliczamy pochodne (13). Po uwzględnieniu kilku redukcji znajdujemy: <sup>1)</sup>

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{dr}{dt} = -k_1 s + k_2 s'; & \frac{du}{dt} = k_1 (v - v'); \\ \frac{ds}{dt} = k_1 r - k_2 r'; & \frac{dv}{dt} = k_1 (u' - u). \end{cases}$$

Z (11) wynika:

$$e^2 = r^2 + s^2; \quad \operatorname{tg} \pi = \frac{s}{r},$$

a także:

$$\sin^2 i = u^2 + v^2; \quad \operatorname{tg} \Omega = \frac{u}{v}.$$

Różniczkując powyższe wyrażenia, znajdziemy szukane zmiany roczne poszczególnych elementów, spowodowane przez perturbacje wiekowe:

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \left\{ r \frac{dr}{dt} + s \frac{ds}{dt} \right\} \frac{1}{\sin \varphi}; \\ \frac{d\pi}{dt} = \left\{ r \frac{ds}{dt} - s \frac{dr}{dt} \right\} \frac{1}{\sin^2 \varphi}; \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Charlier. Meddelanden etc. № 12, pg. 6.

$$(17') \quad \begin{cases} \frac{di}{dt} = \left\{ u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} \right\} \frac{2}{\sin 2i}; \\ \frac{d\Omega}{dt} = \left\{ u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right\} \frac{1}{\sin^2 i}. \end{cases}$$

Przy obliczaniu zmian rocznych elementów Thule uwzględniliśmy jedynie wpływ zakłócający Jowisza i Saturna.

Na zasadzie powyższych wzorów, oraz elementów Thule i planet zakłócających, znaleźliśmy następujące wartości stałych:

$$\begin{array}{ll} \log r = 8.43508 & \log u = 8.03450 \\ \log s = 8.26197n & \log v = 8.59704 \end{array}$$

dla Jowisza:

$$\begin{array}{ll} \log r' = 8.67406 & \log u' = 7.55097n \\ \log s' = 7.99840 & \log v' = 8.35431 \end{array}$$

dla Saturna:

$$\begin{array}{ll} \log r' = 6.05421 & \log u' = 8.36706 \\ \log s' = 8.74874 & \log v' = 8.56542 \end{array}$$

Podstawiając te wartości we wzory (17) otrzymamy zmiany roczne elementów Thule w epoce 1850.0:

$$\frac{d\pi}{dt} = + 455''.54$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = - 274''.81$$

$$\frac{di}{dt} = - 4''.37$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = + 23''.57.$$



Same zaś elementy Thule będziemy mogli napisać w postaci następującej:

$$\pi = 295^{\circ} 13' 30'' + 455''.54 \text{ (t-1850.0),}$$

$$\Omega = 74^{\circ} 41' 12'' - 274''.81 \text{ (t-1850.0),}$$

$$i = 2^{\circ} 20' 58'' + 4''.37 \text{ (t-1850.0),}$$

$$\varphi = 3^{\circ} 39' 49'' + 23''.57 \text{ (t-1850.0).}$$

Obserwatorium astronomiczne  
Uniwersytetu w Warszawie—grudzień 1917.

RÉSUMÉ.

Jan Krassowski:

**Sur les variations séculaires des éléments  
de Thule (279).**

Communication annoncée le 1.II 1918.

Présentée par St. Mazurkiewicz.

Dans cette note je me suis attaché de déterminer par la méthode donnée par M. Charlier<sup>1)</sup>, dont l'emploi est très facile, les variations séculaires des éléments de (279), dues principalement à l'action perturbatrice de Jupiter et de Saturne.

Comme point de départ de mes calculs, m'ont servi les éléments de Thule, calculés par M. Viljev<sup>2)</sup>, que nous avons rapporté à l'équinoxe de 1850.0. Les éléments des grosses planètes ont été ceux de Leverrier, rapportés à la même époque. Les constantes des perturbations séculaires de ces planètes ont été déduites du travail de Stockwell<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Charlier. *Mechanik d. Himmels* Bd. I, pg. 335, et suiv.  
*Meddelanden från Lunds Observatorium* № 12.

<sup>2)</sup> A. N. 4661.

<sup>3)</sup> *Smithsonian Contributions to Knowledge* № 232, 1870.

En se basant sur ces éléments et sur les formules connues, données par M. Charlier, nous avons obtenu dans le cas spécial, qui nous intéresse, les valeurs suivantes des différentes constantes:

$$\begin{aligned} \log G_5 &= 5.74486 & \log G_6 &= 7.24974 & \log G_7 &= \\ & & & & &= 8.59757 & \log G_8 &= 8.17617, \\ \log H_5 &= 7.11016 & \log H_6 &= 6.95044 & \log H_7 &= 7.80846, \\ \log A &= 8.83521 & B &= 256^{\circ}4'50'' & \log C &= \\ & & & & &= 8.64430, & D &= 81^{\circ}45'5''. \end{aligned}$$

Il faut remarquer que dans le cas de Thule l'inégalité fondamentale

$$A > \sum G_r.$$

étant remplie: on ne pourrait donc pas s'attendre à une libration avec Jupiter dans le mouvement du périhélie de Thule; cependant comme aussi les autres critères proposés par M. Charlier ne sont pas en même temps satisfaits par les éléments de Thule et de Jupiter — cette libration n'a pas lieu effectivement, ce qui d'ailleurs est confirmé par le moyen mouvement du périhélie de Thule, peu différent de la constante  $b$  de M. Charlier.

En appliquant les relations (10) du texte pol. nous avons trouvé les limites suivantes des variations de l'excentricité et de l'inclinaison de Thule:

l'excentricité maximum	$e_{\max.} = 7^{\circ} 10' 8''$ ,
" minimum	$e_{\min.} = 0^{\circ} 41' 26''$ ,
l'inclinaison maximum	$i_{\max.} = 3^{\circ} 1' 15''$ ,
" minimum	$i_{\min.} = 2^{\circ} 1' 58''$ .

Ayant obtenu ce résultat nous pouvons calculer encore les variations annuelles instantannées des éléments de Thule, rapportées à l'époque et l'écliptique 1850.0.

En nous limitant seulement à l'action perturbatrice de Jupiter et de Saturne nous trouvons les variations annuelles suivantes:



$$\frac{d\pi}{dt} = + 455''.54,$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = - 274''.81,$$

$$\frac{di}{dt} = - 4''.37,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = + 23''.57.$$

Nous pourrions donc représenter définitivement de la façon suivante les éléments de Thule:

$$\pi = 295^{\circ} 13' 30'' + 455''.54 \text{ (t-1850.0),}$$

$$\Omega = 74^{\circ} 41' 12'' - 274''.81 \text{ (t-1850.0),}$$

$$i = 2^{\circ} 20' 58'' - 4''.37 \text{ (t-1850.0),}$$

$$\varphi = 3^{\circ} 39' 49'' + 23''.57 \text{ (t-1850.0).}$$

Observatoire astronomique de  
l'Université de Varsovie,  
Décembre 1917.

7. Antoni Łomnicki:

## O wielookresowych funkcjach jednoznacznych zmiennej rzeczywistej.

Komunikat zgłoszony dn. 10 Maja 1918 r.

Przedstawił W. Sierpiński.

### WSTĘP.

Funkcjami okresowymi czyli perjodycznymi zmiennej rzeczywistej o liczbie okresów większej od 1, nie zajmowano się dotychczas — o ile mi wiadomo — zupełnie, a i dla zmiennej zespolonej ograniczono się tylko do funkcji analitycznych. Z tych wszystkich badań klasycznych jeden tylko wynik ma ważne znaczenie dla wielookresowych funkcji zmiennej rzeczywistej, a mianowicie następujące twierdzenie Jacobi'ego:<sup>1)</sup>

Funkcja jednoznaczna analityczna zmiennej zespolonej, różna od stałej, nie może posiadać dwóch perjodów, których stosunek byłby liczbą rzeczywistą niewymierną. Z tego twierdzenia wynika, jak wiadomo, że niema jednoznacznych funkcji analitycznych zmiennej zespolonej, posiadających więcej jak dwa perjody pierwotne (zob. np. Briot-Bouquet l. c.) Dowód twierdzenia Jacobi'ego opiera się na następującem prostszem twierdzeniu:

Jeżeli funkcja jednoznaczna jest analityczna w jakimkolwiek punkcie, a nie redukuje się do stałej, to ta funkcja nie może posiadać perjodów dowolnie małych, istnieje więc takie dodatnie  $\varepsilon$ , że dla każdego perjodu  $p$  sprawdza się nierówność  $|p| > \varepsilon$  (zob. Tannery-Molk, l. c. str. 142).

---

<sup>1)</sup> Por. Jacobi „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis...” Crelle Journal. T. XIII. 1835. str. 55—56. Briot-Bouquet. „Théorie des fonc. elliptiques.” wyd. 2. Paryż 1875. str. 231 i nast. Forsyth. „Theory of functions.” Cambridge. 1893. str. 200 i nast. Tannery-Molk. „Fonct. elliptiques.” T. I. str. 143.



Oto i wszystko z nadzwyczajnie obfitej literatury dotyczącej funkcji perjodycznych, co ma związek z tematem niniejszej pracy. Przyczyny tego tak słabego zainteresowania się tym przedmiotem należy bezwątpienia szukać w tem, że funkcje jednoznaczne wielookresowe są nieanalityczne a nawet nieciągłe i to całkowicie nieciągłe, t. j. dla każdej wartości zmiennej niezależnej (por. § 5), teoria zaś funkcji nieciągłych rozwinęła się dopiero w najnowszych czasach w związku z rozwojem teorii mnogości. Dziś jednak można już ująć teorię funkcji wielookresowych (jednoznacznych zmiennej rzeczywistej) w pewną całość przez wyprowadzenie pewnych ogólnych twierdzeń o takich funkcjach i przez podanie szeregu zajmujących przykładów. Taki właśnie cel zamierzamy osiągnąć w niniejszej pracy.

I tak w § 1. zestawiam znane definicje i podaję definicję funkcji wielookresowych, w § 2, zajmuję się funkcjami, posiadającymi więcej jak jeden perjod pierwotny; następnie w § 3. podaję przykład funkcji wielookresowej nie posiadającej żadnych perjodów oddzielnych. Stwierdziwszy w § 4., że każda funkcja wielookresowa posiada dowolnie małe perjody, wykazuję na podstawie tego w § 5, że funkcja ciągła chociażby w jednym punkcie nie może być wielookresową. Wszystkie te wnioski są w dosyć prostym związku z twierdzeniami znanymi już z teorii funkcji perjodycznych analitycznych. Zupełnie nowem dla teorii funkcji perjodycznych jest zasadnicze twierdzenie, udowodnione w § 6, orzekające, że każda funkcja wielookresowa mierzalna (w sensie Lebesgue'a) jest prawie wszędzie stała. Dowód opiera się na dwóch lemmatach z teorii zbiorów mierzalnych, które same przez się mogą przedstawiać pewien interes. W dalszych ustępach podaję konkretne przykłady, ilustrujące te abstrakcyjne rozważania. I tak w § 7, badam dokładniej interesującą funkcję Cesàro'a pod względem jej okresowości, w § 8, podaję przykład funkcji o nieprzeliczalnej mnogości perjodów przy pomocy t. zw. „basis Hamela“; okazuje się, że ta funkcja jest niemierzalna. W § 9 buduję przy pomocy liczb Liouville'a efektywny przykład funkcji mierzalnej, posiadającej nieprzeliczalną mnogość perjodów. W § 10, powracając do rozważań ogólnych, okazuję, że mnogość perjodów każdej funkcji mierzalnej musi mieć miarę zero, a wreszcie, w § 11, podaję warunki konieczne i dostateczne, jakie musi

spełniać dowolny zbiór liczb rzeczywistych, aby mógł być uważany za zbiór perjodów dowolnej funkcji.

Nadmienię w końcu, że prof. Sierpiński, zainteresowawszy się tematem mej pracy, udzielił mi wielu cennych uwag i ciekawych przykładów, za co mu na tem miejscu wyrażam podziękowanie.

### § 1. Okresy oddzielne i pierwotne.

Rozważania nasze będą dotyczyły wyłącznie takich funkcji, które dla każdej rzeczywistej wartości zmiennej niezależnej  $x$  mają jedną określoną wartość rzeczywistą:  $f(x)$ ; wartość ta może być także nieskończonością dodatnią lub ujemną. Taką funkcję nazywamy funkcją jednoznaczną zmiennej rzeczywistej.

Jeżeli istnieje taka liczba rzeczywista  $p$ , że

$$f(x + p) = f(x) \quad (1)$$

dla wszelkich rzeczywistych  $x$ , to funkcję nazywamy okresową lub perjodyczną, a liczba  $p$  nazywa się okresem lub perjodem. Jeżeli  $p$  jest perjodem, to także każda całkowita dodatnia lub ujemna wielokrotność tej liczby

$$k \cdot p$$

jest perjodem, jak to z łatwością sprawdzamy dla  $k=2$ , stosując wzór (1) dwukrotnie, a dla dowolnego  $k$  dodatniego—przez indukcję zupełną; dla  $k$  ujemnych wystarczy następnie podstawić w równaniu (1) za  $x+p$  nową zmienną  $y$ , przez co otrzymamy

$$f(y) = f(y - p),$$

co dowodzi, że wartość przeciwna każdego perjodu jest także perjodem. W podobny sposób dochodzimy do następującego ogólniejszego wniosku:

Jeżeli  $p_1$  i  $p_2$  są perjodami, to także każda linjowa kombinacja tych perjodów

$$p = m \cdot p_1 + n \cdot p_2 \quad (2)$$

o współczynnikach  $m$  i  $n$  całkowitych (dodatnich, ujemnych lub równych zeru) jest perjodem. Ogólnie:

Jeżeli liczby  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , są perjodami, to każda kombinacja:



$$p = n_1 p_1 + n_2 p_2 + \dots + n_k p_k \quad (3)$$

gdzie  $n_1, n_2, \dots, n_k$  są dowolnymi liczbami całkowitymi, jest perjodem.

Jeżeli wszystkie perjody funkcji są całkowitemi, dodatnimi lub ujemnymi wielokrotnościami jednego perjodu  $p$ , to funkcja nazywa się *jednookresową* a perjod  $p$  nazywa się perjodem pierwotnym. Takimi są np. funkcje  $tgx, \sin \pi x$ , których perjodami pierwotnymi są odpowiednio liczby  $\pi, 2$ .

Dwa perjody są *oddzielne* (distinctes)<sup>1)</sup> jeżeli nie są wielokrotnościami całkowitemi jednego perjodu  $p$ . Jeżeli wszystkie perjody funkcji dadzą się wyrazić jako liniowe kombinacje o współczynnikach całkowitych dwóch perjodów oddzielnych  $p_1$  i  $p_2$ , w postaci

$$p = m p_1 + n p_2$$

to funkcja nazywa się *dwuokresową*, a perjody  $p_1$  i  $p_2$  tworzą parę perjodów pierwotnych. Przykład takiej funkcji poznamy w następnym paragrafie.

Trzy perjody nazywają się *oddzielne*, jeżeli się nie dadzą wyrazić jako linjowe kombinacje o współczynnikach całkowitych dwóch perjodów:  $\alpha, \beta$ , t. j. jeżeli nie zachodzą związki:

$$\begin{aligned} p_1 &= h\alpha + j\beta \\ p_2 &= k\alpha + l\beta \\ p_3 &= m\alpha + n\beta \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha, \beta$  są perjodami, a  $h, j, k, l, m, n$ , liczbami całkowitemi dodatnimi lub ujemnymi lub zerami. Jeżeli wszystkie perjody funkcji dadzą się wyrazić jako linjowe kombinacje (o współczynnikach całkowitych) trzech perjodów oddzielnych, w postaci

$$p = n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3$$

to funkcję nazywamy *trójokresową*, a perjody oddzielne  $p_1, p_2, p_3$  tworzą trójkę perjodów pierwotnych.

Uwaga. Każda para okresów z pomiędzy trzech okresów oddzielnych tworzy również parę okresów oddzielnych. Gdyby bowiem taka para perjodów przedstawiała się w postaci:  $p_1 = m p, p_2 = n p$ , to dobie-

<sup>1)</sup> Terminu tego używa Tannery - Molik: „Éléments de la théorie des fonctions elliptiques.“ T. I. Paris. 1893. str. 141—142.

rając trzeci okres  $p_3 = p_3$ , mielibyśmy trójkę  $(p_1, p_2, p_3)$  wyrażoną linjowo zapomocą dwóch okresów w postaci:

$$\begin{aligned} p_1 &= m \cdot p + 0 \cdot p_3 \\ p_2 &= n \cdot p + 0 \cdot p_3 \\ p_3 &= 0 \cdot p + 1 \cdot p_3 \end{aligned} \quad \text{wbrew założeniu.}$$

W podobny sposób określamy funkcję  $k$ —o kresową i grupę  $k$  perjodów pierwotnych. Możemy również te definicje rozciągnąć na nieskończoną mnogość okresów oddzielnych i pierwotnych.

Istnieją jednak funkcje, które nie są jednookresowe, a mimo to nie posiadają żadnych perjodów oddzielnych, a tem mniej pierwotnych. Taki przypadek zachodzi np., gdy perjodami są wszystkie liczby wymierne (por. § 3); nie istnieje bowiem taka liczba, której wielokrotnościami całkowitemi byłyby wszystkie liczby wymierne, a zatem ta funkcja nie jest jednookresową; z drugiej strony każde dwie liczby wymierne dadzą się wyrazić jako całkowite wielokrotności jednej liczby wymiernej, będącej również okresem, a więc nie istnieją dwa okresy oddzielne a tem mniej trzy lub więcej (por. uwagę).

Wszystkie funkcje okresowe, które nie są jednookresowemi, będziemy nazywali funkcjami wielookresowemi lub wieloperjodycznemi.

Jeżeli dwa perjody nie są oddzielne, to  $p_1 = mp$ ,  $p_2 = np$ , gdzie  $p$  jest też perjodem, a więc ich stosunek

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$$

jest liczbą wymierną. Wykażemy, że także odwrotność tego twierdzenia jest prawdziwa, a mianowicie:

**Twierdzenie I.** Stosunek dwóch perjodów oddzielnych funkcji jednoznacznej zmiennej rzeczywistej jest liczbą niewymierną.

Dowód<sup>1)</sup>. Gdyby stosunek dwóch perjodów oddzielnych  $p_1$  i  $p_2$  (rzeczywistych) przedstawiał się w postaci

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n} \tag{4}$$

<sup>1)</sup> Por. Tannery-Molk, l. c. str. 144. przypisek.



gdzie  $m$  i  $n$  są liczbami całkowitymi, względem siebie pierwszymi, to zawsze możnaby dobrać takie całkowite  $m$  i  $n$ , że

$$m \cdot m' + n \cdot n' = 1 \quad (5)$$

jak wiadomo z elementarnej teorii liczb.

Liczba

$$p = m' \cdot p_1 + n' \cdot p_2 \quad (6)$$

jest perjodem, jako linjowa kombinacja perjodów o współczynnikach całkowitych. Wyrażając z (4)  $p_2$  zapomocą  $p_1$  i podstawiając w (6), otrzymamy:

$$p = (m \cdot m' + n \cdot n') \cdot \frac{p_1}{m}$$

a stąd na podstawie (5)

$$p = \frac{p_1}{m}$$

czyli

$$p_1 = p \cdot m$$

Uwzględniając to w (4) otrzymamy także

$$p_2 = p \cdot n$$

Liczby  $p_1$  i  $p_2$  byłyby więc wielokrotnościami jednego perjodu  $p$ , a zatem nie byłyby perjodami oddzielnymi wbrew założeniu. Stosunek  $p_1$  i  $p_2$  musi więc być liczbą niewymierną, c. b. d. o.

Twierdzenie nasze stosuje się oczywiście także do każdej pary perjodów pierwotnych.

Łącząc twierdzenie I. z definicją perjodów oddzielnych, możemy powiedzieć, o ile pozostajemy w zakresie liczb rzeczywistych:

Dwa perjody oddzielne są to perjody niewspółmierne.

Stąd wysnuwamy następujący wniosek:

Wniosek. Zbiór perjodów funkcji okresowej jednoznacznej zmiennej rzeczywistej, nie posiadającej żadnej pary perjodów oddzielnych, musi być przeliczalny.

Stosunek bowiem jednego perjodu do każdego innego musi być wtedy liczbą wymierną a liczb takich jest mnogość przeliczalna.

## § 2. Przykłady funkcji wielookresowych posiadających perjody pierwotne.

Istnieją funkcje jednoznaczne zmiennej rzeczywistej, posiadające dwa perjody pierwotne. Przykładem takiej funkcji jest funkcja, równa zeru dla wszystkich liczb typu

$$p = m \cdot 1 + n \cdot \sqrt{2} \quad (7)$$

( $m, n$  całkowite dodatnie lub ujemne a mogą być także zerami), a równa jedności dla wszystkich innych  $x$ . Otóż

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \text{ gdy } x = m \cdot 1 + n \cdot \sqrt{2} \\ f(x) &= 1 \text{ dla pozostałych } x. \end{aligned}$$

Każda liczba typu (7) jest perjodem, bo, dodając ją do liczby  $x$  typu (7), otrzymujemy znowu liczbę  $x'$  typu (7), a więc

$$f(x + p) = f(x') = 0$$

czyli

$$f(x + p) = f(x).$$

Dodając zaś  $x = p$  do liczby  $\bar{x}$ , która nie należy do typu (7), otrzymujemy znowu liczbę  $\bar{x}'$ , nie należącą do typu (7). Gdyby bowiem było:

$$\bar{x}' = \bar{x} + m \cdot 1 + n \cdot \sqrt{2} = m' \cdot 1 + n' \cdot \sqrt{2}$$

to stąd mielibyśmy:

$$\bar{x} = (m' - m) \cdot 1 + (n' - n) \cdot \sqrt{2} = m'' \cdot 1 + n'' \cdot \sqrt{2}$$

przy  $m''$  i  $n''$  całkowitych, wbrew założeniu. Mamy więc dla tych  $\bar{x}$ :

$$f(\bar{x} + p) = f(\bar{x}') = 1$$

czyli

$$f(\bar{x} + p) = f(\bar{x}).$$

Funkcja nasza nie posiada innych perjodów prócz liczb zawartych we wzorze (7). Załóżmy bowiem, że  $p$  jest okresem funkcji  $f(x)$ . Mamy więc w szczególności:

$$f(0 + p) = f(0)$$

Ale  $f(0) = 0$ , bo  $x = 0$  ma formę  $m \cdot 1 + n \cdot \sqrt{2}$ , a więc



$$f(p) = 0;$$

wobec definicji naszej funkcji,  $p$  musi więc być liczbą typu (7).

Z pośród perjodów naszej funkcji można wybrać dwa perjody pierwotne i to w rozmaity sposób. Najprostsza taką parę tworzą liczby:

$$p=1 \text{ i } p=\sqrt{2}$$

Otrzymujemy je z ogólnego wzoru, kładąc raz  $m=1, n=0$  a drugi raz  $m=0, n=1$ . Funkcja  $f(x)$  jest więc dwuokresową.

W podobny sposób można budować funkcje jednoznaczne o trzech i więcej perjodach pierwotnych.

Np. funkcja, mająca wartość  $a$  dla wszystkich liczb typu:

$$p = m \cdot 1 + n \cdot \sqrt{2} + r \cdot \sqrt{3} + s \cdot \sqrt{5} + \dots + u \cdot \sqrt{P_{k-1}} \quad (8)$$

gdzie  $P_{k-1}$  oznacza  $(k-1)$ -szą liczbę pierwszą w ciągu kolejnych liczb pierwszych 2, 3, 5, . . . . ., a wartość  $b$  dla wszystkich innych liczb rzeczywistych, posiada  $k$  perjodów pierwotnych, np.

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{P_{k-1}}.$$

Taką funkcję nazywamy  $k$ -okresową.

Podobnie można się posuwać dalej i zbudować funkcję posiadającą nieskończoną (przeliczalną) mnogość perjodów pierwotnych, biorąc za perjody liczby typu (8) przy wszelkich całkowitych dodatnich  $k$ .

### § 3. Przykład funkcji wielookresowej bez perjodów oddzielnych.

Przykładem funkcji wielookresowej bez perjodów oddzielnych jest znana z teorii funkcji nieciągłych funkcja Dirichlet'a. Ma ona wartość 0 dla wszystkich niewymiernych  $x$  a wartość 1 dla wymiernych  $x$ . Perjodem jej jest każda liczba wymierna. Jeżeli bowiem dodamy do wymiernego  $x$  liczbę wymierną  $w$ , to i  $x+w$  jest liczbą wymierną, więc:

$$f(x+w) = 1 = f(x)$$

Jeżeli zaś do niewymiernego  $x'$  dodamy liczbę wymierną  $w$ , to i  $x'+w$  jest liczbą niewymierną, a zatem:

$$f(x' + w) = 0 = f(x)$$

Innych perjdów nie posiada funkcja Dirichlet'a, gdybyśmy bowiem do wymiernego  $x$  dodali niewymierną liczbę  $w$ , to  $f(x) = 1$  zmieni się na  $f(x + w) = 0$ , ponieważ  $x + w$  jest liczbą niewymierną. Funkcja ta jest wielookresową, a nie posiada żadnych perjdów oddzielnych, jak to zaznaczyliśmy już w § 1.

#### § 4. Perjody dowolnie małe.

Wszystkie funkcje wielookresowe (jednoznaczne zmiennej rzeczywistej) mają następującą własność wspólną:

Twierdzenie II. Każda funkcja wielookresowa (jednoznaczna, zmiennej rzeczywistej) posiada dowolnie małe perjody, t. j. mając daną taką funkcję, można do każdego dodatniego  $\varepsilon$  dobrać taki perjd  $p$ , że  $|p| < \varepsilon$ .

Dowód. a) Jeżeli funkcja okresowa nie jest jednookresową i nie posiada perjdów oddzielnych, to do każdego perjodu  $p_0$  można znaleźć różny od zera perjd, mniejszy od niego co do wartości bezwzględnej co najmniej dwa razy. Stosunek bowiem perjodu  $p_0$  do każdego innego perjodu musi być w naszym przypadku liczbą wymierną; wśród tych liczb wymiernych muszą występować także liczby niecałkowite, w przeciwnym bowiem razie funkcja byłaby jednookresową a  $p_0$  byłby jej perjodem pierwotnym. Jeżeli zaś stosunek jakiegoś perjodu  $P$  do  $p_0$  jest:

$$P : p_0 = \alpha$$

przyczem  $\alpha$  jest liczbą ułamkową lub mieszaną, to możemy zawsze  $\alpha$  przedstawić w postaci:

$$\alpha = a + x$$

gdzie  $a$  jest najbliższą liczbą całkowitą (większą lub mniejszą od  $\alpha$ ) a

$$0 < |x| \leq \frac{1}{2}$$

Wobec tego

$$P = p_0 a + p_0 x$$

a liczba

$$p_1 = P - p_0 a = p_0 x$$

jest perjodem, jako linjowa kombinacja o współczynnikach całkowitych dwóch perjdów  $P$  i  $p_0$ . Oczywiście:



$$0 < |p_1| = |p_0| \cdot |x| \leq \frac{1}{2} |p_0|$$

Taksamo do perjodu  $p_1$  musi się znaleźć taki perjod  $p_2$ , że

$$0 < |p_2| \leq \frac{1}{2} |p_1|$$

czyli

$$0 < |p_2| \leq \frac{1}{2^2} |p_0|$$

i ogólnie, przy wszelkiem  $n$  całkowitem dodatniem znajdzie się takie  $p_n$ , że

$$0 < |p_n| \leq \frac{1}{2^n} |p_0|$$

Widzimy stąd, że można wybrać ciąg perjodów:

$$p_0, p_1, p_2, \dots$$

zbieżny do zera, ponieważ jego wyrazy są odpowiednio nie większe co do wartości bezwzględnej od wyrazów ciągu:

$$|p_0|, \frac{|p_0|}{2}, \frac{|p_0|}{2^2}, \dots$$

zbieżnego do zera. Można więc będzie do każdego dodatniego  $\varepsilon$  dobrać takie  $n$ , że perjod  $p_n$  spełnia nierówności:

$$0 < |p_n| < \varepsilon \quad \text{c. b. d. o.}$$

b) Jeżeli funkcja posiada perjody oddzielne, np.  $p_1$  i  $p_2$ , to na podstawie twierdzenia I. stosunek ich jest liczbą niewymierną. Jak wiadomo z teorii ułamków łańcuchowych, można wtedy znaleźć taki ułamek nieprzywiedlny  $\frac{m}{n}$  o mianowniku dowolnie wielkim dodatnim, że:

$$\left| \frac{p_1}{p_2} - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{n^2}$$

Stąd z łatwością wynika

$$|np_1 - mp_2| < \frac{|p_2|}{n}$$

Obierając  $n$  tak wielkie, aby

$$n \geq \frac{|p_2|}{\varepsilon}$$

otrzymujemy

$$|np_1 - mp_2| < \varepsilon$$

Wyrażenie zawarte w klamrze jest jednak perjodem na podstawie wzoru (2). Istnieje więc taki perjod  $p$ , że

$$|p| < \varepsilon.$$

Widzimy więc, że w obydwu przypadkach istnieją perjody dowolnie małe, c. b. d. o.

Z dowodu wynika też bezpośrednio następujący wniosek:

Wniosek. Jeżeli funkcja posiada dwa niewspółmierne perjody, to posiada też dowolnie małe perjody.

Wprowadzając dla funkcji o dowolnie małych perjodach termin: funkcje mikroperjodyczne, moglibyśmy wypowiedzieć twierdzenie II także w postaci następujących alternatyw:

Funkcja perjodyczna (jednoznaczna, zmiennej rzeczywistej) jest albo funkcją jednoperyodyczną albo mikroperjodyczną.

Te dwie alternatywy wykluczają się wzajemnie, jak to łatwo sprawdzić. Jeżeli bowiem funkcja jest jednoperyodyczna, to istnieje jeden najmniejszy co do wartości bezwzględnej perjod, a mianowicie perjod pierwotny; jeżeli zaś funkcja nie jest jednoperyodyczna, to nazywa się wieloperjodyczną a jako taka musi być w myśl twierdzenia II mikroperjodyczną.

Tak więc pojęcia:  $f$ . wieloperjodyczna i  $f$ . mikroperjodyczna pokrywają się zupełnie dla funkcji jednoznacznych zmiennej rzeczywistej.

## § 5. Nieciągłość funkcji wielookresowych.

Przystąpimy obecnie do bliższego zbadania natury funkcji wielookresowych, a mianowicie przedewszystkiem do zbadania ich pod względem ciągłości. W przykładach, któreśmy dotychczas omówili, funkcje były nieanalityczne, a nawet nieciągłe, i to tak, że nie były ciągłe dla żadnej wartości zmiennej niezależnej. Udowodnimy, że tak się zachowują wszystkie funkcje wielookresowe jednoznaczne zmiennej rzeczywistej, z wyjątkiem trywjalnego przypadku, gdy funkcja ma stałą wartość dla każdego  $x$ .

