O ZASADNICZÉJ HYPOTEZIE

MECHANIKI CZĄSTECZKOWÉJ

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa d. 18 lipca 1874 r.).

W dotychczasowém traktowaniu mechaniki cząsteczkowéj, obok hypotezy fizycznéj dotyczącéj budowy ciał, dozwala się na różniczkowanie i całkowanie po przestrzeni którą te ciała zajmują, lecz bez rozstrzygnięcia poprzednio, czy postępowanie takie zgodne jest z istotą téj hypotezy.

Wynikająca ztąd wątpliwość rodzi bardzo naturalne pytanie, dające się streścić w te słowa : *jakim warunkom ma zadość czynić ciało uważane jako układ punktów materyalnych, ażeby przy ustanawianiu równań jego równowagi lub ruchu wolno było po jego przestrzeni różniczkować i całkować, t. j. aby go wolno było zastąpić materyą ciągłą ?*

Rezultaty rozwiązania tego pytania, stanowiące treść niniejszéj pracy, należałoby, zdaje mi się, uwzględniać zawsze w stawianiu hypotez dotyczących budowy materyi, wiele razy tylko dozwala się na różniczkowanie i całkowanie po jéj przestrzeni. To mnie właśnie skłoniło do ogłoszenia niniejszéj pracy pod tytułem jaki jéj nadałem.

Ponieważ według zasady d'Alembert'a rozważanie przypadku ruchu sprowadzić zawsze można do rozważania przypadku równowagi, w badaniu przeto naszém ograniczymy się tylko do tego ostatniego.

1. Pomyślmy sobie ciało *ciągłe i sztywne*, ograniczone powierzchnią zamkniętą ω i posiadające gęstość ρ zmienną od punktu do punktu sposobem ciągłym. Odnieśmy to ciało do osi prostokątnych stałych w przestrzeni, tak ażeby zmienne x, y, z wyobrażały współrzędne każdego w niém punktu M, i poddajmy go działaniu : 1) sił wywieranych na masę (np. ciężkość), których składowe według osi współrzędnych odpowiadające jednostce masy w punkcie M oznaczamy przez X_0, Y_0, Z_0 ; 2) ciśnień wywieranych na powierzchnię ω, których składowe według tych samych osi odpowiadające jednostce elementu $d\omega$, oznaczamy przez X, Y, Z. Załóżmy następnie że pod wpływem wymienionych działań ciało jest w równowadze. Wtedy, oznaczając przez δx, δy, δz rzuty przesunięcia przygotowanego w punkcie M, przez $dx\,dy\,dz$ objętość przypadającego w nim elementu ciała, według metody LAGRANGE'A znajdziemy warunki równowagi zawierające się w równaniu

$$\int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz\,(X_0 \delta x + Y_0 \delta y + Z_0 \delta z) + \int d\omega\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0, \tag{1}$$

w którém całka potrójna rozciąga się do całéj objętości ciała, a całka pojedyncza do całéj jego powierzchni.

Lecz ilości δx, δy, δz, tu zachodzące, nie są dowolnemi, ale zadość czynią równaniom wynikającym z warunków, że ciało jest ciągłe i sztywne. Ażeby równania te wyznaczyć, uważmy że punkt $M(x, y, z)$ należy do elementu ciała, i weźmy oprócz tego, w tym samym elemencie, dwa inne punkta α i β, mające za odpowiednie współrzędne x', y', z' i x'', y'', z''. Odległością wzajemną tych punktów niech będzie r, t. j:

$$r = \{(x - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2\}^{\frac{1}{2}},$$

i załóżmy także

$$x' - x'' = ar, \quad y' - y'' = br, \quad z' - z'' = cr,$$

gdzie ilości a, b, c zadość czynią warunkowi

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Jeżeliby odległość r nie była stałą, to w skutek przesunięć przygotowanych doznałaby zmiany

$$\delta r = a\delta(x' - x'') + b\delta(y' - y'') + c\delta(z' - z'').$$

Z powodu że punkta α i β są nieskończenie sąsiednimi z punktem M, mamy na zasadzie założonéj ciągłości:

$$\delta(x' - x'') = r\left(a\frac{d\delta x}{dx} + b\frac{d\delta x}{dy} + c\frac{d\delta x}{dz}\right),$$

$$\delta(y' - y'') = r\left(a\frac{d\delta y}{dx} + b\frac{d\delta y}{dy} + c\frac{d\delta y}{dz}\right),$$

