

DWA TWIERDZENIA Z MECHANIKI CZĄSTECZKOWÉJ

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych, dnia 2 grudnia 1875 roku.)

I. — O twierdzeniu dotyczącem liczby współczynników sprężystości.

W pracy mojej poprzedniej « *O zasadniczej hipotezie mechaniki cząsteczkowej* » przedstawiłem wyniki główne zadania ogólnego o równowadze układów, któreby można nazwać układami *ciągłymi*. Obecnie mam zamiar zastosować je do kilku przypadków przedstawiających się w naturze, jużto udokładniając twierdzenia znane mechaniki cząsteczkowej, jużto udowadniając nowe. Lecz przede-wszystkiem winienem określić bliżej, a czego w przytoczonej pracy nie zrobiłem, zależność sił wewnętrznych (f) jednostki cząsteczki od mas ($\varepsilon = \frac{m}{\Sigma m}$, $\varepsilon' = \frac{m'}{\Sigma m'}$, ...) i odległość wzajemnych

$\left[R = \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} r, \dots \right]$ czterech punktów ją składających, tudzież od gęstości (ρ) ciała, do którego ona należy.

W rzeczy saméj, ilość Ψ , wchodząca w wyrażenie siły f przez równanie (12) rozprawy przytoczo-néj, będąc równą gr (φr), może tylko zależeć od $\varepsilon, \dots, R, \dots$ i ρ , albowiem to są jedyne wielkości, które nie znikają, gdy element ciągły ($\rho dx dy dz = \Sigma m$) zmniejsza się nieograniczenie. Należy więc założyć w ogólności dla sił wewnętrznych jednostki cząsteczki

$$(13) \quad f = \varepsilon \varepsilon' F(R, \rho),$$

(*) Dla zrozumienia prac poniższych trzeba mieć przed sobą moją pracę poprzednią « *O zasadniczej hipotezie me-
chaniki cząsteczkowej* », patrz *Pamięć. Tow. N. Ś. w Paryżu*, t. VII. Art. 1szy.

zkład wypadnie dla sił atomowych

$$(14) \quad (\Sigma m) \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} f = \frac{mm'}{\Sigma m} \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} F \left\{ \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} r, \rho \right\}.$$

To znając, można szukać takiego kształtu funkcji F , aby siły atomowe nie zależały od gęstości ρ , co stanowi zadanie odwrotne temu, które rozwiązaliśmy już poprzednio przypuszczając, że siły wewnętrzne jednostki cząsteczki nie zależą od gęstości ρ .

Przyrównywając do zera pochodną wyrażenia (14) wziętą względem ρ , znajdujemy warunek, któremu w przypadku terazniejszym szukana funkcja F zadość czynić powinna; warunek ten wyraża się przeto równaniem różniczkowym częściowym

$$(15) \quad F + R \frac{dF}{dR} + 3\rho \frac{dF}{d\rho} = 0.$$

Całka jego ogólna

$$F = \frac{1}{\rho^{\frac{1}{3}}} F \left(\frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}} \right) = \frac{1}{R} \varphi \left(\frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}} \right),$$

w której $\varphi \left(\frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}} \right) = \frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}} F \left(\frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}} \right)$, a $F \left(\frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}} \right)$ oznacza funkcję dowolną zmiennej $\frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}}$, daje na siłę f (13) wyrażenie

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\rho^{\frac{1}{3}}} F \left(\frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}} \right) = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{R} \varphi \left(\frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}} \right)$$

na siłę zaś atomową (14) wyrażenie

$$\frac{mm'}{(\Sigma m)^{\frac{1}{3}}} F \left\{ \frac{r}{(\Sigma m)^{\frac{1}{3}}} \right\} = \frac{mm'}{\Sigma m} \frac{1}{r} \varphi \left\{ \frac{r}{(\Sigma m)^{\frac{1}{3}}} \right\}.$$

To ostatnie pokazuje rzeczywiście, że w przypadku terazniejszym siły atomowe nie zależą od gęstości ρ .

Zajmiemy się obecnie poszukiwaniem wyrażenia pracy mechanicznej, albo *potencjału* jednostki objętości elementu ciała stałego doskonale sprężystego i które przed odkształceniem znajdowało się w stanie pierwotnym.