Twierdzenie III. Funkcja wielookresowa, różna od stałej, jest nieciągła dla każdej wartości zmiennej niezależnej.



Twierdzenie to można wypowiedzieć także w innej, dogodniejszej postaci, otrzymanej z twierdzenia III przez kontrapozycję z uwzględnieniem twierdzenia II:

Twierdzenie III. Jeżeli funkcja jednoznaczna zmiennej rzeczywistej, różna od stałej, jest ciągła chociażby w jednym punkcie, to nie może posiadać perjodów dowolnie małych.

Twierdzenie nasze jest ogólniejsze od twierdzenia znanego z klasycznej teorii funkcji analitycznych<sup>1)</sup>, ponieważ zakładamy tylko ciągłość, podczas kiedy tam zakłada się prócz tego rozwijalność na szereg potęgowy i używa się tego założenia faktycznie w dowodzie.

Dowód: Niech  $x = a$  będzie punktem ciągłości i niechaj  $f(a) = A$ . Ponieważ funkcja nie jest stałą, więc w jakimś punkcie, np.  $b$ , musi przybrać wartość  $B$ , różną od  $A$ , a więc  $|B - A|$  jest liczbą dodatnią, różną od zera. Wskutek ciągłości można do każdej dodatniej liczby  $\varepsilon$  a więc i do  $\varepsilon < |B - A|$  dobrać takie  $h$ , że dla wszelkich  $x$ , spełniających nierówność  $|x - a| < h$  jest:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Jeżeliby istniały perjody dowolnie małe, to istniałby także perjod  $p$  taki, że  $|p| < h$ , a więc funkcja przybierałaby wartość  $B$  we wszystkich punktach

$$x_n = b + np$$

przy dowolnym  $n$  całkowitem dodatnim lub ujemnym. Jeden z punktów  $x_n$  np.  $x'$  musi jednak paść w przedział  $(a - h, \dots, a + h)$ , ponieważ  $|p| < h$ . W tym punkcie  $x'$  funkcja miałaby wartość  $B$ . Ponieważ zaś  $|x' - a| < h$ , więc mielibyśmy

$$|f(x') - A| = |B - A| < \varepsilon$$

wbrew założeniu uczynionemu co do liczby  $\varepsilon$ .

<sup>1)</sup> Wprawdzie Fricke, w artykule p. t. „Elliptische Funktionen“ (Encyklop. der mathem. Wissensch. II. B. 3, str. 264) wypowiada twierdzenie:

„wäre  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  reell und irrational, so würde  $\varphi(u)$  entweder konstant oder total unstetig sein“, ale autorowie, do których autor odsyła (Briot-Bouquet l. c. i Pringsheim. Mathem. Annalen. 27, str. 151), dowodzą tylko, że funkcja nie może być w tym przypadku analityczna, nie zajmują się zaś ciągłością.

Z twierdzenia III i z wniosku z tw. II wynika następujący wniosek:

Wniosek: Funkcja (jednoznaczna zmiennej rzeczywistej) różna od stałej, posiadająca dwa niewspółmierne perjody, jest nieciągła w każdym punkcie.

Jako dalszy wniosek widoczny z dowodu twierdzenia III, możemy też wypowiedzieć następujące prawo:

Twierdzenie IV. Funkcja mikroperjodyczna przybiera każdą ze swych wartości w punktach mnogości wszędzie gęstej (pantachicznie)

Istotnie w każdym przedziale dowolnie małym ( $a-h \dots a+h$ ) znajdują się, jak widzieliśmy, punkty, w których funkcja przybiera jakąkolwiek ze swych wartości, np.  $B$ .

## § 6. Twierdzenie zasadnicze o funkcjach wielookresowych mierzalnych.

Jakkolwiek funkcja wielookresowa przybiera każdą z swych wartości w punktach mnogości wszędziegęstej—w myśl twierdzenia IV, — to jednak dla każdej takiej funkcji, o ile jest tylko mierzalną, istnieje jedna wyróżniona wartość, niejako uprzywilejowana, którą funkcja przybiera częściej od innych wartości (częściej w tem znaczeniu, że miara zbioru tych wartości  $x$ , dla których funkcja przybiera ową wartość, jest większa od miary zbioru tych wartości  $x$ , dla których funkcja przybiera jakąkolwiek inną wartość). Ścisłej wyraża się ten fakt następującem twierdzeniem:

Twierdzenie V. Funkcja jednoznaczna zmiennej rzeczywistej, mierzalna, posiadająca dowolnie małe perjody, jest prawie wszędzie stała (to znaczy stała dla wszystkich punktów każdego przedziału z wyjątkiem co najwyżej mnogości punktów, mającej miarę zero w sensie Lebesgue'a)

Dla dowodu wykażemy najpierw prawdziwość następującego twierdzenia pomocniczego:

Lemmat I. Jeżeli zbiór wszystkich punktów linii prostej rozłożymy na dwa zbiory mierzalne,



nieposiadające punktów wspólnych, a pozwalające na dowolnie małe przesunięcia w sobie, to jeden z tych zbiorów ma w każdym przedziale miarę zero a drugi naturalnie miarę równą długości tego odcinka.

Dowód. Zbiory, na które rozkładamy zbiór wszystkich punktów linii prostej, są względem siebie dopełniające, możemy je więc oznaczyć symbolami:  $E$  i  $C(E)$ . Obydwa zbiory nie mogą mieć miary zero, gdyż wtedy ich suma miałaby miarę zero, a tymczasem ta suma wypełnia cały odcinek, ma więc miarę dodatnią. Należy więc tylko wykazać, że obydwa zbiory nie mogą mieć równocześnie miary dodatniej w żadnym odcinku. Niechaj więc zbiór  $E$  ma miarę dodatnią w jakimś odcinku  $\Delta$ , a więc  $mE_{\Delta} = \alpha > 0$ , przyczem  $E_{\Delta}$  oznacza część zbioru  $E$ , zawartą w odcinku  $\Delta$ .

Według znanego twierdzenia <sup>1)</sup> musi istnieć w  $\Delta$  taki odcinek  $\delta$ , w którym średnia gęstość <sup>2)</sup> tego zbioru jest dowolnie bliska jedności. To znaczy, że dla każdej dodatniej liczby  $\varepsilon$  istnieje taki odcinek  $\delta$ , że miara tej części  $E_{\delta}$  zbioru  $E$ , która jest zawarta w  $\delta$ , spełnia nierówność

$$m E_{\delta} > (1 - \varepsilon) \bar{\delta} \quad (9)$$

przyczem  $\bar{\delta}$  oznacza długość przedziału  $\delta$ .

Wykażemy przedewszystkiem, że także

$$m E_{\Delta} > (1 - k) \bar{\Delta}$$

gdzie  $k$  jest dowolną liczbą dodatnią. Otóż mając podane z góry dowolne  $k$  obierzmy  $\varepsilon = \frac{k}{4}$ , a do tego  $\varepsilon$ , według (9), taki odcinek  $\delta$ , aby

$$m E_{\delta} > \left(1 - \frac{k}{4}\right) \bar{\delta}. \quad (10)$$

Wykonajmy teraz przesunięcia tego odcinka  $\delta$  wraz z mno-

<sup>1)</sup> Zob. np. W. Sierpiński: „Teoria miary Lebesgue'a”. Lwów 1914, litogr. str. 46, twierdzenie X lub Prace matem.-fiz. T. 27, str. 58.

<sup>2)</sup> Termin wprowadzony przez Lebesgue'a (Annales de l'École normale, T. XXVII).

gością  $E_{\delta}$  w nim zawartą w prawo i w lewo o jego własną długość tak, aby pokryć zupełnie cały odcinek  $\Delta$ . Zbiór otrzymany z  $E_{\delta}$  z tych wszystkich przesunięć nazwijmy  $\Sigma E_{\delta}$ . Odcinek  $\delta$  jest w każdym razie nie dłuższy od  $\bar{\Delta}$  a więc

$$(11) \quad \frac{\bar{\Delta}}{\delta} = n + \rho \text{ przyczem } n \geq 1, \quad 0 \leq \rho < 1.$$

W ogólności nie cały zbiór  $\Sigma E_{\delta}$  mieści się w  $\Delta$ , albowiem część pierwszego i ostatniego z odcinków o długości  $\delta$ , potrzebnych do pokrycia  $\Delta$  może wysterczać poza końce  $\Delta$ ; nazwijmy  $E'_{\Delta}$  tę część zbioru  $\Sigma E_{\delta}$ , która jest zawarta w  $\Delta$ . Dla miary tego zbioru  $E'_{\Delta}$  otrzymujemy następującą nierówność:

$$m E'_{\Delta} \geq (n-1) \cdot m E_{\delta} + \bar{\Delta} - (n-1) \delta - 2 \cdot \frac{k}{4} \delta$$

albowiem w  $\Delta$  zawiera się w każdym razie  $(n-1)$  pełnych odcinków  $\delta$ , a w pozostałej reszcie  $\bar{\Delta} - (n-1) \delta$ , składającej się z części pierwszego i części ostatniego odcinka  $\delta$ , brak co najwyżej  $2 \cdot \frac{k}{4} \delta$  do pełnej miary, według (10). Uwzględniając tu nierówność (10), otrzymujemy:

$$m E'_{\Delta} > \left(1 - \frac{k}{4}\right) (n-1) \delta + \bar{\Delta} - (n-1) \delta - 2 \cdot \frac{k}{4} \delta$$

a stąd po łatwej redukcji

$$m E'_{\Delta} > \bar{\Delta} - (n+1) \delta \cdot \frac{k}{4}.$$

Podstawiając za  $\delta$  wartość z wzoru (11), otrzymamy:

$$m E'_{\Delta} > \bar{\Delta} - \frac{n+1}{n+\rho} \cdot \frac{k}{4} \cdot \bar{\Delta}.$$

Ułamek  $\frac{n+1}{n+\rho}$  wobec  $0 \leq \rho < 1$  i  $n \geq 1$  może mieć najwyżej

wartość 2, a więc:



$$(13) \quad mE'_\Delta > \left(1 - \frac{k}{2}\right) \bar{\Delta}.$$

Nasz zbiór pierwotny  $E$  pozwala według założenia na dowolnie małe przesunięcia w sobie. Wybierzmy z tych przesunięć jedno  $p$  takie, aby było:

$$|p| \leq \delta.$$

Jeżeli wykonamy z odcinkiem  $\delta$  szereg takich przesunięć tak, aby się pokrył cały odcinek  $\Delta$ , to otrzymamy w odcinku zbiór  $E''_\Delta$ , który jest zawarty w zbiorze  $E_\Delta$ , albowiem przesunięcie  $p$  należy do dozwolonych, t. j. przeprowadzających punkty mnogości  $E$  w inne punkty, należące również do mnogości  $E$  (podczas kiedy przesunięcia  $\delta$  wykonywane poprzednio nie były wybrane z pośród przesunięć dozwolonych).

Zdawałoby się, że zbiór  $E''_\Delta$  otrzymany z punktów  $E_\delta$  przez przesunięcia  $p$  mniejsze od  $\delta$  nie może być rzadszy od zbioru  $E'_\Delta$  otrzymanego z  $E_\delta$  przez przesunięcia  $\delta$ . Tymczasem gęstość może się zmniejszyć przez wykonanie mniejszych przesunięć i to nawet tak, że, jeżeli pierwszej mnogości brakuje do pełnej miary  $A$ , to drugiej może zabraknąć  $2A$ , ale też najwyżej tyle, jak to zaraz wykażemy.

Lemmat II. Jeżeli mnogość  $E'_\Delta$  leżąca w  $\Delta$ , otrzymana przez przesuwanie dowolnej mnogości  $E_\delta$ , zawartej w odcinku  $\delta$ , o jego własną długość, ma w  $\Delta$  miarę dodatnią, to mnogość  $E''_\Delta$  leżąca w  $\Delta$  a otrzymana przez przesuwanie tej samej mnogości  $E_\delta$  o odcinek krótszy od  $\delta$ , może mieć w  $\Delta$  miarę mniejszą od  $mE'_\Delta$  ale w każdym razie, jeżeli

$$mE'_\Delta > (1 - a)\bar{\Delta}$$

to

$$mE''_\Delta > (1 - 2a)\bar{\Delta}.$$

Dowód. Zbiór powstały przez przesuwanie odcinka  $\delta$  o długość  $\delta$  miał miarę

$$mE'_\Delta > (1 - a)\bar{\Delta}.$$

Jeżeli wykonywamy mniejsze przesunięcia, to do zupełnego pokrycia odcinka  $\Delta$  trzeba naturalnie użyć większej liczby odcinków przystających do  $\delta$ , a nakrywających się częściowo. Z tych wszystkich odcinków wybieramy taki łańcuch, któryby pokrył cały odcinek ale najwyżej dwukrotnie, inne zaś odcinki, pokrywające chociażby w jednym miejscu odcinek  $\Delta$  trzy lub więcej razy, opuścimy. Część mnogości  $\Sigma E_\delta$  zawarta teraz w  $\Delta$  nazwijmy  $E''_\Delta$ . Ten łańcuch zawiera najwyżej dwa razy tyle odcinków, ile ich było przy przesunięciu o całe  $\bar{\delta}$  (gdyby ich bowiem było więcej, musiałoby w niektórych miejscach nastąpić trzykrotne pokrycie). Jeżeli więc przedtem brakowało do pełnej miary mniej niż  $a\bar{\Delta}$ , to obecnie może braknąć liczby większej, ale w każdym razie mniej, niż  $2a\bar{\Delta}$ , a zatem

$$m E''_\Delta > (1 - 2a)\bar{\Delta}.$$

Ponieważ zaś mnogość  $E''_\Delta$  jest częścią mnogości  $E'_\Delta$ , powstałej z wszystkich odcinków potrzebnych do pokrycia  $\Delta$  przy kolejnych przesunięciach mniejszych od  $\delta$ , to

$$m E''_\Delta \geq m E'_\Delta$$

a zatem

$$m E'_\Delta > (1 - 2a)\bar{\Delta} \quad \text{c. b. d. o.}$$

Uwaga. Zmniejszenie gęstości może nastąpić wskutek tego, że miejsca pełne odcinka pokryją się z pełnemi, a próżne (t. j. wolne od punktów mnogości  $E_\delta$ ) wypadną w te miejsca łańcucha, w których są przerwy, t. j. w których poprzedni odcinek już się skończył a następny nie zaczął. Np. niech mnogość  $E_\delta$  w odcinku  $MN = \bar{\delta}$  (fig. 1) składa się z wszystkich jego punktów z wyłączeniem części  $AB$  o długości  $\frac{1}{3}\bar{\delta}$ . Przy przesuwaniu tego odcinka o jego długość otrzymujemy w  $\Delta$  zbiór o mierze  $\left(1 - \frac{1}{3}\right)\bar{\Delta}$  t. j.  $\frac{2}{3}\bar{\Delta}$ , a przez przesuwanie o długość  $\frac{2}{3}\bar{\delta}$ , otrzymujemy w  $\Delta$  zbiór o mierze dwa razy mniejszej:  $\left(1 - \frac{2}{3}\right)\bar{\Delta} = \frac{1}{3}\bar{\Delta}$ .



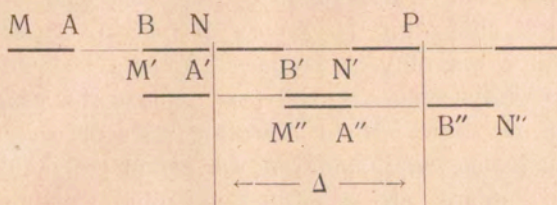


Fig. 1.

Stosując teraz lemmat II do dowodu lemmatu I, widzimy, że, jeżeli

$$\begin{aligned} \text{to} \quad m E'_\Delta &> \left(1 - \frac{k}{2}\right) \bar{\Delta} \\ m E''_\Delta &> (1 - k) \bar{\Delta} \end{aligned}$$

Ponieważ zaś zbiór  $E''_\Delta$  jest częścią zbioru  $E_\Delta$ , więc

$$\begin{aligned} m E_\Delta &\geq m E''_\Delta \\ \text{a zatem} \quad m E_\Delta &> (1 - k) \bar{\Delta} \end{aligned}$$

Ponieważ liczba  $m E_\Delta$  jest stale zawarta między liczbami  $\bar{\Delta}$  a  $(1 - k) \bar{\Delta}$  przy dowolnie małym dodatnim  $k$ , przeto

$$\begin{aligned} \text{a w obec tego} \quad m E_\Delta &= \bar{\Delta} \\ m C(E_\Delta) &= 0 \end{aligned}$$

Tak jest w każdym dowolnym przedziale  $\Delta$ , a zatem lemmat nasz został w zupełności udowodniony.

Uwaga. Gdybyśmy podobnie rozłożyli zbiór wszystkich punktów linii prostej na dowolną liczbę zbiorów mierzalnych, bez punktów wspólnych, a pozwalających na dowolnie małe przesunięcia w sobie, to tylko jeden z tych zbiorów może mieć miarę dodatnią a wszystkie inne mają miarę zero.

Opierając się na lemmacie I możemy teraz przystąpić do dowodu twierdzenia zasadniczego.

Weźmy pod uwagę funkcję mierzalną  $f(x)$ , posiadającą dowolnie małe perjody. Z definicji mierzalności funkcji wynika, że przy dowolnym  $B$  zarówno zbiór  $E$  tych wartości  $x$ , dla któ-

rych  $f(x) \leq B$  jak i dopełniający zbiór  $E'$  tych, dla których  $f(x) > B$ , jest mierzalny<sup>1)</sup>. Zbiory  $E$  i  $E'$  nie posiadają oczywiście punktów wspólnych, ponieważ funkcja jest jednoznaczna. Wskutek perjodyczności funkcji  $f(x)$ , zbiory te pozwalają na przesunięcia w sobie i to na dowolnie małe przesunięcia. Warunki lemmatu są więc spełnione, a zatem jeden tylko z tych zbiorów ma miarę zero, a drugi ma miarę dodatnią, równą w każdym odcinku jego długości.

Przypuśćmy najpierw, że zbiór

$$E'_B [f(x) > B]$$

ma miarę zero. W takim razie to samo ma miejsce dla każdej liczby większej od  $B$ , bo część zbioru miary zero ma także miarę zero (przy stosowaniu miary Lebesgue'a). Zbiór wszystkich liczb  $B$  spełniających ten warunek  $mE'_B = 0$  jest albo ograniczony z dołu, albo nieograniczony z dołu. W tym w drugim wypadku funkcja  $f(x)$  miałaby prawie wszędzie wartość  $-\infty$  gdyż zbiór  $E'_{-\infty} [f(x) > -\infty]$  miałby miarę zero. Twierdzenie nasze byłoby więc w tym przypadku spełnione.

Jeżeli zaś zbiór liczb  $B$  jest ograniczony z dołu, to posiada kres dolny  $A$ , t. j. taką liczbę, że niema żadnych  $B < A$  a natomiast istnieją takie  $B$ , nazwijmy je  $B_\varepsilon$ , że

$$A \leq B_\varepsilon < A + \varepsilon$$

dla dowolnie małej dodatniej liczby  $\varepsilon$ .

Zbiór tych  $x$ , dla których  $f(x) > B_\varepsilon$  ma więc miarę zero, a tembardziej zbiór tych  $x$ , dla których

$$f(x) > A + \varepsilon$$

Nazwijmy ten zbiór  $E_{A+\varepsilon}$ . Zbiór  $E_{A-\varepsilon}$  tych  $x$ , dla których  $f(x) > A - \varepsilon$  ma już miarę różną od zera, dodatnią (bo  $A - \varepsilon < A$ ) i równą w każdym odcinku  $\Delta$  jego długości, w myśl lemmatu I, zastosowanego do zbioru  $E_{A-\varepsilon}$  i do jego dopełnienia.

Zbiór  $E_{A-\varepsilon}^{A+\varepsilon}$  wartości, dla których

$$A - \varepsilon < f(x) \leq A + \varepsilon$$

<sup>1)</sup> Por. np. Vallée-Poussin: „Cours d'Analyse“. T. I. 3 wyd. 1914 str. 69.



jako różnica zbiorów, dla których  $f(x) > A - \varepsilon$  i  $f(x) > A + \varepsilon$ , ma miarę równą różnicy miar zbiorów  $E_{A-\varepsilon}$  i  $E_{A+\varepsilon}$ , a więc

$$m E_{A-\varepsilon}^{A+\varepsilon} = m E_{A-\varepsilon} - m E_{A+\varepsilon} = \bar{\Delta} - 0 = \bar{\Delta}.$$

Ponieważ ta równość utrzymuje się dla wszelkich dowolnie małych  $\varepsilon$ , to utrzymuje się także w granicy <sup>1)</sup>, t. j. dla zbioru  $E_A^A$  zawartego w tych wszystkich zbiorach, a zawierającego takie  $x$ , dla których

$$f(x) = A.$$

A więc zbiór wartości  $x$  dowolnego odcinka, dla których funkcja ma stałą wartość  $A$ , ma miarę równą długości odcinka. Zbiór więc wartości  $x$ , w których funkcja nie jest stałą, ma miarę zero. To znaczy, że funkcja  $f(x)$  jest w tym przypadku prawie wszędzie stała, c. b. d. o.

zupełnie analogicznie rozumiemy, gdy zbiór dopełniający do  $E_B$  t. j.

$$E''_B [f(x) \leq B]$$

ma miarę zero. Wtedy badamy dla  $B$  kres górny i dochodzimy do wniosku, że albo  $f(x) = +\infty$  prawie wszędzie, o ile zbiór wartości  $B$  jest nieograniczony z góry, albo  $f(x) = C$  prawie wszędzie, jeżeli  $C$  jest górnym kresem wartości  $B$ . Twierdzenie zasadnicze jest więc w zupełności udowodnione.

Wniosek. Funkcja posiadająca niewspółmierne perjody jest prawie wszędzie stała.

Wynika to z twierdzenia V i z wniosku z tw. II.

Z łatwością można sprawdzić, że podane dotychczas przykłady funkcji wielookresowych czynią zadość twierdzeniu zasadniczemu V. Rezultat nasz jest tem dziwniejszy, że funkcje wielookresowe nie posiadają żadnego przedziału stałości, byłyby bowiem ciągle wewnątrz takiego przedziału, wbrew twierdzeniu III.

## § 7. Funkcja Cesàro'a.

Jakkolwiek funkcje wielookresowe mierzalne są prawie wszędzie stałe, to jednak różnorodność tych funkcji może być

<sup>1)</sup> Por. Lebesgue'a. „Leçons sur l'intégration“ str. 109.

jeszcze bardzo wielka tak pod względem zbioru wartości, w których funkcja jest różna od stałej, jak i pod względem zbioru tych wartości, które funkcja może przybierać oprócz owej jednej wyróżnionej wartości stałej, a także pod względem zbioru okresów.

Przedewszystkiem zbiór miary zero, w którym funkcja ma wartość różną od stałej, jest wszędzie gęsty (według tw. IV) a może być nawet nieprzeliczalny i mieć moc kontinuum. Zbiór zaś samych wartości funkcji może tworzyć kontinuum linjowe, np. składać się z wszystkich punktów odcinka  $(0 \dots 1)$ .

Przykład takiej funkcji otrzymujemy bezpośrednio z funkcji wprowadzonej dla innych celów przez E. Cesàro'a<sup>1)</sup>, a określonej w następujący sposób:

Przedstawmy każdą liczbę rzeczywistą  $x$  w układzie dwójkowym, przyczem dla zachowania jednoznaczności bierzemy pod uwagę tylko rozwinięcia normalne, t. j. odrzucamy wszystkie rozwinięcia takie, w których począwszy od pewnego miejsca figurują same jedynki. Otóż  $x$  przedstawiamy w postaci

$$x = Ex + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \frac{c_3}{2^3} + \dots + \frac{c_n}{2^n} + \dots$$

gdzie  $Ex$  oznacza największą całość zawartą w  $x$ , a liczby  $c_n$  mają wartości 0 lub 1. W skróceniu piszemy

$$x = Ex, c_1 c_2 c_3 \dots c_n \dots$$

Badamy granicę średniej arytmetycznej:

$$(14) \dots \dots \dots \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}$$

O ile ta granica istnieje i ma wartość  $L$ , kładziemy

$$f(x) = L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}$$

---

<sup>1)</sup> E. Cesàro. „Sur la représentation analytique des régions et des courbes qui les remplissent.“ Bulletin des sciences math. T. XXI r. 1897, str. 257 i nast.



o ile zaś powyższe wyrażenie (14) nie dąży do żadnej granicy<sup>1)</sup>, kładziemy  $f(x)$  równe dowolnej liczbie stałej, np.

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

Jeżeli liczba  $x$  przedstawia się skończonym rozwinięciem dwójkowym, to wszystkie  $c_i$  począwszy od pewnego  $i$  są zerami, a więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} = 0.$$

Dla takich  $x$  jest więc także  $f(x) = 0$ .

Funkcja  $f(x)$  określona w ten sposób dla wszelkich rzeczywistych  $x$ , jest perjodyczna; okresem jej jest każda liczba  $a$  posiadająca skończone rozwinięcie dwójkowe. Istotnie, przez dodanie takiej liczby  $a$  do  $x$ , posiadającego skończone rozwinięcie, otrzymamy znowu liczbę o skończonym rozwinięciu a więc i wartość funkcji nie zmienia się:

$$f(x + a) = 0 = f(x).$$

Przy dodaniu takiej liczby  $a$  do  $x$  posiadającego nieskończone rozwinięcie zmieniamy tylko skończoną liczbę cyfr  $c_i$ , a to, jak wiadomo, nie ma wpływu ani na fakt istnienia granicy wyrażenia (14) ani na jej wartość, a zatem i w tym przypadku

$$f(x + a) = f(x).$$

Żadna inna liczba nie jest okresem tej funkcji. Aby to okazać, rozróżnimy trzy przypadki:

1. Liczba  $x^{(1)}$ , posiadająca nieskończone rozwinięcie, dla której granica (14) ma wartość  $L$  różną od zera, nie może być okresem, bo dodana do liczby  $a$  o skończonym rozwinięciu da-

<sup>2)</sup> Że takie rozwinięcia istnieją, dowodzi następujący przykład:

$$x = 0,10011110000000011111111111111100 \dots$$

w którym występuje kolejno jedna jedynek, dwa zera, 2<sup>2</sup> jedynek, 2<sup>3</sup> zer 2<sup>4</sup> jedynek i t. d. Łatwo sprawdzić, że średnia (14) dla tego rozwinięcia waha się między  $\frac{1}{3}$  a  $\frac{2}{3}$  według tego, czy zatrzymujemy się na grupie złożonej z samych jedynek, czy z samych zer.

je znów liczbę o nieskończonym rozwinięciu i o tej samej granicy  $L$ , a więc

$$f(a + x^{(L)}) = f(x_1^{(L)}) = L \neq 0$$

gdy tymczasem  $f(a) = 0$ .

2. Liczba  $x^{(0)}$  posiadająca nieskończone rozwinięcie, dla którego granica (14) ma wartość zero, nie może być również okresem, bo można do niej dobrać takie  $x^{(L)}$  o rozwinięciu nieskończonym i granicy  $L$  różnej od zera, że wartość tej granicy  $L$  zmieni się, gdy do  $x^{(L)}$  dodamy  $x^{(0)}$ . Okażemy to najpierw na przykładzie. Niech

$$x^{(0)} = 0.100010000010000000100 \dots$$

Jedynki znajdują się na miejscach:  $1, 2^2 + 1, 3^2 + 2, \dots, m^2 + (m - 1) \dots$ . Wyrażenie (14) ma w tym przypadku postać:

$$\frac{m}{m^2 + (m - 1)} = \frac{1}{m + 1 - \frac{1}{m}}$$

a więc widocznie granicą tego wyrażenia jest zero.

Dodajmy to  $x^{(0)}$  do liczby:

$$x^{(1)} = 0.10111011111011111101 \dots$$

k której rozwinięcie posiada widocznie granicę  $L = 1$ , albowiem wyrażenie (14) ma tu postać:

$$\frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2m - 1}{m^2 + m} = \frac{m^2}{m^2 + m}$$

a granicą tego wyrażenia jest 1, gdy  $m^2 + m$  dąży do nieskończoności. Jako sumę otrzymujemy

$$x^{(1)} + x^{(0)} = x_1^{(0)} = 1.01000100000100000001 \dots$$

a ta liczba posiada granicę  $L = 0$ , jak to wynika z uwagi, że rozwinięcie  $x_1^{(0)}$  różni się od  $x^{(0)}$  tylko przesunięciem wszystkich cyfr znajdujących się po kropce o jedno miejsce.

Mamy więc  $f(x^{(1)} + x^{(0)}) = f(x_1^{(0)}) = 0$  zamiast 1, a więc  $x^{(0)}$  nie jest perjodem. Widocznym jest, że w podobny sposób można do każdej liczby  $x^{(0)}$  o granicy  $L = 0$  dobrać taką liczbę



$x^{(1)}$  o granicy  $L=1$ , że suma  $x^{(1)} + x^{(0)}$  jest liczbą o granicy zero, co dowodzi, że żadna liczba typu  $x^{(0)}$  nie jest perjodem.

3. Liczba  $x^{(w)}$  o rozwinięciu nieskończonem a nie posiadającym granicy wyrażenia (14) nie może być także perjodem. Aby to okazać, dobieramy do  $x^{(w)}$  dopełnienie tej liczby do najbliższej całości, t. j. liczbę  $x_1^{(w)}$  posiadającą jedynki na tych miejscach, na których w  $x^{(w)}$  były zera i odwrotnie. Liczba ta również nie posiada granicy wyrażenia (14), wyrażenie to bowiem ma dla niej formę

$$\frac{n - (c_1 + c_2 + \dots + c_n)}{n} = 1 - \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}.$$

Suma dwóch takich liczb  $x^{(w)} + x_1^{(w)}$  daje liczbę całkowitą (zapomocą rozwinięcia nienormalnego, t. j. zawierającego po kropce same jedynki) a więc liczbę  $a$  o skończonem rozwinięciu, dla której  $f(x) = 0$ .

A więc  $f(x_1^{(w)} + x^{(w)}) = 0$

zamiast  $\frac{1}{2}$ , jakby być musiało, gdyby liczba  $x^{(w)}$  była perjodem.

Funkcja Cesàro'a jest wielookresową, posiada bowiem perjody dowolnie małe, albowiem pomiędzy liczbami o skończonem rozwinięciu dwójkowem istnieją liczby mniejsze od każdej dowolnej liczby dodatniej (co do wartości bezwzględnej). Wszystkie te perjody są liczbami wymiernymi i niema między nimi perjodów oddzielnych, podobnie jak w funkcji Dirichlet'a. Natomiast funkcja nasza różni się od funkcji Dirichlet'a tem, że nie wszystkie liczby wymierne są jej perjodami a następnie także tem, że może przybierać wszelkie wartości z przedziału  $(0 \dots 1)$ , podczas gdy  $f$ . Dirichlet'a przybiera tylko dwie wartości:  $0$  i  $1$ .

Okazano <sup>1)</sup> mianowicie, że nasza funkcja przybiera każdą wartość z przedziału  $(0 \dots 1)$  i to każdą nieskończenie wiele razy w otoczeniu każdego miejsca  $x$ , czyli pantachicznie (co już zresztą wynika chociażby z twierdzenia IV o funkcjach wielookresowych).