$$\delta(z' - z'') = r\left(a\frac{d\delta z}{dx} + b\frac{d\delta z}{dy} + c\frac{d\delta z}{dz}\right).$$

w skutek czego wartość powyższa δr przyjmuje postać

$$\delta r = r\left\{a^2\frac{d\delta x}{dx} + b^2\frac{d\delta y}{dy} + c^2\frac{d\delta z}{dz} + bc\left(\frac{d\delta y}{dz} + \frac{d\delta z}{dy}\right) + ca\left(\frac{d\delta z}{dx} + \frac{d\delta x}{dz}\right) + ab\left(\frac{d\delta x}{dy} + \frac{d\delta y}{dy}\right)\right\}, \tag{2}$$

gdzie ilości $\frac{d\delta x}{dx}, \ldots\ldots \frac{d\delta y}{dz} + \frac{d\delta z}{dy}, \ldots\ldots$ zależą tylko od współrzędnych punktu M, i nie zawierają w sobie r, a, b, c.

Lecz że element jest sztywnym, to δr powinno być zerem przy wszelkich wartościach r, a, b, c, określających długość i kierunek elementu linijnego w sąsiedztwie punktu M. To zaś wtedy tylko ma miejsce gdy jest:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{d\delta x}{dx} = 0, \quad \frac{d\delta y}{dy} = 0, \quad \frac{d\delta z}{dz} = 0, \\ \frac{d\delta y}{dz} + \frac{d\delta z}{dy} = 0, \quad \frac{d\delta z}{dx} + \frac{d\delta x}{dz} = 0, \quad \frac{d\delta x}{dy} + \frac{d\delta y}{dx} = 0, \end{array}\right. \tag{3}$$

zkąd przedewszystkiém wynika, że liczba warunków wyrażających sztywność nieskończenie małego elementu materyi ciągłéj jest równą *sześciu*.

Szukając przeto liczby n punktów materyalnych składających układ nieskończenie mały takiemu elementowi odpowiadający, to z uwagi że liczba warunków sztywności układu złożonego z n punktów wyraża się formułą $3n-6$, znajdziemy z równania $3n-6=6$, $n=4$.

Aby więc ciało, uważane jako układ punktów materyalnych, można było zastępować materyą ciągłą, to elementowi nieskończenie małemu téj materyi powinien odpowiadać w ciele układ nieskończenie mały czterech punktów materyalnych. Układ taki nazwiemy *cząsteczką* (*molekułą*); każdy z czterech punktów go składających, *atomem*; ρ i $dx\,dy\,dz$ *gęstością i objętością cząsteczki*, albowiem wielkości te przedstawiają gęstość i objętość elementu ciągłego odpowiadającego téj cząsteczce (*).

2. Warunki sztywności w każdym punkcie M ciała ciągłego przedstawiają równania (3). Lecz jeżeli to ciało zastępuje tylko materyę złożoną z określonych wyżéj cząsteczek, natenczas pomienione warunki należy wyrazić za pomocą sześciu równań kształtu

$$\delta r = o,$$

określających niezmienność sześciu wzajemnych odległości r czterech atomów składających w tym punkcie cząsteczkę.

Pomnożywszy te równania przez odpowiednie czynniki $\lambda\,dx\,dy\,dz$, mające się późniéj wyznaczyć, i zsumowawszy je stronami odpowiedniemi, znajdziemy

$$dx\,dy\,dz\,\Sigma\lambda\,\delta r=0,$$

gdzie znak $\Sigma\lambda\,\delta r$ oznacza summę sześciu wyrazów kształtu $\lambda\delta r$.

Jeżeli więc do lewéj strony równania (1) dodamy całkę $\int\int\int dx\,dy\,dz\,\Sigma\lambda\,\delta r$ wziętą w całéj objętości ciała, to otrzymane w ten sposób nowe równanie

$$(4)\quad \int\int\int\rho\,dx\,dy\,dz\,(X_0\delta x+Y_0 dy+Z_0\delta z)+\int\int\int dx\,dy\,dz\,\Sigma\lambda\delta r+\int d\omega\,(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z)=0$$

ma już miejsce przy wszelkich wartościach δx, δy, δz, i wyraża warunki równowagi w każdym punkcie takiego ciała sztywnego, które przy ustanawianiu tych warunków daje się zastąpić materyą ciągłą.