Przyrównywając to ciało do układu atomów ulegających siłom (14), summa prac przygotowanych, t. j. całka

$$\delta V = \iiint \Sigma \frac{mm'}{\Sigma m} \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} F \left\{ \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} r, \rho \right\} \delta r,$$

w której $\Sigma \frac{mm'}{\Sigma m} \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} F \left\{ \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} r, \rho \right\} \delta r$ oznacza sumę prac przygotowanych sił atomowych cząsteczki, powinna być równą zero przy wszelkich wartościach przyrostów $\delta r, \dots$, jeżeli ciało znajduje się w stanie równowagi zwanéj jego stanem *pierwotnym*. Ten stan pierwotny wymaga więc warunku, aby wartość funkcji $F \left\{ \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{1}{3}} r, \rho \right\} = F(R, \rho)$ była równą zero.

Lecz ponieważ ciało jest doskonale sprężystym, to jego równowaga pierwotna powinna być stałą, co ma miejsce tylko wtedy, gdy wartość różniczki

$$\delta(\delta V) = \frac{d(\delta V)}{dr} \delta r + \frac{d(\delta V)}{d\rho} \delta \rho,$$

jest odjemną dla wszystkich wartości, które mieć mogą przyrosty $\delta r, \dots, i \delta \rho$. Jakoż, odkształciwszy ciało nieskończenie małe i zostawiwszy go następnie samemu sobie, ono, jeżeli jest doskonale sprężystym, pocznie drgać około swego położenia pierwotnego. Przyrost $\delta(\delta V)$ przedstawia wtedy podwójną pracę wykonaną podczas tego drgania. Jeżeli więc oznaczymy przez u, v, w rzuty na osie x, y, z przesunięcia punktu M w czasie t , przez $\left(\frac{du}{dt}\right)_0, \left(\frac{dv}{dt}\right)_0, \left(\frac{dw}{dt}\right)_0$, składowe jego prędkości w chwili, kiedy się znajduje w swém położeniu pierwotnym, to jak wiadomo z mechaniki być powinno:

$$\delta(\delta V) = \int \int \int (\Sigma m) \left[\left\{ \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 \right\} - \left\{ \left(\frac{du}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)_0^2 \right\} \right].$$

A że prędkość punktu M w chwili kiedy on jest najbardziej oddalonym od swego położenia pierwotnego jest zerem, a w chwili kiedy się znajduje w tém ostatniem jest największą, oczewista zatem, że wartość przyrostu $\delta(\delta V)$ jest rzeczywiście odjemną.

Szukajmy teraz innego wyrażenia przyrostu $\delta(\delta V)$, a to przez rozwinięcie różniczki $\frac{d(\delta V)}{dr} \delta r + \frac{d(\delta V)}{d\rho} \delta \rho$. Przy pomocy znakowań

$$\varepsilon = \frac{m}{\Sigma m}, \quad \varepsilon' = \frac{m'}{\Sigma m'}, \quad \dots, \quad R = \left(\frac{\rho}{\Sigma m}\right)^{\frac{1}{3}} r, \dots, \quad \rho \, dx \, dy \, dz = \Sigma m,$$

znajdujemy wtedy bez trudności

$$(16) \quad \delta(\delta V) = \int \int \int \rho \, dx \, dy \, dz \sum \varepsilon \varepsilon' \left\{ R^2 \frac{dF}{dR} \left(\frac{\partial r}{r}\right)^2 + \frac{R}{3} \left(F + R \frac{dF}{dR} + 3\rho \frac{dF}{d\rho} \right) \frac{\partial r}{r} \frac{\partial \rho}{\rho} \right\},$$

lub także

$$\delta(\delta V) = \int \int \int \rho \, dx \, dy \, dz \left(\frac{\partial \rho}{\rho}\right)^2 \sum \varepsilon \varepsilon' R^2 \frac{dF}{dR} \left\{ \left(\frac{\partial r}{r} + \frac{F + R \frac{dF}{dR} + 3\rho \frac{dF}{d\rho}}{6R \frac{dF}{dR}} \right)^2 - \left(\frac{F + R \frac{dF}{dR} + 3\rho \frac{dF}{d\rho}}{6R \frac{dF}{dR}} \right)^2 \right\}.$$

A ponieważ nawias pod znakiem \sum może mieć wartości raz dodatne, drugi raz odjemne, przeto nierówność $\delta(\delta V) < 0$ ma miejsce tylko pod dwoma warunkami jednoczesnymi

$$F + R \frac{dF}{dR} + 3\rho \frac{dF}{d\rho} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{dF}{dR} < 0,$$

z których pierwszy, jako tożsamy z równaniem (15), dowodzi że w przypadku sprężystości doskonałej siły atomowe zależą tylko od mas i odległości atomowych.