<sup>1)</sup> Cesàro, l. c. str. 259.

Z łatwością możemy ponadto także sprawdzić, że funkcja ta przybiera każdą wartość na nieprzeliczalnej mnogości punktów. W tym celu weźmy pod uwagę dwójkowe rozwinięcie dowolnej liczby  $x_1^{(L)}$  dla której średnia arytmetyczna wszystkich cyfr dąży do jakiejś granicy  $L$ . Wybierzmy z tego rozwinięcia ciąg cyfr stojących na odpowiednio rzadkich miejscach, np. na 1-szem, 4-tem, 9-tem, ....  $k^2$ , ..... tak, aby średnia cyfr tego ciągu dążyła do zera zawsze, nawet gdy wszystkie cyfry są jedynkami. Podstawiając zamiast tego ciągu wszystkie możliwe ciągi o wyrazach 0 i 1, otrzymujemy jak wiadomo nieprzeliczalną mnogość mocy kontinuum różnych od siebie liczb  $x^{(L)}$ , posiadających tę samą granicę  $L$ . Dla tych wszystkich  $x^{(L)}$  jest  $f(x^{(L)}) \neq L$ , c. b. d. o.

Sprawdźmy jeszcze, czy funkcja Cesàro'a spełnia warunki zasadniczego twierdzenia V, czy więc jest mierzalną. Pod tym względem posiadamy gotowy rezultat w postaci następującego twierdzenia Borel'a: <sup>1)</sup>

Mnogość wartości  $x$ , dla których

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} = \frac{1}{2}$$

ma miarę jeden w odcinku  $(0 \dots 1)$ . Funkcja nasza ma więc prawie wszędzie wartość  $\frac{1}{2}$ . Wobec tego zarówno

$$mE \left[ f(x) > \frac{1}{2} \right] = 0$$

jak i

$$mE' \left[ f(x) < \frac{1}{2} \right] = 0$$

a to dowodzi, że funkcja jest mierzalna, w myśl definicji mierzalności funkcji.

Zbierając wszystkie własności funkcji Cesàro'a razem, powiemy:

<sup>1)</sup> Por. np. W. Sierpiński: „Zarys teorii mnogości“, str. 68 F. Hausdorff: „Grundzüge der Mengenlehre“. Lipsk 1914, str. 419 i nast. podaje dowód i rozmaite ciekawe uwagi dotyczące tego twierdzenia. Por. też W. Sierpiński: „Teoria mnogości“. Część II. Lwów 1913, litogr. str. 140, ustęp p. t. „Paradoks Borela“



Jestto funkcja wielookresowa, posiadająca same tylko wymierne perjody, a nie posiadająca żadnych perjodów oddzielnych; przybiera prawie wszędzie stałą wartość  $\frac{1}{2}$ , a więc zbiór wartości, dla których funkcja ma inne wartości, ma miarę zero. Mimoto funkcja przybiera także wszystkie inne wartości z przedziału  $(0 \dots 1)$  i to każdą na nieprzeliczalnej, wszędzie gęstej mnogości, mocy kontinuum.

### § 8. Funkcja niemierzalna o nieprzeliczalnej mnogości perjodów.

Wszystkie funkcje, któreśmy dotychczas rozważali, posiadały przeliczalną mnogość perjodów. By zbudować funkcję o nieprzeliczalnej mnogości perjodów, można się oprzeć — jak zauważył p. H. Steinhaus — na t. zw. basis Hamel'a, którą zbudował G. Hamel<sup>1)</sup> opierając się na twierdzeniu Zermela o możliwości dobrego uporządkowania kontinuum.

Twierdzenie Hamel'a brzmi:

„Istnieje basis wszystkich liczb, t. j. mnogość liczb  $a, b, c, \dots$  taka, że każda liczba rzeczywista  $x$  daje się w jeden i tylko w jeden sposób przedstawić w postaci

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots \dots \dots \quad (15)$$

przyczem  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  są wymierne, w każdym zaś poszczególnym przypadku tylko skończona ich liczba jest różna od zera.”

Określmy  $f(x)$  w następujący sposób;

Niechaj  $f(x) = 0$  dla wszystkich  $x$ , w których rozwinięciu według basis Hamel'a występuje  $a$  t. j. pierwsza z liczb należących do basis; dla wszystkich innych  $x$  niechaj  $f(x) = 1$ .

Funkcja ta jest perjodyczna, a perjodami jej są wszystkie liczby  $x'$ , w których rozwinięciu brak liczby  $a$ . Jeżeli bowiem taką liczbę  $x'$  dodamy do liczby  $x$ , w której rozwinięciu figuruje  $a$ , to i w nowej liczbie musi występować  $a$ , albowiem suma liczb:

<sup>1)</sup> G. Hamel „Eine Basis aller Zahlen...” Mathem. Annalen. T. 60 r. 1905 str. 459 i nast.

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \dots + \gamma_{1n} n \\ x^1 &= \beta_2 b + \gamma_2 c + \dots + \gamma_{2n} n + \mu_2 m + \dots + \tau_2 t \end{aligned}$$

czyli

$$x + x' = \alpha_1 a + \beta_3 b + \gamma_3 c + \dots + \gamma_{3n} n + \mu_2 m + \dots + \tau_2 t$$

jest znowu liczbą rzeczywistą, ma formę (15) i zawiera w swem rozwinięciu  $a$ . Stąd wynika, że  $f(x + x') = 0 = f(x)$  dla wszelkich  $x$  zawierających  $a$ .

Jeżeli zaś do liczby  $x''$  nie zawierającej  $a$  dodamy liczbę  $x'$  nie zawierającą  $a$ , to znowu otrzymamy liczbę nie zawierającą  $a$ , albowiem ta suma, jako suma dwóch skończonych wielomianów o współczynnikach  $b, c, \dots$  da znowu wielomian o tychsamych współczynnikach, a więc bez  $a$ , przedstawiający jednoznaczne rozwinięcie nowej liczby rzeczywistej. Wobec tego:

$$f(x'' + x') = 1 = f(x'')$$

dla wszelkich  $x''$  nie zawierających  $a$ .

Mamy więc dla wszelkich wogóle  $x$

$$f(x + x') = f(x)$$

przyczem  $x'$  oznacza liczbę nie zawierającą w swem rozwinięciu  $a$ .

Perjodów tych jest mnogość nieprzeliczalna, albowiem już same liczby, z których się składa *basis*:  $a, b, c, d, \dots$  tworzą mnogość nieprzeliczaną<sup>1)</sup>, a więc także i liczby:  $b, c, d, \dots$ , a tembardziej zbiór wszystkich wielomianów skończonych, utworzonych z tych liczb, o współczynnikach wymiernych, jest nieprzeliczalny.

Funkcja nasza jest niemierzalna nawet wtedy, gdy sama *basis* jest mierzalna, jak to wynika z badań prof. W. Sierpińskiego<sup>2)</sup>, którego bardzo prosty tok rozumowania pozwolę sobie tutaj powtórzyć:

<sup>1)</sup> Wynika to z łatwością ze sposobu tworzenia „*basis*“. Za  $a$  bierzemy pierwszy różny od zera element zbioru, który powstał przez dobre uporządkowanie zbioru wszystkich liczb; za  $b$  pierwszy element, który nie jest wymierną wielokrotnością  $a$ , za  $c$  pierwszy element, który nie jest formy  $\alpha a + \beta b$  ( $\alpha, \beta$  wymiernie) itd. Gdyby „*basis*“ była przeliczalna, to wyczerpalibyśmy wszystkie liczby rzeczywiste zapomocą przeliczalnej mnogości mnogości przeliczalnych, złożonych z liczb typów:  $\alpha a, \alpha a + \beta b, \alpha a + \beta b + \gamma c$ , itd. . . . .

<sup>2)</sup> W. Sierpiński „Czy *basis* Hamel'a jest mierzalna?“ 1918.



Weźmy pod uwagę zbiór  $Z$  tych wszystkich liczb  $l$ , które nie posiadają w rozwinięciu jednej z liczb basis, np. liczby  $a$ . Utwórzmy mnogość  $Z'$  podobną do  $Z$ , dzieląc każdą liczbę  $l$  przez  $a$ . Przypuśćmy, że ta mnogość ma miarę dodatnią. W każdej mnogości o mierze dodatniej istnieją dwie liczby  $x$  i  $x'$ , których różnica jest liczbą wymierną.<sup>1)</sup> Niech  $x$  i  $x'$  będą takimi liczbami, to:

$$x - x' = \frac{l}{a} - \frac{l'}{a} = w.$$

Stąd

$$l - l' = aw.$$

czyli

$$l = l' + aw$$

$$l = \beta b + \gamma c + \dots + aw$$

Liczba  $l$  zbioru  $Z$  posiadałaby więc w swem rozwinięciu liczbę  $a$ , wbrew założeniu. Mnogość  $Z'$ , a więc i podobna do niej  $Z$ , nie może mieć zatem miary dodatniej. Mnogość ta  $Z$  jednak nie może mieć także miary zero, bo wtedy i mnogość  $Z''$  wszystkich liczb posiadających w swem rozwinięciu  $a$ , jako przeliczalna mnogość mnogości podobnych do  $Z$  (bo uzyskanych przez przesunięcie mnogości  $Z$  o długość  $wa$ , gdzie  $w$  jest liczbą wymierną) o mierze zero, musiałyby mieć miarę zero, a więc i mnogość  $Z + Z''$ , zawierająca już wszystkie liczby rzeczywiste, musiałaby mieć miarę zero, co jest oczywistym nonsensem.

Zbiór  $Z$  nie może więc mieć ani miary dodatniej, ani miary zero, jest więc niemierzalny.

Stąd odrazu wysnuwamy następujący wniosek o naszej funkcji: zbiór wartości  $x$ , dla których  $f(x) = l$ , jest niemierzalny a więc i funkcja jest niemierzalna, jest to bowiem zbiór, dla którego

$$f(x) > B$$

przy  $B = 0$ ; funkcja  $f(x)$  nie czyni więc zadość definicji funkcji mierzalnej.

<sup>1)</sup> W. Sierpiński: „Sur un problème de M. Lusin“. Giornale di Matematiche. 1917.

### § 9. Funkcja mierzalna o nieprzeliczalnej mnogości perjodów.

Istnieją także funkcje mierzalne o nieprzeliczalnej mnogości perjodów. Przykład takiej funkcji zbudujemy przy pomocy liczb Liouville'a<sup>1)</sup> (przyczem nie będziemy się już posługiwali ani pewnikiem ani twierdzeniem Zermela). Liczbą Liouville'a nazywamy każdą liczbę, której rozwinięcie dziesiętne ma postać:

$$x = \frac{\alpha_1}{10^{1!}} + \frac{\alpha_2}{10^{2!}} + \frac{\alpha_3}{10^{3!}} + \dots$$

przyczem wszystkie cyfry  $\alpha_i$  są różne od zera. Weźmy ogólniej, wszystkie liczby  $\xi$  postaci:

$$\xi = E\xi + \frac{\alpha_1}{10^{1!}} + \frac{\alpha_2}{10^{2!}} + \frac{\alpha_3}{10^{3!}} + \dots \quad (16)$$

przyczem cyfry  $\alpha_i$  mogą być także zerami niektóre lub nawet wszystkie. Do tych liczb typu  $\xi$  będą więc należały także wszystkie liczby całkowite dodatnie i ujemne i niektóre liczby wymierne ułamkowe; dalej wszystkie liczby Liouville'a (przestępne) i wreszcie takie liczby niewymierne, w których rozwinięciu prócz nieskończenia wielu  $\alpha_i$  różnych od zera występują też cyfry  $\alpha_n = 0$ .

Weźmy pod uwagę funkcję  $f(x)$ , której wartość jest zerem dla wszystkich  $x$  mających postać:

$$x^{(0)} = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_n \xi_n \quad (n \text{ skończone}) \quad (17)$$

gdzie każde  $k_i$  jest liczbą całkowitą (dodatnią, ujemną lub zerem) a  $\xi_i$  są liczbami typu (16); dla wszystkich innych  $x$ , nazwijmy je  $x^{(1)}$ , niechaj  $f(x)$  będzie równe jedności. Mamy więc:

$$f(x^{(0)}) = 0, \quad f(x^{(1)}) = 1$$

Liczb  $x^{(0)}$  mamy mnogość nieprzeliczalną, albowiem taką jest już mnogość samych liczb Liouville'a, zawartych w zbiorze liczb  $x^{(0)}$ .

Funkcja określona w ten sposób jest perjodyczna, a jej perjodami są wszystkie liczby  $x^{(0)}$  typu (17).

<sup>1)</sup> Por. np. W. Sierpiński: „Zarys teorii mnogości“ Warszawa 1912, str. 30 i 121.



Dowód. Jeżeli do  $x_1^{(0)}$  typu (17) dodamy znowu liczbę  $x^{(0)}$  tego samego typu, otrzymamy nową liczbę  $x_2^{(0)}$  typu (17), zmieniają się bowiem tylko współczynniki  $k_i$ , a forma pozostanie ta sama. Wobec tego

$$f(x_1^{(0)} + x^{(0)}) = f(x_2^{(0)}) = 0$$

Ponieważ zaś także:  $f(x_1^{(0)}) = 0$ , według definicji funkcji  $f(x)$ , przeto

$$f(x_1^{(0)} + x^{(0)}) = f(x_1^{(0)}) \tag{18}$$

Jeżeli do liczby  $x^{(1)}$ , nie należącej do typu (17), dodamy  $x^{(0)}$  typu (17), to otrzymamy znowu liczbę  $x_1^{(1)}$ , nie należącą do typu (17). Jeżeliby bowiem

$x^{(1)} + k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_n \xi_n = k'_1 \xi_1 + k'_2 \xi_2 + \dots + k'_m \xi_m$   
to  $x^{(1)}$  byłoby postaci:

$$x^{(1)} = (k'_1 - k_1) \xi_1 + (k'_2 - k_2) \xi_2 + \dots + (k'_p - k_p) \xi_p$$

czyli

$$x^{(1)} = K_1 \xi_1 + K_2 \xi_2 + \dots + K_p \xi_p,$$

więc  $x^{(1)}$  należałoby do typu (17) wbrew założeniu. Musi więc być

$$x^{(1)} + x^{(0)} = x_1^{(1)}$$

gdzie  $x_1^{(1)}$  nie należy do typu (17), a więc

$$f(x^{(1)} + x^{(0)}) = f(x_1^{(1)}) = 1$$

Ponieważ zaś także  $f(x^{(1)}) = 1$ , przeto

$$f(x^{(1)} + x^{(0)}) = f(x^{(1)}) \tag{19}$$

Równania funkcyjne (18) i (19) dowodzą razem, że każda liczba  $x^{(0)}$  typu (17) jest perjodem.

Z ostatniego wzoru widzimy zarazem, że żadna liczba typu  $x^{(1)}$  nie może być perjodem, bo  $f(x^{(0)} + x^{(1)}) \neq f(x^{(0)})$ .

Funkcja nasza posiada więc istotnie nieprzeliczalną mnogość perjodów.

Zachodzi jednak pytanie, czy nasza funkcja nie jest przypadkiem wszędzie stała, a mianowicie równa zero. Tak byłoby, gdyby się każda liczba rzeczywista dała przedstawić w postaci  $x^{(0)}$  według wzoru (17). Czy więc istnieją liczby rzeczywiste odmienne od  $x^{(0)}$ ? Pytanie to można odrazu rozstrzygnąć, podając przykład liczby rzeczywistej, nie dającej się przedstawić

w postaci (17) przy żadnym skończonym  $n$ . Taką jest np. liczba, posiadająca na wszystkich miejscach rzędu  $r! + 1$  cyfry odmienne od 0 i 9, np. cyfrę 7. Okażemy bowiem, że każda liczba typu (17) zawiera na każdym miejscu rzędu  $s! + 1$ ,  $(s + 1)! + 1$ ,  $(s + 2)! + 1$ , . . . . . począwszy od odpowiednio dalekich  $s$ , cyfrę 0 lub 9.

Uwaga. Cyfra 9 może wystąpić, jeżeli niektóre  $k_i$  są ujemne, np.

$$\begin{array}{r} \xi_1 = 4.220002000000000000000000200 \dots\dots \\ \xi_2 = 1.3300030000000000000000000300 \dots\dots \\ \hline x^{(0)} = \xi_1 - \xi_2 = 2.889998999999999999999999999899 \dots\dots \end{array}$$

gdzie  $k_1 = +1$ ,  $k_2 = -1$ ; mogą też występować w jednej liczbie  $x^{(0)}$  obok siebie grupy zer i dziewiątek: tak byłoby np., gdyby w  $\xi_2$  występowały naprzemian cyfry 3 i 1 na miejscach rzędów  $r!$ .

I tak dla liczb  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  wynika to odrazu z ich definicji zapomocą wzoru (16), który możemy także napisać w postaci:

$$\xi_i = E \xi_i, \alpha_1^{(i)} \alpha_2^{(i)} 000 \alpha_3^{(i)} 000000000000000000 \alpha_4^{(i)} 00 \dots \quad (20)$$

Wystarczy obrać  $s \geq 2$ . Tworząc teraz z tych liczb kombinację linjową o współczynnikach całkowitych według (17), otrzymamy zamiast każdej cyfry  $\alpha_p^{(i)}$  liczbą całkowitą (dodatnią lub ujemną):

$$L_p = k_1 \alpha_p^{(1)} + k_2 \alpha_p^{(2)} + \dots + k_n \alpha_p^{(n)}.$$

Jeżeli ta liczba  $L_p$  składa się w układzie dziesiętkowym z  $h$  cyfr i jest dodatnią, to oczywiście niektóre zera (końcowe z każdej grupy) w rozwinięciu (20), będą zastąpione innymi dowolnymi cyframi, inne zaś pozostaną; jeżeli zaś  $L_p$  jest liczbą ujemną, to niektóre zera będą zastąpione innymi dowolnymi cyframi a pozostałe dziewiątkami. Może się zdarzyć, gdy  $L_p$  jest odpowiednio wielkie, że nawet na miejscach

$$2! + 1, \quad 3! + 1, \quad \dots \quad (s - 1)! + 1$$

nie będzie zera ani dziewiątki, jednakże mimoto od pewnego  $s$  począwszy na wszystkich już miejscach  $s! + 1$ ,  $(s + 1)! + 1$ , . . . . . znajdziemy zera lub dziewiątki. Weźmy bowiem jakąkolwiek liczbę  $x^{(0)}$  typu (17)



$$x^{(0)} = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_n \xi_n$$

Dla każdego  $p$  jest:

$$|L_p| = |k_1 \alpha_p^{(1)} + k_2 \alpha_p^{(2)} + \dots + k_n \alpha_p^{(n)}| \leq |k_1 \alpha_p^{(1)}| + |k_2 \alpha_p^{(2)}| + \dots + |k_n \alpha_p^{(n)}|$$

Ponieważ zaś każda cyfra  $\alpha$  jest mniejsza od 10, przeto

$$|L_p| < 10(|k_1| + |k_2| + \dots + |k_n|)$$

Nazwijmy największe z  $|k_i|$  literą  $K$ , to

$$|L_p| < 10 \cdot K \cdot n$$

dla wszelkich  $p$ . Jeżeli  $L_p$  wyraża się zapomocą  $h$  cyfr, to

$$10^{h-1} \leq |L_p| < 10nK$$

a stąd

$$h < \log_{10} nK + 2 \leq E(\log_{10} nK) + 3$$

lub oznaczając

$$E(\log_{10} nK) + 3 = N$$

otrzymujemy

$$h < N$$

Biorąc w rozwinięciu dziesiętnym liczby  $\xi_i$  cyfrę tak daleką  $\alpha_s^{(i)}$ , aby po niej następowało nie mniej jak  $N$  zer, t. j. obierając  $s$  tak wielkie, aby

$$(s+1)! - s! - 1 \geq N$$

czyli

$$s \cdot s! \geq N + 1,$$

będziemy mieli w każdym razie w rozwinięciu liczby  $x^{(0)}$  na miejscu następującem po  $s!$  zero lub dziewiątkę a dopiero później mogą się zacząć inne cyfry, w liczbie  $h < N$  aż do miejsca rzędu  $(s+1)!$ , po którym znowu nastąpią zera lub dziewiątki i to w znacznie większej liczbie, jak po miejscu rzędu  $s!$  itd.

Do każdej więc liczby  $x^{(0)}$  można dobrać tak wielkie  $s$ , że na wszystkich miejscach rzędu

$$r! + 1 \quad r \geq s$$

znajdują się tylko cyfry 0 lub 9, c. b. d. o.

Opierając się na tem możemy teraz okazać, że:

zbiór  $Z$  wszystkich liczb  $x^{(0)}$  typu (17) ma miarę zero.

Otóż przedewszystkiem miarą zbioru  $Z_2$  liczb rzeczywistych zawartych w dowolnym przedziale, np. w  $\bar{\Delta} = 1$ , a mających na

miejscu  $2! + 1$  cyfrę 0 lub 9, jest piątą częścią miary zbioru wszystkich liczb rzeczywistych zawartych w tym odcinku: albowiem na tem miejscu może się równie dobrze znajdować każda z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Biorąc więc dowolny odcinek o długości  $l$ , mamy w nim

$$mZ_2 = \frac{1}{5}$$

Z tych liczb znowu wybieramy te, które mają cyfrę 0 lub 9 na miejscu  $3! + 1$ . Zbiór ten  $Z_3$  ma oczywiście znowu miarę pięć razy mniejszą:

$$mZ_3 = \frac{1}{5} mZ_2 = \frac{1}{5^2}$$

Postępując w ten sposób dalej widzimy, że miara zbioru dąży do zera, gdy żądamy, aby cyfry 0 lub 9 znajdowały się na miejscach  $2! + 1, 3! + 1, \dots$ . Jeżeli zaś na wszystkich miejscach rzędów

$$r! + 1 \quad r \geq 2$$

ma być 0 lub 9, to miara zbioru  $M_2$  takich liczb będzie zerem, jestto bowiem zbiór zawarty we wszystkich zbiorach  $Z_2, Z_3, \dots$ , więc

$$M_2 = Z_2 \cdot Z_3 \cdot \dots$$

Taksamo oczywiście będzie zerem miara zbioru  $M_3$  liczb, które mają 0 lub 9 dopiero na wszystkich miejscach rzędów:

$$r! + 1 \quad \text{gdy } r \geq 3$$

(a na miejscu  $2! + 1$  może być też inna cyfra).

Tworząc w ten sposób dalsze zbiory  $M_4, M_5, \dots$  otrzymujemy ostatecznie zapomocą przeliczalnej mnogości kroków zbiór, zawierający wszystkie liczby  $x^{(0)}$  typu (17), a więc zbiór  $Z$  będzie zawarty w zbiorze

$$M_2 + M_3 + M_4 + \dots$$

Zbiór przeliczalnej mnogości zbiorów miary zero ma jednak także miarę zero, a więc

$$mZ = 0 \quad \text{c. b. d. o.}$$

Ponieważ zbiór wartości  $y$ , dla których  $f(x) = 0$ , ma miarę zero, to zbiór pozostałych wartości  $x$ , dla których  $f(x) = 1$ , ma w każdym odcinku miarę równą jego długości. Funkcja na-



sza jest więc mierzalna i prawie wszędzie stała, zgodnie z twierdzeniem V.

### § 10. Mnogość perjodów funkcji mierzalnej.

W poprzednim ustępie poznaliśmy funkcję mierzalną o nieprzeliczalnej mnogości perjodów; mnogość ta ma miarę zero. Nasuwa się pytanie, czy tak być musi, t. j. czy każda funkcja okresowa mierzalna ma mnogość perjodów miary zero. Udowodnimy, że tak jest istotnie, o ile wykluczymy trywialny przypadek  $f(x) = c$ .

Twierdzenie VI. Funkcja mierzalna, różna od stałej, może posiadać nieprzeliczalną mnogość perjodów, jednakże miara tej mnogości musi być zerem.

Dowód: Wśród nieprzeliczalnej mnogości perjodów muszą istnieć przynajmniej dwa niewspółmierne a więc w myśl wniosku z twierdzenia II, muszą istnieć perjody dowolnie małe. Wtedy jednak według twierdzenia V, funkcja jest prawie wszędzie stała, a więc istnieje zbiór  $Z_0$  miary zero, w którym funkcja jest różna od owej stałej. Wykonując na punktach zbioru  $Z_0$  przesunięcia równe perjodom, otrzymujemy znowu punkty zbioru  $Z_0$ . Weźmy pod uwagę jeden taki punkt  $P$  i wykonajmy przesunięcia odpowiadające wszystkim perjodom. Gdyby mnogość perjodów miała miarę dodatnią, to i podobna do niej mnogość  $Z_1$ , otrzymana z wszystkich przesunięć punktu  $P$  musiałaby mieć tę samą miarę. Zbiór  $Z_1$  jednak jako część zbioru  $Z_0$  o mierze zero ma miarę zero.

Tak samo oczywiście jest, że zbiór perjodów nie może być niemierzalny, bo część  $Z_1$  zbioru  $Z_0$  o mierze zero musiałaby być niemierzalna, a to się sprzeciwia definicji miary Lebesgue'a.

Zbiór perjodów funkcji mierzalnej musi więc mieć miarę zero, c. b. d. o.

Uwaga; Zbiór wszystkich liczb  $x^{(0)}$  typu (17) w § 9 jest przykładem zbioru miary zero, pozwalającego na nieprzeliczalną mnogość przesunięć w sobie. Zbiór tych przesunięć ma miarę zero; większej miary nie może mieć zbiór przesunięć w sobie

dla żadnego zbioru miary zero, jak to wynika bezpośrednio z dowodu twierdzenia VI.

### § 11. Zbiór perjodów dowolnej funkcji okresowej.

Widzieliśmy, że zbiór perjodów funkcji okresowej mierzalnej musi mieć miarę zero. Biorąc pod uwagę dowolne funkcje a więc zarówno mierzalne jak i niemierzalne, możemy również podać warunek konieczny, który musi spełniać zbiór perjodów. Warunek ten wyraża się w następującym twierdzeniu:

**Twierdzenie VII.** Zbiór okresów każdej funkcji (mierzalnej lub niemierzalnej), różnej od stałej, ma miarę wewnętrzną zero.

**Dowód.** Gdyby zbiór okresów  $\Pi$  miał miarę wewnętrzną dodatnią, to według znanego twierdzenia <sup>1)</sup> istniałaby jego część  $P$ , mierzalna i mająca miarę dodatnią, równą mierze wewnętrznej. Weźmy pod uwagę dwa dowolne punkty:  $a$  i  $b$ , w których  $f(a)$  nie jest równe  $f(b)$ . Tworzymy mnogość  $E_a$  powstającą z punktu  $a$  przez zastosowanie wszystkich przesunięć  $P$ ; jest to mnogość podobna do  $P$ , więc ma także miarę dodatnią:

$$m E_a = k > 0.$$

Zbiór dopełniający  $E'_a$  miałby w każdym razie miarę nie mniejszą (zawiera bowiem zbiór otrzymany z przesunięć  $P$  punktu  $b$ ) a więc dodatnią. Wykażemy jednak, że to jest niemożliwe, opierając się na lemmacie I (str. 820, § 6), według którego nie można wszystkich punktów linii prostej rozłożyć na dwa zbiory mierzalne o miarach dodatnich a pozwalające na dowolnie małe przesunięcia w sobie. Trzeba tylko stwierdzić, czy zbiór  $E_a$  i zbiór dopełniający  $E'_a$  spełniają warunki lemmatu, t. j. czy pozwalają na dowolnie małe przesunięcie w sobie. Otóż zbiór  $E_a$ , jako zbiór miary dodatniej, jest nieprzeliczalny, zawiera więc liczby niewspółmierne (bo liczb współmiernych ze sobą jest mnogość przeliczalna), a więc i podobny do niego zbiór przesunięć  $P$  zawiera przesunięcie niewspółmierne. Stąd już z ła-

<sup>1)</sup> Por. np. Vallée-Poussin: „Cours d'Analyse infinitésimale.” T. I. 1914. 3 éd. str. 67 § 80.



twością wynika — podobnie jak w § 4 — że zbiór  $E_a$  pozwala na przesunięcie dowolnie małe. Zbiór dopełniający, wypełniający wraz z  $E_a$  całą prostą, pozwala oczywiście na te same przesunięcia w sobie, warunki lematu są więc spełnione. Zbiory  $E_a$  i  $E'_a$  nie mogą więc mieć miary dodatniej. Zbiór  $\Pi$  nie może więc mieć miary wewnętrznej dodatniej, czyli ma miarę wewnętrzną zero c. b. d. o.

Twierdzenie VII podaje warunek konieczny, który musi spełniać zbiór perjodów każdej funkcji. Warunek konieczny, a zarazem wystarczający, zawiera się w następującem twierdzeniu:

Twierdzenie VIII. Na to, aby zbiór  $\Pi$  był zbiorem okresów funkcji (mierzałnej lub niemierzałnej) trzeba i wystarcza, aby, o ile  $x$  i  $y$  należą do zbioru  $\Pi$ , także  $x+y$  i  $x-y$  należały do tego zbioru.

Dowód: Warunek ten jest konieczny, jeżeli bowiem  $x$  i  $y$  są okresami, to wszystkie liczby formy

$$p = mx + ny \quad (m, n \text{ całkowite})$$

są również okresami, a więc i  $x+y$  i  $x-y$  muszą być okresami, czyli należeć do zbioru  $\Pi$ .

Warunek ten jest też dostateczny. Jeżeli bowiem jakiś zbiór  $\Pi$  ma tę własność, że obok  $x, y$  także  $x+y$  i  $x-y$  należą do zbioru, to możemy określić taką funkcję  $f(x)$ , dla której  $\Pi$  jest zbiorem okresów. Wystarczy gdy  $f(x) = 0$  dla wartości zawartych w zbiorze  $\Pi$ , a  $f(x) = 1$  dla pozostałych  $x$ . Okresami tej funkcji są wszystkie liczby  $x'$  zbioru  $\Pi$ . Jeżeli bowiem do  $y'$  należącego do zbioru  $\Pi$  dodamy  $x''$  należące do  $\Pi$ , to i  $z' = x' + y'$  należy do  $\Pi$ , a więc:

$$f(y' + x') = f(z') = 0 = f(y').$$

Jeżeli zaś do  $y''$  nie należącego do  $\Pi$  dodamy  $x''$  należące do  $\Pi$ , to  $z'' = y'' + x''$  nie należy do  $\Pi$ , w przeciwnym bowiem razie musiałyby różnica:  $z'' - x'' = y''$  należeć do  $\Pi$ , wbrew założeniu. A zatem:

$$f(y'' + x'') = f(z'') = 1 = f(y'').$$

Wszystkie  $x'$  są więc okresami. Innych okresów funkcja nie

posiada, jak tego dowodzi chociażby ostatecznie równanie. Dla  $y''$  nie należących do  $\Pi$  mamy bowiem

$$f(x' + y'') = f(z'') = 1, \text{ a tymczasem } f(x') = 0.$$

Twierdzenie nasze jest więc w zupełności udowodnione.

Lwów. Kwiecień 1918.

RÉSUMÉ.