Podstawiwszy w wyrażeniu $dx\,dy\,dz\,\Sigma\lambda\delta r$ za przyrost δr jego wartość (2), i pamiętając że ilości $\frac{d\,\delta x}{dx}, \ldots\ldots \frac{d\delta y}{dz}+\frac{d\,\delta z}{dy}, \ldots\ldots$ posiadają wartości jednakowe we wszystkich wyrazach summy $\Sigma\lambda\,\delta r$, znajdziemy bez trudności :

$$dx\,dy\,dz\,\Sigma\lambda\,\delta r = dx\,dy\,dz\left\{\begin{array}{l} N_1\frac{d\,\delta x}{dx}+T_1\left(\frac{d\delta y}{dz}+\frac{d\,\delta z}{dy}\right)\\ +N_2\frac{d\,\delta y}{dy}+T_2\left(\frac{d\,\delta z}{dx}+\frac{d\,\delta x}{dz}\right)\\ +N_3\frac{d\,\delta z}{dz}+T_3\left(\frac{d\,\delta x}{dy}+\frac{d\,\delta y}{dx}\right)\end{array}\right\};$$

(*) Otrzymane tu wypadki są niezależnymi od kształtu elementu ciągłego, przyjęcie zatém że element jest prostościenny w niczém nie zmniejsza ogólności.

gdzie

$$(5)\qquad \begin{cases} N_1 = \Sigma\lambda r a^2, & T_1 = \Sigma\lambda r b c, \\ N_2 = \Sigma\lambda r b^2, & T_2 = \Sigma\lambda r c a, \\ N_3 = \Sigma\lambda r c^2, & T_3 = \Sigma\lambda r a b. \end{cases}$$

Całkując obie strony tego równania w całéj objętości ciała i wykonywając po prawéj całkowanie przez części, otrzymuje się

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\,\Sigma\lambda\delta r = -\int\int\int dx\,dy\,dz \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz}\right)\delta x \\ + \left(\frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz}\right)\delta y \\ + \left(\frac{dT_2}{dy} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz}\right)\delta z \end{array} \right\}$$

$$+ \int d\omega \left\{ \begin{array}{l} (m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2)\delta x \\ + (m_1 T_3 + m_2 N_2 + m_3 T_1)\delta y \\ + (m_1 T_2 + m_2 T_1 + m_3 N_3)\delta z \end{array} \right\}$$

gdzie m_i oznaczają dostawy kątów które normalna zewnętrzna do powierzchni ciała tworzy z osiami x, y, z.

Tak otrzymaną wartość całki $\int\int\int dx\,dy\,dz\,\Sigma\lambda\delta r$ wstawia się w równanie (4), a ztąd, z uwagi że równanie to ma miejsce przy wszelkich wartościach δx, δy, δz, otrzymuje się równania :

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} = \rho X_0, \\ \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} = \rho Y_0, \\ \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} = \rho Z_0, \end{cases}$$

jako warunki równowagi w każdym punkcie wewnątrz ciała, i równania

$$(7)\qquad \begin{cases} m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2 + X = 0, \\ m_1 T_3 + m_2 N_2 + m_3 T_1 + Y = 0, \\ m_1 T_2 + m_2 T_1 + m_3 N_3 + Z = 0, \end{cases}$$

jako warunki równowagi w każdym punkcie jego powierzchni: tak, że funkcye N_i, T_i zadość czyniące równaniom (6), sprawdzać także powinny na powierzchni ciała równania (7).

Podobne równania, jak (6) i (7), otrzymują się na innéj drodze w teoryi sprężystości, i z tego powodu dowodzenia własności geometrycznych funkcyj N_i, T_i, jako ztamtąd znane, pomijamy. Przypominamy tylko, że wartości N_i, T_i w punkcie M są składowemi ciśnień wywieranych na jednostki trzech elementów płaskich przecinających się w tym punkcie prostokątnie, i że są parametrami elipsoidy, nazwanéj przez LAMÉ'GO elipsoidą sprężystości, a którą dla ogólności należałoby może nazwać *elipsoidą ciśnień*.