Wprowadzając więc do wyrażenia (16) przyrostu $\delta(\delta V)$ warunek (15) i zakładając dla prostoty i zgodnie z warunkiem $\frac{dF}{dR} < 0$, $\frac{dF}{dR} = -2f^2$, znajdziemy

$$\delta(\delta V) = \iiint dx dy dz \left\{ -2\rho \sum_{\varepsilon\varepsilon'} R^2 f^2 \left(\frac{\delta r}{r} \right)^2 \right\},$$

zkaąd wynika, że wyrażenie

$$(17) \quad -\rho \sum_{\varepsilon\varepsilon'} R^2 f^2 \left(\frac{\delta r}{r} \right)^2$$

przedstawia pracę mechaniczną albo potencjał jednostki objętości elementu ciała w przypadku sprężystości doskonałej. Należy jednak zauważyć, że funkcja F zależna od R i ρ powinna być wybrana w ten sposób, aby całka $F = -\int_R^{R'} f^2 dR$ sprawdzała równanie różniczkowe częściowe

$$F + R' \frac{dF}{dR} + 3\rho \frac{dF}{d\rho} = 0,$$

t. j. należy założyć

$$f = \frac{1}{\rho^{\frac{1}{3}}} \varphi \left(\frac{R}{\rho^{\frac{1}{3}}} \right).$$

Nakoniec, jest bardzo widoczne i z równania (16) i z analizy poprzedzającej, że wyrażenie

$$(18) \quad \frac{\rho}{2} \sum_{\varepsilon\varepsilon'} \left\{ R^2 \frac{dF}{dR} \left(\frac{\delta r}{r} \right)^2 R \left(R \frac{dF}{dR} + 3\rho \frac{dF}{d\rho} \right) \frac{\delta r}{r} \frac{\delta \rho}{\rho} \right\}$$

przedstawia potencjał jednostki objętości elementu ciała w przypadku sprężystości niedoskonałej. Funkcja F wypełnia tutaj tylko jeden warunek stanu pierwotnego, t. j. że wartość jej obecna jest zerem.

Można jeszcze potencjałom (17) i (18) nadać inne kształty, a to wyrażając stosunki $\frac{\delta r}{r}$ i $\frac{\delta \rho}{\rho}$ za pomocą ilości u, v, w . Na ten koniec wystarczy zauważyć, że stosunek $\frac{\delta r}{r}$ otrzymuje się z formuły (2) pracy przytoczonej, zastępując $\delta x, \delta y, \delta z$ ilościami u, v, w . W ten sposób będzie

$$\frac{\delta r}{r} = a^2 \frac{du}{dx} + b^2 \frac{dv}{dy} + c^2 \frac{dw}{dz} + bc \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + ca \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) + ab \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right).$$

Co do stosunku $\frac{\delta \rho}{\rho}$ to ten otrzymuje się z warunku zachowania masy elementu, który wyraża się równaniem

$$\delta(\rho dx dy dz) = dx dy dz \left\{ \delta \rho + \rho \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right) \right\} = 0$$

i daje po zamienieniu $\delta x, \delta y, \delta z$ na u, v, w ,

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = - \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right).$$

Podstawiawszy wartości te stosunków $\frac{\partial r}{r}$ i $\frac{\partial \rho}{\rho}$ w wyrażeniach (17) i (18) i pamiętając, że przesunięcia względne jednostki objętości elementu, t. j. $\frac{du}{dx}, \dots, \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \dots$, posiadają wartości jednakowe dla wszystkich wyrazów summy Σ , łatwo zapewnić się za pomocą rachunków bardzo elementarnych, że potencjał (17) przyjmie postać wielomianu jednorodnego drugiego stopnia względem $\frac{du}{dx}, \dots, \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \dots$, o piętnastu współczynnikach różnych

$$A = \rho \sum_{\varepsilon\varepsilon'} R^2 f^2 a^4, \quad B = \rho \sum_{\varepsilon\varepsilon'} R^2 f^2 b^4, \quad C = \text{i t. d.}$$

podczas kiedy potencjał (18) stawszy się także wielomianem jednorodnym drugiego stopnia względem $\frac{du}{dx}, \dots, \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \dots$, będzie miał tych współczynników dwadzieścia jeden i one będą :

$$A' = \frac{\rho}{2} \sum_{\varepsilon\varepsilon'} R^2 \left\{ R^2 \frac{dF}{dR} a^4 - \frac{R}{3} \left(R \frac{dF}{dR} + 3\rho \frac{dF}{d\rho} \right) a^2 \right\}, \quad B' = \text{i t. d.}$$