A. Łomnicki:

**Sur les fonctions multipériodiques uniformes  
d'une variable réelle.**

Communication annoncée le 10.V. 1918.

Présentée par W. Sierpiński.

On n'a étudié jusqu'à présent que les fonctions simplement périodiques d'une variable réelle, parce qu'on se borna aux fonctions continues et même analytiques, qui ne peuvent pas avoir plusieurs périodes dans le domaine d'une variable réelle. Dans le mémoire présent j'étudie les fonctions *multipériodiques* uniformes d'une variable réelle, je démontre quelques théorèmes généraux et je construis des exemples pour ces considérations abstraites.

Dans le § 1 je rassemble les définitions connues dans la théorie des fonctions périodiques, c'est à dire les définitions des périodes distinctes et primitives et je donne la définition nouvelle des fonctions *multipériodiques* d'une variable réelle.

Dans les §§ 2 i 3 je donne les exemples des fonctions multipériodiques, ayant ou non des périodes distinctes. Le § 4 contient la démonstration de la proposition générale, caractéristique pour les fonctions multipériodiques, notamment, que toute fonction multipériodique possède des périodes arbitrairement petites. On peut alors donner à ces fonctions le nom de fonctions *micropériodiques*. Je démontre (§ 5), qu'une fonction multipériodique est *discontinue* pour toute valeur de la variable indépendante. Toutes ces propositions se déduisent facilement des



propriétés connues des fonctions périodiques, analytiques. Un résultat nouveau pour la théorie des fonctions périodiques offre le théorème fondamental suivant (§ 6):

Toute fonction multipériodique, mesurable et différente de la constante est presque partout constante. Je démontre cette proposition en m'appuyant sur deux lemmes de la théorie des ensembles, c'est à dire:

Lemme I. Si on décompose tous les points d'une droite en deux ensembles mesurables sans point commun et admettant les translations en soi, qui sont arbitrairement petites, alors un de ces ensembles a la mesure nulle.

Lemme II. Si l'ensemble  $E'_\Delta$ , qu'on obtient par les translations de la longueur  $\delta$  d'un ensemble  $E_\delta$ , contenu dans l'intervalle  $\delta$ , a la mesure positive et

$$mE'_\Delta > (1 - a) \cdot \Delta$$

dans un intervalle quelconque  $\Delta$ , et si l'on effectue toutes les translations d'une longueur  $p$ , moindre que  $\delta$ , on obtient un ensemble  $E''_\Delta$ , dont la mesure peut être moindre que  $mE'_\Delta$ , mais on a toujours  $mE''_\Delta > (1 - 2a)\Delta$ .

Dans le § 7 je recherche la périodicité de la fonction de Cesàro, qui offre un exemple intéressant d'une fonction multipériodique sans périodes distinctes. Toutes les fonctions concernées dans les §§ précédents avaient un ensemble *dénombrable* des périodes. Je construis dans le § 8 une fonction *non mesurable*, possédant un ensemble *non dénombrable* des périodes, en m'appuyant sur la „basis“ de tous les nombres, introduite par M. Hamel (à l'aide de théorème de M. Zermelo). Les nombres de Liouville fournissent le moyen de construire une fonction *mesurable* dont l'ensemble des périodes est aussi non dénombrable.

On voit par les considérations précédentes que l'ensemble des périodes d'une fonction peut être dénombrable ou non; je démontre dans le § 10 que cet ensemble a toujours la mesure nulle, pour les fonctions mesurables. Cette condition nécessaire se transforme dans une autre (§ 11), plus large, si l'on admet les fonctions générales, c'est à dire mesurables ou non mesura-

bles; dans ce cas l'ensemble des périodes a la mesure *intérieure* nulle.

Enfin, je démontre que la condition *nécessaire* et *suffisante* pour qu'un ensemble quelconque des nombres puisse représenter l'ensemble des périodes d'une fonction est que cet ensemble contient les nombres  $x + y$  et  $x - y$ , s'il contient les nombres  $x$  et  $y$ .

Les théorèmes et les exemples donnés dans le mémoire présent semblent épuiser en quelque sorte la théorie des fonctions multipériodiques.

---



8. Jadwiga i Teodor Viewegerowie:

## Badanie czynników rozwoju kultur *Colpidium colpoda* Ehrbg. Cz. I<sup>a</sup>. Wpływ pokarmu—głód.

(Z Pracowni Fizjologicznej Towarzystwa Naukowego Warszawskiego).

Komunikat zgłoszony dn. 24 Września 1917 r.

Przedstawił K. Białaszewicz.

W ostatnich czasach w badaniach nad pierwotniakami wybitniej zaznaczył się szeregiem doświadczeń kierunek, zdążający do wyjaśnienia czynników, regulujących pojawianie się, rozwój i wymieranie fauny pierwotniaków w zbiornikach wody. Ograniczając się w danej pracy do stosunków fizjologicznych, dotyczących się wymoczków, wspomnimy tutaj szereg prac, mających związek z naszym założeniem: Peters'a, Fine'a, Woodruff'a, Gutmanówny<sup>1)</sup>, Błędowskiego i Zweibauma<sup>2)</sup>.

Badania Peters'a (06, 07, 08)<sup>3)</sup> doprowadziły go do wniosku, że głównym czynnikiem, regulującym porządek występowania form organicznych w akwarjum, są zmiany fizyko-chemiczne środowiska, w pierwszym rzędzie kwaśności. Następczość organizmów w kulturze jest do tego stopnia uzależniona od warunków środowiska, że wprowadzenie do kultury gatunków, rozwijających się normalnie w innym okresie, prowadzi do ich zaniku.

Woodruff<sup>4)</sup> (12), tłumacząc przyczyny przebiegu rozwoju kultury, główny nacisk kładzie na czynniki biologiczne, wpływające z właściwości plazmy komórek i ich działalności życiowej. Przeciętą szybkość podziałów komórek różnych gatunków pierwotniaków, określa porządek, w jakim maximum po-

---

<sup>1)</sup> L. Gutmanówna: Przyczynek do badań nad ilością gazów w hodowli pierwotniaków. *Sprawozd. Tow. Nauk. Warsz. Wydziału mat.-przyr.* 1915.

<sup>2)</sup> R. Błędowski i J. Zweibaum: Doświadczenia nad pochłanianiem tlenu przez *Colpidium colpoda*. *Ibid.*

<sup>3)</sup> A. W. Peters: Chemical studies on the cell and its medium. P. I, II, III. *American Journal of Physiol.* Vol. 17, 18, 21. 1906, 7, 8.

<sup>4)</sup> L. Woodruff: Observations on the origin and sequence of the protozoan fauna of hay infusions. *Journ. of exper. Zool.* Vol. XII. 1912.

szczególnych form jest osiągnięte. Następnie autor wysuwa kwestję oddziaływania produktów przemiany materji, których szkodliwe działanie razem z brakiem pokarmu powoduje zanik fauny akwarjum.

Do identycznych wniosków dochodzi Fine <sup>1)</sup>.

W późniejszych pracach Woodruff'a <sup>2)</sup> znajdujemy rozwinięcie koncepcji wpływu produktów przemiany materji wymoczków na ich rozwój. Zdaniem autora produkty przemiany materji działają szkodliwie na dany gatunek, a jednocześnie wpływają dodatnio na rozwój innego. Działanie zatem byłoby ściśle specyficzne.

Poważne zarzuty natury metodycznej, jakie nastręczają prace Peters'a i Woodruff'a, przede wszystkim brak dokładnej metody ilościowego śledzenia przebiegu rozwoju kultur pierwotniaków, nadają, naszym zdaniem, wynikom tych prac raczej charakter cennych wskazówek, aniżeli uzasadnionych wniosków.

Poza wspomnianymi nie znajdujemy prawie systematycznych badań, jedynie luźne spostrzeżenia w pracach Pütter'a, Calkins'a, Lipskiej, Zweibauma i t. d.

Na wyróżnienie zasługują prace Enriques'a <sup>3)</sup>, dotyczące konjugacji i linii ciągłych u wymoczków. Autor dochodzi do wniosku, że zjawisko „degeneracji starczej“ (w znaczeniu Maura's'a) u wymoczków jest wywołane intoksykacją bakterjalną. Sam jednak sposób badań nie uprawnia nas do stosowania jego wniosków do kwestji nas bezpośrednio obchodzącej, t. j. do warunków, panujących w kulturach pierwotniaków.

Z powyższego krótkiego sprawozdania widzimy, że mechanizm rozwoju kultur jest w znacznym stopniu niewyświetlony. Powyższemu zagadnieniu nadajemy znaczenie pierwszorzędne. Sam charakter mikrokosmiczny akwarjum, jako zamkniętego zbiornika, w którym zachodzą procesy regulacyjne pomiędzy organizmami, gdzie się uzewnętrznia zależność organizmu od śro-

---

<sup>1)</sup> M. S. Fine: Chemical properties of hay infusions. *Ibid.*

<sup>2)</sup> L. Woodruff: The effect of excretion products of *Paramecium*. *Ibid.* Vol. X, XIV. 1911, 1913.

<sup>3)</sup> P. Enriques: Della degenerazione senile negli Infusori. *Accad. Lincei*. 1903, 1905. La teoria di Spencer sulla divisione cellulare... ricerche biometriche negli Infusori. *Archiv. d. Fisiologia*. Vol. VII. 1909.



dowiska i wpływ środowiska na rozwój organizmu, wprowadza nas w łańcuch podstawowych zagadnień, dotyczących procesów życia takich, jak głód, działanie produktów przemiany materji i t. d.

W pracy niniejszej chcieliśmy się przyczynić do wyjaśnienia skomplikowanych stosunków w akwarjum. Za punkt wyjścia obraliśmy przy tem kwestję w formie, metodycznie prostszej, aniżeli w pracach Woodruff'a i Peters'a, mianowicie badaliśmy rozwój jednego tylko gatunku *Colpidium colpoda* Ehrbg., żywiącego się bakterjami. Ilościowe nasze badania staraliśmy się oprzeć na ściślejszych metodach liczenia i mierzenia. Doprowadziły one nas do wyniku, że głównym czynnikiem rozwoju kultury jest pokarm. Tej to zależności rozwoju wymoczków od pokarmu poświęcamy głównie część I-ą pracy niniejszej. W następnych częściach rozpatrzemy bliżej kwestję działania produktów przemiany materji wymoczków i bakteryj.

## BADANIA OSOBISTE.

### Metodyka badań.

W naszych doświadczeniach za pożywkę do sporządzania kultur i hodowli linii ciągłych pierwotniaków służył rozcieńczony wywar sianowy. Wywary sporządzaliśmy w ten sposób, że 20 gr. siana, drobno pociętego, gotowaliśmy kilkanaście godzin w wodzie wodociągowej, poczem ciecz przesączaliśmy. Z siedmiu użytkowanych wywarów I—VII sporządzone były z jednego gatunku siana, wywary VIII, X — z innego. Zawartość azotu w wywarze wyznaczaliśmy zapomocą metody mikro-Kjeldahl'a w modyfikacji J. Bang'a <sup>1)</sup>.

Tablica I przedstawia otrzymane rezultaty.

Wywary, dwukrotnie przegotowane, przechowywaliśmy w naczyniach zamkniętych. W miarę potrzeby sporządzaliśmy z nich pożywkę, rozcieńczając wywar określoną ilością przegotowanej wody wodociągowej <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Bang: Methoden zur Mikrobestimmung einiger Blutbestandteile. Wiesbaden, 1916.

<sup>2)</sup> Kultury nasze nie zawierały zatem części stałych siana.

TABLICA I.

a	b
N <sup>o</sup> porządkowy	Ilość azotu, wyrażona w mg., w 100 cm. <sup>3</sup> wywaru
I	—
II	12.3
III	11.6
IV	13.9
V	12.6
VII	11.8
VIII	13.6
X	10.5

W tablicy II zestawiliśmy w mg. ilości N w 1 cm.<sup>3</sup> porzywki kultury (rubr. f) i całkowitą ilość azotu w kulturze (rubr. g).

TABLICA II.

a	b	c	d	e	f	g
N <sup>o</sup> porządkowy wywaru	serji doświadczeń	Nazwa kultury	Ilość wywaru	Ilość wody	Ilość azotu wyrażona w mg.	
			zużyta do sporządzenia kultury w cm <sup>3</sup>		w 1 cm <sup>3</sup> kultury	całkowita w kulturze
I	1	a, b, c	100	500	—	—
II	2	A, B, C, F	100	500	0.0205	12.3
III	3	G	100	500	0.0193	11.6
IV	4	M, N	100	500	0.0232	13.9
V	5	K	200	400	0.0420	25.2
		L	100	500	0.0210	12.6
		O	50	550	0.0105	6.3
	6	P	100	500	0.0210	12.6
		S	75	525	0.0156	9.4
		T	50	550	0.0105	6.3
		W	25	575	0.0052	3.1
7	V	150	450	0.0312	18.9	
	U	75	525	0.0156	9.4	
VII	8	X	100	500	0.0197	11.8
		Y, Y', Y''	50	550	0.0098	5.9
	9	α, β	50	550	0.0098	5.9
X	10	D	25	575	0.0044	2.6
		E	12,5	587,5	0.0022	1.3
		I	6.25	593.75	0.0011	0.7



W opisie naszym główną uwagę poświęcimy kulturom, w których 100 cm.<sup>3</sup> wywaru wypadło na 500 cm.<sup>3</sup> wody; zawierały one od 11.6 do 13.9 mg. N. Nazwiemy je kulturami normalnymi.

Kultury nasze były czyste, t. j. zawierały tylko gatunek wymoczków, których rozwój badaliśmy (*Colpidium colpoda* Ehrbg), i zwykle, w tych warunkach rozwijające się bakterje.

Kultury sporządzaliśmy w sposób następujący. Stałą ilość 600 cm.<sup>3</sup> pożywki (przegotowanej) wlewaliśmy do szklanych naczyń litrowych, cylindrycznych, o średnicy 8 cm., uprzednio przesterylizowanych. W naczyniach tych wysokość słupa cieczy wynosiła około 10 cm. Do tak przygotowanego środowiska wprowadzaliśmy za pomocą pipety jedno lub więcej *Colpidium* z hodowli czystej wraz z minimalną ilością cieczy bakterjalnej. Po wprowadzeniu wymoczków słoje przykrywaliśmy.

Z wyjątkiem I-ej serji doświadczeń, która była wykonana w temperaturze zmiennej, pokojowej, wszystkie pozostałe serje były prowadzone w termostacie, w temperaturze stałej 20°.

Należy podkreślić, że w naszych doświadczeniach temperatura, ilość pożywki, a co za tem idzie, wysokość płynu i powierzchnia — czynniki odgrywające prawdopodobnie poważną rolę w życiu kultury — pozostawały wielkością stałą.

Do wysiewania wymoczków służyły nam linje ciągłe *Colpidium* A i B, których sposób otrzymania i hodowli podaliśmy w innej pracy <sup>1)</sup>.

Linje A i B lub też pochodne tych linii służyły nam również jako linje kontroli podzielności w dalszych doświadczeniach. W tym celu umieszczaliśmy je na dany okres w warunkach, podobnych do tych, w jakich znajdowały się kultury, t. j. w tej samej temperaturze, oświetleniu, przewiewie i w pożywce o tej samej koncentracji, jaka posłużyła do sporządzenia kultury. Z ilości osobników, notowanej codziennie dla każdej linji, otrzymywaliśmy ilość podziałów na dobę, stąd zaś — przeciętną podziałów na dany okres.

<sup>1)</sup> T. Vieweger: Linje ciągłe *Colpidium colpoda* Ehrbg. *Sprawozdania Tow. Nauk. Warsz. Wydział n. mat.-przyr.* Kwiecień, 1918. R. XI.

Dla linii w temperaturze pokojowej używaliśmy pożywki dwudniowej, dla linii w temp. 20° C. — pożywki jednodniowej. Pożywki te wykazywały znaczny rozwój bakteryj. Zmieniając codziennie pożywkę w klockach i dając ją dostatecznie bakterjalną, hodowaliśmy nasze linje ciągłe w warunkach, zapewniających dobre odżywianie się i rozmnażanie wymoczków.

W doświadczeniach naszych mieliśmy głównie na uwadze liczbowy i objętościowy rozwój wymoczków w kulturze. Dla otrzymania danych liczbowych posługiwaliśmy się metodą liczenia na szkiełku, podzielonym na mm.<sup>2</sup> Nasze szkiełka do liczenia składały się ze zwykłych szkiełek przedmiotowych, na których zaznaczono prostokąt o 25 mm. długości i 20 mm. szerokości. Pole prostokąta podzielono na mm.<sup>2</sup> Naokoło prostokąta, w odległości mniej więcej 1 mm., przymocowano cienkie tafelki szklane wysokości 3—4 mm., spojone balsamem kanadyjskim. W ten sposób otrzymaliśmy otwarty od góry prostopadłościan objętości około 2.5 cm.<sup>3</sup> Brzegi prostopadłościanu były nieco oddalone od brzegów prostokąta, dzięki czemu można było swobodnie obliczać wymoczkę zgromadzone na powierzchni podzielonej. Przy użyciu 1 cm.<sup>3</sup> cieczy, wysokość słupa cieczy wynosiła mniej niż 2 mm., wskutek czego opadanie wymoczków zachodziło dosyć szybko (w ciągu 0.5 do 1'). Wskutek znacznego stosunku powierzchni dna do ścianek, oddziaływanie tych ostatnich na rozrzucenie wymoczków było niewielkie, a zatem i rozmieszczenie wymoczków względnie równomierne.

Zazwyczaj postępowaliśmy w sposób następujący: 1 cm.<sup>3</sup> cieczy z pierwotniakami wylewaliśmy na szkiełko, dodawaliśmy 1—2 krople formaliny, poczem przy pomocy cienkiej szklanej pałeczki mieszałyśmy zawartość prostopadłościanu. Po upływie minuty zaczynaliśmy obrachunek wymoczków.

Stosowana metoda liczenia kryje dwa źródła błędu, związane: 1° z liczeniem na szkiełku i 2° z mieszaniem płynu w kulturze.

Wielkość błędu, wynikającego z obliczenia wymoczków na szkiełkach, wyliczyliśmy, rachując 10 razy jedną próbkę kultury. Przed każdym liczeniem zawartość szkiełka była zmieszana. Podajemy błąd prawdopodobny. Obrachunek przeciętny wykazał 1380 wymoczków w 1 cm.<sup>3</sup>.



Błąd prawdopodobny jednego obliczenia:

na całym prostokącie . . . . .	2.63%
na $\frac{1}{2}$ prostokąta (10 rzędów) . . .	4.28— 5.52%
na 2 rzędach . . . . .	9.43—11.72%
na 1 rzędzie . . . . .	16.62%

Zazwyczaj obrachowywaliśmy wymoczeki na całej powierzchni prostokąta lub na połowie pola (t. j. 10 rzędów=250 mm<sup>2</sup>). W niektórych przypadkach stosowaliśmy również obliczanie na 0.4 pola <sup>1)</sup>.

Obliczając zawartość jednej tylko próbki kultury, popełniamy błąd, którego wielkość zależy od bardziej lub mniej dokładnego zmieszania cieczy przed zaczerpnięciem próbki. Do mieszania kultury posługiwaliśmy się tafelką szklaną długości 25 cm., szerokości 5 cm. <sup>2)</sup>.

Mieszanie i obliczanie uskutecznialiśmy zazwyczaj 2 razy; w przypadkach, gdy szło o większą dokładność, 3—4 razy.

Wielkość błędu, wynikającego z mieszania i liczenia, znaleźliśmy, biorąc 10 próbek tej samej kultury jednocześnie i licząc wymoczeki na połowie szkiełka. Otrzymaliśmy przeciętną 206; błąd prawdopodobny dla jednej próbki — 7.5%. Przy braniu 2 próbek wartość błędu prawdopodobnego wynosi 5.32%, przy trzech — 4.34%.

Dla wyznaczania objętości wymoczków czynione były pomiary (okular mikrometryczny Zeiss'a) wymoczków, zabitych płynem Worcester'a, specjalnie w tym celu zalecanym przez Jennings'a <sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Ażeby otrzymać liczbę wymoczków w 1 cm.<sup>3</sup>, t. j. w całkowitej ilości cieczy, zużytkowanej do liczenia, należy liczbę otrzymaną przy liczeniu pomnożyć przez stosunek powierzchni dna prostopadłościanu do powierzchni, na której obliczaliśmy, uwzględniając również przestrzeń pomiędzy polem podzielonym a ściankami prostopadłościanu.

<sup>2)</sup> Na początku rozwoju kultury wymoczeki gromadzą się w górnej części naczynia, tworząc pierścień na ściance. Haptotaktyzm zaznacza się u nich wówczas tak silnie, że mieszanie cieczy nie wystarcza dla oderwania wymoczków od ścianek naczynia. Dla uniknięcia tego źródła błędu, przed mieszaniem wycieraliśmy delikatnie gumką ścianki naczynia.

<sup>3)</sup> H. S. Jennings: Heredity, variation and evolution in Protozoa. II. *Proceedings of the American Philosophical Society*. Vol. XLVII. 1908.

Zazwyczaj mierzyliśmy 10 osobników każdorazowo na długość i na szerokość (w najszerszym miejscu).

Objętość *Colpidium* obliczaliśmy na zasadzie wzoru dla elipsoidu obrotowego:  $v = \frac{4}{3}\pi a^2 b$ , gdzie  $a = \frac{1}{2}$  szerokości,  $b = \frac{1}{2}$  długości.

Ze wzorów prostych, jakie moglibyśmy zastosować, powyższy najmniej może odbiega od rzeczywistości. Gdy chodzi o badanie ewolucji objętościowej wymoczków, niewielki błąd przy tem popełniany możemy całkowicie pominąć.

## OPIS ROZWOJU *COLPIDIUM* W KULTURACH „NORMALNYCH“.

### Rozwój ilościowy wymoczków w kulturach „normalnych“.

Dla zbadania ilościowego rozwoju wymoczków sporządzone były kultury serji 2-ej — A, B, C, F; serji 3-ej — kultura G; serji 4-ej — kultury M, N — trzymane wszystkie w temperaturze stałej 20°. Pozatem sporządzona była serja I kultur a, b, c, trzymany w temperaturze zmiennej pokojowej (15°—16° C).

Zasiewaliśmy kultury zazwyczaj w ten sposób, że z potomstwa jednego osobnika linii ciągłej A lub B oddzielaliśmy pewną ilość wymoczków i wpuszczaliśmy je do kultury, pozostałe zaś na klocku służyły do sporządzenia linii kontroli. Każdej zatem z seryj kultur odpowiadały linie kontroli, trzymane w tej samej temperaturze i pożywce, co i kultura. W tablicach III—IX, gdzie zestawiliśmy rozwój ilościowy wymoczków w kulturach opisywanych, zaznaczyliśmy liczbę wymoczków, wpuszczonych do kultury i przeciętną liczbę podziałów ( $k$ ), jaką wykazały linie kontroli na klockach w ciągu rozpatrywanego okresu czasu.

Rozwój kultur charakteryzuje się szeregiem zmian, zewnętrznie dostrzegalnych. Mianowicie, na drugi dzień po zasianiu następuje silne zmętnienie cieczy wskutek rozwoju bakteryj. Po kilku dniach daje się stwierdzić rozwój wymoczków — tworzą one pierścień na ściankach naczynia w niedalekiej odległości od powierzchni cieczy. Jednocześnie kultury zmieniają zabarwienie na odcień ciemniejszy, brunatny i wydzielają zapach



kwaśny, który zatracają z biegiem czasu. Po upływie kilku lub kilkunastu dni na dnie naczyń zaczyna się gromadzić w coraz większych ilościach brunatny osad z trupów bakteryj i wymoczków.

Dane, zestawione w tablicach III—V, pozwalają nam w rozwoju ilościowym kultur odróżnić 2 okresy: okres wzrostu liczbowego do maximum i okres spadku.

Oba te okresy przedstawiają wahania, w czasie których rozwój lub zanik kultury jest zahamowany. Wahania te mniej lub więcej wyraźne, poprzedzają lub następują po maximum; towarzyszą im pewne procesy, zachodzące w kulturach, dlatego też ze względów opisowych wygodniej nam będzie rozpatrywać w rozwoju kultury 3 okresy: 1) rozwoju, kiedy liczba wymoczków jednostajnie wzrasta; 2) wahań, w czasie którego następuje maximum, i 3) wymierania.

### Okres rozwoju.

Okres rozwoju kultury charakteryzuje się szybkim wzrostem liczby wymoczków. Przytem powierzchowna obserwacja pozwala zauważyć, że *Colpidium* w tym okresie wykazują, przy normalnej ogólnej żywotności, intensywne odżywianie: liczne wodniczki pokarmowe o zawartości bakterjalnej są tego dowodem. Przytem rozmiary wymoczków są znaczne. W okresie tym warunki życia wymoczków są dla nich najdogodniejsze. Potwierdzenie tego znajdujemy również na drodze ściślejszego badania rozwoju ilościowego kultur w początkowych okresach.

Jeżeli umieścimy *Colpidium* w korzystnych warunkach życia, nastąpi wówczas szybki przyrost materji żyjącej, prowadzący do podziału osobnika. Dla organizmów jednokomórkowych szybki i normalny wzrost oraz rozmnażanie się są najlepszym sprawdzianem ich żywotności. Dlatego i samo określenie „korzystnych“ warunków zawiera w sobie pojęcie takich warunków, w których następuje szybkie mnożenie się przy zachowaniu normalnej objętości.

W ciągu 2 miesięcy prowadziliśmy hodowle linii ciągłych *Colpidium* w różnych ilościach i stężeniach cieczy, w pożywkach o różnym stopniu rozwoju bakteryj; poszukiwania te doprowadziły nas do wniosku, że najlepsze względnie warunki

były zapewnione, gdy hodowaliśmy wymoczki w 0.5 cm.<sup>3</sup> pożywki jedno lub dwudniowej, zmieniając ją codziennie <sup>1)</sup>).

Jak wspomnieliśmy, pożywka na klockach była codziennie zmieniana. O ile jednak pozostawialibyśmy wymoczki w tej samej pożywce, dodając do niej nowe ilości świeżej, to otrzymalibyśmy kulturę idealną, w której, dzięki dobrym warunkom istnienia, dzięki brakowi czynników, powodujących walkę o byt i zamieranie wymoczków, trwały stały przyrost naturalny. Mając daną szybkość mnożenia się wymoczków na klockach <sup>2)</sup>, możemy wyliczyć ilość osobników, jaka powinna znajdować się w takiej kulturze idealnej, ilość wymoczków w 1 cm.<sup>3</sup> i t. d. Do obliczenia ilości wymoczków możemy zastosować w tym przypadku wzór (I):  $N=2^n \cdot N_1$  lub  $N=2^{kp} \cdot N_1$  <sup>3)</sup>, gdzie  $N$ =ilości wymoczków po upływie danego okresu czasu,  $n$ =ilości podziałów w tym czasie,  $N_1$ =początkowej ilości wymoczków,  $k$ =stałej szybkości podziałów na dobę,  $p$ =ilości dni ubiegłych. Otrzymane liczby pozwalają nam wykreślić krzywą ilości wymoczków w kulturze idealnej, — którą będziemy nazywać teoretyczną. Będzie ona posiadała charakter krzywej wykładniczej.

O ileby przebieg rozwoju wymoczków w poszczególnych kulturach zachodził zgodnie z kulturą idealną, to mielibyśmy potwierdzenie, że panują w nich warunki zbliżone do teoretycznie dobrych.

Jak wynika z danych, zestawionych w tablicy III i na rysunku 1, w kulturze A przez pierwsze dwa dni rozwój był nieco powolniejszy, aniżeli dla kultury idealnej ( $k=2.80$ ); pomiędzy trzecim a siódmym dniem nieco szybszy (po dniach 6-ciu w kulturze 864 wymoczków w 1 cm.<sup>3</sup>, zaś teoretyczny rachunek wykazuje 363). Po dniach 7-miu notujemy odchylenie od krzywej teoretycznej.

---

<sup>1)</sup> W tych warunkach udało nam się następnie otrzymać przeszło 600 pokoleń *Colpidium* bez wystąpienia zmian patologicznych. (T. V i e w e g e r, loc. cit.).

<sup>2)</sup> Szybkość przeciętną mnożenia się wymoczków na klockach w ciągu okresu czasu, odpowiadającego rozwojowi kultur, podaliśmy w odpowiednich tablicach.

<sup>3)</sup> p. K a n i t z A. Temperatur und Lebensvorgänge. Berlin. 1915.

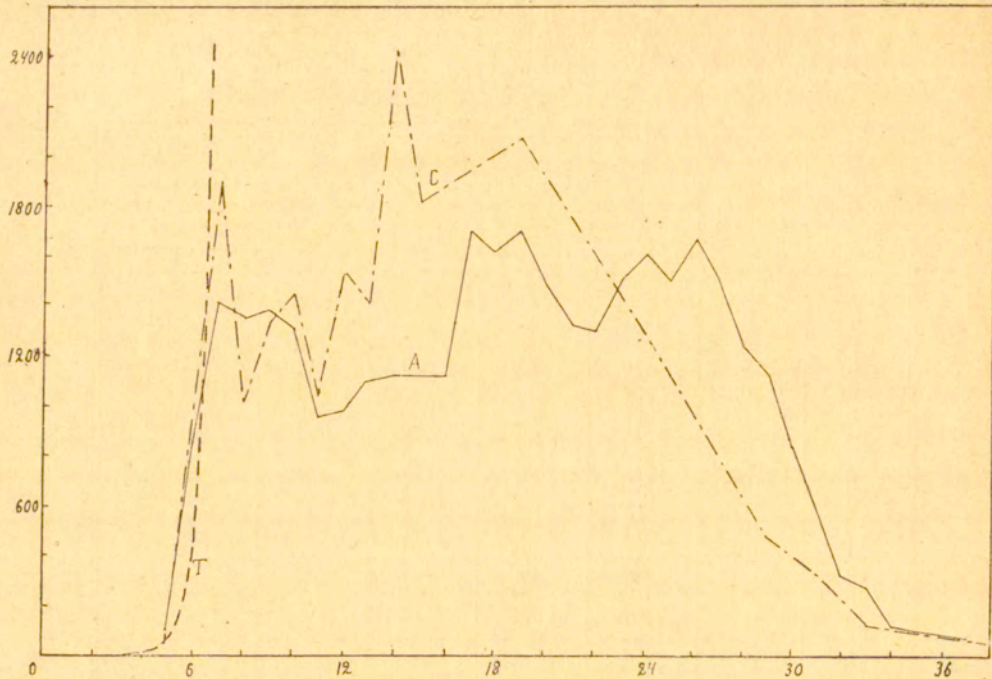


TABLICA III.

Rozwój ilościowy wymoczków w kulturach „normalnych“ A, B, C, F. Serja 2.  
Wpuszczono po 2 *Colpidium*. W rubryce 6 dane dla kultury idealnej przy  
 $k = 2.80$ . Temperatura 20°.