3. Nie trudno jest zauważyć, że czynniki dotąd nieoznaczone $\lambda dx\,dy\,dz$ przedstawiają natężenia sił działających pomiędzy każdymi dwoma atomami cząsteczki ciała. Przeznaczeniem ich jest niedopuszczanie oddalania się lub zbliżania wzajemnego atomów, coby niezawodnie nastąpiło w skutek działania sił zewnętrznych, gdyby atomy te były wolnymi. Dla téj przyczyny siły powyższe nazwiemy *siłami sztywności* lub *niezmienności cząsteczki.*

Jeżeli dwa którebądź atomy cząsteczki usiłują zbliżyć się ku sobie, to siła sztywności $\lambda dx\,dy\,dz$ jest wtedy odpychającą i posiada wartość *dodatną;* w razie przeciwnym ta sama siła posiadałaby wartość *odjemną.*

Oznaczmy przez m, m',... masy atomów składających cząsteczkę; przez $\Sigma m = \rho dx\,dy\,dz$ masę té cząsteczki; przez φ przyspieszenie względne dwóch atomów m i m', odpowiadające sile $\lambda dx\,dy\,dz$.

Na mocy tych oznaczeń i powyższéj umowy co do znaków sił $\lambda dx\,dy\,dz$, jest

$$\lambda dx\,dx\,dz = \frac{mm'\varphi}{m+m'}. \tag{8}$$

Masy atomów mogą być wyrażone w częściach masy cząsteczki, t. j:

$$m = \varepsilon\rho dc\,dy\,dz, \quad m' = \varepsilon'\rho\,dx\,dy\,dz, \ldots\ldots$$

rozumiejąc przez ε, ε',... liczby dodatne mniejsze od jedności i zadość czyniące warunkowi

$$\Sigma\varepsilon = 1.$$

Wprowadzając te oznaczenia, równanie (8) daje

$$\lambda = \frac{\varepsilon\varepsilon'\rho\varphi}{\varepsilon+\varepsilon'}.$$

Ciśnienia N_i, T_i (5) są funkcyami liniowemi ilości λr, lub właściwiéj granic, do których ilości te zmierzają, gdy element ciągły maleje nieograniczenie. A że te same ciśnienia sprawdzają także równania (6) i (7), więc pomienione granice muszą mieć wartości różne od *zera.*

Zakładając przeto

$$\mathrm{gr}\,(\lambda r) = \frac{\varepsilon\varepsilon'\rho}{\varepsilon+\varepsilon'},\quad \mathrm{gr}\,(\varphi r) = \frac{\varepsilon\varepsilon'\rho\psi}{\varepsilon+\varepsilon'}, \tag{9}$$

znajdziemy z (8)

$$\lambda dx\,dy\,dz = \frac{mm'}{m+m'}\,\frac{\psi}{r}, \tag{10}$$

gdzie $\psi = \mathrm{gr}\,(\varphi r)$.

Wyrażenie (10) odnosi się do cząsteczki, którą w dalszym ciągu będziemy oznaczali symbolem

$$(m,\ r) = (\varepsilon\rho\,dx\,dy\,dz,\ r)$$

i któréj, podług definicyi, gęstością jest ρ, objętością $dx\,dy\,dz$.

Układ do téj cząsteczki podobny może się wyrazić symbolem

$$\left(\frac{m}{kl^3},\ \frac{r}{l}\right) = \left(\varepsilon\frac{\rho}{k}\frac{dx}{l}\frac{dy}{l}\frac{dz}{l},\ \frac{r}{l}\right),$$

rozumiejąc przez kl^3 stosunek odpowiadających sobie mas, a przez l stosunek podobieństwa geometrycznego. Gęstością tego układu jest $\frac{\rho}{k}$, objętością jego jest $\frac{dx}{l}\frac{dy}{l}\frac{dz}{l}$.

Zakładając że ta gęstość i ta objętość są równe jednościom, to jest:

$$\frac{\rho}{k}=1, \quad \frac{dx}{l}\frac{dy}{l}\frac{dz}{l}=1,$$

i pisząc dla krótkości

$$\frac{r}{l}=\mathrm{R},$$

otrzymujemy nowy układ, którego symbolem jest

$$(\varepsilon, \mathrm{R})$$

i który nazwiemy *jednostką cząsteczki* (m, r).

Cząsteczka (m, r) i jéj jednostka $(\varepsilon, \mathrm{R})$ są to układy podobne: jeden nieskończenie mały, drugi skończony; stosunkiem odpowiadających sobie ich mas, jest $kl^3 = \rho dx\, dy\, dz = \Sigma m$; stosunkiem ich podobieństwa geometrycznego jest $l = (dx dy dz)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\Sigma m}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Ztąd wypadają równania

$$m = \varepsilon\, \Sigma m, \ldots\ldots; \; r = \mathrm{R}\left(\frac{\Sigma m}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}, \ldots\ldots \tag{11}$$

przedstawiające związki między masami i odległościami atomowemi cząsteczki, a masami i odległościami punktowemi jéj jednostki.