Skoro więc potencjał jednostki objętości elementu ciała jest funkcją przesunięć względnych téjże jednostki, jego zatém pochodne częściowe względem tych przesunięć przedstawiają ciśnienia (N_i, T_i) na jednostkę powierzchni trzech elementów płaskich przecinających się prostokątnie w wierzchołku elementu : a ciśnienia te, będąc zawsze funkcjami liniowymi względem przesunięć względnych, posiadają piętnaście współczynników sprężystości, jeżeli różniczkujemy potencjał (17) i dwadzieścia jeden, jeżeli różniczkujemy potencjał (18).

Formuły ciśnień o piętnastu współczynnikach sprężystości winni jesteśmy CAUCHY'emu, potencjał zaś o dwudziestu jeden GREEN'owi. Ponieważ metody używane przez wymienionych geometrów różniły się w swych zasadach, przeto ich wypadki także różne wprowadziły do teorii sprężystości wielkie zamieszanie, nadewszystko zaś, że doświadczenia robione na różnych ciałach sprawdzały niekiedy wypadki Cauchy'ego, niekiedy wypadki Green'a. Metoda Cauchy'ego, jako zawierająca w sobie z założenia jeden z warunków sprężystości doskonałej, nie mogła go oczywiście zaprowadzić do wypadków zgodnych zawsze z doświadczeniami. A nawet pomimo pięknych doświadczeń p. KIRRHOF'fa, które wypadło na korzyść téj metody i rozumowań p. BARRÉ DE ST. VENANT, który robił wysiłki, aby ją usprawiedliwić teoretycznie, przychodzi się jednak do przekonania, że to nie tam zawierają się wyniki będącej w mowie kwestyi. One nie zawierają się również i w pracach Green'a, chociaż rozumowanie jego jest godne wielkiego uznania. Myśl geometrii angielskiego uważania potencjału jednostki objętości elementu ciała, które przed swoim odkształceniem znajdowało się w stanie pierwotnym, za funkcję odkształceń względnych téjże jednostki, jest zgodną i z zasadami mechaniki i z obecnymi okolicznościami. Należy tylko żałować, że ani Green, ani téż inni geometrowie aż do naszych czasów nie zauważyli tego, że warunek októrym dopiero co mówiliśmy będąc koniecznym i dostatecznym do zdefiniowania ciała stałego, nie wystarczał jednak do zdefiniowania sprężystości doskonałej. Dopiero za pomocą metody poprzedzającej, można było rozstrzygnąć tę kwestyę delikatną i dowieść twierdzenia, według którego i formuły Cauchy'ego i potencjał Green'a mogą mieć miejsce bez sprzeciwienia się sobie, a nawet że jest koniecznym przyjmować niekiedy pierwsze, a niekiedy drugi. *Jakoż, ponieważ ciała stałe znajdujące się w naturze są doskonale sprężyste tylko wtedy, gdy doznają odkształceń niezmiernie małych i bardzo krótko trwających, przeto formuły Cauchy'ego, lub co na jedno wychodzi, potencjał (17) może stosować się bardzo rzadko, kiedy chodzi o równowagę, a zawsze kiedy chodzi o drgania. Lecz jeżeli wypada traktować równowagę, a nadewszystko w praktyce, gdzie odkształcenia są na granicy sprężystości i trwają bardzo długo, wtedy ciało traci sprężystość doskonałą, i stosować tylko można potencjał (18) Green'a.*

Przez podobne rozumowanie możnaby także objaśnić przyczyny różnych wypadków, które otrzymywano przy oznaczeniu za pomocą doświadczeń liczby współczynników sprężystości w przypadku *sprężystości stałej*. Nie mając jednak ani dosyć danych koniecznych pod ręką, a nadewszystko, nie znając z dokładnością okoliczności, które towarzyszyły tym doświadczeniom, nie mogę wchodzić w większe szczegóły dotyczące tego przedmiotu, i poprzestaję tylko na uwadze poprzedzającej.

II. — O twierdzeniu dotyczącem ciał gazowych.

Ciała które usiłują ciągle powiększyć swoją objętość nazywam *ciałami gazowemi*. Ciała takie posiadają godną uwagi własność, którą mam zamiar udowodnić; lecz przedtém wypada do tego celu wprowadzić formuły pomocnicze.