0	1	2				5	6
		Liczba pierwotniaków w 1 cm. <sup>3</sup> kultury					
№ kolejny obser- wacji	Liczba dni ubiegłych	A	B	C	F	Liczba wy- moczków obli- czona na 1 cm. <sup>3</sup> kultury idealnej	
1	3	—	—	—	1	1.1	
2	4	—	—	—	7	7.8	
3	5	110	39	60	60	55	
4	6	864	230	—	545	363	
5	7	1398	—	1901	766	2648	
6	8	1349	2637	1019	ok. 1000	18450	
7	9	1376	1067	1343	—		
8	10	1306	1936	1444	—		
9	11	960	1745	1033	—		
10	12	980	2636	1555	—		
11	13	1088	3093	1401	—		
12	14	1133	3289	2417	—		
13	15	1129	2464	1812	—		
14	16	1130	2937	1886	—		
15	17	1714	—	—	—		
16	18	1623	—	—	—		
17	19	1706	2599	2066	3116		
18	20	1481	—	—	—		
19	21	1320	—	—	—		
20	22	1306	—	—	—		
21	23	1499	2501	—	—		
22	24	1613	—	1276	—		
23	25	1507	—	—	—		
24	26	1681	—	—	—		
25	27	1498	—	—	—		
26	28	1219	1844	—	—		
27	29	1111	—	482	—		
28	30	825	—	—	—		
29	31	570	—	329	—		
30	32	335	—	—	300		
31	33	274	120	140	—		
32	34	117	—	—	—		
33	35	109	—	—	—		
34	37	75	—	—	—		
35	38	—	—	64	99		
36	43	—	—	—	39		
38	49	—	—	10	25		
41	59	—	—	0	8		
42	78	—	—	—	4		

Kultura B wykazywała przez cały czas przebieg powolniejszy, aniżeli kultura idealna, przyczem jednak różnica nie dosięgła



Rys. 1. Rozwój ilościowy kultur „normalnych”: A (—) i C (---). Linja T (-.-) oznacza przebieg krzywej teoretycznej przy  $k=2.80$ . Na osi pionowych oznaczono ilość wymoczków w 1 cm.<sup>3</sup>; na osi poziomych — dni.

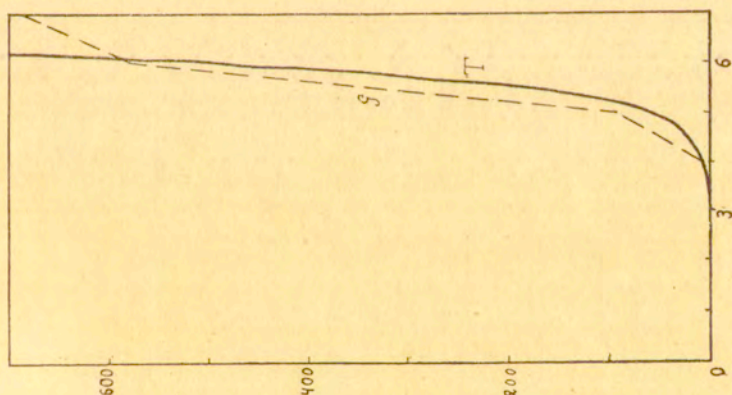
jednego podziału. Kultura C wykazała przebieg zgodny z teoretycznym. Kultura F wykazała przebieg zgodny z teoretycznym w ciągu dni 6-ciu, na początku nieco powolniejszy. W kulturze G (tablica IV, rubryki 2 i 3 i rysunek 2-gi) w czasie pierwszych 6-ciu dni rozwój naogół był zgodny z krzywą teoretyczną, nieco szybszy, ale różnica bardzo niewielka. Po dniach 6-ciu nastąpiło odchylenie. To samo da się powiedzieć również o kulturach a, b, c, trzymany w temperaturze zmiennej (tablica IVa); pod tym względem, zarówno jak pod względem ogólnego przebiegu rozwoju ilościowego i objętościowego, kultury, trzymane w temperaturze stałej, zachowywały się identycznie z kulturami, trzymanymi w temperaturze zmiennej.



TABLICA IV.

Rozwój ilościowy i objętościowy wycmoczów w kulturze G. Serja 3.  
Wpuszczono 1 *Colpidium*,

0	1	2	3	4	5	6	7
N <sup>o</sup> kolejny obserwacji	Liczba dni ubiegłych od początku istnienia kultury	Liczba wycmoczów w 1 cm. <sup>3</sup> kultury	Liczba wycmoczów w 1 cm. <sup>3</sup> obliczona dla kult. idealnej przy k=3,07	Szerokość przeciętna wycmoczów w μ	Długość przeciętna wycmoczów w μ	Objętość przeciętna jednego osobnika w 100-ch μ <sup>3</sup>	Objętość ogółu wycmoczów zawartych w 1 cm. <sup>3</sup> kultury wyrażona w 1000-ch μ <sup>3</sup>
0	3	13	1.0	—	—	—	—
1	4	8,6	8,3	22.0	38.0	96	83
2	5	96	70	56.0	99.0	1625	15600
3	6	581	584	34.7	90.0	567	32960
4	7	691	4908	—	—	—	—
5	8	388	—	28.2	88.7	369	14310
6	10	2794	—	26.7	78.0	289	80725
7	24	1240	—	23.7	50.5	147	18220
8	28	744	—	20.9	47.6	109	8098
9	32	270	—	22.5	53.7	142	3842
10	33	192	—	20.5	49.7	109	2099
11	36	76	—	19.5	40.7	81	616
12	41	118	—	21.6	60.0	146	1729
13	43	25	—	25.7	60.2	208	520
14	47	11	—	23.3	54.1	157	172
15	52	8	—	24.5	49.5	155	124



Rys. 2. Rozwój ilościowy kultury G w ciągu pierwszych 7 dni. Linja ciągła (T) odpowiada krzywej teoretycznej przy k=3,07. Na osi pionowych zaznaczono ilość wycmoczów w 1 cm.<sup>3</sup>. Na osi poziomych — dni.

Ze wzoru zasadniczego (I) otrzymujemy, że

$$n = kp = \frac{\lg N - \lg N_1}{\lg 2},$$

wzór ten pozwala nam obliczyć ilość podziałów w dowolnym okresie czasu.

TABLICA IVa.

Serja I. Temperatura zmienna pokojowa.  
Wpuszczono 1 *Colpidium*. K = 2.

Liczba dni ubiegłych	Liczba wymoczków w 1 cm <sup>3</sup> kultury		
	a	b	c
9	1516	—	—
10	2070	424	1770
13	2152	1985	1708
14		2087	
15		2566	
17		2414	
19		1753	
21		2152	
26		1493	
31		1135	
34		646	

W tablicy V zestawiliśmy dla kultur A, F, G ilość podziałów, jaka miała miejsce w kulturach od początku ich istnienia, z teoretyczną ilością podziałów dla kultury idealnej.

TABLICA V.

Zestawienie ilości podziałów znalezionych dla kultur A, F, G z ilością podziałów, obliczoną dla kultur idealnych, przy  $k=2.80$  i  $3.07$ .

1	2	3		4	5
Liczba dni ubiegłych od początku istnienia kultury	Teoretyczna liczba podziałów dla kultury idealnej od początku istnienia	Znaleziona liczba podziałów od początku istnienia		Teoretyczna liczba podziałów dla kultury idealnej od początku istnienia	Znaleziona liczba podziałów od początku istnienia kultury G
		kultury A	kultury F		
1	2.80	2.5	—	3.07	—
2	5.60	—	—	6.14	—
3	8.40	—	8.20	9.21	9.60
4	11.20	—	11.03	12.28	12.33
5	14.00	15.01	14.13	15.35	15.81
6	16.80	17.98	17.31	18.42	18.41
7	19.60	18.69	17.81	21.49	18.66
8	22.40	—	18.19	24.56	—

Powyższe zestawienia stwierdzają po 1) zgodność przebiegu ilości podziałów w ciągu 6-ciu pierwszych dni dla idealnej i dla badanych kultur; po 2) wy-



kazują pewną nieznaczną zmienność podzielności w ciągu poszczególnych dni. Jeżeli pominiemy błąd metodyczny i wyniki przypadkowe, to zestawienie danych (G, F, M i t. d.) zdaje się wskazywać, że na pewien czas przed odchyleniem krzywej podziałów od teoretycznej— ilość podziałów jest nieco większa, aniżeli w I, II, III dniu istnienia kultury. To nasuwa przypuszczenie, że na IV i V dzień w kulturze panują warunki, najbardziej sprzyjające mnożeniu się wymoczków; po 3) zatrzymanie rozwoju kultury zachodzi w niektórych przypadkach (kultura F) stopniowo, w innych gwałtownie.

### Okres wahań.

Okres ten obejmuje przeciąg czasu od chwili odchylenia się krzywej eksperymentalnej od teoretycznej do chwili wystąpienia gwałtownego spadku krzywej.

Po odchyleniu krzywej liczba wymoczków może wzrastać jeszcze, aczkolwiek w tempie wolniejszym. Pierwszy wierzchołek osiągnięty jest przy zmiennej liczbie wymoczków; zależy to, oczywiście, od długości okresu czasu poprzedzającego.

Jeżeli pominiemy wahania liczby wymoczków nieznaczne, nieprzewyższające 10% ogólnej ilości wymoczków (granice błędu pomiarowego), pozostaną wahania większe dzienne lub też obejmujące okresy dwu- lub kilkudniowe (kultury A, B, C, G, M).

W czasie tych wahań osiągnięte jest maximum ilości wymoczków, które przedziela cały okres na dwie części. W pierwszej, pomimo występujących po sobie perjodów mnożenia i wymierania wymoczków, charakter ogólny jest zwykły, w drugiej — niższy. Większe wahania cechują zwłaszcza I-ą część okresu. Zresztą pod tym względem widzimy dużą różnorodność w poszczególnych kulturach: w kulturze N wahania nie uzewnętrzniają się (w przeciągu dni 15-tu trwa ciągle, aczkolwiek coraz wolniejszy przyrost ilościowy). W kulturach B i M, pomimo wahań, dążenie do maximum jest bardzo widoczne i maximum wysokie; w kulturze A maximum jest niższe i przechodzi nieznacznie wśród długiego okresu wahań.

W tym okresie zamiera pewna ilość wymoczków, czasem bardzo znaczna (kultura B), jednocześnie zachodzi mnożenie się

innych osobników, bardziej przystosowanych do warunków, panujących w kulturze. Czasem mnożenie to następuje (po okresach spadku) bardzo szybko, np. dane liczbowe kultury G wskazują w ciągu 2 dni wzrost siedmiokrotny liczby wymoczków i t. d. Stopniowo jednak, po przejściu maximum, zdolność mnożenia zmniejsza się, coraz większa ilość wymoczków ginie i kultura wstępuje w okres gwałtownego spadku liczbowego. Maximum ilości wymoczków osiągnięte jest po 14—19 dniach.

### Okres wymierania.

Okres ten charakteryzuje się mniej lub więcej gwałtownym spadkiem liczby wymoczków. Spadek ten, czasem dosyć regularny (kultura A), sprowadza po upływie 30—40 dni liczbę wymoczków do kilkudziesięciu na 1 cm.<sup>3</sup>; wówczas przez pewien krótki czas krzywa może się zatrzymać na jednym poziomie lub też opadanie staje się powolniejszym (wykazując słabe wahania); stopniowo ilość wymoczków zmniejsza się do kilku na 1 cm.<sup>3</sup> i na tej wysokości utrzymuje się przez dłuższy czas <sup>1)</sup> (np. w kulturze M — 82 dni, G — do 158 dni).

Kończąc ten opis, możemy dodać, że linje ciągłe A i B, których używaliśmy do zapoczątkowania kultur, nie wykazały różnic w rozwoju kultur.

Z rozdziału niniejszego podkreślmy następujące rezultaty. W kulturach „normalnych“, zawierających 0.0193—0.0232 mg N w 1 cm.<sup>3</sup> pożywki, rozwój *Colpidium* w ciągu mniej więcej 6 dni zachodzi zgodnie z kulturą idealną (z szybkością stałą). Po oznaczonym czasie następuje zahamowanie rozwoju i kultura wstępuje w okres wahań. Wówczas liczba wymoczków zmienia się wskutek wymierania jednych, mnożenia się zaś innych. W tym okresie pomiędzy 14—19 dniem osiągnięte jest maximum liczby wymoczków, poczem wahania przybierają chara-

<sup>1)</sup> O tej końcowej części okresu wymierania będziemy mieli sposobność wspominać w następnym rozdziałach.



ktę zniżkowy i następuje okres wymierania, którego końcowa część (przy bardzo nieznacznej ilości wymoczków) może trwać dłuższy przeciąg czasu.

## ZMIANY OBJĘTOŚCIOWE CIAŁA WYMOCZKÓW W KULTURACH „NORMALNYCH”.

Do badania zmian, zasłych w objętości ciała wymoczków, służyły głównie kultury G, M, N; pozatem kultury seryj 2 i 5. Pomiarę te miały na celu: a) zbadanie indywidualnych zmian objętościowych, jakim ulegają osobniki; b) zbadanie zmian, zachodzących w ogólnej objętości wymoczków danej kultury.

### a) Zmiany objętości ciała osobników.

Poprzednio wspominaliśmy, że w okresie rozwoju kultury wymoczki posiadają ciało zaokrąglone, wypelnione licznymi wodniczkami pokarmowemi. Wskutek tego ciało ich jest mało przezroczyste i posiada zabarwienie brunatnawe. W czasie, gdy krzywa liczbowa wstępuje w okres wahań, ilość wodniczków pokarmowych zmniejsza się i jednocześnie zmniejszają się wymiary ciała. Proces ten zaznacza się coraz bardziej po przekroczeniu maximum, ciało wymoczków staje się jaśniejsze, spłaszczone, o wyraźnych bocznych krawędziach i ostatecznie przybiera postać zupełnie przezroczystych blaszek.

W tablicach IV, VI, VII przedstawiliśmy dla kultur G, M, N: przeciętną szerokość, długość, objętość osobnika w setkach  $\mu^3$  i objętość ogółu wymoczków, znajdujących się w 1 cm.<sup>3</sup>, wyrażoną w tysiącach  $\mu^3$ .

Przy sporządzaniu kultur M i N uwzględniliśmy również objętość osobników wprowadzonych do nich. W tym celu umieściliśmy wymoczki w minimalnej ilości pożywki i mierzyliśmy żywe w zwykły sposób. Wyniki podaliśmy w tablicach <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Dla porównania przytoczymy również przeciętne wymiary *Colpidium* otrzymane dla linii ciągłych, w warunkach dobrego odżywiania. Dla linii A zrobiliśmy 80 pomiarów w ciągu dni 32 — średnia długość 89  $\mu$ , szerokość

TABLICA VI.

Rozwój ilościowy i objętościowy wymoczków w kulturze M.  
Serja 4. Wpuszczono 1 *Colpidium* z linii A — wymiary tego osobnika  
podano w 1 rzędzie poziomym.

0	1	2	3	4	5	6
№ kolej- ny obser- wacji	Liczba dni ubiegłych od po- czątku istnienia kultury	Liczba wymocz- ków w 1 cm <sup>3</sup> kultury	Szerokość przeciętna wymocz- ka w $\mu$	Długość przeciętna wymocz- ka w $\mu$	Objętość przeciętna jednego osobnika w 100-ch $\mu^3$	Objętość ogółu wy- moczków za- wartych w 1 cm <sup>3</sup> kultury wyrażona w 1000-ch $\mu^3$
1	0	—	$\begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 60$	$\begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 100$	1885	188
2	3	—	61.0	113.5	2211	—
3	4	—	63.7	112.5	2390	—
4	5	$\begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 20$	59.2	102.0	1871	3743
5	6	422	59.5	106.2	1968	83062
6	7	1274	31.6	85.2	445	56742
7	8	1926	31.2	89.2	454	87546
8	10	1912	33.7	87.7	524	100225
9	11	1767	30.5	80.2	391	69012
10	12	1510	30.2	73.5	351	53180
11	13	1998	28.2	76.7	319	63797
12	14	2034	29.7	80.5	372	75610
13	18	2305	26.0	65.7	232	53591
14	22	1450	22.7	57.2	154	22372
15	24	1671	22.5	53.7	142	23780
16	26	1415	21.7	51.5	127	19250
17	27	1379	20.0	47.5	100	13816
18	28	1474	20.7	46.2	104	15275
19	29	783	20.7	44.2	99	7763
20	31	336	20.5	45.5	100	3363
21	32	217	24.0	51.7	156	3383
22	36	34	22.0	45.5	115	392
23	40	15	26.0	61.5	218	326
24	50	34	32.5	76.0	420	1429
25	71	4	27.5	68.3	270	108



Na rysunku 3 oznaczyliśmy przebieg krzywych dla kultury M (ilości wymoczków, objętości przeciętnej pojedynczego



Rys. 3. Rozwój ilościowy i objętościowy wymoczków w kulturze M.

Linja ciągła (—) odpowiada ilości wymoczków w 1 cm<sup>3</sup>. Linja - - - przeciętnej objętości osobnika w 100-ch μ<sup>3</sup>. Linja - · - · - objętości ogółu wymoczków w 1 cm<sup>3</sup>, wyrażonej w 10<sup>5</sup> μ<sup>3</sup>. Na osi pionowych zaznaczono z lewej strony ilość lub objętość przeciętną, z prawej — objętość ogólną. Na osi poziomych — dni.

52 μ, stąd objętość 125980 μ<sup>3</sup>. Dla linii B było zmierzonych 27 osobników w ciągu dni 14 — średnia długość 92 μ, szerokość 52 μ, objętość 130230 μ<sup>3</sup>. Dla linii B<sub>1</sub> (w temp. 20°) było zmierzonych 42 osobniki w ciągu 7 dni — przeciętna długość 80,7 μ, szerokość 40,7 μ.

TABLICA VII.

Rozwój ilościowy i objętościowy wymoczków w kulturze N.  
Serja 4. Wpuszczono 1 *Colpidium* z linii B<sub>1</sub> — wymiary tego osobnika  
podano w 1 rzędzie poziomym.

0	1	2	3	4	5	6
N <sup>o</sup> kolej- ny obser- wacji	Liczba dni ubiegłych od po- czątku istnienia kultury	Liczba wymocz- ków w 1 cm <sup>3</sup> kultury	Szerokość przeciętna wymocz- ka w $\mu$	Długość przeciętna wymocz- ka w $\mu$	Objętość przeciętna jednego osobnika w 100-ch $\mu^3$	Objętość ogólna wy- moczków za- wartych w 1 cm <sup>3</sup> kultury wyrażona w 1000-ch $\mu^3$
1	0	—	$\approx 55$	$\approx 95$	1504	150
2	5	—	52.2	93.5	1334	—
3	7	1934	31.3	79.3	407	78655
4	8	2593	30.8	78.5	390	101087
5	11	2714	28.5	71.5	301	65619
6	15	2740	24.0	64.2	194	53019
7	19	1876	25.0	55.7	182	34172
8	23	1267	21.5	47.2	114	14471
9	25	386	22.0	47.7	121	4665
10	27	166	22.7	51.5	140	2305
11	29	63	21.7	49.5	122	769
14	36	33	27.0	56.0	214	705
15	52	8	26.0	68.5	242	193
16	54	14	27.0	71.0	273	379

osobnika, objętości ogółu wymoczków w 1 cm.<sup>3</sup>). Z porównania tablic wynika, że przebieg zmian objętościowych w kulturach zachodzi w sposób mniej więcej jednakowy w okresie regulacyjnym i spadku, pewne zaś różnice dają się zauważyć w okresie rozwoju kultury.

W kulturze G po upływie 4-ch dni od początku jej istnienia notujemy znaczną redukcję wymiarów wymoczków (w porównaniu do wymiarów, podanych wyżej dla linii A, z której pochodził osobnik, użyty do zasiania kultury) przy intensywnym odżywianiu się <sup>1)</sup>). Ten spadek objętości, którego w tym okresie zwykle nie obserwowaliśmy, przypisujemy bardzo szybko na-

<sup>1)</sup> Jak o tem świadczyła obecność licznych wodniczków pokarmowych.



stępującym po sobie podziałom (tablica IV), nie oddzielonym od siebie dostatecznie długimi okresami wzrostu <sup>1)</sup>. Od 4 do 6 dni następuje wzrost objętości z 9630 na 57000  $\mu^3$ . W chwili odchylenia krzywej liczbowej od teoretycznej obserwujemy zatem wymiary, zbliżające się do przeciętnych dla *Colpidium*. Po 6-u dniach następuje spadek objętości, z początku gwałtowny, następnie powolniejszy; trwa on do 28 dni, poczem następują wahania i na koniec nieznaczny przyrost objętości.

W kulturze M stwierdzamy w przeciągu 4 dni przyrost, następnie zaś nieznaczną redukcję objętości ciała: po dniach 6-u objętość wymoczków pozostaje w granicach wymiarów pierwotnych. Od 7-go dnia notujemy stały spadek objętości, trwający do 27 dni. W kulturze M zwróciliśmy uwagę na to, czy wahaniom liczby wymoczków nie odpowiadają wahania objętości jednostek; naogół jednak zależności takiej nie zauważyliśmy.

W kulturze N w ciągu dni 5-u wymoczek (pominąwszy nieznaczne różnice, nie wykraczające poza granice błędu pomiarowego) zachowują pierwotną objętość ciała, w czasie, gdy krzywe ilościowe: obserwowana i teoretyczna bieżą razem. Następuje później stały spadek objętości, który trwa do dni 23, poczem występują wahania objętości z tendencją wzrostową.

Stwierdzamy zatem, że 1) wielkość wymoczków w kulturach „normalnych“ w ciągu pierwszych 5 — 6 dni utrzymuje się naogół w granicach normalnej wielkości ciała. 2) po upływie dni 6-ciu zaczyna się zmniejszanie objętości ciała, na początku dosyć gwałtowne, następnie powolniejsze. 3) W okresie końcowym wymierania kultury objętość ciała ulega wahaniom, a pod koniec nieznacznemu przyrostowi.

W tablicy VIII zestawiliśmy odpowiednią przeciętną (z pomiaru 10 osobników) szerokości, długości i objętości, największej w okresie rozwoju i najmniejszej w okresie głodu. Daje to nam pojęcie o zmienności przeciętnej; pewne jednak znaczenie posiada dla nas również znajomość zmienności indywidualnej

<sup>1)</sup> Przemawia za tem redukcja objętości ciała, obserwowana przez nas czasami dla linii ciągłych w warunkach dobrego odżywiania, w czasie szybko-go mnożenia się, np. dla linii B1 (20<sup>0</sup>) notujemy po 4 podziałach (zmierzone 15 osobników) przeciętną szerokość 21  $\mu$ , długość 46.3  $\mu$ . 16 osobnik podzielił się, dając w ciągu następnej doby 7 osobników, z których 6 zmierzonych wykazało szerokość 46.8  $\mu$  i długość 92.9  $\mu$ .



TABLICA VIII.  
Zestawienie wymiarów przeciętnych i indywidualnych wycieczek w kulturach G, M, N.

c	b	a	Kultura G				Kultura M				Kultura N											
			1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4								
Stosunek największych notowanych wymiarów do najmniejszych notowanych	Najmniejsze wymiary notowane w czasie głodu	Największe wymiary notowane w okresie rozwoju	Liczba dni ubiegłych	Wielkość przeciętna osobnika	Liczba dni ubiegłych	Wielkość pojedynczego osobnika	Liczba dni ubiegłych	Wielkość przeciętna osobnika	Liczba dni ubiegłych	Wielkość pojedynczego osobnika	Liczba dni ubiegłych	Wielkość przeciętna osobnika	Liczba dni ubiegłych	Wielkość pojedynczego osobnika								
															Szerokość w $\mu$ . . . . .	56.0	60.0	4	63.7	77.0	52.2	60.0
															Długość w $\mu$ . . . . .	99.0	112.0	3	113.5	122.0	93.5	110.0
				1625.3	2111.2	4	2389.7	3786.7	1333.7	2073.0												
				36	19.5	14.0	27	20.0	15.0	21.5	29	17.0										
				33	40.7	40.0	29	44.2	30.0	47.2	25	35.0										
				36	81.0	41.0	29	99.1	34.5	114.2	29	64.1										
					2.87	4.28		3.18	5.13	2.43		3.53										
					2.43	2.80		2.57	4.07	1.98		3.14										
					20.07	51.49		24.11	109.75	11.67		32.34										



W rubrykach a, b, c podaliśmy największe i najmniejsze wymiary, notowane dla pojedynczego osobnika oraz stosunek największej do najmniejszej szerokości, długości i objętości przeciętnych i dla pojedynczych osobników<sup>1)</sup>.

Zmienność indywidualna waha się w granicach, znacznie rozleglejszych, aniżeli zmienność przeciętna. Rozbieżność jest wyraźna, zwłaszcza w drugiej połowie okresu wahań. Tłumaczy to nam do pewnego stopnia charakterystyczny przyrost wielkości w końcowym okresie wymierania kultury. Okres wahań jest okresem wzmożonej walki o byt wskutek utrudnionych warunków życia. Osobniki, bardziej przystosowane do warunków, panujących w kulturze, pozostają przy życiu, a nawet mnożą się; inne, bardziej podatne działaniu złych warunków, giną, osiągnąwszy prawdopodobnie najmniejsze możliwe wymiary. W kulturze spotykamy wówczas obok osobników bardzo małych, inne, znacznie większe. Pod koniec zaś okresu wymierania pozostają tylko nieliczne osobniki, bardziej odporne, które przetrwały okres wahań przy stosunkowo mniejszej redukcji ciała. Być może jednak również, że w tym czasie wskutek wymierania wielkich ilości wymoczków dla pozostałych przy życiu warunki chwilowo stają się lepsze<sup>2)</sup>.

Zwróćmy uwagę, że podobnie, jak poszczególne osobniki w kulturze różnią się objętościowo, tak i skala wahań przeciętna i indywidualna w poszczególnych kulturach różni się bardzo. Największą zmienność obserwowaliśmy w kulturze M, gdzie dla niektórych osobników redukcja objętości może dochodzić do  $\frac{1}{100}$ , przeciętna zaś  $\frac{1}{24}$ .

Jak widzimy, zmniejszanie się objętości ciała u *Colpidium* sięga dalej, aniżeli toż samo zjawisko w czasie głodu u *Para-*

1) Z zestawienia wynika, że szerokość ciała podlega nieco większej zmienności, niż długość. Częściowo daje się to wytłumaczyć rozmieszczeniem wodniczki pokarmowych, które, gromadząc się w osobnikach dobrze odżywianych w środkowej i tylnej części ciała, powodują rozpychanie komórki w kierunku poprzecznym.

2) To ostatnie przypuszczenie znalazło potwierdzenie w badaniach stosunku ilościowego rozwoju bakterij i wymoczków, p. cz. II pracy niniejszej *Sprawozd. T. N. W. 1918. Wydz. n. mat.-przyr. Zeszyt 5.*



*maecium* (Wallengren<sup>1)</sup>, Lipska<sup>2)</sup>, ustępuje natomiast nieco redukcji objętościowej, obserwowanej u *Pleurotricha lanceolata* i znacznie redukcji ciała notowanej przez Hertwiga<sup>3)</sup> dla *Dileptus gigas*.

### Zachowanie się objętości ciała wszystkich osobników w kulturze.

Dla zdania sobie sprawy ze zmian w ogólnej ilości substancji żyjącej (której wykładnikiem jest w pewnej mierze objętość ciała), obliczyliśmy sumaryczną objętość wymoczków w kulturze. Dane liczby otrzymaliśmy, mnożąc ilość wymoczków w 1 cm.<sup>3</sup> przez ich przeciętną objętość w danym momencie i zestawiliśmy je w tablicach IV, VII i VIII.

Na rysunku 3 podaliśmy krzywą objętości ogólnej wymoczków. Przebieg krzywych objętościowych jest w ogólnych zarysach podobny.

W pierwszej części, w okresie rozwoju kultury, przebieg krzywej objętościowej wszystkich wymoczków zbliża się do przebiegu krzywej teoretycznej i kultury idealnej. Wynika to ze zgodności przebiegu liczby wymoczków z teoretyczną i utrzymaniu się naogół objętości wymoczków w granicach normalnych w czasie pierwszych 5—6 dni rozwoju kultury. Po upływie tego czasu krzywa objętości wszystkich wymoczków wykazuje wahania (kultury G, M), wypływające z wahań się liczby wymoczków, lub też dąży wprost do maximum (kultura N), poczem następuje spadek, przerywany wahaniami (kultura M), lub też jednostajny.

Niezwykłe charakterystycznym objawem jest to, że maximum objętościowe ogółu wymoczków w kulturze wypada w okresie wahań przed wystąpieniem maximum ilościowego w czasie,

<sup>1)</sup> H. Wallengren: Inanitionserscheinungen der Zelle. *Zeitschr. f. Allgemeine Physiol.* Bd. I. 1901.

<sup>2)</sup> I. Lipska: Recherches sur l'influence de l'inanition chez *Param. caud.* *Thèse.* Genève. 1910.

<sup>3)</sup> R. Hertwig: Ueber Korrelation von Zell- und Kerngrösse u. s. w. *Biologisches Zentralblatt.* Bd. XXIII. 1903.



gdy redukcja objętości ciała poszczególnych wymoczków dochodzi do 0.18—0.28 pierwotnej objętości <sup>1)</sup>.

Zestawienie liczbowego i objętościowego rozwoju rzuca światło na charakter cyklu biologicznego, jaki ma miejsce w kulturach normalnych.

Początkowy rozwój kultury (5—6 dni) odbywa się w warunkach pomyślnych dla wymoczków, przyczem liczba ich wzrasta według postępu geometrycznego.

Objętość wymoczków utrzymuje się naogół w granicach normalnych. Po dniach 6-u daje się zauważyć pewne zahamowanie rozwoju kultury, rozwój liczbowy odbiega od krzywej teoretycznej, jednocześnie (niekiedy nieco wcześniej) rozpoczyna się proces redukcji objętości ciała, tak że pierwsze maximum liczbowe w okresie wahań osiągnięte jest przy zmniejszonej objętości ciała. Dalszy rozwój liczbowy odbywa się już kosztem szybko posuwającego się z początku zmniejszania objętości wymoczków.

Rzeczywisty rozwój liczbowy kultury i zmiany objętości ciała określają położenie maximum objętości ogólnej wymoczków, które występuje po dniach 8—10 w czasie, gdy redukcja objętości jednostkowej osiąga znaczną stosunkowo wartość.

W tym czasie uwidocznia się coraz bardziej działanie ujemnych czynników kultury (głodu), które prowadzi do wymierania części wymoczków przy jednoczesnym mnożeniu się innych. Po upływie 14—19 dni osiąga swoje maximum liczbowy rozwój kultury. Jednocześnie posuwający się coraz bardziej proces redukcji ciała prowadzi do osiągnięcia najmniejszej granicznej wartości, podziały wymoczków ograniczają się do coraz mniejszej liczby bardziej odpornych na ujemne czynniki, natomiast następuje masowe wymieranie pierwotniaków.

<sup>1)</sup> W kulturze G późniejsze maximum objętościowe zbiega się z maximum liczbowym po dniach 10, prawdopodobnie jednak nastąpiło to wskutek braku pomiarów pomiędzy 10 i 24 dniami. Poprzednio wskazaliśmy, że ilość maksymalna wymoczków w kulturach „normalnych“ wypada między 14 i 19 dniami.