Ażeby znaleźć odpowiednie związki pomiędzy siłami sztywności cząsteczki i takimiż jéj jednostki, uważmy że ilość ψ, jako $= \mathrm{gr}\,(\varphi r)$, jest jednakową dla wszystkich układów podobnych do jednostki cząsteczki, a więc że wyrażenie:

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\,\frac{\psi}{\mathrm{R}},$$

otrzymujące się z (10) przez zastąpienie mas m masami ε i odległości r odległością R, przedstawia natężenie siły sztywności téj jednostki.

Uwzględniając przeto w równaniu (10) równania (11), t. j. pisząc

$$\lambda dx\, dy\, dz = (\Sigma m)\left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\,\frac{\psi}{\mathrm{R}}, \tag{12}$$

pokazuje się, *że natężenie siły sztywności cząsteczki* (m, r) *jest równe natężeniu odpowiedniéj siły sztywności jéj jednostki* $(\varepsilon, \mathrm{R})$ *pomnożonemu przez czynnik* $(\Sigma m)\left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Natężenia więc sił sztywności cząsteczki ciała zależą ostatecznie od ilości ψ odnoszących się do jéj jednostki i posiadających wartości nieoznaczone.

Ażeby się o téj nieoznaczoności przekonać, zastąpmy w równaniach (5) ilości λr wartościami ich granic (9). Wtedy otrzymamy sześć równań liniowych, z których można łatwo wyznaczyć każdą z sześciu ilości ψ w funkcyi liniowéj sześciu ciśnień N_i, T_i. Lecz że wartości tych ciśnień w punkcie M, jako sprawdzające trzy tylko równania (6), są nieoznaczonemi, podobną przeto własność posiadają także wartości ilości ψ

4. Liczba sił sztywności układu sztywnego n punktów materyalnych, jest równą liczbie warunków sztywności tego układu, to jest $3n-6$; liczba zaś sił wewnętrznych układu wolnego, jest równą liczbie podwójnych kombinacyj bez powtórzenia ze wszystkich jego punktów, to jest $\frac{n(n-1)}{2}$.

Jeżeli więc liczba sił sztywności układu sztywnego ma być równą liczbie sił wewnętrznych układu wolnego, to liczba n powinna zadość uczynić równaniu

$$3n-6=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Równanie to daje dwie odpowiedzi: $n=3$ i $n=4$. Włączając do nich przypadek oczywisty dla $n=2$, pokazuje się, że tylko w trzech wymienionych razach liczba sił sztywności jest równą liczbie sił wewnętrznych i przejście z układu sztywnego do wolnego jest równoważne zamianie sił sztywności na siły wewnętrzne.

Okoliczność przeto, że cząsteczka ciała jest układem czterech tylko atomów, pozwala w téj cząsteczce zamienić siły sztywności na siły wewnętrzne, i w ten sposób rozciągnąć powyżéj znalezione wyniki do przypadku, w którym odległości atomowe mogą zmieniać swoje wielkości.

Siły wewnętrzne cząsteczki nazwiemy *siłami atomowemi.*

Prawo natężenia sił atomowych obejmuje formuła (12), w któréj jednak ilość ψ nie posiada już wartości nieoznaczonéj, jak to miało miejsce w przypadku sztywności, ale przeciwnie przyjmuje wartości oznaczone i różne w różnych ciałach.

Wyznaczenie wartości ψ dla gazów doskonałych, cieczy nieściśliwych i ciał stałych sprężystych nie przedstawia żadnych trudności i prowadzi ostatecznie, przy pomocy równań (9), (5), (6) (7) i równania wyrażającego zachowanie masy elementu (niezależność od czasu w przypadku ruchu), do wyznaczenia warunków równowagi lub ruchu każdego z pomienionych ciał. Lecz rozwinięcia te, jako wychodzące po za granicę celu niniejszéj pracy, pominiemy, i zajmiemy się tylko jednym przypadkiém, różnym w ogóle od tamtych, a godnym uwagi z tego względu, że pokaże się, iż prawo działań atomowych powinno być różném z natury swojéj od prawa wzajemnego działania mas z odległości skończonych.