Równania (5) rozprawy już wyżej wymienionej dają

$$(N_1 + N_2 + N_3) dx dy dz = \sum \lambda r dx dy dz,$$

a ponieważ podług formuły (12) téj samej rozprawy jest

$$\lambda dx dy dz = (\Sigma m) \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{\epsilon \epsilon'}{\epsilon + \epsilon'} \frac{\Psi}{R} = (\Sigma m) \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{4}{3}} f,$$

przeto także będzie

$$(N_1 + N_2 + N_3) dx dy dz = (\Sigma m) \sum \left(\frac{\rho}{\Sigma m} \right)^{\frac{4}{3}} r f = (\Sigma m) \sum R f.$$

a po zcałkowaniu w granicach objętości ciała

$$\int \int \int (N_1 + N_2 + N_3) dx dy dz = \int \int \int (\Sigma m) \sum R f.$$

Przez pewną analogię z definicyą pracy mechanicznej, będę nazywał $\sum \frac{Rf}{2}$ pracą średnią jednostki cząsteczki, $(\Sigma m) \sum \frac{Rf}{2}$ pracą średnią samej cząsteczki, i całkę $\int \int \int (\Sigma m) \sum \frac{Rf}{2}$ pracą średnią sił atomowych ciała. Z drugiej strony, będę oznaczał przez $\frac{N_1 + N_2 + N_3}{3}$ ciśnienie średnie w punkcie M a przez

$$p = \frac{\int \int \int \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3} dx dy dz}{\int \int \int dx dy dz}$$

ciśnienie średnie w ciele.

Za pomocą tych dwóch definicyj otrzymuje się z formuły poprzedzającej związek

$$(49) \quad p = \frac{2}{3} \frac{\int \int \int (\Sigma m) \sum \frac{Rf}{2}}{\int \int \int dx dy dz},$$

wyrażający, że ciśnienie średnie w ciele jest równe $\frac{2}{3}$ ilorazu z średniej pracy jego sił atomowych przez jego objętość.

To mając udowodnimy teraz twierdzenie następujące: *Praca średnia sił atomowych ciała gazowego nie zależy od jego gęstości, a témsamém, ciśnienie średnie jest odwrotnie proporcjonalne do objętości.*

Jakoż, ciało gazowe zostawione samo sobie, powinno, według definicyi, powiększać swoją objętość aż do nieskończoności. Jego gęstość ρ stając się wtedy coraz mniejszą zdąży oczywiście do granicy zero, podczas gdy odległości wzajemne $\left[R = \left(\frac{\sum m}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} r, \dots, \right]$ czterech punktów ($\epsilon, \epsilon', \dots$) składających jednostkę cząsteczki, jako téż siły wewnętrzne (f) téj jednostki zachowują wartości skończone. Otóż, wartości graniczne tych sił, niezależne już od gęstości ρ , należy przyjąć dla zdefiniowania ciała gazowego; ztąd zaś już oczywiście wynika, że praca średnia sił atomowych tego ciała nie zależy od gęstości ρ , a tém samém ciśnienie średnie w ciele staje się odwrotnie proporcjonalnym do jego objętości, c. b. d. d.

Lecz praca średnia sił atomowych ciała gazowego zależna tylko od elementów jednostki cząsteczki, zmienia swoją wartość z odkształceniami doznawanemi przez ciało, jeżeli jednak odkształcenia te nie zależą jedynie od przyrostu gęstości ρ . Ona jest stałą i staje się *silnikiem* (viriel), jeżeli $Rf = \epsilon\epsilon' k$, rozumiejąc przez k stałą dodatnią. Formuła (19) stając się wtedy w pewien sposób analogiczną z formułą p. CLAUSIUS'a, przedstawia prawo MARIOTTE'a.

W tym ostatnim przypadku mamy

$$f = \frac{\epsilon\epsilon' k}{R} \text{ i } (\sum m) \left(\frac{\rho}{\sum m} \right)^{\frac{1}{3}} f = \frac{mm' k}{\sum m} \frac{1}{r};$$

przeto atomy w cząsteczce gazu *doskonałego* odpychają się w stosunku odwrotnym odległości atomowych. Takie same prawo przyjmował już *Laplace* dla wyprowadzenia teoretycznie prawa *Mariotte'a* (nie mówię tutaj o jego teorii gazów wyłożonej w *Mechanice Nieba*); lecz metodzie przez niego użytej brakuje pewnej jasności, co pochodzi ztąd, iż nie znał wtedy sposobu, w jaki cząsteczka składa się z atomów.

Warszawa, 14 października 1875 roku.