## ZMIANY ŻYWOTNOŚCI WYMOCZKÓW W ROZWOJU KULTUR „NORMALNYCH“.

Z zależności pomiędzy wielkością, budową komórki a normalnym jej działaniem należało się spodziewać, że w okresie wahań i zamierania kultury nastąpią równorzędnie ze zmianami morfologicznymi zmiany w czynnościach poszczególnych części aparatu komórkowego, zarówno jak i w życiowych przejawach całej komórki.

Ograniczymy się jedynie do spostrzeżeń nad zdolnością mnożenia się *Colpidium* w poszczególnych etapach trwania kultury. O mnożeniu się wymoczków wewnątrz samej kultury mieliśmy już sposobność mówić. Widzieliśmy, że początkowo dzielenie się wymoczków zachodzi z normalną szybkością (2.5—3.5 razy na dobę w 20°); następnie zdolność do podziałów zmniejsza się, aczkolwiek może wystąpić nawet w najpóźniejszym okresie kultury (G). Obecnie rozpatrzemy zmiany w zdolności mnożenia się wymoczków, o ile je umieścimy w dobrych warunkach odżywiania. W tym celu z kultury N co pewien czas (przeważnie w odstępach 4-dniowych) odosobnialiśmy pewną liczbę (np. 2) wymoczków i wpuszczaliśmy po 1 osobniku do klocka, do 0.5 cm.<sup>3</sup> pożywki dwudniowej (temp. 20°). Okazało się, że w czasie 10-u pierwszych dni istnienia kultury wymoczek w klockach dzieli się w zwykłym tempie (około 3 razy na dobę); po dniach 10-u występuje zahamowanie, wyrażające się w tym, że w pierwszym dniu pobytu w klocku, *Colpidium* nie dzieli się wcale lub dzieli się w pierwszym, ewentualnie w 2-ch pierwszych dniach w tempie wolniejszym, poczem następuje powrót do normy. Otrzymane dane zestawiliśmy w tablicy IX, gdzie w rubryce 4 zaznaczyliśmy przeciętną liczbę podziałów w okresie czasu od chwili umieszczenia wymoczek w klocku do chwili powrotu do normalnej liczby podziałów. Jeżeli porównamy zmiany w podzielności wymoczków ze zmianami objętości jednostkowej, to stwierdzamy przebieg mniej więcej równoległy<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Narazie pozostaje bliżej niezbadanym, czy czas do I-go podziału zużyty zostaje jedynie na wzrost komórki, czy też zachodzi w tym czasie głębsza reorganizacja plasm, mająca za zadanie wyrównanie zmian, jakie zaszły w czasie okresu głodowego.



TABLICA IX.

Zmiany w zdolności mnożenia się wycoczków w kulturze N.

№ kolejny obserwacji	Liczba dni ubiegłych do czasu izolacji	Liczba wycocz- ków w 1 cm <sup>3</sup> kultury w chwili izolacji	Liczba podzia- łów na dobę dla każdej linii			Liczba po- działów prze- ciętna na do- bę w czasie izolacji
			I dz.	II dz.	III dz.	
1	7	1934	3	—	—	3.00
			3	—	—	
2	11	2714	2	3 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	—	2.81
			2	4	—	
3	15	2740	1	2	3	2.00
			1	3	—	
4	19	1876	1	3	—	2.19
			1	3 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>	—	
5	23	1267	0	3	—	1.50
			0	3	—	
6	27	166	1	3	—	2.00
			1	3	—	
7	31	72	0	3	—	1.50
			0	3	—	

Dodajmy, że po umieszczeniu wycoczków na klockach powracają one wkrótce do normalnego wyglądu i wymiarów, jak to stwierdzają czynione przez nas pomiary. Podobne rezultaty, otrzymaliśmy dla kultury A, aczkolwiek spadek „podzielności“ był jeszcze większy: i tak po 39 dniach dla 3 linii odizolowanych do klocków notujemy następujące liczby podziałów: 0.0 (śmierć); 1, 1, 1<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, 2, 3; 1, 1, 2, 3<sup>1</sup>/<sub>4</sub>.

Z przytoczonych danych wynika, że czas, po upływie którego następuje u *Colpidium*, umieszczonego w dobrych warunkach, powrót do normalnego rozmnażania się, przy zachowaniu zwykłych rozmiarów i wyglądu, zależy od stadium rozwojowego kultury, z której dane osobniki pochodzą. Wypływają stąd wskazówki, dotyczące zarówno późniejszych naszych doświadczeń, jak i wogóle powstawania i rozwoju kultur, czy też zbiorowisk naturalnych pierwotniaków. O ile np. na początku istnienia kultury nasuwają się pewne trudności dla rozwoju wycoczków wskutek braku pokarmu, lub wskutek szkodliwego działania produktów przemiany materji, to, jak wynika z naszych obserwacji, przy



wpuszczaniu do niej wymoczków, osobniki ze stadjum kultury bardziej posuniętego, mniej będą miały szans do przetrwania i mnożenia się. To samo możemy obserwować odświeżając kultury stare przez dodawanie pożywki.

Kończąc ten rozdział, zaznaczamy jeszcze raz, że ilościowym i objętościowym zmianom w rozwoju kultur towarzyszą zmiany w zdolności mnożenia się wymoczków; mianowicie, zdolność do rozmnażania się w miarę trwania kultury stopniowo zmniejsza się.

RÉSUMÉ.

Jadwiga et Teodor Vieweger

**Recherches sur les causes du développement des cultures de *Colpidium colpoda* Ehrbg. P. I<sup>a</sup>.  
L'influence de la nourriture et du jeun.**

(Du Laboratoire de Physiologie de la Société des Sciences de Varsovie).

Communication annoncée le 24. IX. 1917.

Présentée par K. Białaszewicz.

Les auteurs ont étudié le développement de *Colpidium* dans l'infusion de foin (600 cm.<sup>3</sup>). Dans le milieu renfermant 0,0193 — 0,0232 mg N par cm.<sup>3</sup>, la vitesse de multiplication des infusoires pendant 5—6 premiers jours est à peu près constante; le volume des infusoires pendant ce temps reste dans les limites ordinaires de la grandeur de *Colpidium* mis dans les conditions favorables de la nourriture. 6 jours après la multiplication des infusoires est ralentie et commence, la réduction du volume du corps. Dès lors l'augmentation du nombre d'individus marche aux dépens du volume du corps. Le maximum du volume du corps de la totalité d'infusoires dans la culture est atteint au bout de 8—10 jours; maximum du nombre de *Colpidium* — au bout de 14—19 jours. L'action des facteurs nuisibles de la culture (le manque de la nourriture) conduit maintenant à la réduction de plus en plus prononcée de la taille, et enfin à la mort des infusoires.



9. Kazimierz Kowalewski:

### Trzeciorzęd w dolinie Opatówki i Koprzywianki.

Komunikat zgłoszony dn. 20 Lutego 1918 r.

Przedstawił J. Lewiński.

#### WSTĘP.

Południowo wschodnia część gór Świętokrzyskich należy do stosunkowo mało zbadanej przestrzeni naszego kraju. O ile utwory paleozoiczne w ostatnich czasach doczekały się szczegółowych badań, o tyle trzeciorzędowe stale były ignorowane. Przed laty bardziej zachodnia część terenu tego badana była przez prof. Kontkiewicza, którego zakres badań sięgał do linii Raków, Staszów, Połaniec. Teren dalej na wschód, po za wzmiankami u Puscha i Siemiradzkiego, — badany nie był. Pragnąc choć w części zapłacić tę lukę, zwiedziłem obszar, zawarty między dolinami rz. Opatówki i Koprzywianki.

Najstarsze dane o trzeciorzędzie tutejszym zawdzięczamy Puschowi (1). Badacz ten, na podstawie ówczesnego stanu nauki, wyróżnił tu warstwy starsze, zaliczane przez niego do wapienia gruboziarnistego (Grobkalk), mającego być jednoznaczny z środkowym eoceniem paryskim; oraz młodsze, t. zw. trzeciorzędową grupę piaskowca i piasku muszlowego (Tertiärer Muschelsandstein u. Sand), dzielone z kolei na kilka poszczególnych ogniwi.

Siemiradzki (3), w badaniach swych nad wschodnią częścią gór Świętokrzyskich, opisał szereg odłoneń trzeciorzędu, zaliczając zielonkawe piaskowce Tułkowic do eocenu, a cerithiowe piaski okolic Sandomierza do warstw kaizerwaldzkich okolic Lwowa (4); zmienia on w kilkanaście lat później swe zdanie, zaliczając występujące tu utwory do miocenu i sarmatu (5). Luźną wzmiankę o trzeciorzędzie tutejszym podał Friedberg (8), zaznaczając obecność w Dmosicach pod Koprzywnicą warstw



sarmatu i drugiego piętra śródziemnomorskiego. Teren ten badał i Skrinnikow, pozostawiając po sobie, w Zakładzie Geologicznym Uniwersytetu, nieoznaczony i dość chaotyczny materiał, niepozwalający stwierdzić do jakich doszedł rezultatów.

### OPIS ODSŁONIEŃ.

Do bardziej północnych odsłonień tutejszego trzeciorzędu zaliczyć można wychodnie we wsi Karwów p. Opatowem. Punkt ten znany był już Puschowi; aczkolwiek w jego opisie Polski o stanowisku tym nie znajdujemy żadnej wzmianki, jednakże w atlasie, dodanym do wyżej wzmiankowanego dzieła, punkt ów jest zaznaczony i zaliczony do grupy oolitowej gruboziarnistego wapienia. Na pd. od wsi wznosi się wzgórze, złożone całkowicie z utworów trzeciorzędowych, na którego zboczu z pod powłoki loessu i moreny wychylają się głazy i nieregularne odłamy zlepieńca wapiennego. Skala ta składa się z krągłych ziarenek wapiennych z domieszką obtoczonego kwarcu, spojonych silnie kalcytową masą. Zawiera ona dość często obtoczone głaziki wapienia litotamniowego, rzadziej marglu z próżniami po *Bittium deforme* Eichw. Fauna zlepieńca, zachowana przeważnie w postaci próżni lub odlewów wewnętrznych, jest następująca: *Ervilia podolica* Eichw., *Cardita rudista* Lmk., *Bittium deforme* Eichw., *Trochus* sp.

Nieco wyżej, prawie na szczycie wzgórza, eksploatują kilka skałek zlepieńca, przykrytych powierzchownie loessem i moreną. Jedna z tych skałek przechodzi ku dołowi w drobnoziarnisty piaskowiec z ciemnymi plamkami, zawierający tuż na granicy zlepu i piaskowca próżnie po skorupkach *Bittium deforme* Eichw. Zlepieńce zaś posiadają faunę analogiczną poprzedniej: *Bittium deforme* Eichw., *Cardita rudista* Lmk.

W tym samym kierunku, na zboczu tegoż wzgórza, tuż przy rozszerzającej się gardzieli zalesionego parowu istnieje drobne odsłonięcie zlepow, nieco odmiennego typu. Materiał tutejszy nie uległ tak silnemu scementowaniu jak w odsłonięciach poprzednich; miejscami skala ta przechodzi w żwirek, zawierający prócz litotamniowego obtoczonego materiału, drobne otoczaki krzemienia i zwiętrzałego kwarcytu. Żwirki i zlepy te zawierają: *Ervilia podolica* Eichw., *Cardium* sp. (z gr. *obsoletum*



Eichw.), *Pecten elegans* Andr., *Ostrea* sp., *Bittium deforme* Eichw., *Bulla Lajonkaireana* Bast., *Trochus* sp., *Rissoa* sp., *Biloculina* sp.

Na podstawie swoistej, choć ubogiej fauny zlepieńce i piaszkowce te zaliczam do utworów wieku sarmackiego. Występujące formy tortońskie jak: *Cardita rudista* Lmk., *Pecten elegans* Andr., *Ostrea* sp. posiadają kontury mocno zaokrąglone, są otarte i występują przeważnie w ułamkach; znajdują się one przeto na złożu drugorzędnym.

„Skalki“ zlepieńca występują na wschodnim zboczu wyżyny, tuż przy drodze z Karwowa ku pd., do pokładów dewonu i zawierają: *Bittium deforme* Eichw., *Cardium* (?) sp.

Między temi skalkami trafiają się i inne, składające się z białego, mocno wapnistego piaszkowca, z nieoznaczalnym detrytem muszlowym.

Z Malic Pusch podaje wiadomość (1) o występowaniu nad brzegiem strumienia burowęgla ziemistych, zawierających kawałki drzewa bitumicznego, spoczywających na żółtym dość miękim piaszkowcu. Odslonięcia owego brak obecnie; jedynie w bliskości prawdopodobnie tego miejsca, t. j. na zachód od Malic, koło strumieni, znajdowałem skalki i głązy zbitego zlepu sarmackiego, z następującą fauną: *Cerithium (Bittium) deforme* Eichw., *Ervilia podolica* Eichw., *Cardium* cf. *obsoletum* Eichw., *Modiola* cf. *volhynica* Eichw.

Na zboczu wzgórza, na płdn.-zach. od wsi Męczennica, widać pokład burowęgla. Węglel ten ziemisty rozpada się na drobne kawałki, na powierzchni których widzieć można drobne kryształki gipsu.

W Pielaszowie Pusch zaznacza obecność piaszków glaukonitowych (1); odslonięcie to nie jest mi znane. Na płn.-zachód od wsi Słaboszowice, na szczycie wzgórza widnieje kilka skałek zbitego zlepu Karwowskiego typu. Nieco niżej na zboczu tegoż wzgórza—odkrywka. Pod warstwą gleby widzimy:

- 1) Margiel piaszczysty ze skupieniami białego piaszkowca wapiennego . . . . . 2.00 m.
- 2) Biały drobnoziarnisty syпки piasek kwarcowy z ziarnkami glaukonitu, przedzielony drobną warstwą żółtego piasku tegoż samego składu 0.50 m.



W północnej stronie wsi Słaboszowice, na zboczu wzgórza dominującego nad wsią, istnieje odkrywka:

- |   |         |
|---|---------|
| 1) Loess . . . . .  | 0.80 m. |
| 2) Morena . . . . .   | 0.30 m. |
| 3) Margiel litotamniowy, poprzedzielany nieregularnymi cienkimi warstewkami zielonawego ilku (produkt rozkładu) . . . . . | 5.00 m. |

z następującą fauną tortońską: *Lithothamnium* sp., *Ostrea cochlear* Poli., *Lucina* cf. *borealis* L., *Corbula gibba* Olivi., *Ervilia* sp., *Bittium deforme* Eichw., *Trochus* cf. *affinis* Eichw.

- 4) Drobnodziarnisty piasek biały kwarcowy z drobnymi otoczkami kwarcytu i bogatą fauną: 0.10 — 0.15

*Ostrea cochlear* Poli., *Pecten elegans* Andrż., *Pecten Neymayri* Hilb., *Pectunculus pilosus* L., *Pectunculus glycymeris* L., *Lucina borealis* L., *Venus* sp., *Saxicava* sp., *Corbula gibba* Olivi., *Dentalium incurvum* Reuss., *Trochus patulus* Brocc., *Trochus* cf. *biangulatus* Eichw., *Trochus* cf. *affinis* Eichw., *Turritella Pythagoraica* Hilb., *Turritella Pythagoraica* v. *Raboe* Niedźw., *Vermetus intortus* Lmk., *Natica helicina* Brocc., *Rissoa* cf. *turritella* Eichw., *Rissoa* sp. sp., *Pyramidella plicosa* Bronn., *Turbonilla* cf. *gracilis* Brocc., *Bittium deforme* Eichw., *Cerithium distinctissimum* Eichw., *Columbella* sp., *Bellardiella reticulata* Reuss., *Teres anceps* Eichw., *Raphitoma* sp., *Bulla Lajonkaireana* Bast., *Bulla* cf. *convoluta* Brocc., kleszcze kraba, kolce jeża, *Polystomella* sp.

- 5) Drobnodziarniste, żółtawo-szare i zielonkawe z domieszką glaukonitu piaski, o niewyraźnym uwarstwieniu . . . . . 1.50 m.

Na zachód od Słaboszowic, za Opatówką, na polach na wzgórzu, trafiają się głazy zbitego zlepieńca karwowskiego typu, oraz bardziej drobnodziarniste i piaszczyste z *Bittium* sp. Kiedyś, jak mi łaskawie zakomunikował p. Samsonowicz, na polu tym wznosiło się kilka skałek zlepieńca wapiennego, które wyeksploatowano doszczętnie.

W Międzygórzu, pg. Puschy, (1) na białym piasku trzeciorzędowym, z zielonemi ziarnkami, leży żółty il łupkowy, na którym spoczywa 6—8 cali kasztanowatej gliny, ze sferoidalnymi



konkrecjami izabellowego marglu; w górnej części parowu pokład ten grubieje, staje się bardziej piaszczysty i zawiera ziemisty burowęgiel, oraz drobne bryłki blaszkowatego gipsu. Na utworze tym leży 20 cali żółtego piaszczystego łupku, na którym spoczywa zlepieniec muszlowy.

Siemiradzki zaś (3) podaje następujące dane: „Do wsi Międzygórze przylega od płn. strony stroma góra, złożona z utworów miocenicznych i dyluwjalnych. U stóp tej góry widnieje biały margiel; wyżej napotykamy luźne bryły konglomeratu cerithiowego; o 50' nad poziomem wioski zaczynają się napływy dyluwjalne; najniżej — warstwa zlepieńca, złożonego z zaokrąglonych kamyków skał krystalicznych zlepionych wapiennym cementem“. Nieco później, (5) Siemiradzki podaje przekrój Puschy, nadmieniając, że zlep muszlowy zawiera *Cerithium deforme*, *Ervilia podolica*, *Cardita* sp. Jak widzimy z powyższych danych, przekroje obu autorów nieco się nie zgadzają, prawdopodobnie dla braku dobrego odsłonięcia. Odkrywkę ową znalazłem należycie odsłoniętą, mogę więc podać bardziej szczegółowe dane. Na szczycie wzgórza, w płn. stronie wsi, znajdują się liczne „skałki“ karwowskiego zlepieńca sarmackiego, z *Bittium deforme* Eichw., *Ervilia podolica* Eichw.

Niżej w odkrywce, pod warstwą gleby, zalegają:

- 1) Margiel litotamniowy, częściowo zbity, częściowo zwietrzały, zawierający: . . . . . 1.00 m.

*Pecten elegans* And., *Pectunculus* sp. (młoda forma), *Cardita rudista* Lmk., *Ostrea cochlear* Poli., *Arca* (?) sp., *Leda fragilis* Chemn., *Cardium* sp., *Ervilia* sp., *Bittium deforme* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Acmaea* cf. *laevigata* Eichw., *Rissoa* sp. sp., *Serpula* sp., *Bryozoa*.

- 2) Il ciemno-brunatny (z domieszką burowęgla) . . . 1.00 m.  
 3) Żwirki (kwarcytowe), piaski żółtawo-zielonkawe z okrucami glaukonitu, zielonkawe piaski ilaste ze składem poprzednim, warstwujaące się nieregularnie . . . . . 0.50 m.  
 4) Piaski żółtawo-popielate, ku dołowi warstwujaące się z iłem piaszczystym z łuszczkami miki . . . 5.00 m.  
 5) Ily zielonkawo-szare z domieszką miki . . . . . 0.20 m.



- 6) Zielonkawo-szare warstwowane piaski ilaste z okrucami glaukonitu i miki . . . . . 1.00 m.
- 7) Piasek z gruzelkami marglu, z domieszką glaukonitu . . . . . 2.00 m.
- 8) Ciemno-brunatne burowęgłowe ily piaszczyste, oraz piaski ilaste z niewyraźnymi śladami roślin, z cienkimi warstewkami lignitu . . . . . 3.00 m.
- 9) Il popielato żółty, ku dołowi jaśniejszy, z doskonale wykształconymi kryształami gipsu . . . . . 0.30 m.
- 10) Drobnodziarniste białe kwarcowe piaski glaukonitowe, z żółtawymi smugami . . . . . 2.00 m.

Niżej, koło tej odkrywki, zalegają pod moreną potężne bloki zlepieńca, złożonego z brył obtoczonego kwarcytu, dochodzących wielkości pięści i więcej. W zlepieńcu tym, zawierającym próżnie wypełnione kalcytową i aragonitową masą krystaliczną, znalazłem następujące formy: *Ostrea* sp. (mocno obtoczona), *Bittium deforme* Eichw., *Trochus* sp.

Blokowy zlepieniec ten przechodzi ku dołowi w znany nam margiel litotamniowy, co pozwala przypuścić, że ongi zlepieniec znajdował się w stropie marglu litotamniowego, usunięty zaś został (przez lodowcową działalność?) ze swego pierwotnego miejsca. Miąższość zlepieńca dochodzi do pół metra.

Na pld. tej samej wsi, przy końcu parowu istnieje odkrywką; pod warstwami dyluwjalnymi dwumetrowej miąższości zalegają:

- Białe piaski glaukonitowe, żółtawe, bardziej gruboziarniste ku górze, zawierające czasami krągłe głaziki czarnego krzemienia . . . . . 9.00 m.

Między Międzygórzem a Pęczynami Pusch (1) znajdował utwory burowęgłowe. Z Pęczyn podaje Siemiradzki (3) następujące przekroje: Przy upustach młyna w Pęczynach:

- 1) Dyluwjum
- 2) Białe piaski z ziarnkami glaukonitu.

Obok samego młyna:

- 1) Dyluwjum
- 2) Biały margiel . . . . . 1'
- 3) Żółtawa glina . . . . . 3'



- 4) Czarny ił łupkowy z domieszką torfu 4'
- 5) Biały piasek z żyłkami pomarańczowymi 20'

W pld. zach. stronie, tuż koło młyna, w częściowo zasypanej odkrywce, zdołałem stwierdzić następujące warstwy:

Ił czarny z warstewkami brunatnego węgla	0.25 m.
Gлина piaszczysta szara . . . . .	0.50 m.
Biały piasek kwarcowy . . . . .	0.10 m
Szare piaski warstwowane . . . . .	1.00 m.
Białe piaski glaukonitowe . . . . .	1.00 m

Od Komorny do Zagród ciągnie się parów, pñ.-wschodnia ściana którego złożona jest z trzeciorzędowych utworów. Idealny profil pg. Pusch a przedstawia się następująco: (1)

- 1) Loess.
- 2) Zlepieniec pizolitowy z *Trochus sulcatus* i *turgidulus*.
- 3) Ławica ostryg z połamanami litotamniami.
- 4) Kredowaty wapień z plastyczną gliną.
- 5) Zwięzły zlepieniec muszlowy z *Venericardia*, *Pecten*, *Pectunculus*, *Dentalium*, *Trochus* i *Cerithium Lima*.
- 6) Żółte i białe piaski z licznymi skamieniałościami jak: *Ostrea*, *Venericardia*, *Pecten* oraz *Pectunculus*.
- 7) Zielony sypki piasek bez muszli z dużymi kulistemi zielonemi konkrecjami wapnistego piaskowca z *Venericardia*.
- 8) Żółte i brunatne warstwy ilaste z domieszką burowęgla
- 9) Biały piasek w głębszych częściach parowu.

Siemiradzki (3), przytacza z pierwszego parowu od strony Tułkowic następujący przekrój: u dołu zielonkawo biały piasek drobnoziarnisty, nad nim warstwa zielonkawo-szarego piaskowca około 10' gruba, wyżej warstwa białego piasku drobnoziarnistego — 30'. Na dnie ukazuje się siwy ił łupkowy.

Jako faunę z warstw zielonkawego piaskowca, Siemiradzki podaje *Venericardia imbricata* oraz *Pectunculus* sp. Na podstawie danej fauny, uważa on warstwy te za eoceńskie, zaznaczając, że formy zachowane jako jądra nie mogą służyć do rozstrzygnięcia kwestji ich wieku.

W „Geologii ziem polskich“ Siemiradzki podaje następujący profil Zagrody — Tułkowiec:

- 1) Zlep sarmacki z *Trochus celinae*, *Cerithium pictum*.
- 2) Ławica z *Ostrea digitalina*.



3) Biały kredowaty wapień z litotamniami.

4) Zlep muszlowy b. zwięzły ze skorupami *Cerithium deforme*, *Pectunculus*, *Dentalium*, *Trochus*, *Ostrea*.

5) Ławice białego lub żółtawego nieco wapnistego piaskowca z ułamkami ostrzyg i ośrodkami *Cardium edule* (?).

6) Bladozielony piasek kwarcowy z wydzielinami szarawozielonego piaskowca w postaci kulistych konkrecyj.

7) Biały piasek i il lignitowy.

Faktycznie dobre odsłonięcia posiadamy już koło Komorny. Na zboczach doliny od Komorny do Zagród widzimy wychylające się z pod gleby skałki litotamniewego porowatego zlepieńca, składającego się z otartych i pokruszonych gałązek nulliporowych, spojonych wapiennym lepiszczem. Skała ta, nader porowata, przypomina nieco tufy nowoczesne. W jednym miejscu prawie na szczycie, — odsłonięcie kredowatego marglu, znajdujące się w stropie zlepieńca. Tuż koło tego odsłonięcia, porośłego częściowo roślinnością, znajdujemy dość świeże odłamy owego marglu, przechodzące w zlep muszlowy złożony z *Bittium deforme*, *Trochus* sp., *Ervilia* sp., *Natica* sp. Dalej, w drobnych parowach bocznych:

1) Zlepieńiec karwowskiego typu z *Bittium* cf. *deforme* Eichw. . . . . 0.50 m.

2) Zlepieńiec porowaty litotamniewy z *Bittium deforme*, *Trochus* sp. oraz następującymi obtoczonemi formami tortonu: *Ostrea cochlear* Poli, *Cardita rudista* Lmk., *Pectunculus* cf. *pilosus* L., *Isocardia cor* L., *Venus* sp. ind., *Vermetus arenarius* L. (?), *Turritella* (?) sp. . . . . 6.00 m.

3) Kredowaty margiel z rzadkimi litotamniami.

Tuż przy wsi Zagrody, teren obniża się; podchodzimy pod same zbocza doliny rzecznej, gdzie przy drodze Zagrody — Tułkowice stwierdzić można następujący profil:

1) Kredowaty margiel mocno zwietrzały, z rzadkimi litotamniami zawierający: *Ostrea cochlear* Poli, *Bittium deforme* Eichw., *Trochus* sp. . . . . 0.50 m.

2) Żółtawe piaski kwarcowe z nieregularnymi skupieniami piaskowca . . . . . 0.26 m.

W piaskach tych i skupieniach piaskowca występują następujące formy tortonu: *Ostrea cochlear* Poli, *Pecten Neumayri* Hilb., *Modiola Hoernesii* Reuss., *Nucula nucleus* L., *Lu-*



*cina* aff. *borealis* L., *Lucina dentata* Bast., *Cardium* aff. *praechinatum* Hilb., *Cardium* cf. *irregulare* Eichw., *Ervilia* sp., *Solen* cf. *subfragilis* Eichw., *Corbula gibba* Olivi, *Dentalium incurvum* Reuss, *Trochus patulus* Brocc, *Trochus* sp., *Natica millepunctata* Lmk., *Ringicula buccinea* Desh., pancerz kraba, *Spatangus* (?) sp., *Bryozoa*, tworzące liczne kolonje, oraz otwornice: *Polystomella* sp., *Quinqueloculina* sp., *Triloculina* sp.

3) Piasek zielonkawy . . . . . 0.50 m.

4) Białe piaski glaukonitowe . . . . . 1.00 „

Nieco dalej, na pldn.-wschód od wsi, w drobnym parowie:

1) Zwietrzały kredowaty margiel z *Ostrea cochlear* Poli, *Bittium deforme* . . . . . 0.80 m.

2) Białe piaski kwarcowe z okruchami glaukonitu oraz ze skupieniami płytowemi piaskowca tegoż składu : . . . . . , 0.50 „

Piaski i skupienia te zawierają: *Ostrea cochlear* Poli, *Pecten Neumayri* Hilb., *Nucula nucleus* L., *Lucina borealis* L., *Lucina dentata* Bast., *Cardium* aff. *praechinatum* Hilb., *Corbula gibba* Olivi, *Isocardia cor* L. (?), *Dentalium incurvum* Reuss., *Vermetus intortus* Lmk., *Bryozoa*, *Spatangus* (?) sp. (całkowicie zachowany), *Polystomella* sp., *Triloculina* sp., *Quinqueloculina* sp.

Na zboczach drogi, wiodącej do Tułkovic, prawie już w dolinie istnieje następujący przekrój:

1) Morena . . . . . 1.00 m.

2) Białe piaski glaukonitowe z cienkimi warstewkami scementowanego piasku ku górze . . . 3.00 „

Tuż prawie przy wyjściu na dolinę rzeczki istnieje dość ciekawy przekrój na obu ścianach drogi. Ściana południowa, pod warstwą gleby, składa się z białego piasku glaukonitowego, miąższości do pięciu metrów; przeciwległa zaś, tej samej wysokości złożona jest wyłącznie z marglu lodowcowego.

W zachodniej stronie Zagród, tuż przy drodze prowadzącej do Pęczyn:

1) Loess . . . . . 0.50 m.

2) Białe piaski glaukonitowe, z domieszką różowych ziarenek ortoklazu, zawierające dość duże odłamy lokalnych skał



trzeciorzędowych, składające się z żółtawego piaskowca ze znaną fauną: *Cardium* aff. *praechinatum* Hilb., *Lucina borealis* L., *Venus* sp.

Tak więc profil Zagrody-Komorna, składa się z następujących warstw:

- a) Dyluwjum.
- b) Sarmat.
- 1) Margiel kredowaty z *Bittium deforme*.
- 2) Zlepieniec karwowskiego typu.
- 3) Porowaty zlepieniec litotamniowy z obtoczoną fauną tortonu.
- c) Torton.
- 4) Zwiertzałe margle litotamniowe.
- 5) Piaski ze skupieniami piaskowca, przepełnione muszlami.
- 6) Zielonkawe i białe piaski glaukonitowe.

Na wschód od Jankowic, prawie przy brzegu rzeczki widzimy następujący przekrój:

- 1) Loess . . . . . 1.00 m.
- 2) Morena . . . . . 0.50 „
- 3) Szare margle litotamniowe z *Trochus* sp. . 1.50 „

Na linii między Osinkiem, a Kicharami, na lewym brzegu Opatówki występują liczne odsłonięcia sarmatu. W pierwszych odkrywkach od strony Kichar, na zboczach doliny rzeczki, w drobnych wąwozach odsłaniają się następujące profile:

I.

- 1) Morena . . . . . 2.00 m.
- 2) Zlep litotamniowy dość drobnoziarnisty zawierający obtoczone skorupy *Ostrea cochlear* Poli, *Pecten elegans* And., przechodzący często w żwirek . . . . . 1.50 „
- 3) Drobnoziarnisty zlep wapienny słabo spojony z okruchami muszli oraz otwornicami (*Polystomella*, *Biloculina*) . . . . . 2.00 m.
- 4) Biały piasek wapienno-kwarcowy.

II.