To ostatnie prawo wolno jest stosować do jednostki cząsteczki, jako do układu skończonego. Przypuśćmy zatém, jak się to powszechnie przyjmuje, że każde dwa punkta tego układu działają na siebie podług linii prostéj je łączącéj, z natężeniem proporcyonalném do iloczynu ich mas i do funkcyi zależnéj od ich wzajemnéj odległości, to jest załóżmy, że np. dwa punkta posiadające masy ε i ε' i odległe jeden od drugiego o R, działają na siebie z natężeniem $\varepsilon\varepsilon' F(R)$, i szukajmy natężenia siły atomowéj dla odpowiednich dwóch atomów m i m' w cząsteczce (m, r).

Zadanie wprost rozwiązuje się, zastępując w formule (12) czynnik $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\frac{\psi}{R}$ jego założoną teraz wartością $\varepsilon\varepsilon' F(R)$ i uwzględniając przy tém równania (11). Jako wypadek tych działań znajdziemy wyrażenie

$$\frac{mm'}{\Sigma m}\left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}} F\left\{\left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}} r\right\},$$

przedstawiające kształt ogólny natężenia sił atomowych cząsteczki (m, r), w założeniu, że kształt ogólny natężenia sił wewnętrznych jéj jednostki (ε, R) zawiera się w formule $\varepsilon\varepsilon' F(R)$, równoważnéj, na mocy warunku $\Sigma\varepsilon = 1$, z wyrażeniem

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\Sigma\varepsilon} F(R).$$

Porównanie tych formuł wskazuje dostatecznie, w czém leży różnica pomiędzy prawem działań atomowych a prawem działania mas z odległości skończonych. Różnica ta znika w jednym tylko przypadku, t. j. gdy

$$F(R) = \frac{k}{R},$$

rozumiejąc przez k ilość stałą; albowiem wtedy obie powyższe formuły, przyjmując odpowiednio postacie

$$\frac{mm'}{\Sigma m}\frac{k}{r} \quad \text{i} \quad \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\Sigma\varepsilon}\frac{k}{R},$$

stają się zupełnie do siebie podobnemi.

Streszczając zaś najogólniejsze warunki, którym ciało ma zadość czynić, aby przy ustanowieniu równań jego równowagi lub ruchu mogło być zastąpione materyą ciągłą, ze wszystkiego co poprzedza wynika: 1) *ciało ma być układem nieskończonéj liczby atomów (punktów materyalnych) tak ułożonych, aby najmniejsza możliwa jego objętość, t. j. cząsteczka, nie zawierała ich mniéj ani więcéj jak cztery; 2) tylko każde cztery atomy składające jedną i tę samą cząsteczkę mogą działać na siebie, i to podług linij prostych je łączących i z natężeniami, których kształt ogólny przedstawia formuła.*

$$(\Sigma m)\left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}} f,$$

rozumiejąc przez f natężenie siły wewnętrznéj jednostki cząsteczki.

Pytanie nasze traktowaliśmy w założeniu, że hypotezy zasadnicze geometryi Euklidesowéj stosują się do nieskończonéj małości, t. j. że płaskość przestrzeni ma miejsce także i w nieskończenie małych jéj częściach. Lecz według badań Riemann'a i Helmholtz'a jest rzeczą wiadomą, że założenie takie dla nieskończonéj małości jest niewystarczające lub za ograniczone (*); by więc nasze zadanie módz rozwiązać w zupełnéj ogólności, należałoby je traktować w założeniu, że przestrzeń nie jest już płaską w nieskończenie małych jéj częściach. Dotąd jednak, o ile mi się zdaje, takie badanie tego pytania jest mało dostępne dzisiejszym środkom analizy; rezultaty jednak, które otrzymaliśmy w szczególném założeniu, zwracają już naszą uwagę na owe ogólniejsze rezultaty i usprawiedliwiają przekonanie, że idee wspomnionych wielkich myślicieli znajdą swoje zastosowanie przedewszystkiém w dziedzinie mechaniki cząsteczkowéj.

Warszawa, w czerwcu 1874 roku.

(*) Badania te mieszczą się w pracy Riemann'a p. t. *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* i w pracy Helmholtza p. t. *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*. Pierwsza z tych prac, która zdaniem naszém stanowi epokę w nauce, będzie w przyszłym tomie *Pamiętnika* podana w polskim przekładzie z objaśnieniami przez S. Dicksteina i W. Gosiewskiego.