- 1) Zlepieniec wapienny, drobnoziarnisty z otwornicami, o uwarstwieniu przekątnym . . . . . 2.50 „



2) Biały piasek wapienno-kwarcowy . . . . . 0.20 „

3) Zlepieniec o składzie identycznym z poprzednim 0.30 „

Bliżej Kichar:

1) Morena . . . . . 0.50 „

2) Białe piaski wapienno-kwarcowe z detrytusem muszlowym, z warstewkami piaskowca tegoż składu . . . . . 3.00 „

Dalej wprost Kichar:

1) Gruboziarnisty zlepieniec litotamniowy, przechodzący ku dołowi w bardziej drobnoziarnisty, zawierający obtoczone skorupy *Ostrea cochlear* Poli . . . . . 1.50 „

1) Białe piaski wapienne, występujące partjami jako podrzędne warstwy piaskowca . . . . . 8.00 „

Z Gałkowic pg. zbioru Skrinnikowa podać mogą następujące przekroje:

I.

1) Loess z konkrecjami wapiennymi.

2) Morena z głazami.

3) Zlepieniec drobnoziarnisty wapienno-kwarcowy.

4) Zlepieniec bardziej drobnoziarnisty z otwornicami.

II.

1) Loess.

2) Żwirek drobnoziarnisty wapienno-kwarcowy z otartymi odłamkami *Pecten*, *Dentalium* (?) sp.

3) Zlepieniec bardziej drobnoziarnisty tegoż składu.

4) Żółtawy piasek kwarcowy z *Biloculina*, *Triloculina*, *Bryozoa*.

5) Wapienno-kwarcowy zlepieniec drobnoziarnisty z *Polystomella*, *Biloculina* sp.

Na polach koło tej wsi trafiają się głazy następującego petrograficznego składu:

1) Piaskowce wapienne drobnoziarniste, dość zbite, z jądrami po *Cardium* cf. *obsoletum* Eichw.

2) Piaskowce wapienne dość miękie z drobnymi okruchami muszli.

3) Gruboziarniste piaski wapienno-kwarcowe z *Ervilia podolica* Eichw.



Tuż koło Gałkowiec w wąwozie na polu — drobne odsłonięcie. Widać tam wapienne piaski drobnoziarniste z *Ervilia podolica* Eichw., przechodzące często w podrzędne warstwy piaskowca. Od wsi Osinek, Kichary ku Dwikozom, po obu stronach rzeczki występują liczne odsłonięcia sarmatu. W pierwszej od Dwikoz, w drobnym parowie po prawej stronie rzeczki:

- 1) Morena z głazami . . . . . 1.00 m.
- 2) Żwirek sarmacki, przechodzący w dość sypki zlepieniec . . . . . 0.60 „
- 3) Biały piasek wapienno-kwarcowy bez fauny . 0.50 „
- 4) Białe piaski z silną domieszką połamanych i całkowitych form sarmatu:

*Ervilia podolica* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Rissoa inflata* And., *Rissoa* sp., *Biloculina* sp., warstwujące się przekątnie z drobnymi warstewkami żwirku wapienno-kwarcowego:

*Ervilia podolica* Eichw., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Bulla Lajonkaireana* Bast. oraz obtoczone odłamki mięczaków tortonu . . . . . 1.00 m.

- 5) Zlep drobnoziarnisty z *Ervilia podolica* Eichw. . . . . 1.00 „

Nieco dalej, po tej samej stronie rzeczki:

- 1) Loess . . . . . 3.00 „
- 2) Żwirki sarmackie warstwowane przekątnie z białymi piaskami z następującą fauną:

*Bittium deforme* Eichw., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw.

Dalej na zachód w dolinie prawego brzegu rzeczki tuż przy drodze znajduje się dobrze odsłonięta odkrywka.

- 1) Morena z głazami . . . . . 1.50 m.
- 2) Warstwowane margle dyluwjalne (iły) . . . 0.70 „
- 3) Żwir (zlepieniec) sarmacki z płaskimi otoczkami marglu i ciemnego krzemienia i fauną:

*Ervilia podolica* Eichw., *Modiola* sp., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Bulla* cf. *Lajonkaireana* Bast., *Trochus* sp., *Rissoa inflata* And., *Rissoa* sp., wreszcie otoczone skorupy form tortonu.



4) Sypki piaskowiec ze znaczną domieszką części wapienistych z *Modiola volhynica* Eichw.

5) Zlepieniec, przechodzący w żwirek wapienno-kwarcowy z głazikami marglu i obtoczonymi formami tortonu; zawiera on faunę: *Potamides mitralis* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Pectunculus* cf. *pilosus* L., *Cardita rudista* Lmk.

6) Warstwa otoczaków marglowych przepelniona obtoczonymi formami tortonu . . . . . 0.50 m.

*Cerithium rubiginosum* Eichw., *Cerithium* aff. *rubiginosum* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Vermetus intortus* Lmk., *Ervilia podolica* Eichw., *Cardium obsoletum* Eichw., *Mactra* sp.

oraz obtoczone:

*Lithothamnium* sp., *Ostrea* sp., *Pectunculus pilosus* L., *Cardita rudista* Lmk., *Isocardia cor* L., *Pecten elegans* And. . . . . 0.15 m.

Nadto w otoczakach marglowych znajdować można *Bittium deforme* Eichw., oraz *Trochus* sp.

7) Zlepieniec wapienno-kwarcowy bez fauny . . . 3.00 m.

Niżej u stóp wzgórza piaski kwarcowe z *Ervilia podolica* Eichw., *Lucina Dujardini* Desh.

Dalej koło dworu w Dwikozach.

1) Żwirek (zlep) z obtoczonymi kawałkami muszli z ułamkami:

*Ervilia podolica* Eichw., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw. . . . . 1.50 m.

2) Biały piasek wapienisty z fauną:

*Ervilia podolica* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Mohrensternia angulata* Eichw., *Rissoa* cf. *inflata* And., *Rissoa* sp., *Bulla* cf. *melitopolitana* Sokol., *Bryozoa*, *Polystomella*, *Triloculina*, *Quinqueloculina*, *Dentalina* (?) sp.

Po drugiej stronie rzeczki:

1) Morena . . . . . 1.50 m.

2) Zlepieniec (żwirek) sarmacki, złożony z obtoczonych i połamanych form tortonu, zawierający:

*Ervilia podolica* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Pleurotoma Döderleini* Hoern.

3) Zielonkawo-szare piaski, przechodzące często w piaskowce:



*Ervilia podolica* Eichw., *Maetra* sp., *Cardium* cf. *praeplicatum* Hilb., *Bulla Lajonkaireana* Bast., *Rissoa* sp.

Dalej w kierunku wsi Dwikozy po prawej stronie rzeczki, w licznych odślonięciach stwierdzić można zmniejszającą się stale grubość żwirków, przechodzących koło samej wsi w zielonkawę piaski z fauną:

*Ervilia podolica* Eichw., *Lucina Dujardini* Desh., *Cardium obsoletum* Eichw., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Buccinum duplicatum* Sow., *Rissoa* sp., *Polystomella*, *Biloculina*, *Miliola* sp. sp.

Na pld. Dwikoz, tuż prawie koło drogi Dwikozy-Sandomierz, na zachodnim zboczu wyżyny, pod warstwą dyluwjalnych margli warstwowanych (0.50) zalegają:

1) Piaski z warstewkami żwirku (0.05—0.15), warstwujaące się przekątnie . . . . . 1.00

Piaski te dostarczyły mi następującej fauny:

*Ervilia podolica* Eichw., *Lucina Dujardini* Desh., *Solen subfragilis* Eichw., *Maetra* sp., *Potamides mitralis* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Bulla Lajonkaireana* Bast., *Neritodonta picta* Fer., *Rissoa* sp., *Polystomella* sp., *Foraminifera* gen. gen.

W żwirkach zaś występują:

*Ervilia podolica* Eichw., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Cerithium* aff. *rubiginosum* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Dorsanum duplicatum* Sow., *Neritodonta picta* Fer., *Trochus* sp., *Mohrensternia* cf. *angulata* Eichw., *Rissoa inflata* And., *Rissoa* sp., *Serpula* sp., obtoczone kawałki mięczaków tortońskich.

2) Piasek drobnoziarnisty wapienno-kwarcowy z drobnymi otoczkami krzemienia:

*Cerithium rubiginosum* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Rissoa* sp., *Ervilia podolica* Eichw., *Cardium obsoletum* Eichw., *Modiola volhynica* Eichw., *Serpula* sp., *Triloculina* sp. . . . . 3.00

Na pln-zachód wsi Rzeczyca Mokra, koło drogi, prowadzącej do dworu, pod warstwą gleby, odślaniają się:

1) Piaski z drobnymi warstewkami skamielin sarmatu:

*Ervilia podolica* Eichw., *Cardium obsoletum* Eichw.,



*Cardium praeplicatum* Hilb., *Lucina Dujardini* Desh., *Mactra* sp., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Dorsanum duplicatum* Sow., *Dorsanum duplicatum* v. *minor* Friedb., *Mohrensternia angulata* Eichw., *Rissoa inflata* And., *Rissoa* sp., *Pleurotoma* sp., *Trochus* sp., *Natica helicina* Brocc, *Bryozoa*, *Biloculina*, *Spiroculina*, *Textularia*, *Polystomella* . . . 0.80

2) Przechodzące w żwirak, tworzący miejscami zlepieniec.

*Ervilia podolica* Eichw., *Cardium* sp., *Modiola volhynica* Eichw., *Ostrea* sp. (obtoczone kawałki), *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Bulla* sp., *Mohrensternia angulata* Eichw., *Rissoa inflata* v. *striata* Eichw., *Rissoa* sp., *Biloculina*, *Triloculina* . . . . . 0.25 m.

3) Warstewka piasku, przechodząca miejscami w piaskowiec:

*Cardium obsoletum* Eichw., *Modiola marginata* Eichw., *Modiola volhynica* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Rissoa* sp., *Serpula* sp., *Foraminifera* gen. gen. . . . 0.10 m.

4) Piaskowiec wapienny z otoczakami wapnistego krzemienia, przepiętniony skorupkami *Ervilia podolica* Eichw.

Nadto na hałdach znajdowałem pięknie zachowane formy *Pleurotoma Döderleini* Hoern. oraz *Murex* sp. Do punktów bardziej izolowanych i nieznanymi mi dokładnie należą Winiary pod Zawichostem. Dzięki uprzejmości p. Czarnockiego, otrzymałem stamtąd skamieliny zebrane przez p. Mazurka. Przyczepione jeszcze cząstki skalne pozwalają stwierdzić obecność żwiraków i piasków normalnego typu:

*Ervilia podolica* Eichw., *Lucina Dujardini* Desh., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Dorsanum duplicatum* Sow., *Pleurotoma Döderleini* Hoern.

Tuż przy drodze Opatów-Sandomierz, koło wsi Chwałki, na płn.-zach. od wsi występuje:

1) Morena. . . . . 1.00 m.

2) Piaski, warstwujące się ze żwirkiem wapiennym dość drobnoziarnistym z otwornicami: *Polystomella*, *Biloculina* sp.

W tej samej wsi, pg. materiału Skrinnikowa, stwierdzić można następujące przekroje:

1) Loess.

2) Lodowcowe piaski.



3) Morena z głazami.

4) Zlepieniec gruboziarnisty złożony z obtoczonych kawałków paleozoicznego kwarcytu, okruchów litotamniowych, oraz w wielkiej ilości obtoczonych form tortonu:

*Ostrea cochlear* Poli., *Isocardia cor* L., *Cardita rudista* L m k., *Pecten Neumayri* Hilb., *Bryozoa*.

5) Margłowy piasek drobnoziarnisty.

1) Piasek wapienno-kwarcowy z *Polystomella* sp.

2) Margłowy piasek ze szczątkami fauny.

3) Piasek wapienno-kwarcowy z *Ervilia* cf. *podolica* Eichw., *Cardium* sp., *Rissoa* sp., *Bryozoa*, *Triloculiva* sp., *Textularia*, *Biloculina*, *Polystomella*.

4) Zlepieniec z otoczkami kwarcytu, okruchów nulliporowych oraz obtoczonych form tortonu: *Ostrea cochlear* Poli, *Pecten elegans* And.

Na płn. od Łojowic, pod utworami lodowcowymi pięciometrowej miąższości, występują:

1) Zlepieńce, przechodzące często w żwirek dość drobnoziarnisty, z fauną przeważnie pokruszoną:

*Ervilia podolica* Eichw., *Modiola* cf. *volhynica* Eichw., *Cardium* cf. *obsoletum* Eichw., *Bittium aeforme* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Natica* sp., *Rissoa* sp., *Bryozoa* . . . . . 3.00 m.

Poniżej drogi, aż do samego strumienia, odsłaniają się te same zlepieńce o składzie i faunie identycznej poprzednim miąższości do 4 metrów.

Nieco dalej w tym samym kierunku, na składzie wzgórza:

1) Loess . . . . . 1.00 m.

2) Zlepieńce sarmackie . . . . . 1.50 „

Niżej gleba usiana odłamami zlepu. Zlepy te występują na płn.-zach. i pld. wsi; dalszy odstęp brak.

We wsi Wielogóra, na pld.-wschodnim zboczu wysokiego wzgórza jest zasypana odkrywka. Widać jeszcze pod warstwą gleby miękie białe margle, przechodzące często w zbite odłamy, mające pozór konkrecyj. W tym punkcie na hałdach znajdować można szare odłamy piaskowca wapiennego, z próżniami po



*Cerithium rubiginosum* Eichw., oraz *Ervilia podolica* Eichw. O kilkanaście kroków z podnóża góry wycieka strumyk, płynący po warstwach sarmatu. Dalej na północ pod warstwą gleby i moreny, na tym samym zboczu, tuż przy zabudowaniach, odsłaniają się:

- 1) Zbite margle z licznymi *Serpula* sp., występujące tu i owdzie, a tworzące kieszenie w zlepie ok. 0.50 m.
- 2) Żwirek sarmacki przemieszany z materiałem morenowym . . . . . 0.30 „
- 3) Warstewka piaszczystego marglu usunięta partjami lodowcową egzaracją, zawierająca *Ervilia podolica* Eichw., *Cardium* sp. ind. ok. 0.50 m.
- 4) Zlepienie wapienne ze słabą domieszką kwarcu, przechodzące ku górze w żwirek . . . 2.50 „

Zlepienie te dostarczyły mi następującej fauny:

*Ervilia podolica* Eichw., *Cerithium deforme* Eichw., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Clavatula Döderleini* Hoern., *Dorsanum duplicatum* Sow., *Neritodonta picta* Fer.

oraz obtoczone lub w ułamkach:

*Ostrea cochlear* Poli., *Cardita rudista* Lmk., *Pecten elegans* And., *Pecten Neumayri* Hilb., *Natica helicina* Brocc., *Lithothamnium* sp.

W Gorzyczanach, na płn.-wschód od wsi, tuż koło drogi przy rzeczce, na płn.-zachodnim zboczu wzgórza, pod powłoką loessu i piaszczystych utworów dyluwjalnych, zalegają:

- 1) żółtawe gruboziarniste sarmackie piaski kwarcowe, przechodzące ku dołowi w żwirek kwarcowy . 3.00 m.

Fauna dość zwietrzała, zachowana przeważnie w postaci ułamków, dostarczyła mi następujących form:

*Ervilia podolica* Eichw., *Venus* sp., *Cardita rudista* Lmk., *Potamides* cf. *mitralis* Eichw., *Cerithium* cf. *rubiginosum* Eichw., *Buccinum* sp.

Na płn. od tejże wsi znajduje się znowu zasypana odkrywka. Widocznym jest tylko loess; na hałdach jednak leżą duże odłamy zlepu o ziarnie średniej wielkości, składającego się z obtoczonych kawałków itołupku paleozoicznego, z domieszką obtoczonych ziaren kwarcu. Zlepieniec ten zawiera:



*Ervilia podolica* Eichw., *Lucina* cf. *borealis* L., *Lucina* cf. *Dujardini* Desch., *Rissoa* cf. *angulata* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Dorsanum duplicatum* Sow., *Bulla* sp.

Zlepience te, jak można stwierdzić na leżących blokach, przechodzą w gruboziarniste piaskowce, wyżej bardziej drobnoziarniste ze śladami fauny. Gruboziarnisty piaskowiec zawiera:

*Ervilia podolica* Eichw., *Cardita scalaris* Sow., *Cardium* sp., *Pecten elegans* And., *Bittium deforme* Eichw., *Turritella bicarinata* Eichw.

Widzimy w odsłonięciach tych mieszaninę tortonu i sarmatu. Formy tortońskie jak zwykle obtoczone lub w ułamkach.

W dolinie rzeczki Koprzywianki, na zach. od wsi cegielnia pod Koprzywnicą, w odkrywce na wzgórzu nad warstwami paleozoicznego kwarcytu, zalegają obficie otarte kule litotamniowe, powstałe ze zwiertzenia marglu nulliporowego, oraz skorupy *Ostrea* cf. *cochlear* Poli.

Na płn. od Skwirzowej, tuż koło drogi, zasypana częściowo odkrywka, wykazująca następujące warstwy:

- 1) Dość zbity margiel warstwowany z *Ervilia podolica* Eichw. . . . . 1.00 m.
- 2) Zwięzły zlepieniec litotamniowy z jądrami *Pectunculus pilosus* L., *Lucina* (?) sp. . . . 0.50 „
- 3) Przechodzący w drobną warstewkę złożoną z *Ervilia*, *Modiola* sp. . . . . 0.50 „
- 4) Szary wapienny piaskowiec bez fauny . . . 0.25 „
- 5) Zlepieniec litotamniowy z okruchami kwarcytu 0.30 „
- 6) Biały piaskowiec kwarcowy z fauną tortonu . 0.15 „

Dolna część przekroju zasypana gruzem; na hałdach znajdowałem bryły tegoż samego białego piaskowca tortońskiego, przechodzącego w kwarcytowy zlepieniec.

Z warstw tych posiadam następującą faunę:

*Ostrea* sp. ind., *Cardium* cf. *praechinatum* Hilb., *Cardium* sp., *Venus* cf. *Haidingeri* Hoern., *Venus* sp., *Isocardia cor* L., *Lucina borealis* L., *Nucula nucleus* L., *Ervilia* sp., *Panopea Menardi* Desh., *Lutraria* sp., *Leda fragilis* Chemn., *Cerithium* sp. ind.

Nieco dalej na płn. w tym kierunku znajduje się płytka odkrywka. Pod cienką warstwą gleby zalegają piaskowce wa-



pienne z niewyraźnymi okruchami muszli. Piaskowce te, miejscami tylko „przyklejone“ do warstwy spągowej, są odpolerowane i nieco zaokrąglone; grubość maksymalną utworu tego liczyć można do 20 cm. Niżej, odsłania się zlepieniec, złożony z otoczonych litotamniowych odłamków, oraz dość dużych otoczków zwietrzałego paleozoicznego kwarcytu, przechodzący ku górze w drobną warstewkę (0.10) złożoną wyłącznie ze skorupek *Ervilia* sp., *Modiola* sp., *Pecten* sp. W spągu zlepieńca znajduje się piaskowiec dość wapnisty, z niewyraźnymi szczątkami roślin oraz fauną zachowaną w ośrodkach:

*Cardium* sp., *Venus* sp. *Solen* cf. *subfragilis* Eichw. *Lucina* (?) sp., *Nucula nuclens* L., *Modiola* sp., *Panopaea Merardi* Desh.

Ostatnia forma zasługuje na szczególniejszą uwagę; w tyśiącach egzemplarzy przepełnia ona skałę, występując przeważnie w położeniu naturalnem, jakie przybierają żyjące małże, zagrzebujące się w ił lub piasek. Występują one dość często na granicy zlepu i piaskowca przechodząc górną swą połową w zlepieniec.

Postępując dalej na płn. po drugiej stronie drogi, na warstwach paleozoicznego kwarcytu, leżą strzępy żółtawego piaskowca tortońskiego, zmieszane z piaskiem i kwarcytowym żwirem; wyżej gleba, przepełniona odłamkami skorup. Piaskowce te zawierają:

*Ostrea digitalina* Dub., *Ostrea* sp. ind., *Venus* cf. *Haidingeri* Hoern., *Solen* sp., *Nucula nucleus* L., *Arca barbata* L., *Cardium* sp., *Serpula* sp. *Bryozoa*.

Na płn.-zach. od Beszyc Górnych, na szczycie wzgórza, odsłaniają się zlepieńce wapienne, nieco piaszczyste dość drobnoziarniste bez fauny (0.50).

Na płn. od Dmosic, na zach. stronie drogi, stwierdzić można następujący przekrój:

- 1) Loess . . . . . 0.50 m.
- 2) Margiel dość sypki, nieco piaszczysty, przepełniony skorupkami *Rissoa*, *Serpula* sp. oraz *Ervilia podolica* Eichw. . . . . 0.50 „
- 3) Zlepieniec wapienny piaszczysty, z *Ervilia podolica* Eichw., *Cerithium* sp., warstwowany płytowo . . . . . 4.00 „



Prawdopodobnie to samo odsłonięcie opisał Friedberg (8) z profilu i skamieniałości, nadesłanych mu przez Dr. J. Grochmalickiego i Dr. W. Szafera. Mają tu występować:

- 1) Gleba
- 2) Piaski sarmackie z fauną, z wtrąceniami płyt zwykłego wapienia 2 m.,
- 3) Gruboziarnisty piaskowiec z niewyraźnymi skamieniałościami *Ostrea* 6 m.

Z piasków Friedberg oznaczył: *Clavatula Döderleini* Hoern., *Dorsanum duplicatum* Sow., var. *minor* Friedb., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Potamides bicostatus* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Natica catena* da Costa, *Hydrobia* sp., *Rissoa* sp., *Cardium* cf. *obsoletum* Eichw., *Corbula gibba* Olivi, *Serpula* sp.

Z płyt marglu natomiast tylko: *Hydrobia* sp., *Ervilia* sp., *Serpula* sp.

W przekroju, podanym wyżej, brak piasków, a margle stanowią warstwę całkowitą, spoczywającą na piaskowcu. Jeśli owe niewyraźne ostrygi rzeczywiście pochodzą z tej samej warstwy, musimy je uznać jako znajdujące się na złożu drugorzędem.

Do rzędu bardziej zachodnich odsłonień trzeciorzędu, zaliczam wychodnie w Rybnicy. Na wschód od wsi, na lewym brzegu Koprzywianki występują utwory sarmackie, wykształcone jako piaski i żwiry, oraz tortońskie, przedstawiające piaski z bogatą fauną. Dzięki p. Samsonowiczowi, który teren ten zwiedzał, posiadam faunę, z którą pod względem zachowania i różnorodności mierzyć się może jedynie fauna z Korytnicy:

*Ostrea digitalina* Dub., *Pectunculus pilosus* L., *Nucula nucleus* L., *Leda fragilis* Chemn., *Cardita scalaris* Sow., *Lucina borealis* L., *Cardium* aff. *praechinatum* Hilb., *Isocardia cor* L., *Venus multilamella* Lmk., *Venus* cf. *Haidingeri* Hoern., *Cytherea pedemontana* Ag., *Panopaea Menardi* Desh., *Lutraria oblonga* Chemn., *Patella* sp., *Cerithium melanopsiformis* Aning., *Cerithium* cf. *variabilis* Friedb., *Terebralia bidentata* Grat., *Cassis saburon* Lmk., *Nassa* cf. *coarctata* Eichw., *Columbella curta* Duj., *Purpura exilis* (?) Partsch., *Murex tortuosus* Sow., *Asthenotoma* cf. *pannus* Bast.



Nakoniec ze Świniar z piasków tortońskich podać mogę następującą faunę:

*Ostrea cochlear* Poli (tworząca ławice), *Pecten* cf. *Koehni* Fuchs., *Pecten Neumayri* Hilb., *Lucina borealis* L., *Venus* sp., *Bryozoa*.

## STRATYGRAFJA.

Idealny przekrój utworów trzeciorzędowych opisywanego obszaru wyrazić można w szeregu następujących ogniw:

### Sarmat.

- 1) Margle z fauną.
- 2) Zlepieńce, piaskowce, resp. żwiry i piaski.
- 3) Dolny zlepieniec, złożony z obtoczonego materiału warstw spągowych.

### Torton.

- 4) Margle litotamniowe.
- 5) Piaski podlitotamniowe z fauną, równorzędne bardziej półn. warstwom burowęglowym.
- 6) Piaski glaukonitowe.

### Piaski glaukonitowe.

Piaski te, jako najniższy poziom tutejszego trzeciorzędu, znane już były Puschowi, który podał dokładną ich charakterystykę; przedstawiają one dość sycki piasek bez wapiennych lub ilastych domieszek z ziarnkami glaukonitu, oraz jak w Międzygórzu lub Zagrodach z drobnymi łuszczkami miki. Piasek ten przeważnie biały, czasem jak w Słaboszowicach i Pęczynach żółtawy, oraz zielonkawy (Zagrody), zawiera dość rzadko otoczone kawałki czarnego krzemienia. Jak twierdzą zgodnie Pusch (1.) i Siemiradzki (4), czego dostrzedz nie zdołałem, piaski te leżą na utworach paleozoicznych syluru i dewonu. Wiek ich, z powodu braku fauny, dość zagadkowy, próbowałem rozwiązać Siemiradzki (4), na podstawie niedokładnie oznaczonej fauny stropowej zaliczając utwór ten do paleogenu, a w nowszej monografii Polski do miocenu (5). Zdaniem moim, mioceński, względnie tortoński wiek poziomu tego nie ulega wątpliwości.



Fakt, że piaski te związane są z utworami burowęglowemi, gdzie czasem, jak w Międzygórzu lub Pęczynach trudno znaleźć dokładną ich granicę, obecność glaukonitu w warstwach piasków podlitotamniowych, a równorzędnych z utworami burowęglowemi, pozwala zaliczyć mi utwor ten do głębszych warstw tortonu. Wyznaczenie zasięgu dla poziomu tego jest dość trudne. Występuje on w Słaboszowicach, Pielaszowie, Dobrócicach, Zagrodach i Międzygórzu. Do poziomu tego należy prawdopodobnie żółty, syпки piaskowiec z Malic, wspomniany przez Puscha, a leżący w spągu warstw burowęglowych. Miąższość poziomu tego, mimo, że żaden z mych przekrojów nie dotarł do warstw spagowych dość znaczna (Międzygórze 9 00, Zagrody 5.00). Pozwala ona przypuszczać, że poziom ten ciągnie się i dalej na płn., pld.-wsch., a możliwe, jak wynika z obecności odłamków krzemieni i na płn.-wschód w dolinie Koprzywianki utworu tego brak, a na warstwach paleozoicznych leżą piaski podlitotamniowe.

### Warstwy burowęglowe.

Na północy opisywanego terenu piaski glaukonitowe przechodzą ku górze w warstwy burowęglowe; na pld. zaś — w utwor piaszczysty morskiego typu z fauną. Zaobserwować tu można brak ściślej granicy między utworami burowęglowemi, a niżej leżącym poziomem. Granica ta (płn. od Międzygórza, Pęczyny) miejscami zaciera się. Warstwy te zawierają, a czasem i wyłącznie składają się, jak w Malicach i Męczenicy z ziemistego burowęgla, z drobnymi kryształkami gipsu. Ten sam gips tworzy pięknie wykształcone kryształy w spagowych burowęglowych warstwach Międzygórza. Przeważnie burowęgiel ten występuje w postaci pyłu, nadającego charakterystyczne zabarwienie danym osadom.

Miąższość utworów tych rozmaita, w Międzygórzu warstwy te dosięgają imponującej grubości trzynastu metrów, przeważnie, jak w Malicach lub Pęczynach, są znacznie cieńsze (0.30 — 0.50). Jeżeli połączymy znane nam punkty wychodni burowęglowych, utworzy się linja, przebiegająca przez Malice, Męcznice, Międzygórze i Pęczyny. Linja ta przedstawia prawdopodobnie zasięg utworów brzeżnych morza tortońskiego, które to utwory mogą



odpowiadać wiekiem utworom podlitolamniowym, stanowiącym, jak się zdaje, osady bardziej otwartego morza.

### Piaski podlitolamniowe.

W dolinie Opatówki, poziom ten leży na piaskach glaukonitowych; na pld. zaś w Skwirzonej, warstwy te, wykształcone jako piaskowce, spoczywają na utworach paleozoicznych. Piaski te, przeważnie zabarwione nieco odmiennie od warstw spągowych, przybierają często żółtawą lub zieloną barwę (Zagrody) czasem jednak, (Zagrody-parów) piaski te, niczym nie różniące się od warstw spągowych, zawierają i ziarnka glaukonitu; w tym wypadku określenie miąższości, resp. oddzielenie od warstw dolnych, staje się rzeczą dowolną. Miąższość utworu tego znaczną nie jest; waha się ona od 0.15 m do 1.50 m. Bardziej wysunięty punkt północny stanowią Słaboszowice. Dalej poziom ten przechodzi ku Zagrodom, wynurzając się dopiero w dolinie Koprzywianki w Skwirzowej. Bardziej zachodnie, nieco izolowane, znane mi punkty poziomu tego występują w Rybnicy i Świniarach. Warstwy te zawierają bogatą faunę, pozwalającą ściśle określić wiek danego poziomu, Ogółem, fauna ta nosi skład następujący:

*Ostrea cochlear* Poli., *Ostrea digitalina* Dub., *Pecten elegans* And., *Pecten Neumayri* Hilb., *Pecten* cf. *Koheni* Fuchs. *Modiola Hoernesii* Reuss, *Arca barbata* L., *Pectunculus pilosus* L., *Pectunculus glycimereis* L., *Nucula nucleus* L., *Leda fragilis* Chemn., *Cardita scalaris* Sow., *Lucina borealis* L., *Lucina dentata* Bast., *Cardium* aff. *praechinatum* Hilb., *Cardium* cf. *irregulare* Eichw., *Isocardia cor.* L., *Venus multitamella* Lmk., *Venus* cf. *Haidingeri* Hoern., *Cytherea Pedemontana* Ag., *Ervilia* cf. *pusilla* Puil., *Solen* cf. *subfragilis* Eichw., *Panopaea Menardi* Desch., *Saxicava* sp., *Lutraria oblonga* Chemn., *Lutraria* sp., *Corbula gibba* Olivi, *Dentalium incurvum* Reuss., *Patella* sp., *Trochus patulus* Brocc., *Trochus* cf. *biangulatus* Eichw., *Trochus* cf. *affinis* Eichw., *Turritella Pythagoraica* Hilb. *Turritella* cf. *Rabae* Niedzw., *Vermetus intortus* Lmk., *Natica millepunctata* Lmk., *Natica helicina* Brocc. *Rissoa* cf. *turritella* Eichw., *Rissoa* sp. sp., *Pyrami-*



*della plicosa* Bronn., *Turbonilla* cf. *gracilis* Brocc., *Bittium deforme* Eichw., *Cerithium Bronni-forme* Hilb., *Cerithium* cf. *melanopsiformis* Auing., *Cerithium* cf. *variabilis* Friedb., *Terebralia bidentata* Grat., *Cassis saburon* Lmk., *Tritonium* sp., *Nassa coarctata* Eichw., *Columbella curta* Duj., *Columbella* sp., *Purpura exilis* (?) Partsch., *Murex tortuosus* Sow., *Bellardiella reticulata* Ren., *Asthenotoma* cf. *pannus* Bast., *Teres anceps* Eichw., *Raphitoma* sp., *Ringicula buccinea* Desh., *Bulla Lajonkairina* Bast., *Bulla* cf. *convoluta* Brocc., kleszcze kraba, *Spatangus* (?) sp., kolce jeża, *Bryozoa*, *Polystomella* sp., *Quinqueloculina* sp., *Triloculina* sp.

Pomijając formy niedokładnie oznaczone, pozostaje około trzydziestu kilku, z których wszystkie znane są z tortonu, a niektóre, jak *Dentalium incurvum*, *Murex tortuosus*, *Teres anceps* *Pecten Neumayri*, o ile mogłem zebrać daty, nie przekraczają tortonu; pozostałe znajdować można i w utworach piętra helweckiego. Wobec tego, piaski i piaskowce podlitotamniowe zaliczyć należy do tortonu, zaznaczając możliwość zaliczenia ich do warstw nieco głębszych. Dość ciekawe, że fauna ze Słaboszowic wykazuje dość dużą analogję z wołyńskimi utworami Oleska i Podhorc, oraz Hołubicy w Galicji. Pozostałe zaś formy, z małymi wyjątkami znajdują się i w Korytnicy; analogję powiększa fakt, że pg. Kontkiewicza (2) margiel litotamniowy leży w stropie itów Korytnickich.

### Warstwy litotamniowe.

Prawie wszędzie nad warstwami burowęglowemi lub piaskami z fauną, zalegają nulliporowe margle, wyrażone typowo na płu. od Słaboszowic, gdzie w masie marglowej zalegają kule, częściej krzaki wodorostów wapiennych. Miejscami, szczególnie w dolnych swych częściach, gdy wodorostów owych brak, margiel ten staje się płytowy, lub jak w Zagrodach i Jankowicach dość sytki ze słabą zawartością nulliporów, o dość nikłej miąższości. W jednym przypadku (Słaboszowice płu-zach.) margiel ten dość piaszczysty, przepelniony jest skupieniami wapiennego piaskowca, powstałego prawdopodobnie przez zdenurowanie warstw spągowych. Miąższość ich podlega dość silnym wahaniom. Podczas, kiedy na płu. od Słaboszowic margiel



ten dosięga 5 metrów, w Międzygórzu lub Zagrodach spada do jednego lub pół m. Wahania te wytłómaczyć można denudacją sarmackiego morza; jako dowód mniemania tego, podać można obfite występowanie w osadach sarmatu odłamków nulliporowych, oraz obtoczonej fauny, krytych często jeszcze litotamniową skorupą. W marglach tych, z powodu zrozumiałych trudności eksploataowania fauny, znalazłem ją dość ubogą:

*Lithothamnium* sp., *Serpula* sp., *Bryozoa* gen. ind., *Ostrea cochlear* Poli., *Pecten elegans* And., *Pectunculus* sp., *Cardita rudista* Lmk., *Leda fragilis* Brocc., *Cardium* sp., *Ervillea* sp., *Potamides mitralis* Eichw., *Acmaea* cf. *laevigata* Eichw., *Rissoa* sp. sp.

Wszystkie formy te znane są z tortonu. Występowanie form częściowo słonawowodnych jak *Ervillea*, *Potamides mitralis* Eichw., znajdujące się dość często w Słaboszowicach i Międzygórzu, wytłómaczyć można stosunkami, panującymi w pasie tym, należącym do osadów dość płytkich, nie oddalonych zbyt od brzegu. Margle te występują na linii Słaboszowice, Międzygórze, Pęczyny, Zagrody oraz Jankowice. Nadto wszędzie prócz Gorzyczan, w utworach sarmackich napotykamy szczątki danych litotamniowych osadów. W dolinie Koprzywnianki poziom ten występuje w Cegielni p. Koprzywnicą, gdzie na warstwach paleozoicznych spoczywają strzępy zdenudowanych margli, występujące jako kule nulliporowe, przemieszane z piaskiem i gliną. Dość zawikłane stosunki panują w Skwirzowej, gdzie brak margli nulliporowych, a na piaskowcach tortonu spoczywają zlepienie litotamniowe, zawierające w dolnych swych częściach faunę tortonu, w górnej zaś, wykształcone w drobną warstewkę, złożoną wyłącznie ze skorupek *Ervillea*, *Modiola* sp.

Pierwszym mym odruchem było, uznać warstwy te jako sarmackie, a formy tortonu, zachowane zresztą nieszczególnie, jako materiał wtórny, gdyby nie występowanie na granicy warstw form *Panopaea Menardi* Desh., tkwiących w piaskowcach, a przechodzących górną częścią skorupy w zlepienie litotamniowy. Zjawisko to dowodzi jednoczesnej a szybkiej zmiany oblicza, niedostrzegalnej zgola w sarmacie, gdzie morze ówczesne transgredowało po warstwach tortonu, niszcząc i przerabiając je w piaskowce i zlepienie wapienne.



### Dolny zlepieniec sarmacki.

Nad warstwami litotamniowemi zalegają utwory sarmackie, wykształcone gdzieś w dolnych swych częściach jako zlepienie, złożone wyłącznie z otoczonego materiału warstw spągowych. Materiał ten, składa się bądź z brył otoczonego kwarcytu (Międzygórze płn., Chwałki), paleozoicznego łożyska (Gorzyczany) lub ze spągowych otoczonych osadów marglu litotamniowego, występujących typowo w Komornie. Do materiału klastycznego, prócz fauny swoistej, obficie dołączone są otarte formy tortonu, pochodzące przeważnie z warstw litotamniowych, zdenudowanych przez napór sarmackiego morza. Właściwa fauna sarmacka z warstw tych nosi skład następujący:

*Ervilia podolica* Eichw., *Lucina* cf. *Dujardini* Desh., *Potamides mitralis* Eichw., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Dorsanum duplicatum* Sow., *Bulla* sp., *Trochus* sp., *Rissoa* cf. *angulata* Eichw.

Jako otoczone formy tortonu występują:

*Ostrea cochlear* Poli., *Pecten elegans* And., *Pecten Neumayri* Hilb., *Pectunculus pilosus* L., *Cardita rudista* Lmk., *Isocardia cor* L., *Venus* sp., *Vermetus intortus* Lmk. (?), *Turritella* (?) sp.

Mięszkość utworu tego jak w Komornie dość znaczna; dochodzi ona do sześciu, a w Międzygórzu do jednego metra. Ogółem znane mi wychodnie zlepieńców tych występują w Międzygórzu, Chwałkach i Gorzyczanach.

### Zlepienie i piaskowce sarmackie.

Gruboziarniste osady te przechodzą ku górze w bardziej drobnoziarniste, przechodzące w zlepienie wapienne, z kolei poprzedzielane podrzędnymi warstwami piasku lub piaskowca. Na materiał zlepieńców tutejszych złożyły się pokruszone i drobno obtoczone odłamki litotamniowego materiału, z domieszką ziaren kwarcu lub krzemienia. Petrograficznie, wyróżnić tu można dwa typy: bardziej północny, który można objąć nazwą typu Karwowskiego, w przeciwieństwie do osadów normalnych, występujących



w bardziej pld. stronie naszego obszaru. Zlepieniec ten, z powodu silnego scementowania kalcytową masą, przybiera postać skały jednolitej, usianej często drobnymi ziarnkami kwarcu, o faunie zachowanej przeważnie w postaci próżni lub odlewów wewnętrznych. Zjawisko to, w pewnej mierze, zależy prawdopodobnie od intensywnej ongi działalności wydzielających wapno strumieni, materiał osadowy których, wykształcony jako tufy ze szczątkami flory i fauny, występuje w Karwowie, Tudorowie i Kleczanowie. Pod względem faunistycznym, zlepieniec te cechuje brak pospolitych form sarmatu jak *Cerithium mitralis*, *rubiginosum* i innych. Osady tego typu występują w Karwowie, Słaboszowicach, Malicach i Komornie.

Normalne osady sarmackie posiadają często złożenie przekątne, nosząc charakter plaży. Owa zmiana oblicza nie odbija się zbyt na faunie; jak w zlepach, tak i w piaskowcach występuje fauna jednakowa, zawierająca następujące formy:

*Ervilia podolica* Eichw., *Maetra* sp., *Modiola volhynica* Eichw., *Modiola marginata* Eichw., *Lucina Dujardini* Desh., *Cardium obsoletum* Eichw., *Cardium* cf. *praeplicatum* Hilb., *Solen subfragilis* Eichw., *Trochus* sp., *Bittium deforme* Eichw., *Potamides mitralis* Eichw., *Cerithium rubiginosum* Eichw., *Rissoa inflata* Eichw., *Rissoa inflata* v. *striata* Eichw., *Mohrensternia angulata* Eichw., *Vermetus intortus* Lmk., *Bulla Lajonkaireana* Basb., *Bulla* cf. *melitopolitana* Sokol., *Dorsanum duplicatum* Eichw., *Dorsanum duplicatum* v. *minor* Friedb., *Neritodonta picta* Fer., *Murex* sp., *Clavatula Döderleini* Hoern., *Natica helicina* Brocc., *Bryozoa*, *Dentalina* sp., *Triloculina* sp. sp., *Biloculina* sp., *Quinqueloculina* sp. sp., *Polystomella* sp., *Spiroculina* sp., *Textularia* sp.

Wszystkie te formy należą do dolnego sarmatu; taki też wiek przypisać należy naszym utworom.

Prawie wszędzie warstwy te zawierają obtoczoną faunę tortonu, analogiczną dolnym zlepieńcom sarmackim. Miejscami (Dwikozy, Karwów, Kichary), formy te tworzą zlepieniec muszlowe, zawierające marglowe otoczaki z *B. deforme*, *Trochus* sp., pochodzące z osadów litotamniowych. Zjawisko to zaobserwował i Kontkiewicz (2), wymieniając z Chmielnika mieszaną form sarmatu i tortonu, zastrzegając, że formy tortońskie wy-



stępują przeważnie w postaci ogładzonych odłamków, w przeciwieństwie do drobnych a delikatnych gatunków sarmatu.

Mięszczość utworów tych rozmaita; waha się ona od jednego do sześciu, a prawdopodobnie i nieco więcej metrów; grubość ich na północy trudno określić, gdyż występują przeważnie jako „skałki“ na szczytach wzgórz.

Osady te występują wszędzie na naszym terenie; bardziej północne punkty stanowią: Karwów, Malice, Słaboszowice, Międzygórze, Komorna, Gałkowice oraz Winiary p. Zawichostem; prócz tego występują one w Osinku, Kicharach, Dwikozach, Rzeczycy Mokrej, Łojowicach, Milczanach, Wielogórze, Gorzyczanach i Rybnicy. Do tych osadów należy prawdopodobnie górna część litotamniowych zlepieńców i piaskowców w Skwirzowej. Warstwy te uważać można za równorzędne zlepieńcom sarmackim Chmielnika i innych punktów, opisywanych przez Kontkiewicza (2).

### Margle z fauną.

Tam, gdzie egzaracja lodowcowa nie zdenudowała warstw górnych, na zlepiach i piaskowcach sarmackich spoczywają margle z dość ubogą fauną. Margle te, płytowe jak w Komornie i Skwirzowej, sypkie a piaszczyste w Dmosicach, nikłej przeważnie miąższości (0.20—1.00), zawierają następujące formy sarmatu:

*Ervilia podolica* Eichw., *Bittium deforme* Eichw., *Trochus* sp., *Natica* sp., *Rissoa* sp.

Margle te, występujące w Komornie, Wielogórach, Skwirzowej, Dmosicach, odpowiadają prawdopodobnie glinom łupkowym z drobnymi muszelkami, kryjących pg. Kontkiewicza (2) utwory sarmackie koło Chmielnika, Śładkowa i Skadli.

### Linja brzegowa.

Zachodzi pytanie, czy morze sarmackie przekraczało poza torton lub odwrotnie? Podług mapki Friedberga (7) w okolicach Opatowa morze tortonu zajmowało obszar większy niż



sarmat; koło Zawichosta zaś, torton i sarmat leżą na jednej linii. Naturalnie zasięg ten, z powodu braku danych, zaznaczony jest z pewnem przybliżeniem, co Friedberg w pracy swej zastrzega wyraźnie. Za mało mam danych, bym mógł sprawę tę przedstawić wyczerpująco. Jedyne z okolic Opatowa podać mogę garść szczegółów, mogących nieco wyświetlić panujące tutaj stosunki. W Karwowie, najbardziej pñ. znanym mi punkcie, otoczonym ze wszystkich stron utworami paleozoicznymi, gdzie musiała istnieć zatoka, występują zlepieńce sarmackie, złożone z obtoczonego materiału litotamniowego z domieszką obtoczonych form tortonu. Widzimy więc w tym wypadku, że sarmat transgredował tu po utworach litotamniowych; z głazów, które można znajdować na polach, widzimy, że i tu, przyniesione z bardziej północnych okolic próbki skał, składają się z materiału litotamniowego; znalezienie zlepieńca tego typu z silną zawartością bitumiczną, pozwala mniemać, że brzeg nie był tak bardzo oddalony; gdyby sarmat sięgał dalej na pñ. i przekraczał poza granicę tortonu, transgresja jego wytworzyłaby warstwy złożone z paleozoicznego materiału okruchowego, których w okolicach Opatowa brak zupełnie.

---

W końcu miło mi będzie złożyć swe podziękowanie szan. Zarządowi Kasy im. Mianowskiego za łaskawą pomoc, szan. prof. J. Lewińskiemu za cenne uwagi i pozwolenie korzystania z Zakładu Geologicznego Uniwersytetu; w szczególności zaś, p. J. Samsonowiczowi, za wskazanie mi wielu stanowisk, łaskawą pomoc na terenie, oraz za zebranie mi niezbędnej literatury; p. J. Czarnockiemu za łaskawą pomoc i cenne uwagi, oraz prof. Rydzewskiemu za dostarczenie brakującej literatury.

Z Zakładu Geologicznego  
Uniwersytetu Warszawskiego.

#### LITERATURA.

1. Pusch J. B. Geognostische Beschreibung von Polen. Stuttgart 1836
2. Kontkiewicz St. Sprawozdanie z badań geologicznych dokonanych w r. 1880 w pñd. części gub. Kieleckiej. Pam. Fizj. 1882.



3. Siemiradzki J. Sprawozdanie z badań geologicznych we wsch. części gór Kielecko-sandomierskich. Pam. Fizj. 1887.
4. Siemiradzki i Dunikowski. Szkic geologiczny Królestwa Polskiego, Galicji i krajów przyległych. Pam. Fizj. 1891.
5. Siemiradzki. Geologia ziem polskich. t. II. Lwów 1909.
6. Łaskarew. Fauna Bugłowskich otłożeńij Wołyni. Mém. Com. Géol. 1913.
7. Friedberg. Utwory miocenijskie w Europie i próby podziału tych utworów Polski. Lwów 1911—12.
8. Friedberg. Studja nad formacją miocenijską ziem polskich. Cz. I Kosmos, XXXIX, 1911.

RÉSUMÉ.

Kazimierz Kowalewski:

**Le tertiaire dans les vallées de la Opatówka  
et de la Koprzywianka.**

Communication annoncée le 20.II. 1918.

Présentée par J. Lewiński.

Les dépôts tertiaires de la partie SE des montagnes de Święty Krzyż qui affleurent dans les vallées de la Opatówka et de la Koprzywianka, peuvent être divisés en niveaux suivants:

**Sarmatien.**

- 1) Marnes fossilifères.
- 2) Conglomérats et grès, resp. gravier et sable.
- 3) Conglomérats de base, composés de galets des roches tortoniennes et paléozoïques.

**Tortonien.**

- 4) Marnes à *Lithothamnium*.
- 5) Sables quartzeux, plus au N représentés par des dépôts lignitifères.
- 6) Sables glauconitiques.

**Sables glauconitiques.**

Ces couches qui d'après les auteurs précédents reposent sur les dépôts paléozoïques, et appartiennent au tortonien, sont



composées de sable pur quartzeux sans fossiles, avec glauconie, rarement avec mica. Ces sables mesurent 0,50—9,00 m. d'épaisseur et affleurent à Słaboszowice, Pielaszów, Dobrocice, Międzygórze evtl. à Malice.

Vraisemblablement ce niveau est étendu vers le Sud et vers le Sud-Est, peut-être vers le Nord-Est; il fait défaut dans la vallée de la Koprzywianka, où les sables quartzeux (5) reposent directement sur le paléozoïque.

### Les couches lignitifères.

Au nord du terrain décrit les sables glauconitiques sont liés intimement à des couches lignitifères, tandis que plus au sud ils sont recouverts par des sables marins fossilifères. Les couches lignitifères sont d'ordinaire sablonneuses, et contiennent des minces couches de lignite, ou bien (Międzygórze, Męczenica) elles ne sont composées que de lignite terreuse avec cristaux de gypse. L'épaisseur est variable, et atteint 13 m. à Międzygórze. La ligne qui relie les affleurements connus, passe par Malice, Męczenica, Międzygórze, Pęczyny et représente probablement la zone côtière de la mer tortonienne. Les couches lignitifères correspondent à des dépôts d'une mer plus profonde, c'est à dire aux sables quartzeux.

### Sables quartzeux fossilifères.

Ce niveau repose dans la vallée de la Opatówka sur des sables glauconitiques, plus au sud (Skwirzowa,) sur du paléozoïque. Ces sables, quelquefois bleuâtres ou jaunâtres, contiennent d'assez rares et petits grains de glauconie, et des concrétions irrégulières de grès calcaire. Leur épaisseur est petite (0.15 — 1.50 m.). Plus au Nord ces dépôts affleurent à Słaboszowice. Ce niveau s'étend vers Zagrody, affleurant seulement dans la vallée de la Koprzywianka à Skwirzowa; plus à l'ouest sont situés les affleurements de Rybnica et de Świniary. Ces couches contiennent une faune bien riche. (voir la liste dans le texte polonais).

Cette faune prouve que les sables et grès appartiennent au tortonien, peut-être même à un niveau un peu plus ancien. La faune de Słaboszowice ressemble le plus aux dépôts d'Olesko et Podhorce en Wolhynie.



### Couches à Lithothamnium.

Presque partout les couches lignitifères ou bien les sables quartzeux fossilifères sont recouverts par des marnes à Nullipores, dont les couches inférieures sont représentées parfois par des marnes finement stratifiées avec de rares Nullipores. Les marnes à *Lithothamnium* sont parfois (Zagrody, Jankowice) friables ou sablonneuses (Słaboszowice); l'épaisseur est bien variable (0.5—5 m.), ce qu'on peut attribuer à la dénudation de la mer sarmatienne d'autant plus que les couches inférieures du Sarmatien contiennent de nombreuses coquilles roulées, recouvertes d'une écorce de Nullipores. Ces couches contiennent une faune assez pauvre.

Toutes ces formes sont connues du Tortonien; l'apparition de formes saumâtres (*Ervillia*, *Potamides mitralis* Eichw.) peut être expliquée par les conditions variables de la zone côtière. Ces couches apparaissent à Słaboszowice, Międzygórze, Pęczyny, Zagrody, Jankowice; leur restes se trouvent partout (sauf Gorzyczany) dans les dépôts sarmatiens. À Skwirzowa ces marnes prennent l'aspect d'un conglomérat à *Lithothamnium*, intimement lié au grès fossilifère.

### Conglomérat de base du Sarmatien.

Les couches à *Lithothamnium* sont recouvertes par des dépôts sarmatiens, développés à leur base sous forme de conglomérat, composé de débris roulés des couches à Nullipores (Komorna), de galets de quartzite (Międzygórze) ou de schiste argileux paléozoïque (Gorzyczany), mêlés aux coquilles roulées de formes tortoniennes, provenant des couches à Nullipores, dénudées par la mer Sarmatienne, et à une faune propre assez riche. La faune Sarmatienne se compose des formes énumérées dans le texte polonais.

Les conglomérats contiennent les formes roulées, énumérées dans le texte polonais.

L'épaisseur de ces dépôts varie de 1 à 6 m.; leurs affeulements connus sont situés à Międzygórze, Chwałki et Gorzyczany.

### Conglomérats et grès Sarmatiens.

Ces dépôts grossiers passent vers le haut à des dépôts plus fins, composés de conglomérats ou de graviers avec des



couches subordonnées de sables ou de grès, composées de débris roulés des couches à Lithothamnium, et des coquillages roulés du Tortonien. Plus au Nord (Karwów, Słaboszowice, Malice, Zagrody) ces conglomérats ont l'aspect d'une roche uniforme semée de petits grains de quartz; les fossiles ne sont conservés que sous forme de moulages extérieurs ou intérieurs. Presque partout (Kichary, Dwikozy, Rzeczyca mokra) ces dépôts sont stratifiés diagonalement et représentent des sédiments de la plage. La faune de ces couches est d'âge sarmatien—inférieur. L'épaisseur de ces couches varie de 1 à 6 m.; elles sont développées dans tout le terrain décrit; les points les plus septentrionaux sont: Karwów, Malice, Słaboszowice, Międzygórze, Zagrody - Komorna, Gałkowice et Winiary près Zawichost; elles affleurent également à Osinki, Kichary, Dwikozy, Rzeczyca mokra, Łojowice, Wielogóry, Gorzyczany et Rybnica. Les couches supérieures des conglomérats et des grès à Skwirzowa appartiennent probablement à ce niveau.

#### Marnes fossilifères.

Les conglomérats et les grès sarmatiens sont recouverts partout ou l'exaration glaciaire n'a pas éloigné les couches supérieures, par des marnes finement stratifiées (Zagrody, Skwirzowa) ou par des marnes friables sablonneuses (Dmosice) de faible épaisseur (0.20—1.00 m.) qui contiennent une faune sarmatienne.

Ces marnes apparaissent à Zagrody, Wielogóry, Skwirzowa.

De l'Institut Géologique  
de l'Université de Varsovie.







## SPIS WYDAWNICTW

# Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

### I. Sprawozdania z posiedzeń Tow. Nauk. Warsz. za lata:

- r. I (1908), r. II (1909), r. III (1910), r. IV (1911), r. V (1912), r. VI (1913),  
r. VII (1914), r. VIII (1915), r. IX (1916).

### II. Prace Wydziału I-go:

- Nr. 1. Kazimierz Nitsch: Z historii polskich rymów. 1912.  
Nr. 2. Kazimierz Wóycicki: Wiersz „Barbary Radziwiłłówny“ A. Fe-  
lińskiego. 1912.  
Nr. 3. Tytus Benni: Samogłoski polskie. 1912 r.  
Nr. 4. Kazimierz Wóycicki: Historia literatury i poetyka. 1914.  
Nr. 5. Kazimierz Wóycicki: Ośmiozłotkowiec trocheiczny polski.  
1916.  
Nr. 6. Kazimierz Wóycicki: Wypiański i Szujski. 1917.  
Nr. 7. Tytus Benni: Metoda palatograficzna w zastosowaniu do spółgło-  
sek polskich. 1917.

### III. Prace Wydziału II-go:

- Nr. 1. Henryk Konic: Materiały do dziejów Komisji Rządzącej. 1910.  
Nr. 2. Ig. Tad. Baranowski: Materiały do dziejów wsi polskiej. 1910.  
Nr. 3. Ig. Tad. Baranowski: Księgi referendarskie. 1910.  
Nr. 4. Witold Schreiber: Badania nad antropologią dzieci chrześcijań-  
skich, żydowskich i karaïmskich w Galicyi. 1910.  
Nr. 5. Bronisław Bouffał: Teorya odpowiedzialności organów władzy  
administracyjnej we współczesnem prawie politycznem. 1911.  
Nr. 6. Stanisław Poniatowski: O wpływie błędów obserwacyjnych na  
wskaźniki antropologiczne. 1912.  
Nr. 7. Jan Jakubowski: Studya nad stosunkami narodowościowemi na  
Litwie przed Unią Lubelską. 1912.  
Nr. 8. Aleksander Kraushar: W sprawie fundacyi naukowej T-wa im.  
Józefa Aleksandra Jabłonowskiego, wojewody nowogrodzkiego  
w Lipsku. 1912.  
Nr. 9. Edward Boguśławski: \* Dowody autochtonizmu Słowian na  
przestrzeni, zajmowanej przez nich w wiekach średnich. 1912.  
Nr. 10. Ludomir Sawicki: Studya nad Abisynią. 1913.  
Nr. 11. Kazimierz Wachowski: Jomsborg. 1914.

- Nr. 12. Kazimierz Konarski: Polska przed odsieczą wiedeńską r. 1683. 1914.
- Nr. 13. Edward Trojanowski: Rodowód godła herbowego Warszawy. 1917.
- Nr. 14. Leon Kozłowski: Badania archeologiczne na górze Klin w Iwanowicach, pow. Miechowskiego. 1917.
- Nr. 15. Studya nad dziejami prawa polskiego prywatnego. 1917.
- I. Leon Babiński: O sposobach utwierdzania działów spadkowych na podstawie praktyki ksiąg sądowych wielkopolskich z końca XIV i początku XV wieku.
- II. Roman Kuratów-Kuratowski: O zdolności cywilnej kobiet zamężnych w Małopolsce w w. XIV.†

#### IV. Prace Wydziału III-go:

- Nr. 1. Z. Weyberg: Syntezy pirogenetycznych glinokrzemianów zasadowych. 1908.
- Nr. 2. Władysław Janowski: Współczesne metody badania serca. 1910.
- Nr. 3. Maryan Eiger: Topografia zwojów nerwowych wewnątrzsercowych u świnki morskiej, myszy białej i człowieka. 1911.
- Nr. 4. Edward Loth: Badania antropologiczne nad mięśniami murzynów. 1913.
- Nr. 5. Jan Czekanowski: Zarys metod statystycznych w zastosowaniu do antropologii. 1913.
- Nr. 6. Stanisław Poniątkowski: Badania antropologiczne nad kością skokową. 1913.
- Nr. 7. Jan Lewiński: Utwory dyluwialne i ukształtowanie powierzchni przedlodowcowej dorzecza Przemszy. 1914.
- Nr. 8. Bronisław Rydzewski: Próba charakterystyki paleobotaniczne Dąbrowskiego Zagłębia węglowego. 1915.†
- Nr. 9. Wacław Roszkowski i Anzelma Żebrowska. O budowie pochewek prącia u błotniarek (*Limnaea Lam.*). 1915.
- Nr. 10. Stanisław Pawłowski: Ze studyów nad złodowacieniem Czarnohory. 1915.
- Nr. 11. Jan Tur: Nowe badania nad rozwojem układu nerwowego potworów platyneurycznych. 1915.
- Nr. 12. Jan Krassowski: O ruchu planetoid typu  $\frac{3}{4}$  (Thule). 1916.
- Nr. 13. January Kołodziejczyk: Stosunki florystyczne jeziora Świtezi. 1916.
- Nr. 14. Jadwiga Loth-Niemirycz: Badania anatomiczne i antropologiczne nad kanałem wyrostków poprzecznych (*canalis transversarius*) kręgów szyjowych człowieka i małp. 1916.
- Nr. 15. W. Pogorzelski: Badania teoretyczne ilości ciepła, otrzymywanych na kuli ziemskiej, z uwzględnieniem strat promieniowania w atmosferze. 1916.
- Nr. 16. Jan Lewiński: Z morfologii i geologii stepów czarnomorskich 1916.



- Nr. 17. Jan Tur: Badania nad rozwojem *Chalcides lineatus* Leuck. 1916.  
 Nr. 18. Janusz Domaniewski: Fauna Passeriformes okolic Saratowa 1916.  
 Nr. 19. Henryk Raabe: Pokolenia jesienne *Amoebidium parasiticum*. 1916.  
 Nr. 20. Jan Samsonowicz: Utwory dewońskie wschodniej części gór Świętokrzyskich. 1917.  
 Nr. 21. Gustaw Potworowski: Studya teratogenetyczne. 1917.  
 Nr. 22. Stanisław Sumiński: O budowie i rozwoju narządów kopulacyjnych samczych u *Anax imperator* Leach. (Odonata, Aeschninae). 1917.  
 Nr. 23. Stanisław Małkowski: O wydmach piaszczystych okolic Warszawy. 1917.  
 Nr. 24. Edward Loth: Odmiany tętnicy szyjnej głębokiej (a. cervicalis profunda) i tętnicy szyjnej wstępującej (a. cervicalis ascendens). 1917.  
 Nr. 25. Jan Tur: „Nić osiowa” i „czop metastomalny” w rozwoju owodniowców (Amniota). Studium embryologiczno-porównawcze. 1917

#### V. Wydawnictwa Wydziału I-go:

- Nr. 1. Aleksander Brückner: Jana hr. Potockiego prace i zasługi naukowe. 1911.  
 Nr. 2. Prace Komisji do badań nad historią literatury i oświaty. Tom I-szy 1914.  
 Nr. 3. Kazimierz Wóycicki: Forma dźwiękowa prozy polskiej i wiersz polskiego. 1912.  
 Nr. 4. Manfred Kridl: Listy Juliusza Słowackiego. 1915.  
 Nr. 5. Maurycy Mann: „Poganka” Narcyzy Żmichowskiej. 1916.  
 Nr. 6. Stanisław Słoński: Psalterz Puławski. 1916.

#### VI. Wydawnictwa Wydziału II-go:

- Nr. 1. Władysław Konopczyński: Dyaryusze sejmowe z w. XVIII-go i Dyaryusz sejmu z roku 1748. Tom I—II. T. I—1911. T. II—1912.  
 Nr. 2. Marcelli Handelsman: Dyaryusze Sejmów Księstwa Warszawskiego. Zeszyt I. Dziennik posiedzeń izby poselskiej sejmu roku 1809. 1913.  
 Nr. 3. Teodor Wierzbowski: Przywileje królewskiego miasta stołecznego Starej Warszawy, 1376 — 1772. 1913.

#### VII. Wydawnictwa wydziału III-go:

- Nr. 1. Władysław Gorczyński: Materiały do poznania opadów w Królestwie Polskiem. 1912.  
 Nr. 2. Edward Flatau: Migrena. 1912.  
 Nr. 3. Paleontologia Ziemi Polskich. № 1. Józef Siemiradzki: Gąbczaki jurajskie ziem polskich. 1913.  
 Nr. 4. Władysław Gorczyński: Materiały, zebrane w r. 1911 na stacjach Sieci Meteorologicznej Warszawskiej. 1913.

- Nr. 5. Zygmunt Wóycicki: Obrazy roślinności Królestwa Polskiego. — 1912 — 17 r.
- Nr. 6. Henryk Dziedzicki: Atlas organów rozrodczych u Mycetophilidae. 1915 r.
- Nr. 7. Edward Flatau: Prace z pracowni neurobiologicznej. T. I. 1916.
- Nr. 8. Kazimierz Stołyhwo: Prace z Pracowni antropologicznej. T. I. 1916.
- Nr. 9. Bolesław Rychłowski: Materiały do Hydrologii Król. Polsk. i ziem przyległych. 1917.

VIII. Roczniki Tow. Nauk. Warsz.

Rok VI (1913), rok VII (1914), rok VIII (1915), rok IX (1916).



9













